



# FISIKA MODERN II

DEPARTEMEN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN

# **FISIKA MODERN II**

TIDAK DIPERDAGANGKAN UNTUK UMUM



PERPUSTAKAAN  
BADAN BAHASA  
DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL

## FISIKA MODERN II

Penerjemah  
**Musaddiq Musbach**

Pusat Pembinaan dan Pengembangan Bahasa  
Departemen Pendidikan dan Kebudayaan  
Jakarta  
1996

PERPUSTAKAAN BADAN BAHASA

Klasifikasi

No. Induk : \_\_\_\_\_

Tgl. : \_\_\_\_\_

Ttd. : \_\_\_\_\_

FISIKA MODERN II

Judul Asli

Physik

Pembina Proyek

Dr. Hasan Alwi

Penyusun

Dr. Gerthsen

Pemimpin Proyek

Drs. A. Murad

Dr. H.O. Kneser

Dr. Helmut Vogel

Penyunting

A. Murad

Penerjemah

Dr. Musaddiq Musbach

Pembantu Teknis

Radiyo

ISBN 979.459.655.8

Pusat Pembinaan dan Pengembangan Bahasa

Jalan Daksinapati Barat IV

Rawamangun

Jakarta 13220

Hak cipta dilindungi undang-undang.

Sebagian atau seluruh isi buku ini dilarang diperbanyak  
dalam bentuk apa pun tanpa izin tertulis  
dari penerbit, kecuali dalam hal pengutipan  
untuk keperluan penulisan artikel  
atau karya ilmiah.

## **KATA PENGANTAR**

### **KEPALA PUSAT PEMBINAAN DAN PENGEMBANGAN BAHASA**

Sejak Rencana Pembangunan Lima Tahun II, telah digariskan kebijakan pembinaan dan pengembangan kebudayaan nasional dalam berbagai seginya. Dalam garis haluan ini, masalah kebahasaan dan kesastraan merupakan salah satu masalah kebudayaan nasional yang perlu digarap dengan sungguh-sungguh dan berencana sehingga tujuan akhir pembinaan dan pengembangan bahasa dan sastra Indonesia dan daerah dapat dicapai. Tujuan akhir pembinaan dan pengembangan itu, antara lain, adalah meningkatkan mutu kemampuan menggunakan bahasa Indonesia sebagai sarana komunikasi nasional, sebagaimana digariskan dalam Garis-Garis Besar Haluan Negara.

Untuk mencapai tujuan itu, perlu dilakukan berbagai kegiatan kebahasaan dan kesastraan, seperti (1) pembakuan ejaan, tata bahasa, dan peristilahan; (2) penyusunan berbagai kamus bahasa Indonesia dan kamus bahasa daerah serta kamus istilah dalam berbagai bidang ilmu; (3) penyusunan buku-buku pedoman; (4) penerjemahan karya kebahasaan dan buku acuan serta karya sastra daerah dan karya sastra dunia ke dalam bahasa Indonesia; (5) penyuluhan bahasa Indonesia melalui berbagai media, antara lain melalui televisi dan radio; (6) pengembangan pusat Informasi kebahasaan dan kesastraan melalui inventarisasi, penelitian, dokumentasi, dan pembinaan jaringan informasi kebahasaan; dan (7) pengembangan tenaga, bakat, dan prestasi dalam bidang bahasa dan sastra melalui penataran, sayembara mengarang, serta pemberian hadiah penghargaan.

Sebagai salah satu tindak lanjut kegiatan itu, dibentuklah oleh Pemerintah, dalam hal ini Departemen Pendidikan dan Kebudayaan. Bagian Proyek Pembinaan Bahasa dan Sastra Indonesia-Jakarta. Bagian proyek itu mempunyai tugas pokok melaksanakan kegiatan kebahasaan dan kesastraan yang bertujuan meningkatkan mutu pemakaian bahasa Indonesia yang baik dan benar, mendorong pertumbuhan sastra Indonesia, dan meningkatkan apresiasi masyarakat terhadap sastra Indonesia.

Dalam rangka penyediaan sarana kerja dan buku acuan bagi mahasiswa, dosen, guru, tenaga peneliti, dan masyarakat umum naskah yang berhubungan dengan masalah bahasa, susastra, dan perpustakaan diterbitkan oleh Bagian Proyek Pembinaan Bahasa dan Sastra Indonesia-Jakarta.

Buku *Fisika Modern II* merupakan salah satu hasil kegiatan (penerjemahan) di bidang ilmu dasar. Buku itu berhasil diterjemahkan oleh Dr. Musaddiq Musbach. Untuk itu, kepada para penerjemah saya sampaikan terima kasih dan penghargaan yang setinggi-tingginya.

Akhirnya, kepada Pemimpin Bagian Proyek Pembinaan Bahasa dan Sastra Indonesia-Jakarta 1995/1996, Drs. Abdul Murad, Drs. Suharna (Sekretaris Proyek), Drs. Suhadi (Bendaharawan Proyek), Sdr. Tukiyar, Sdr. Radiyo, dan Sdr. Sunarko (Staf Proyek) saya ucapan terima kasih atas pengelolaan penerbitan buku ini.

Jakarta, Januari 1996

Dr. Hasan Alwi

## PRAKATA

Puji syukur kehadirat Allah swt. yang telah memberikan rahmat dan hidayahnya sehingga kami dapat menyelesaikan naskah terjemahan buku ini. Tanpa bantuan, kesabaran dan pengorbanan istri saya, mungkin buku ini tidak akan terselesaikan.

Buku ini ditulis pertama kali oleh Dr. Christian Gerthsen pada tahun 1956. Bahan-bahannya diambil berdasarkan catatan kuliah Fisika eksperimen yang dialaminya sendiri, berlangsung pada tahun 1946/1947 di Universitas Berlin. Karena buku pegangan Fisika masih sangat kurang pada masa itu, buku ini ditujukan sebagai alat bantu para mahasiswa yang mempelajari Fisika di perguruan tinggi. Karena isinya yang jauh dari memadai sebagai buku pegangan perkuliahan, edisi pertamanya dianggap oleh Dr. C. Grethsen hanya sebagai bahan tambahan di luar perkuliahan.

Dr. C. Grethsen meninggal, buku ini telah mengalami perbaikan tiga kali. Akan tetapi, isinya tidak banyak mengalami perubahan. Oleh sebab itu, pada tahun 1960 Dr. H. O. Kneser merevisi, melepasan batasan-batasan tentang pengotakan bidang-bidang Fisika, seperti zat padat, cair, dls., hingga menjadi edisi ke empat. Perombakan total, kecuali untuk bab III, serta berbagai tambahan sesuai dengan perkembangan Fisika saat ini. Walaupun perkembangan Fisika tidak secepat perkembangan biokimia dan astrofisika, akan tetapi Fisika tetap berkembang jauh lebih cepat melampaui batas yang disimpulkan oleh buku-buku Fisika yang ada. Menilik perkembangan Fisika hingga

akhir tiga dasawarsa ini, seperti hukum-hukum di dalam Fisika zat padat, partikel elementer dan Kosmologi, memberikan idea baru untuk mengembangkan isi buku sesuai dengan tuntutan zaman. Pada tahun 1977 Dr. Helmut Vogel merevisi buku ini menjadi edisi 13 ditambah dengan soal-soal latihan yang kiranya dapat digunakan pembaca untuk membuat latihan-latihan sehingga dapat menambah wawasan analitis pembaca, misalnya dalam meramalkan teori relativitas elektrodinamika, beberapa teknik dasar Mekanika kuantum dan Fisika statistik. Hampir semua bab yang membahas "Fisika klasik" telah dikembangkan lebih baik. Teori tentang zat-zat yang dapat mengalir dan elektrostatika muncul dalam wajah baru, ditambah dengan analisa vektor sesuai dengan perkembangan. Beberapa topik yang menyentuh pemikiran baru dalam dunia Fisika diketengahkan, seperti: krisis energi, hukum virial, dinamika gas, amplitudo, perbedaan fase gelombang, dan *scanning microscopy*, gelombang suara ultra- dan hipersonik, Fisika temperatur rendah, mata dan warna, dualisme partikel-gelombang, reaksi fusi nuklir, laju reaksi absolut, keadaan ekstrim materi dan sebagainya. Buku pertama hanya akan membahas mekanika dan termodinamika, sedangkan buku kedua membahas Listrik, magnet, dan optik. Buku ketiga mengetengahkan semua persoalan yang menyangkut pemikiran-pemikiran baru dalam Fisika yang dikenal sebagai dasar-dasar Fisika modern.

Bagi dunia Ilmiah Indonesia umumnya, khususnya para mahasiswa, terjemahan buku ini tidak hanya sekadar turut memperkaya khasanah buku-buku pegangan untuk perguruan tinggi. Akan tetapi kiranya dapat memperkaya ide-ide baru untuk berpikir analitis dan memperkaya wawasan pengetahuan Fisika. Semua hukum-hukum Fisika yang ditampilkan dalam buku ini dicoba sedapat mungkin dari jangkauan rumusan matematik yang rumit sehingga dapat diikuti oleh mereka yang bukan spesialis dibidang Fisika teori. Menilik sistematika yang terkandung di dalamnya, mengingat kemudahan rumusan teori-teori Fisika yang dibuat, buku ini dapat membekali pengetahuan dasar-dasar Fisika bagi mahasiswa Strata-1 dan dapat pula dipakai oleh

mereka yang mengambil Strata-2. Dalam edisi bahasa Indonesia buku ini dibagi dalam tiga bagian, yaitu:

1. Buku I : Mekanika dan Panas,
2. Buku II : Listrik-Magnet dan Optik,
3. Buku III : Fisika Modern.

Pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih yang setulus-tulusnya kepada Bapak Drs. A. Murad. sebagai Pemimpin Proyek Pembinaan Bahasa dan Sastra Indonesia periode 1993/1994 beserta staf yang telah memberikan upaya dana sehingga buku ini berhasil diterjemahkan.

Kepada bapak Prof. Dr. Beni H. Hoed, Ketua Tim Pengelola Penerjemah Buku Bahasa Asing beserta staf tak lupa pula penulis mengucapkan terima kasih atas bantuan bimbingan dan kemudahan yang telah diberikan.

Bogor, 2 Februari 1995

**Musaddiq Musbach**

## DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR .....	v
PRAKATA .....	vii
DAFTAR ISI .....	x
Bab 14 Zat Padat .....	1
14.1 Kisi Kristal .....	3
14.1.1 Kemasan Bola Kompak.....	4
14.1.2 Geometri Kisi.....	14
14.1.3 Analisa Struktur Kristal.....	19
14.1.4 Energi Kisi.....	29
14.1.5 Ikatan pada Kristal.....	38
14.1.6 Struktur Es .....	45
14.1.7 Pertumbuhan Kristal.....	51
14.2 Getaran Kisi.....	55
14.2.1 Panas Jenis Spesifik.....	55
14.2.2 Dinamika Kisi.....	64
14.2.3 Optika Kristal Ionik.....	71
14.2.4 Fonon .....	75
14.2.5 Hantaran Panas pada Isolator .....	79
14.3 Logam .....	82
14.3.1 Gas Elektron Klasik.....	82
14.3.2 Gas Fermi .....	86
14.3.3 Optika Logam.....	91
14.3.4 Listrik dan Aliran Panas.....	93
14.3.5 Pita Energi .....	99

14.3.6	Elektron dan Hole .....	104
14.4	Semikonduktor .....	107
14.4.1	Semikonduktor Murni.....	107
14.4.2	Impuritas pada Semikonduktor.....	112
14.4.3	Elektronik Semikonduktor.....	117
14.4.4	Semikonduktor Amorf .....	126
14.5	Cacat Kisi .....	128
14.5.1	Kristal Ideal Real .....	128
14.5.2	Cacat Termis.....	129
14.5.3	Cacat Kimia .....	133
14.5.4	Dislokasi .....	136
14.6	Zat Padat Makroskopik .....	142
14.6.1	Definisi dan Sifat Umum.....	142
14.6.2	Ukuran Panjang Makromolekul Linier .....	144
14.6.3	Elastisitas Plastik .....	148
14.7	Superkonduktor .....	151
	Soal-soal § 14 .....	161
<b>Bab 15 Teori Relativitas1.....</b>		<b>175</b>
15.1	Sistem Acuan.....	175
15.1.1	Adakah Keadaan Diam Absolut? .....	175
15.1.2	Percobaan Michelson.....	176
15.1.3	Prinsip Relatif .....	179
15.1.4	Titik Kejadian .....	180
15.1.5	Pendataan Ulang .....	183
15.2	Mekanika Relativistik.....	185
15.2.1	Relativitas Kesamaan .....	185
15.2.2	Perbandingan Skala Panjang .....	187
15.2.3	Perbandingan Skala Waktu (Jam) .....	190
15.2.4	Penambahan Kecepatan.....	194
15.2.5	Pengukuran Percepatan.....	196
15.2.6	Massa yang Bergerak.....	197
15.2.7	Ekuivalensi Massa dan Energi .....	199
15.2.8	Peta Penerbangan Sebuah Pesawat Antar	

	Bintang .....	203
15.3	15.2.9 Persoalan Roket Pendorong Foton .....	206
	15.3 Fisika Relativistik.....	209
	15.3.1 Transformasi Lorentz .....	210
	15.3.2 Struktur Absolut Alam Semesta.....	213
	15.3.3 Elektrodinamika Relativistik.....	214
	15.3.4 Gelombang Materi.....	218
15.4	Gravitasi dan Kosmologi .....	222
	15.4.1 Relativitas Umum.....	222
	15.4.2 Teori Gravitasi Einstein.....	226
	15.4.3 Gelombang Gravitasi.....	232
	15.4.4 Lubang Hitam.....	235
	15.4.5 Model Kosmologi.....	238
	15.4.6 Gaya Kosmologi.....	242
	15.4.7 Ledakan Asal atau Steady State? .....	246
	Soal-soal § 15 .....	252
 <b>Bab 16 Mekanika Kuantum .....</b>		 272
16.1	Perkakas Matematik.....	272
	16.1.1 Vektor dan Fungsi-fungsi.....	273
	16.1.2 Matriks dan Operator.....	275
	16.1.3 Fungsi dan Harga-eigen.....	276
16.2	Dasar-dasar Mekanika Kuantum.....	278
	16.2.1 Aksioma-aksioma .....	278
	16.2.2 Relasi Ketidakpastian.....	283
	16.2.3 Operator Energi (Operator Hamilton).....	286
	16.2.4 Persamaan Schroedinger .....	291
16.3	Partikel di dalam Sumur Potensial.....	294
	16.3.1 Keadaan Stasioner .....	294
	16.3.2 Efek Kanal .....	298
	16.3.3 Aturan Simpul .....	303
16.4	Atom dan Molekul .....	305
	16.4.1 Atom Hidrogen.....	305
	16.4.2 Atom Berelektron Banyak.....	311

16.4.3	Sistem Berkala .....	314
16.4.4	Muatan Efektif.....	315
16.4.5	Bagaimana Atom Memancarkan Cahaya?..	317
16.4.6	Keadan Hibrid.....	320
16.4.7	Kimia Kuantum .....	322
	Soal-soal § 16 .....	329
<b>Bab 17 Fisika Statistik.....</b>		<b>341</b>
17.1	Statistik Ensambel .....	341
17.1.1	Probabilitas .....	341
17.1.2	Probabilitas dan Komposisi.....	344
17.1.3	Komposisi Paling Mungkin.....	347
17.1.4	Fenomena Deviasi .....	352
17.1.5	Distribusi Kanonik.....	354
17.1.6	Contoh; Osilator Harmonik .....	359
17.1.7	Entropi Campuran.....	361
17.1.8	Ensambel Kanonik (Ensambel Gibbs) .....	362
17.1.9	Kerja dan Panas .....	364
17.2	Ensambel Fisis.....	365
17.2.1	Pengertian Fisis.....	365
17.2.2	Perubahan Keadaan .....	367
17.2.3	Modul Distribusi dan Temperatur .....	368
17.2.4	Probabilitas dan Entropi .....	370
17.2.5	Energi Bebas dan Syarat Kesetimbangan ...	370
17.2.6	Kesetimbangan Statistik .....	374
17.2.7	Ruang Fase.....	375
17.2.8	Gas Ideal .....	377
17.2.9	Laju Reaksi Absolut .....	379
17.3	Statistik Kuantum .....	381
17.3.1	Partikel Kuantum.....	381
17.3.2	Statistik Fermi-Dirac dan Boseeinstein.....	383
17.3.3	Gas Fermi.....	388
17.3.4	Peristiwa Tumbukan pada Energi Tinggi....	394
	Soal-soal § 17 .....	398

<b>Indeks .....</b>	<b>408</b>
<b>Tabel Satuan Energi dan Satuan Ekuivalen.....</b>	<b>430</b>
<b>Tabel Beberapa Sifat Zat Padat.....</b>	<b>431</b>
<b>Tabel Sistem Berkala .....</b>	<b>432</b>
<b>Tabel Beberapa Konstanta Penting Fisika .....</b>	<b>433</b>

## **Bab 14**

### **Zat Padat**

Beberapa puluh tahun lalu belum dimengerti apa yang tersembunyi dibalik benda-benda yang mempunyai peran penting dalam keseharian kita, yaitu kelakuan dari zat padat dan cair. Zat padat dan cair berdasarkan Fisika klasik tidak dapat dimengerti.

Harus disadari bahwa fisika modern belum dimengerti dengan baik, mengapa massa dan muatan selalu secara murni "terkemas" dalam kuantum yang disebut sebagai "partikel". Ambil partikel-partikel, khususnya proton, elektron dan neutron, secara mendasar Fisika klasik tidak mampu menjelaskan pembentukan suatu struktur yang terdiri dari ketiga macam partikel tersebut. Dalam "dunia" Fisika klasik tidak terdapat sama sekali atom. Secara klasik sistem yang tersusun dari proton dan elektron segera saling bertumbukan. Secara klasik juga tidak terdapat molekul, karena molekul terdiri dari sejumlah inti dan elektron yang tidak akan membentuk suatu sistem yang stabil. Pada saat itu ukuran atom dan molekul belum dapat ditentukan, sehingga jarak masing-masing atom atau molekul zat padat jarak juga tidak dapat ditentukan. Adanya gaya-gaya yang bekerja di dalam sistem zat padat menyebabkan zat padat tetap utuh dan syarat-syarat apa yang harus dipenuhi untuk itu, tetap akan berada dalam kegelapan, seandainya dipandang dengan acuan Fisika klasik. "Dunia" Fisika klasik adalah tanpa bentuk. Apa yang ada paling-paling

hanya gas. Jarak yang konstan, bentuk, struktur berhasil dijelaskan berdasarkan mekanika kuantum.

Apabila dengan hukum-hukum fisika klasik dianggap bahwa elektron tetap berada pada jarak tertentu mengelilingi inti dan atom-atom dan masing-masing elektron terpisahkan oleh jarak yang konstan satu sama lain, sehingga membentuk zat padat, maka penjelasan mengenai sifat-sifat zat padat pada umumnya juga akan keliru sama sekali. Misalnya untuk menjelaskan sifat-sifat logam secara kualitatif yang telah ditemukan sejak awal, bahwa logam mengandung sejumlah elektron bebas (kira-kira 1 elektron per atom), terdiri dari ion-ion yang menempati ruang kisi. Bagaimana elektron-elektron tersebut bergerak, secara sederhana dianggap karena kisi bermuatan positif, sehingga elektron-elektron dapat saling menggeser; akan tetapi penjelasan tersebut tidak selalu dapat dibenarkan. Sebuah kawat tembaga secara "klasik" tidak lebih baik dari karbon. Selain itu, elektron karena dianggap sebagai partikel bebas, akan menyumbangkan harga tertentu untuk harga panas jenis spesifik, sama halnya seperti ion-ion, atau harga panas jenis spesifik sama dengan dua kali lipat dari harga panas jenis hasil pengukuran Dulong-Petit, yang tentunya keliru.

Bahan-bahan magnetik secara "klasik" juga tidak ada. Suatu sistem klasik yang berada dalam keadaan kesetimbangan termis dan ditempatkan di dalam medan magnet tidak akan memberikan momen magnetik (selama bahan berada di dalam wadah berdinding tegar dan tidak mengalami rotasi). Dasarnya terletak pada anggapan bahwa suatu medan magnet  $B$  tidak akan memberikan kerja pada muatan, sehingga gaya Lorenzt akan selalu mengarah tegak lurus terhadap kecepatan. Suatu medan magnet mempengaruhi pula kemungkinan keadaan energi tertentu dari partikel dan tidak terhadap sistem secara keseluruhan. Distribusi partikel dalam kemungkinan keadaan energinya, berdasarkan Boltzmann, hanya bergantung pada energi keadaan tersebut. Jika  $B$  tidak mempengaruhi keadaan energi, maka medan juga tidak dapat mengubah sistem secara keseluruhan. Akan tetapi kenyataan yang diamati adalah berbeda. Diketahui bahwa setiap

atom akan mengalami rotasi di dalam medan magnet sehingga mempunyai momen dipol diamagnetik. Akan tetapi pada keadaan setimbang termis tidak terdapat atom yang mempunyai elektron secara stabil mengelilingi intinya. Jika fisika klasik dianggap berlaku secara serius, maka dalam keadaan kesetimbangan termis tidak akan pernah terjadi peristiwa magnetisasi. Sifat magnetik suatu bahan merupakan penjelasan murni dari mekanika kuantum.

Tanpa mekanika kuantum tidak ada zat padat. Dengan pengetahuan terbatas yang telah dikembangkan di dalam mekanika kuantum kemampuan teknologi telah berkembang sedemikian jauh. Setiap partikel dengan energi  $E$  dan momentum  $p$  mempunyai kelakuan seperti sebuah gelombang dengan frekuensi  $v = E/h$  dan panjang gelombang  $\lambda = h/p$ . Sebaliknya setiap kuantisasi gelombang tidak lain adalah sebagai susunan kuanta yang merupakan kuantisasi dari medan. Berdasarkan sifat alamiah gelombang partikel tersebut timbul adanya relasi ketidakpastian, bahwa  $\Delta x \Delta p \geq h$ ,  $\Delta E \Delta t \geq h$ . Dengan perantara (media) yang sempit ini dapat dibuat penjelasan hingga efek Josephson.

### 14.1 Kisi Kristal

Tipe zat padat adalah mempunyai struktur kristal, yaitu mengandung atom-atom pembangun yang tersusun dalam suatu struktur beraturan. Dengan pengecualian *amorf*, sebagai contoh "struktur" yang terdapat pada gelas. Sifat-sifat zat padat biasanya melebar, sesuai dengan kelakuan zat padat; bahwa zat padat juga dianggap sebagai zat cair yang mengalami pendinginan: viskositas zat padat adalah sangat besar, tetapi tetap mempunyai harga berhingga, dapat juga mengalir walaupun lamban. Titik lebur amorf tidak terdefinisi, melainkan keadaannya dapat berubah menjadi keadaan cair sebenarnya. Akan dibahas lebih rinci pada kesempatan lain (§ 14.4.4) tentang sifat-sifat amorf. Sebagai bagian terpenting zat padat akan dititikberatkan pembahasan tentang kisi kristal.

Tabel 14.1: JANGKAUAN JARAK KONTAK.

Keadaan	Padat		Cair		Gas		Superfluida
	Ideal	Real	Ideal	Real	Ideal	Real	
Contoh	intan	gelas-pleksi	gliserin	eter	pada $T$ rendah dan $p$ tinggi	pada $T$ tinggi dan $p$ rendah	He II ( $< 2,18$ K)
Kerapatan [ $\text{g cm}^{-3}$ ]	3,52	1,16...1,2	1,260	0,8	hingga $10^{-1}$	$\approx 10^{-3}$	0,125
Modulus kompresi [ $\text{Nm}^{-2}$ ]	$5,8 \cdot 10^{11}$	$\sim 10^{11}$	$5 \cdot 10^7$	$10^5$	hingga 0	$\sim p$	
Modulus geser [ $\text{Nm}^{-2}$ ]	$3,5 \cdot 10^{11}$	$1,5 \cdot 10^{10}$	0	0	0	0	
Viskositas [poise]	-	$> 10^3$ *)	15 *)	0,02 *)		$\approx 10^4$ *)	
Tegangan permukaan [ $\text{Nm}^{-1}$ ]	-	- udara	0,066 Thd.	0,17	0	0	

\*) Pada temperatur kamar;  $p$  : tekanan;  $T$  : temperatur.

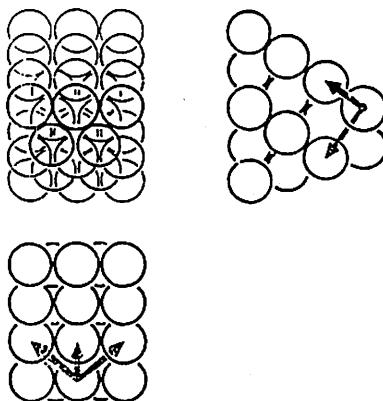
### 14.1.1 Kemasan Bola Kompak

Struktur kristal terpenting dapat dibagi dalam dua struktur dasar: sentral diagonal permukaan *faced center cubic* (FCC) dan paket heksagonal terpadu *hexagonal closed packed* (HCP).

Jika segenggam bola-bola berukuran kecil dimasukkan ke dalam kubus sehingga bola-bola mengisi seluruh bagian dasar kubus; kemudian jika alas kubus dimiringkan pada salah satu sisinya secara perlahan, maka bola-bola yang terdapat di dalamnya cenderung tersusun dalam struktur beraturan, yaitu menempati energi potensial minimal dan juga kubus akan terisi secara optimal. Dalam susunan ini, setiap bola yang tidak terletak di pinggir kubus menyinggung enam bola lainnya. Tiap celah yang terdapat di kubus, jika dilihat dari bawah kubus akan dibatasi oleh tiga bola yang saling bersinggungan satu sama lain. Selain itu masing-masing bola dikelilingi oleh enam celah

semacam itu sehingga jumlah celah seluruhnya adalah dua kali lebih banyak dibanding jumlah bola.

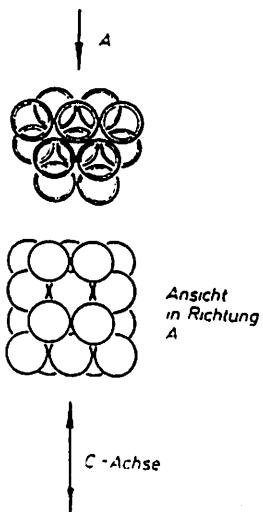
Jika ke dalam kubus dimasukkan bola lebih banyak, maka susunan akan menjadi tiga dimensi. Sekarang dapat diperhatikan bahwa bola-bola membentuk satu lapisan baru di atas lapisan sebelumnya. Bola-bola yang membentuk lapisan baru ini cenderung menempati celah yang terdapat pada lapisan pertama, sehingga tiap bola akan bersinggungan dengan tiga bola dari lapisan sebelah bawah. Akan



Gambar 14.1: Paket bola sentral diagonal permukaan *faced center cubic* (FCC), digambarkan mengisi ruang. Terlihat dari bawah [kiri atas; dilihat dari arah bidang (111)] dan bola-bola digambarkan transparen. Dari arah atas (kanan bawah), mendekati arah bidang (110), penglibatan dari sisi (kanan) pada arah bidang (100).

tetapi hanya tiap celah kedua dari lapisan pertama yang dapat ditutupi oleh bola-bola yang membentuk lapisan kedua, sehingga pada lapisan kedua ini hanya terdapat celah sesuai dengan jumlah bola. Juga pada lapisan kedua masih dapat dilihat samar-samar dasar kubus, akan tetapi hanya pada tempat-tempat tertentu saja, seperti jumlah bola pada tiap lapisan. Berhubungan dengan hal ini, ruang kosong antara dua bola menjadi dua grup: dari celah (lapisan pertama) yang tertutup terdapat ruang kosong kembali (pada lapisan kedua) yang dibatasi oleh empat

bola yang membentuk tetrahedral beraturan (celah berbentuk tetrahedral). Celah yang tidak tertutup dibatasi oleh enam bola, masing-masing tiga bola pada tiap lapisan. Maka terdapat celah oktahedral (oktahedral mempunyai enam sudut). Jika ingin susunan



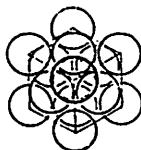
Gambar 14.2: Paket heksagonal terpadu *hexagonal closed packed* (HCP), digambarkan mengisi ruang. Terlihat dari bawah (atas; pada arah  $c$ ) dan bola-bola digambarkan transparan. Dari arah atas (tegak lurus terhadap arah  $c$ ) terlihat identik.

bola-bola ingin dibangun selanjutnya, maka akan terbentuk *kanal c-aksial* pada deretan berurutan, atau tertutupi oleh dua bola penutup.

Hanya terdapat dua kemungkinan untuk membentuk lapisan ketiga. Masing-masing bola dapat menempati setiap celah yang ada pada lapisan kedua, sehingga dasar kubus masih dapat dilihat dengan samar. Jumlah celah seperti itu justru benar. Akan tetapi, juga dapat dibentuk lapisan seperti lapisan pertama dst. Dengan demikian, setiap celah kosong tersebut akan bertetangga dengan delapan bola yang membentuk oktahedral beraturan. Segera akan diketahui bahwa susunan demikian tidak lain merupakan struktur sentral diagonal permukaan *faced center cubic* (FCC). Di samping struktur yang

dijelaskan di atas, dapat pula dibuat struktur lain, yaitu apabila lapisan ketiga disusun dengan cara berbeda, jika semua celah yang masih tembus ke dasar kubus ditutup seluruhnya: Susunan masing-masing bola pada lapisan ketiga persis di atas bola pada lapisan pertama. Jika susunan ini diteruskan, maka celah akan tetap terbuka, yaitu akan terdapat jumlah bola yang sama untuk setiap lapisan. Celah tersebut akan membentuk kanal-kanal. Kanal-kanal ini hanya terdapat pada satu arah, yaitu pada arah vertikal "struktur' bangunan yang dibentuk. Pada arah lain tidak akan dapat terlihat dasar kubus. Struktur yang juga rapat seperti sentral diagonal permukaan ini disebut paket heksagonal terpadu *hexagonal closed packed* (HCP); arah kanal-kanal tersebut adalah merupakan sumbu c struktur ini. Pada sumbu ini terdapat tiga simetri. Pada kedua struktur di atas setiap bola mempunyai 12 tetangga terdekat.

Struktur FCC tidak mempunyai arah secara rinci seandainya akan digambarkan dan juga tidak mempunyai arah yang dapat menembus penglihatan (ke bawah atau kemanapun sehingga dapat terlihat bidang sisi kubus). Dinamakan sentral diagonal permukaan diperoleh dari pemikiran kubus elementer dengan sudut-sudut dan titik tengah permukaannya ditempati oleh bola-bola atau partikel; struktur ini akan terlihat dengan jelas jika kubus ditempatkan atau dilihat dari permukaan



Gambar 14.3: Kubus elementer dari kisi FCC dilihat pada arah permukaan (111).

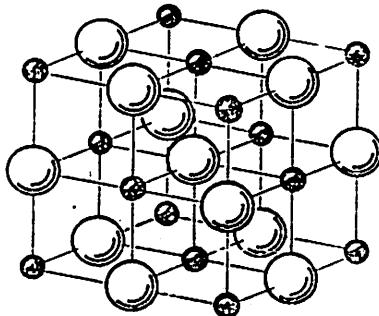
sisi atasnya. Struktur ini menampakkan suatu susunan segienam beraturan: Bentuk kubus dengan tiga simetri saling menyatu. 14 bola yang terdapat di dalam kubus (enam di sudut, enam di titik tengah garis diagonal permukaan) terdapat dalam empat lapisan yang berbeda (gbr. [14.3]). Cara menggambarkan seperti ini tidak harus melupakan kubus elementer, bahwa semua kubus terkonsentrasi pada kisi FCC

dengan cara yang sama: Setiap titik tengah permukaan kubus dapat ditempati oleh sudut kubus lainnya, sehingga sebagian dari sudut-sudut ini mengambil alih peran titik tengah permukaan.

Karena paket ini terbentuk dari kubus, maka akan mempunyai sumbu simetri, yaitu tiga sumbu yang saling tegak lurus satu sama lain. Sebagai sumbu dapat diambil tiga buah garis diagonal ruang dan pada masing-masing sumbu terdapat tiga simetri. Selain itu sisi kubus dapat pula diambil sebagai sumbu. Lapisan paket ini terletak sedemikian, sehingga setiap sumbu akan memotong bagian potongan kubus yang sama, dengan perkataan lain vektor normalnya mempunyai komponen yang sama besar pada sumbu ini. Lapisan ini disebut sebagai bidang (111) (komponen vektor normal atau potongan sumbu resiprokalnya direduksi dalam bilangan bulat dan disebut sebagai indeks Miller atau indeks Lue). Pada bidang (111) kubus terisi sangat rapat atau maksimal, seperti seharusnya. Permukaan kubus dalam indeks Miller dinyatakan sebagai bidang (100), (010), (001) [angka 1 mempunyai arti sebagai sumbu, pada sumbu ini bidang ybs, terletak tegak lurus]. Permukaan ini tidak terisi rapat; antara empat bola, misalnya sudut-sudut kubus yang menyinggung lainnya (titik tengah permukaan), terdapat celah (celah oktahedral). Terlihat bahwa adanya celah oktahedral ini adalah sebanyak bola yang ada. Bidang lainnya, misalnya (110) [tegak lurus terhadap diagonal permukaan] secara umum masih ditempati secara renggang. Dalam hal ini tentunya hanya dibicarakan bola-bola yang menempati *titik tengah*; tentunya di bidang yang tidak terisi bola secara rapat ini terdapat bagian luar bola yang menonjol keluar. Kerapatan partikel yang terdapat pada satu bidang menentukan secara langsung kekerapan pembentukan kristal yang bermula pada permukaan tersebut (lihat § 14.1.7), juga intensitas refleksi Bragg pada difraksi (hamburan) sinar Roentgen dari kristal ybs. (lihat § 14.1.3).

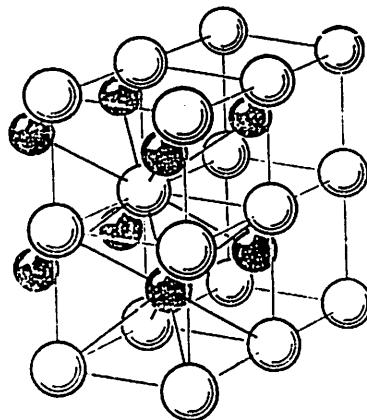
Dalam bentuk bangun kristal yang lebih kompleks peran ruang kosong (celah) yang terdapat di antara bola-bola menjadi penting. Pada kristal demikian ruang kosong ini dapat ditempati oleh partikel-partikel lain. Ruang kosong yang mana dalam hal ini dapat ditempati oleh

partikel lain, tentunya bergantung pada jumlah dan ukuran dari partikel ybs. Celah oktahedral merupakan celah terbesar, terdapat dalam kedua paket (lapisan) dengan jumlah celah sama dengan jumlah bola. Sedangkan pada HCP celah ini terdapat saling tindih menindih satu sama lain membentuk kanak c, mengalami pergeseran di tengah-tengah permukaan, yaitu dengan sisinya membentuk kisi suatu kubus sentral diagonal permukaan (FCC). Celah tetrahedral adalah celah terkecil. Setiap bola yang dipunyai oleh kedua lapisan rapat tersebut, yang terlihat pada arah lapisan dasar, satu berada tepat di atas dan satu berada tepat di bawah titik tengahnya (puncak tetrahedral masing-masing berada di atas dan di bawah). Maka jumlah celah tetrahedral ini akan terdapat dua kali dari jumlah bola. Setiap bentuk celah tetrahedral dengan puncak di atas dan di bawah, akan membentuk pula sebuah kisi dengan bentuk yang sama seperti yang dibentuk bola. Maka antara celah dan bola terdapat 'kisi' baru. Setiap titik dari kisi baru ini, terhadap titik-titik kisi lama, membentuk tetrahedral baru yang posisinya agak bergeser sedikit di sekitar titik berat sebuah tetrahedral beraturan, yaitu pada jarak  $1/4$  jarak bola<sup>1)</sup>.



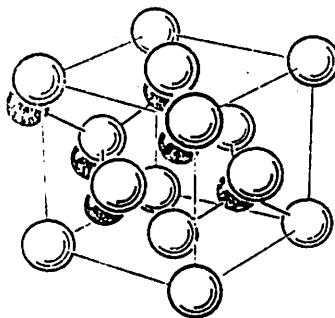
Gambar 14.4: Struktur NaCl. Kedua bagian kisi adalah FCC. setiap bola hitam adalah oktahedris dikelilingi oleh enam bola putih dan sebaliknya. Jika titik-titik kisa Na dan Cl ditempati oleh partikel yang sama, maka struktur menjadi kubus sederhana.

1) Pada gbr [14.4] hingga [14.9] diilustrasikan jari-jari bola dalam perbandingan sebenarnya, akan tetapi tidak digambarkan dengan perbandingan yang sama dengan konstanta kisi. Dalam gambaran ini ukurannya 2,5 kali lebih besar. Ion-ion yang tidak sama saling menyenggung satu sama lain dan akan menyulitkan penglihatan (lihat gbr[14.1] hingga [14.3]). Semua gambar hingga gbr[14.9] (CaCO<sub>3</sub>) berlaku pula untuk kode pewarnaan lainnya. Bola putih: anion, bola hitam kation (logam).

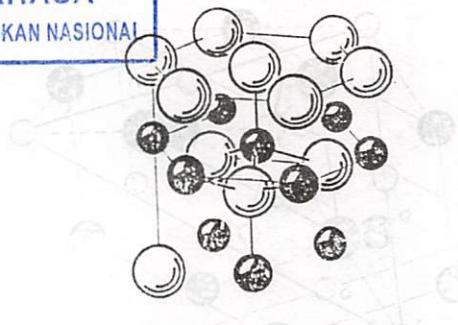


Gambar 14.5: Struktur CsCl. Kedua bagian kisi adalah kubus sederhana. Setiap bola hitam adalah tetrabedris dan dikelilingi oleh delapan bola putih dan sebaliknya. Jika titik-titik kisi Cs dan Cl ditempati oleh partikel yang sama, maka struktur menjadi struktur kebanyakan logam, yaitu BCC.

Dengan cara ini dapat diramalkan sebelumnya bagaimana suatu bahan mengalami kristalisasi, atau bagaimana kristal berkembang

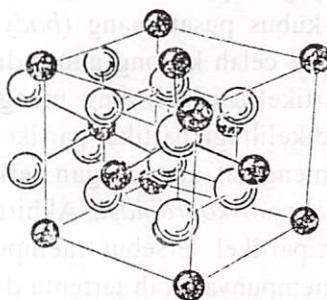


Gambar 14.6: Struktur Sfalerit. Contoh ZnS. S menempati kisi FCC demikian pula dengan Zn. Setiap bola hitam adalah tetrabedris dan dikelilingi oleh empat bola putih dan sebaliknya. jika titik-titik kisi S dan Zn ditempati oleh partikel yang sama, maka struktur menjadi struktur intan.

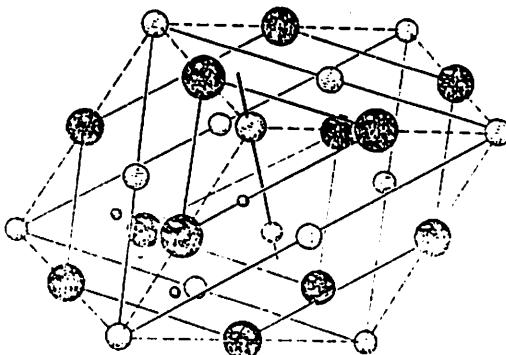


Gambar 14.7: Struktur Wursit. Contohnya adalah ZnS. S sendiri menempati kisi HCP, demikian pula Zn. Setiap bolah hitam adalah tetrahedris dan dikelilingi oleh empat bola putih dan sebaliknya. Jika titik-titik kisi S dan Zn ditempati oleh partikel yang sama, maka struktur menjadi struktur es.

dan bentuk lahir kristal ybs. (§ 14.1.5). Akan tetapi hal terpenting dari pengamatan struktur kristal secara geometri murni ini adalah membangun pengertian mendalam tentang sifat-sifat fisika-kimia masing-masing sistem kristal.



Gambar 14.8: Struktur CaF<sub>2</sub>. Ca: FCC; F: Kubus sederhana. Setiap Ca dikelilingi oleh empat F, setiap Ca mempunyai dikelilingi delapan F.



Gambar 14.9: Struktur Kapur ( $\text{CaCO}_3$ ). Bola hitam C; bola putih: O. Atom-atom O digambarkan hanya di sekitar sebuah atom C.

Pada pengamatan seperti ini adalah penting untuk mengidentifikasi atom atau ion dari jari-jarinya yang hanya sedikit bergantung pada pasangan ikatnya. Jelaslah bahwa hanya terdapat partikel berukuran kecil  $B$  di dalam celah tetrahedral suatu kisi FCC yang dibentuk oleh partikel  $A$ . Sedangkan pada celah oktahedral dapat diisi oleh partikel  $B$  berukuran besar dan  $A$  juga dapat berukuran lebih besar lagi, sehingga kisi berubah menjadi kubus pusat ruang (*body center cubic*[BCC], sehingga terdapat banyak celah kosong untuk diisi oleh  $B$  (lihat soal 14.1.1). Selain itu, partikel-partikel yang mengisi kubus cenderung ‘lebih senang’ untuk dikelilingi partikel-partikel lain, sehingga satu sama lain dapat saling mengikat, atau dengan perkataan lain cenderung untuk meninggikan *bilangan koordinasi*. Akhirnya bergantung pada apakah ikatan partikel-partikel tersebut mempunyai arah ikat atau tidak. *Ikatan kovalen* mempunyai arah tertentu dan hanya terjadi pada keadaan ambang batas energi yang meningkat. *Ikatan ion* dan *ikatan logam* adalah sebaliknya, terjadi karena karakter elektrostatik masing-masing partikel.

Tabel 14.2: BEBERAPA KISI KRISTAL TERPENTING.

Kelas bahan	Bentuk Kisi	Contoh	Penjelasan	Jumlah koordinat
Logam	Kubus	$\gamma\text{-Fe}$	lihat § 14.1.1	12
	FCC	( $910 < T < 1400^\circ\text{C}$ )		
	HCP	Be, Mg, Zn, Cd, Co Ti, tnh. jarang, He,		12
	BCC	Gas mulia lain Na, Li, $\alpha\text{-Fe}$ ( $T < 910^\circ\text{C}$ , $T > 1400^\circ\text{C}$ )		8
Ikatan Biner, Mirip karakter ion	Struktur intan	ZnS, CuCl, AgI, CdS	FCC S dlm. kisi Zn	4,4
	Struktures	ZnS, ZnO, CdS, SiC, BN	heks. S dlm. kisi Zn salah satu dlm. celah tetrahedral	4,4
	NaCl	LiH, KCl, PbS, AgBr, MgO	FCC Na dlm. kisi Cl, satu dlm. celah lainnya	6,6
	CsCl	NH <sub>4</sub> Cl, CuZn, (messing $\beta$ ) AlNi, TiI	Kubus Cs dlm. kisi kubus Cl, satu di pusat lainnya	8,8
	CaF <sub>2</sub>		FCC Ca dlm. kisi kubus F F dlm. semua celah tetrahedral	4,8
Ikatan Biner, mirip karakter kovalen	Struktur Intan	C, Sn(abu-abu)	seperti Zn	4
	Struktures	H <sub>2</sub> O, C	seperti kubus	4
	Grafit	C	lapisan C rapat, tanpa rengangan dan diikat melalui ikatan $\pi - \pi$	3

### 14.1.2 Geometri Kisi

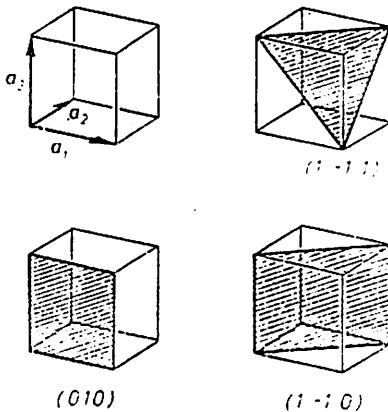
Berbagai kisi bahan-bahan sederhana dapat diturunkan dalam kemasan bola-bola yang kompak. Dalam kasus lebih umum diperlukan istilah-istilah kristalografi klasik lebih jauh. Idea dasarnya terletak pada membayangkan kisi dibentuk oleh *satuan basis* yang mengalami pergeseran (translasi) secara berulang-ulang. Basis ini dapat berupa sebuah atom atau juga sebagai satu kesatuan molekul dengan strukturnya yang sangat kompleks, misalnya molekul protein yang mengandung lebih dari 10.000 atom. Jika suatu ruang yang diisi oleh



Gambar 14.10: Hubungan antara basis kisi titik dan kisi ruang.

partikel-partikel identik dan sistem satuan basis identik, berarti pula bahwa: Terdapat sejumlah vektor  $r$ , disebut sebagai *vektor kisi*, jika dilihat dari titik akhir vektor ini, kisi akan menggambarkan pola gambar yang sama seperti diamati dari titik acuan (titik nol). Semua vektor-vektor kisi ini merupakan penjumlahan tiga vektor basis  $a_1$ ,  $a_2$  dan  $a_3$ :  $r = \sum n_1 a_1$ , dengan  $n_1$  adalah bilangan bulat positif atau negatif. Dalam hal ini tersirat bahwa  $a_1$  adalah vektor terkecil yang tidak bergantung pada vektor kisi  $r$ . Sebuah kisi didefinisikan dalam *satuan basis* dan dalam *vektor basis*  $a_1$ . Vektor basis mendefinisikan pula *sel elementer* kisi. Secara fisis hanya sebagian satuan basis yang terletak pada atau di dekat delapan sudut kubus dari sel elementernya yang 'masuk' ke dalam sel ini, akan tetapi kedelapan bagian tersebut membentuk satu satuan basis. Kisi terdiri dari sederetan sel elementer tiga dimensi.

Kemasan kubus kompak dapat digambarkan melalui sel elementer kubus, dibentuk oleh tiga vektor basis, sama besar dan dapat saling dipertukarkan satu sama lain, yaitu  $a_1$ . kemasan permukaan kompak



Gambar 14.11: Tiga macam bidang penghubung terpenting pada kisi kubus.

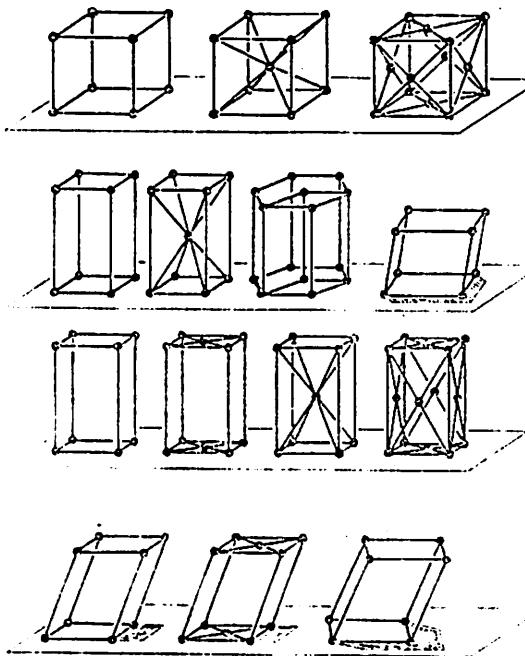
terbentuk miring terhadap ketiga sumbu. Sebagai satuan basis harus dipilih suatu tetrahedral yang dibentuk oleh empat bola: satu bola berada di sudut kubus dan tiga bola lainnya terletak di pusat diagonal permukaan sisi kubus. Dari bola-bola yang terdapat di sudut-sudut kubus hanya  $1/8$  bagian darinya kepunyaan sel elementer, sedangkan untuk bola yang terdapat di titik tengah diagonal permukaan hanya  $1/2$  bagian. Dengan demikian, sel elementer mengandung  $8/8 + 6/2 = 4$  bola, atau sama dengan jumlah bola yang terdapat di dalam satuan basis. Kisi yang sama dapat pula membangun sel elementer kecil, yang hanya berbasis tetrahedral dan tetrahedral yang terletak secara diametris di dalam kubus berseberangan (*rhombohedral elementer*). Vektor-vektor basis yang berhubungan dengan sudut-sudut kubus dan titik tengah permukaan kubus tidak lagi tegak lurus satu sama lain (simetri trigonal dan rhombohedral). Biasanya kisi digambarkan melalui sel elementer kubus karena kubus mempunyai simetri yang lebih banyak.

Dengan simetri translasi maksimal yang dinyatakan dalam tiga vektor basis dari kemungkinan simetri yang pada, seluruh kristal dibagi dalam tujuh 'sistem'. Ketujuh bagian ini kemudian dibandingkan dengan empat sistem yang terdapat pada kisi permukaan atau kisi bidang (pada kisi permukaan hanya terdapat dua vektor basis). belum disebutkan apakah kisi 'primitif', yaitu kisi yang terbentuk jika bola hanya menempati sudut kubus, atau apakah bola menempati titik tengah kubus (pusat ruang, simbol  $I$ ), yaitu bola menempati titik perpotongan diagonal ruang, atau apakah kisi pusat diagonal permukaan  $F$ , yaitu seperti kemasan kubus terkompak.

Kisi Bidang	Kisi Ruang	
$\alpha \neq 90^\circ, 60^\circ$ kisi tergeser	$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \neq 90^\circ$	kisi triklin
$\alpha = 90^\circ$ ; kisi segienipat $a_1 \neq a_2$	$\alpha_1 = \alpha_2 = 90^\circ; \alpha_3 \neq 90^\circ$ $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 90^\circ$ $a_1 \neq a_2 \neq a_3$	kisi monoklin kisi ortorhombik
$\alpha = 60^\circ$ ; kisi heksagonal $a_1 = a_2$	$\alpha_2 = \alpha_3 = 90^\circ; \alpha_1 = 60^\circ$ $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 \neq 90^\circ$ $a_1 = a_2 = a_3$	kisi heksagonal kisi trigonal atau rhombohedral
	$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 90^\circ$ $a_1 = a_2 \neq a_3$	kisi tetragonal kisi tetragonal
$\alpha = 90^\circ$ ; kisi empat persegi $a_1 = a_2$	$\alpha_2 = \alpha_3 = 90^\circ$ $a_1 = a_2 = a_3$	kisi kubus

Pada kisi yang tidak kubus atau tidak trigonal permukaan sel elementer tidak dapat diperlakukan sama semuanya, sehingga untuk suatu keadaan tertentu harus dimungkin untuk membentuk pusat 'basis permukaan' (simbol  $C$ ) yang memotong bidang-bidang lainnya. Secara

keseluruhan terdapat 14 kisi BRAVAIS, atau kisi pusat (pada kisi permukaan hanya terdapat 5). Dengan demikian maka tidak lagi



Gambar 14.12: Empat belas kisi BRAVAIS.

terdapat 14 kisi, karena tidak semua kombinasi dari tujuh kisi dengan tiga atau empat macam kisi pusat ( $P$ ,  $I$ ,  $F$ ,  $B$ ) terpenuhi sebagai kisi. Selanjutnya, seandainya terdapat kisi pusat seperti ini akan menyebabkan adanya suatu sel elementer kecil yang mempunyai simetri sama, atau adanya peningkatan jumlah pasangan permukaan dalam tiap tingkat menimbulkan peningkatan basis terpusat. Dari kedua dasar tersebut misalnya tidak terdapat kisi kubus dan trigonal yang mempunyai basis terpusat. Tetragonal adalah kisi yang mempunyai basis terpusat, jika dimiringkan  $45^\circ$  dan mengecilkan sel elementer akan menjadi kisi primitif tetragonal.

## KISI BRAVAIS.

Kisi Permukaan	Kisi Ruang		
bergeser	$P$	triklin	$P$
heksagonal	$P$	monoklin	$P \ C$
segiempat	$P \ F$	heksagonal	$P$
Empatpersegi	$P \ F$	trigonal	$P$
		orthorhombik	$P \ C \ I \ F$
		tetragonal	$P \ I \ F$
		kubus	$P \ I \ F$

Jumlah *simetri titik* terdapat lebih besar lagi. Titik-titik ini dibentuk melalui kemungkinan kombinasi dari elemen simetri yang merupakan kisi translasi murni (yaitu tanpa memandang struktur yang terdapat di dalam satuan basis). Elemen-elemen simetri demikian adalah: *sumbu simetri* yang dinyatakan sebagai simetri dua, tiga, empat, atau enam berturut-turut bergantung pada rotasi terhadap  $180^\circ$ ,  $120^\circ$ ,  $90^\circ$  dan  $60^\circ$  terhadap sumbu kisi di mana rotasi dilakukan. Sumbu-sumbu lima tujuh dst. tidak ada, karena tidak memenuhi keadaan simetri ruang yang dimaksud. Selain sumbu simetri terdapat pula *bidang simetri* (simbol  $m$ ). Pusat simetri misalnya dapat merupakan kombinasi dari dua sumbu simetri yang salah satunya terletak tegak lurus terhadap permukaan cerminannya. Tidak semua kombinasi sumbu simetri akan terpenuhi, karena adakalanya kombinasi elemen simetri "memaksa" kombinasi elemen-elemen lainnya. Jika sumbu simetri 4 dikombinasikan dengan suatu bidang simetri, maka hanya akan terdapat permukaan paralel atau tegak lurus terhadap sumbu. Dalam kasus kedua, karena 4 sumbu simetri, haruslah terdapat bidang simetri yang tegak lurus terhadap sumbu pertama dan paralel terhadap sumbu tersebut. Dengan demikian, akan terdapat 32 simetri titik.

Titik simetri dari kisi translasi dapat "digagalkan" oleh struktur dalam satuan basisnya (contoh lihat gbr. [14.10]). Kombinasi basis dan

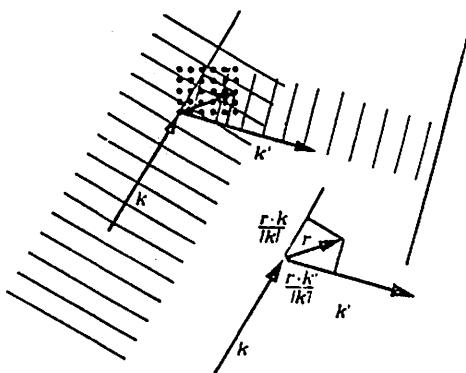
elemen simetri akan memberikan sejumlah simetri baru, yaitu *simetri ruang*. Jumlahnya juga terbatas: 230 untuk ruang dan 17 untuk bidang. Bentuk umum simetri selanjutnya, antisimetri atau simetri hitam-putih dan simetri berwarna akan memberikan kombinasi lebih banyak lagi (1651 grup antisimetri ruang atau grup Schubnikov). Grup simetri ini penting misalnya untuk menentukan karakteristik sifat magnet dari kristal campuran, atau lebih jelas lagi misalnya karena momen magnetik dapat dianggap sebagai vektor aksial, arahnya akan mengalami perubahan menjadi kebalikan semula jika dilakukan pencerminan atau inversi, persis seperti vektor ruang (polar, lihat x 13.4.10).

#### 14.1.3 Analisa Struktur Kristal

Suatu gelobang monokromatis datar (cahaya, neutron atau digunakan pula elektron) dijatuhkan pada suatu kristal. Kisi kristal diberikan melalui satuan basis dan kisi translasi; diketahui pula bahwa kristal dibentuk secara berulang-ulang, periodik dan dinyatakan dalam oleh basis yang dinyatakan dalam vektor basis  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Pertama-tama akan diperhatikan pengaruh kisi translasi terhadap pola difraksi. Hamburan gelombang pada kisi dianggap elastik dan linier, yaitu frekuensi gelombang yang dihamburkan adalah sama dengan frekuensi gelombang datang. Jika intensitas gelombang sangat besar, seperti laser misalnya, maka sifat linier gelombang tidak selalu dapat dipastikan; elastisitas hamburan terjadi sedemikian, sehingga seluruh kristal akan mengambil semua momentum pentalan pada peristiwa tumbukan kristal-foton atau kristal-neutron dan karena massa pasangan tumbukan yang besar, maka kehilangan energi karena pentalan dapat diabaikan (perubahannya dianggap sangat kecil). Selanjutnya jarak kristal terhadap layar (film atau detektor pencacah) yang meregistrasi pola hamburan harus dibuat sekecil mungkin.

Pada setiap titik kisi terdapat satuan basis yang dinyatakan dalam  $\mathbf{r} = \sum n_i \mathbf{a}_i$  dengan  $n_i$  adalah bilangan bulat. Gelombang yang dihamburkan kisi kristal berbentuk gelombang bola, akan tetapi distribusi intensitasnya tidak selalu isotrop. Pada arah tertentu berkas

gelombang yang dihamburkan oleh masing-masing satuan basis ini akan saling tumpang tindih menjadi gelombang datar kembali.



Gambar 14.13:

Gelombang hamburan dari dua pusat hamburan berjarak  $r$ , hanya mengalami interferensi konstruktif, jika beda fase adalah kelipatan 1, atau  $r(k/k - k'/k) = nl$ .

Gelombang yang datang dinyatakan dalam vektor gelombang  $k$  dan frekuensi sudutnya adalah  $\omega$ , sedangkan gelombang datar yang dihamburkan dinyatakan dalam  $k$  dan  $\omega$ . Vektor  $k$  terletak tegak lurus terhadap muka gelombang, yaitu arah penjalaran gelombang dan harganya adalah  $k = 2\pi/l$ . Gelombang dinyatakan dalam persamaan  $E = E_0 \sin(k \cdot x - \omega t)$  atau secara sederhana ditulis  $E = E_0 e^{ik \cdot x - \omega t}$ . Dalam kasus ini dianggap bahwa  $k = |k| = k = |k|$  dan  $\omega = \omega$ .

Apakah arah tertentu  $k$  dari semua bagian berkas mengalami interferensi konstruktif atau destruktif, hanya bergantung pada perbedaan fase. Misalkan titik acuan kristal terletak di titik 0 dan perbedaan fase suatu gelombang yang dihamburkan dapat ditentukan dari suatu titik kisi pada  $r = \sum n_i a_i$  terhadap gelombang yang datang melalui titik nol. Gbr. [14.14] menunjukkan bahwa gelombang harus melewati lintasan sejauh  $r \cos(k \cdot r) = r \cdot k/k$ . Beda fase adalah  $r \cdot (k - r) = r \cdot \Delta k$ . Berdasarkan definisi perkalian skalar, skalar yang didapat tidak lain sebagai garis proyeksi, atau garis  $k$  sendiri, yaitu jika  $r$  tidak terletak pada bidang yang ditempati oleh vektor  $k$  dan  $k'$ .

Semua amplitudo bagian gelombang saling menambahkan satu sama lain, jika beda fase antara semua titik-titik kisi adalah kelipatan bilangan bulat dari  $2\pi$ , atau dengan perkataan lain jika:

$$\Delta \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \Delta \mathbf{k} \cdot \sum n_i \mathbf{a}_i = 2\pi m \quad (14.1)$$

dengan  $m$  adalah semua bilangan bulat dari tiga bilangan  $n_i$ . Untuk semua  $\Delta \mathbf{k}$  yang tidak memenuhi syarat hamburan ini, yaitu semua  $\Delta \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$  yang tidak memenuhi bilangan bulat untuk semua vektor  $\mathbf{r}$ , beda fasenya sebagian akan terdistribusi secara sama dalam interval  $(0, 2\pi)$ , atau sebagian gelombang mengalami interferensi saling menghilangkan (destruktif)<sup>2)</sup>. Pers. [14.1] adalah bentuk lain rumusan BRAGG seperti yang dinyatakan pada pers. [12.39] (lihat soal 14.1.9).

Rumusan yang sangat elegan untuk mencari penyelesaian syarat hamburan (difraksi) ini (dan juga dapat digunakan untuk fenomena yang mirip lainnya) adalah melalui pengenalan apa yang disebut sebagai *kisi balik* (kisi rpsiprok). Kisi ini merupakan kisi translasi dengan vektor basis  $\mathbf{a}_i$  ( $i = 1, 2$ , dan  $3$ ) dan dapat dinyatakan dalam vektor basis  $\mathbf{a}_i$  dari kisi sebenarnya sbb:

$$\tilde{\mathbf{a}}_i \cdot \mathbf{a}_k = \delta_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{untuk } i \neq k \\ 1 & \text{untuk } i = k \end{cases} \quad (14.2)$$

Misalkan  $\mathbf{a}_1$  terletak tegak lurus terhadap  $\mathbf{a}_2$  dan  $\mathbf{a}_3$ , yaitu parallel terhadap perkalian silang (cross product) vektor  $\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3$ . Agar  $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1 = 1$ , maka haruslah:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{a}}_1 &= \frac{\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3}{\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3} \\ \tilde{\mathbf{a}}_2 &= \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_3}{\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_3} \\ \tilde{\mathbf{a}}_3 &= \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2} \end{aligned} \quad (14.3)$$

2) Patut dibayangkan bahwa ukuran kristal adalah jauh lebih besar dibanding ukuran gelombang dan praktis terdiri dari seian banyak satuan basis.

Jika  $a_i$  ortogonal, seperti halnya terdapat pada sistem kisi kubus, tetragonal dan orthorombik, maka  $a_i$  juga ortogonal, yaitu  $a_i \parallel a_i$  atau  $a_i = a_i/a_i$ . Perbedaan antara kisi kubus dan kisi baliknya hanya terletak pada perbedaan skala.

Sebuah vektor pada kisi balik ditulis dalam bentuk dalam bentuk umum sebagai:  $g = \sum l_i a_i$  dengan  $l_i$  adalah bilangan bulat. Produk perkalian titik vektor di kisi balik dengan vektor kisi sebenarnya secara otomatis menghasilkan bilangan bulat:

$$\begin{aligned} g \cdot r &= (\sum l_i \tilde{a}_i) \cdot (\sum n_i a_i) = l_i n_i \\ &= \text{bilangan bulat.} \end{aligned}$$

Dengan pertolongan kisi balik, maka syarat difraksi dapat ditulis dalam persamaan lebih sederhana sbb:

$$\Delta k = 2\pi g \quad (14.4)$$

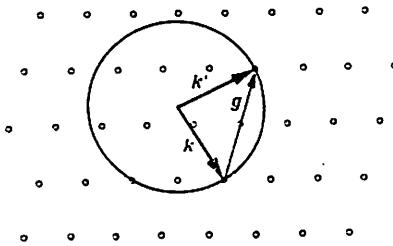
Kemungkinan refleksi yang terjadi terletak pada arah  $\Delta k$ , yaitu sebagai vektor kisi balik dimultiplikasi dengan  $2\pi$ .

Pola difraksi secara sederhana merupakan proyeksi dari kisi balik pada film, mirip seperti pola yang dibentuk oleh mikroskop elektron secara langsung, seandainya pola tersebut dibentuk oleh kisi sebenarnya.

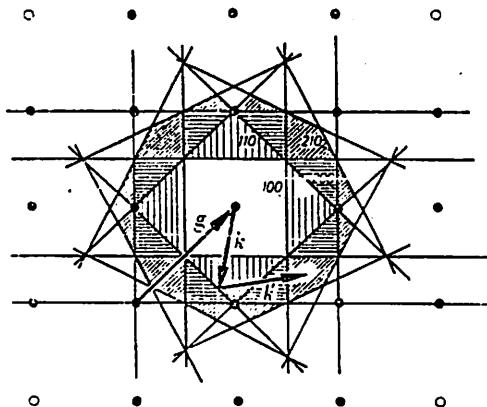
Syarat hamburan dapat diinterpretasikan dalam pengertian momentum: Foton (neutron) datang mempunyai momentum sebesar  $hk$ , sedangkan momentum yang dihamburkan adalah  $hk$ ; perubahan momentum pada saat foton dihamburkan adalah  $h\Delta k$  dan momentum yang mempunyai arah kebalikan, yaitu momentum pentalan yang diambil oleh kisi kristal. Hanya jika  $\Delta k$  adalah sebuah vektor yang terdapat di dalam kisi balik, tumbukan yang terjadi pada setiap titik-titik kisi yang mungkin akan memenuhi syarat fase dan dapat dipastikan bahwa semua kontribusi masing-masing foton akan saling tumpang tindih dengan momentum pentalan total. Hanya jika kristal

keseluruhan dapat mengambil seluruh momentum pentalan, maka pola difraksi (hamburan) dapat terbentuk.

Pengertian geometris terpenting dari syarat hamburan adalah konstruksi Ewald : Jika digambarkan suatu potongan bidang dari kisi



Gambar 14.14: Konstruksi Ewald untuk arah  $k$  sebagai vektor cahaya Roentgen yang dihamburkan oleh kristal:  $k - k$  haruslah sebuah vektor yang terdapat pada kisi balik.



Gambar 14.15: Brillouin zone suatu kisi empat persegi (potongan dari Brillouin zone dari kisi kristal NaCl). Setiap batas zone adalah pertengahan bidang dua titik dari kisi balik dan untuk kasus NaCl terlibat seperti kisinya sendiri. Suatu gelombang cahaya Roentgen atau elektron akan direfleksikan oleh batas zone pada arah normalnya, maka dalam kasus demikian akan terpenuhi syarat  $k - k = g$ .

balik dan tempatkan vektor  $k$  melalui suatu titik puncak di kisi balik  $P$ , maka arah kemungkinan refleksi dapat diketahui darinya, yaitu suatu vektor  $k$  yang memenuhi syarat hamburan.

Tidak semua vektor  $k$  dari cahaya datang terletak persis di atas lingkaran Ewald pada kisi balik. Apakah kondisi tersebut memenuhi atau tidak, secara sederhana dapat dilihat melalui *zone Brillouin* : Dari titik 0 sembarang yang terdapat pada kisi balik dapat ditarik suatu garis hubung pada titik-titik lainnya, yaitu sebagai seluruh vektor di kisi balik yang melalui masing-masing titik tengah garis hubung di mana terdapat bidang tegak lurus terhadapnya. Semua bidang-bidang ini membagi kisi balik dalam beberapa daerah, yaitu sebagai *zone Brillouin* (gbr. [14.15]). Hanya cahaya dengan vektor  $k$  yang digambaran melalui titik 0 akan berakhir pada batas zone dan direfleksikan oleh kristal, yaitu sebagai refleksi Bragg pada bidang penghubung yang paralel terhadap batas zone tersebut. Dalam hal ini  $\Delta k$  adalah sama dengan negatif vektor kisi  $g$ , garis tengah tegak lurusnya adalah batas zone sendiri. Cahaya dengan harga  $k$  lainnya tidak akan mengalami hamburan. Pada daerah bagian luar batas zone adalah lebih rapat dan berhubungan untuk vektor  $k$  yang termasuk di bagian dalam *zone Brillouin*, yaitu gelombang yang sangat panjang.

Setiap vektor  $g$  dari kisi balik terletak tegak lurus pada bidang penghubungan tertentu dari kisi sebenarnya (hubungan ini untuk vektor kisi sebenarnya dan bidang penghubung tidak berlaku secara umum, melainkan hanya untuk sistem kisi ortogonal). Bidang penghubung dikarakteristikkan oleh vektor kisi balik yang terletak normal terhadapnya (dalam indeks Miller atau Laue).

Suatu refleksi dinyatakan melalui komponen vektor kisi balik  $g = \Delta k/2\pi$ , dengan perkataan lain ditulis dalam indeks Miller dari bidang penghubung perefleksi yang terletak tegak lurus terhadap vektor  $g$ .

Syarat hamburan yang ditulis dalam berbagai bentuk memberikan arah di mana terdapat refleksi. Syarat ini hanya berhubungan dengan struktur kisi translasi. Berapa besar intensitas gelombang yang mengalami refleksi dan apakah intensitas bahkan "menghilang", bergantung pada struktur satuan basis kisi, yaitu dari:

- (a) susunan atom-atom di dalam satuan basis
- (b) struktur elektron yang terdapat di kulit atom-atom tersebut,
- (c) "getaran" termis dari kisi translasi beraturan.

Ketiga hal di atas berhubungan dengan pelemahan intensitas yang terjadi karena interferensi dari sebagian gelombang yang mengalami refleksi oleh elemen struktur satuan basis kristal.

Satuan basis, khususnya awalnya mengandung  $m$  atom pada posisi  $b_v$  dengan  $v = 1, 2, \dots, m$ . Gelombang bola yang direfleksi dan berasal dari atom ke  $v$  akan mempunyai amplitudo relatif sebesar  $A_v$ . Sumbangannya terhadap vektor gelombang  $k$  diberikan melalui perbedaan fase  $b_v \cdot \Delta k$  atau dengan faktor fasor  $e^{i\theta} v \cdot \Delta k$ . Amplitudo hamburan dari satuan basis diberikan melalui faktor struktur basis  $B = \sum A_v e^{i\theta} v \cdot \Delta k$ .

Pada penentuan faktor struktur atom  $A_v$  harus dibedakan antara hamburan cahaya Roentgen dan neutron. Foton akan dihamburkan oleh elektron-elektron yang terdapat di kulit atom dan jarang sekali atau bahkan tidak pernah dihamburkan oleh inti atom (massa yang besar); sedangkan neutron adalah sebaliknya, hampir sama sekali dihamburkan oleh inti atom, khususnya jika inti ringan. Pembahasan disini akan dititikberatkan pada hamburan foton, dengan hamburannya mengungkap tabir kerapatan elektron yang terdapat di sekitar kristal. Kerapatan elektron yang terdapat di atom ke  $v$  pada posisi  $x$ , dihitung dari titik berat atom  $b_v$  adalah  $n(x)$ . Suatu elemen volume kristal  $dV$  yang mengandung  $n(x)$  elektron menghamburkan foton. Dengan demikian, akan diperoleh kontribusi seluruh atom terhadap amplitudo gelombang yang dihamburkan adalah:

$$\int e^{i(b_v + x) \cdot \Delta k} n(x) dV = e^{i(b_v \cdot \Delta k)} \cdot \int e^{i(x) \cdot \Delta k} n(x) dV \quad (14.5)$$

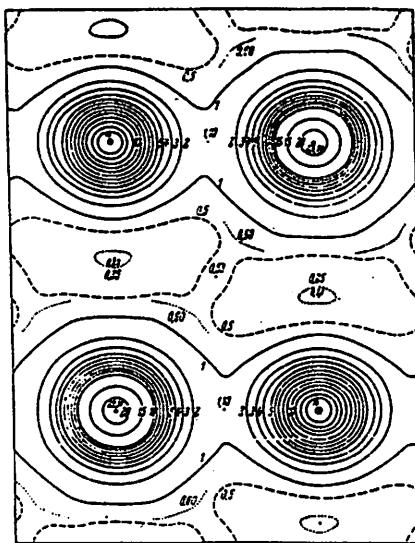
Maka faktor struktur atom didefinisikan sbb:

$$A_v = \int e^{i(x) \cdot \Delta k} n(x) dV \quad (14.6)$$

Untuk atom berbentuk titik (gelombang dianggap praktis mempunyai panjang gelombang yang besar) faktor  $e$  sama dengan 1, sehingga  $A\mathbf{v} = Z$ , dengan  $Z$  adalah jumlah elektron total yang terdapat di kulit atom. Setiap pembesaran distribusi elektron akan menyebabkan melemahnya amplitudo karena struktur terjadi interferensi "dalam" dan akan semakin kuat jika  $\Delta\mathbf{k}$  semakin besar, yaitu jika  $\lambda$  (panjang gelombang cahaya) semakin pendek. Tahapan pelemahan ini untuk berbagai harga  $\lambda$  yang berbeda, dapat menentukan harga  $n(\mathbf{x})$ . Amplitudo dan kerapatan elektron, berdasarkan pers[14.6], masing-masing dapat dicari hubungannya melalui bentuk asal persamaan atau transformasi Fourier. Transformasi Fourier dari faktor struktur (integrasi terhadap ruang  $\mathbf{k}$  memberikan harga  $n(\mathbf{x})$ .

Kisi translasi reguler yang diandaikan di atas secara fisis tidak terdapat, melainkan kisi mengalami getaran termis (sebagai pendekatan ke nol dianggap atom-atom mengalami getaran yang saling tidak bergantung satu sama lain), dengan amplitudo berubah beberapa persen akibat berubahnya konstanta kisi dan adalah sangat mengagumkan bahwa kisi yang mengalami getaran akan menimbulkan pola hamburan yang lebih tajam. Sebagaimana terlihat pada gbr [14.16], ketajaman pola noda-noda hasil perhitungan bergantung dari apakah partikel-partikel (atom) mempunyai posisi setimbang rata-rata terhadap waktu yang konstan (tetap) atau tidak, atau dengan perkataan lain apakah bahan kristal dapat dipandang sebagai benda yang benar-benar padat. Deviasi termis pada posisi etimbang berperan hanya sebagai tambahan dalam pelemahan intensitas dari faktor struktur. Misalkan posisi sesaat atom dinyatakan dalam  $\mathbf{b} = \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1(t)$ , dengan  $\mathbf{b}_1(t)$  adalah simpangan posisi atom tidak beraturan akibat agitasi termis. Dalam perata-rataan terhadap waktu  $\mathbf{b} = \mathbf{b}_0$ , atau  $\mathbf{b}_1 = 0$  Dengan demikian maka harga rata-rata amplitudo menjadi  $e^{i\mathbf{b}_0\cdot\Delta\mathbf{k}} = e^{i(\mathbf{b}_0+\mathbf{b}_1)} = e^{i\mathbf{b}_0\Delta\mathbf{k}} + e^{i\mathbf{b}_1\Delta\mathbf{k}}$ . Faktor pertama telah diamati pada faktor struktur  $B$ . Dengan membuat deret untuk suku kedua:

$$\overline{e^{i\mathbf{b}_1\cdot\Delta\mathbf{k}}} \approx 1 + i\overline{\mathbf{b}_1} - \frac{1}{2} \overline{(\mathbf{b}_1 \cdot \Delta\mathbf{k})^2} \quad (14.7)$$



Gambar 14.16: Profil distribusi kerapatan elektron pada kristal NaCl, dihitung berdasarkan transformasi Fourier dari faktor bentuk struktur. Angka-angka yang terdapat di atas garis "ketinggian" menyatakan kerapatan elektron dalam  $\text{A}^{-2}$  dan merupakan potongan proyeksi bidang (110) dari sel elementer. Terdapat kerapatan elektron yang sangat kecil antara atom: pada kristal ion [dikutip dari Brill, Grimm, Hermann dan Peter, dari W. Finkelnburg].

Suku kedua akan hilang, seperti halnya  $\bar{b}_1$  (demikian pula produk perkalian skalar lebih sering berharga positif dari negatif). Dalam suku kuadrat tidak demikian halnya. Terdapat hanya komponen dari  $b_1$  pada arah  $\Delta k$  yang berharga  $1/3$  dari harga total  $b_1^2$  (lihat energi kinetik rata-rata dari gas, x 5.2.1):  $\frac{1}{2}(\bar{b}_1 \cdot \Delta k) = \frac{1}{6}\Delta k^2 \cdot b_1^2$ . Pelemanan amplitudo karena deviasi termis juga dinyatakan melalui faktor Debye-Waller (dengan membuat kebalikan deret  $e$  secara lengkap):

$$f_{DW} = e^{-\frac{1}{6}\Delta k^2 \cdot \bar{b}_1^2} \quad (14.8)$$

Kuadrat pergeseran rata-rata  $\bar{b}_{12}$  secara klasik dan kuantum mekanik adalah berbeda. Untuk partikel yang bergetar secara klasik, secara klasik mengalami simpangan terhadap posisi setimbangnya

dengan konstanta pegas  $D = m\omega^2$ , akan mempunyai energi termis  $\frac{1}{2}kT$  sama dengan energi potensial dari partikel yang mengalami getaran  $\frac{1}{2}m\omega^2b_{10}^2$ ; dengan  $b_1^2 = \frac{1}{2}b_{10}^2$ , sehingga:

$$f_{DW} = e^{-\frac{1}{2}\Delta k^2 2kT/m\omega^2} \quad (14.9)$$

Osilator harmonik dalam mekanika kuantum pada temperatur  $T \rightarrow 0$  juga mempunyai energi nol  $\frac{1}{2}\hbar\omega$ , yaitu untuk setiap derajat kebebasan getaran, sedangkan untuk keseluruhannya terdapat  $\frac{3}{2}\hbar\omega$ . Setengah daripadanya merupakan energi potensial, sehingga faktor Debye-Waller secara kuantum dapat dituliskan dalam bentuk:

$$f_{DW} = e^{-\frac{1}{4}\Delta k^2 \hbar/m\omega} \quad (14.10)$$

Pelemahannya intensitas adalah sebanding dengan pelelahan amplitudo kuadrat, atau pada suku eksponensial ini intensitas menjadi lemah dua kali lipat.

Apa yang dapat diperoleh dari intensitas yang "hilang" atau khususnya dari faktor Debye-Waller ini? Foton tidak akan dihamburkan secara elastik oleh kisi kristal, melainkan terdapat sebagian hamburan yang tidak elastik, misalkan sebagian *hamburan Brillouin* antara foton dan partikel getaran *fonon*. Foton demikian tidak menumbuk kristal keseluruhan, yang karena massa kristal yang sangat besar menyebabkan adanya kehilangan energi, melainkan menumbuk masing-masing atom dan akan menyebabkan terjadinya getaran kisi atau sebaliknya. Faktor Debye-Waller menggambarkan fenomena yang analog pada efek Moessbauer pada proses absorpsi sebagian kuantum  $\gamma$ , yang praktis atom pemancar sinar  $\gamma$  tidak mengalami pentalan, atau dengan perkataan lain tanpa terjadi pergeseran frekuensi, karena kristal yang tersusun oleh atom-atom pemancar sinar  $\gamma$  akan mengambil semua momentum pentalan sinar  $\gamma$ . Bagian ini akan meningkat dengan penurunan temperatur: Semakin rendah temperatur, maka kristal akan semakin "keras". Akan tetapi pengerasan kristal demikian, seperti halnya telah dibahas sebelumnya, tidak dinyatakan dalam besaran-besaran elastis makroskopik, melainkan dalam besaran-besaran atomik.

#### 14.1.4 Energi Kisi

Semua benda yang berada di sekitar kita tetap mengambil bentuk seperti adanya karena terdapat gaya-gaya yang bekerja padanya sedemikian, yang pada akhirnya dapat dihubungkan dengan sifat listrik alamiah benda tersebut. Gaya-gaya tersebut menentukan kekuatan benda, juga sifat termis seperti titik lebur, titik didih dan muai termis. Dalam pembahasan ini akan dipilih enam sifat yang berhubungan dengan pengertian mendasar, yaitu kerapatan  $\rho$ , energi kisi  $E_o$ , titik lebur  $T_s$ , koefisien muai kubus  $\beta$ , modulus elastisitas  $\epsilon$  dan regangan  $\delta$ , selanjutnya dicari hubungan fenomenologi besaran-besaran tersebut dengan teori (lihat tabel[14.4]).  $\epsilon$  dan  $\delta$  dalam keadaan ideal menentukan *diagram tegangan-regangan*, akan tetapi tidak akan memenuhi potongan "tidak elastiknya, berlaku untuk *proses pergeseran letak dan dislokasi* (lihat x 14.5.4).

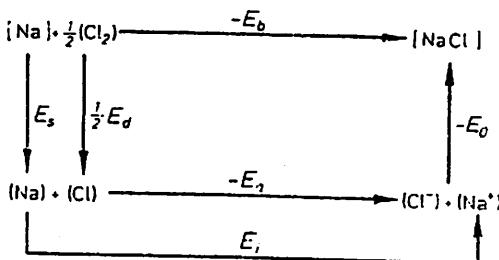
Dari keenam sifat tersebut hanya energi kisi yang dapat digunakan sebagai alasan untuk mendefinisikannya lebih rinci. *Energi kisi* adalah energi yang diperlukan untuk membengkokkan bagian kisi hingga masing-masing mencapai jarak tak berhingga, tentunya relatif terhadap bagian-bagian lain dari kisi. Untuk kisi yang terdiri dari atom atau molekul secara praktis sesuai dengan pembuktian keadaan gas. Energi kisi tidak lain adalah *panas sublimasi* atomik atau *panas sublimasi molekuler*. Pada kisi ion harus digunakan prosedur perhitungan yang berbeda (*proses siklik*, lihat gbr. [14.17]) Born-Haber). Misalkan terdapat 1 Mol Na padat ditambah dengan 1/2 Mol  $\text{Cl}_2$  uap, molekul-molekul  $\text{Cl}_2$  mengalami dissosiasi terbatas pada *energi dissosiasi* sebesar  $E_d/2$ , sedangkan Na mengalami penguapan dengan *panas sublimasi*  $E_s$ ; 1 mol Na mengambil elektron-elektron dengan batasan *energi ionisasi* sebesar  $E_I$  dan elektron-elektron ini akan memberikan energi pada atom Cl sehingga akan menimbulkan *energi afinitas*  $E_A$ , kemudian kedua ion akan saling mengikat satu sama lain lain membentuk kristal dengan menggunakan *energi kisi* yang dicari  $E_o$ . Selain itu Na padat dan  $\text{Cl}_2$  uap dapat secara langsung dibentuk menjadi  $\text{NaCl}$ , dengan menggunakan *panas pembentukan*  $E_b$ . Dengan demikian  $E_o$  iring

dapat dinyatakan dalam semua energi yang dapat diukur di atas, yaitu sbb:

$$E_o = E_b - E_a + E_i + E_s + \frac{1}{2} E_d. \quad (14.11)$$

Regangan  $d$  bergantung pada teknologi sifat material, yaitu perlakuan pembuatan kristal. Untuk logam-logam tertentu, khususnya logam transisi, di dalam subkulit  $d$  yang terisi dan ke kanan darinya, diperoleh harga  $d$  lebih dari 50%, sedangkan untuk unsur bukan logam harganya hanya sekitar 1%.

Tabel[14.4] menunjukkan sifat-sifat bahan saling berhubungan satu sama lain dan sifat-sifat tersebut menunjukkan perbedaan karakter



Gambar 14.17: Proses siklik Born-Haber untuk menentukan energi ikat  $E_o$  suatu kristal dari data-data yang diketahui tentang energi reaksi, penguapan, dissosiasi, ionisasi dan ikatan elektron.

teristik dalam sistem periodik. Suatu bahan yang mempunyai energi kisi besar akan sukar melebur, juga sukar mengalami regangan dan keras. Dalam angka berbagai sifat ini bervariasi dalam orde sepuluh pangkat sekian. Kristal terlunak adalah kristal-kristal dari gas mulia, akan tetapi kristal unsur alkali juga tidak begitu keras. Secara umum kristal terkeras terletak di tengah-tengah suatu periode, Hal ini berlaku khususnya untuk C dan pada periode lebih tinggi untuk "logam-logam transisi", yaitu unsur-unsur yang mempunyai kulit  $d$  berulang-ulang. Sementara kekerasan kristal akan menurun dengan meningkatnya periode dan sebaliknya pada pertengahan zone  $d$ ; lompatan ke samping dari zone  $d$  menyebabkan kecederungan penurunan kekerasan (Zn, Cd, Hg!).

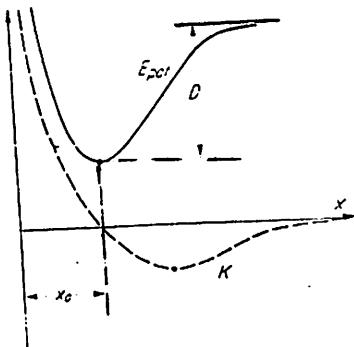
Penyebab mengapa zat padat mempunyai kerapatan tertentu (kebalikan dari gas) adalah karena partikel-partikel yang membentuknya saling "menjaga" jarak kesetimbangan masing-masing pada  $\pi_0$ . Jarak kesetimbangan seperti ini, seperti biasanya, adalah akibat adanya gaya

Tabel 14.3: IKATAN KRISTAL.

Macam ikatan	Macam gaya ikat	Contoh		Pengulangan
		Bahan	$E_0$ [kcal/Mol]	
Ikatan ion (Heteropolar)	Elektrostatik, atom sbg. ion yang tidak sama masuk di dalam kisi	NaCl LiF	180 240	Absorpsi cahaya besar dalam daerah ultramerah. Konduktivitas elektrolit akan meningkat sebanding temp.
Ikatan valensi (homeopolar)	Arah „Gaya valensi“ dari atom-atom yang sama terdapat di dalam molekul. Valensi digambarkan sbg. garis, secara mekanika kuantum dapat dilihat (kristal=super molekul)	Intan Ge Si	170	Sangat keras; pada temp. rendah kristal tidak menunjukkan sifat pengantarnya
Ikatan dipol	Melalui dipol tetap dari molekul pembentuk atau melalui ikatan hidrogen terikat relatif lemah	Es HF	12 7	Cenderung membentuk grup molekul besar
Ikatan VAN DER WAALS (kristal molekul)	Gaya VAN DER WAALS seperti halnya pada gas tidak ideal terbentuk	Ar CH <sub>4</sub> bahan organik	1,8 2,4	Temp. lebur dan didih rendah. Modulus kompresi dan kekerasan kecil
Ikatan logam	Terikat bersama-sama karena elektron yang pada proses pembentuk kristal berasal dari atom-atom yang sama	Na Fe	26 94	Konduktivitas listrik besar karena elektron. Tidak tembus cahaya

tarik menarik, jika partikel saling mendekat dan tolak menolak jika partikel saling menjauh yang semuanya terjadi pada jarak cukup kecil. Agar terjadi demikian, maka tolak menolak haruslah lebih "besar" bergantung terhadap jarak dibanding dengan tarik menarik.

Table 14.4: BEBERAPA SIFAT ELEMEN (UNSUR) PADAT



Gambar 14.18: Gaya dan energi potensial yang bekerja pada atom yang terdapat di permukaan zat padat. Di dalam zat padat energi potensial adalah simetris, jika diamati hanya sebuah partikel yang mengalami pergeseran terhadap kisi lainnya.  $x$  adalah jarak partikel pada saat zat padat mengalami deformasi serbasama, maka akan diperoleh bentuk kurva yang sama pula.  $D$  untuk molekul dianggap sebagai energi dissosiasi dan untuk deformasi serbasama kisi disebut sebagai energi kisi.

Keduanya, adanya tarik menarik dan tolak menolak demikian dapat dinyatakan dalam ketergantungan pangkat energi potensial terhadap jarak  $r$ :

$$\text{energi potensial tarik menarik: } -Br^{-n},$$

$$\text{energi potensial tolak menolak: } -Ar^{-m},$$

sehingga energi potensial total menjadi:

$$E(r) = Ar^{-m} - Br^{-n} \quad (14.12)$$

Rumusan di atas dapat dimengerti sebagai berikut:

Jika kristal dibiarkan sedemikian, maka kristal cenderung akan mencari keadaan energi terendahnya, yaitu jika jarak partikel dengan partikel lain terdekatnya adalah  $r_0$ . Jika kristal diregang atau dimampatkan pada semua arah secara serbasama, maka jarak partikel dan tetangganya menjadi bertambah besar atau bertambah kecil,  $r$ , maka energi setiap partikel yang terdapat di dalam kisi zat padat tersebut adalah  $E(r)$ . Untuk  $r \rightarrow \infty$  maka  $E \rightarrow 0$ ; atau dalam hal ini

didefinisikan bahwa  $E(r_o) = E_o$  adalah sebagai energi kisi. Kerapatan zat padat diberikan secara sederhana sebagai:

$$\rho = M m_p / r_o^3 \quad (14.13)$$

$M$  = berat molekul partikel kisi,  $m_p$  = massa proton. Rumusan ini berlaku untuk kisi berbentuk kubus sederhana; untuk bentuk kisi lainnya tentu harus ditambah faktor pengali lainnya.

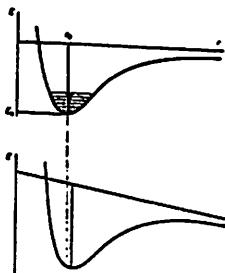
Jarak kesetimbangan  $r_o$  akan tercapai jika gaya  $E'(r)$  lenyap:

$$E' = -\frac{m}{r} A r^{-m} + \frac{n}{r} B r^{-n} = 0$$

Dengan demikian kedua macam (bagian) energi potensial untuk  $r = r_o$  dapat dinyatakan dalam  $E_o$  sebagai berikut:

$$\begin{aligned} A r_o^{-m} &= E_o \frac{n}{m - m} \\ B r_o^{-n} &= E_o \frac{m}{m - m} \end{aligned} \quad (14.14)$$

Apa yang diperlukan sekarang adalah mencari kelengkungan di mana potensial minimum



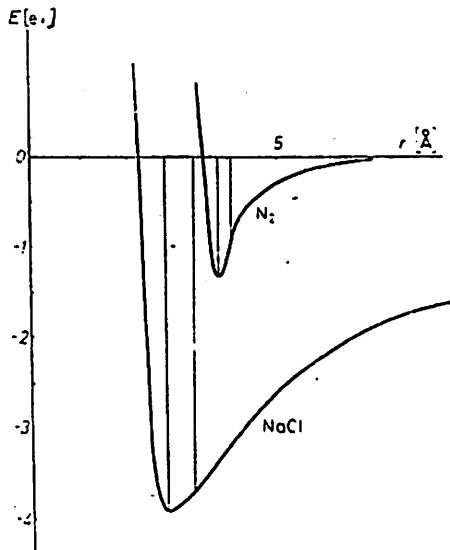
Gambar 14.19: Sifat termis dan elastik zat padat. Atas: Kurva potensial dengan term getaran. Titik kesetimbangan getaran melengkung sedemikian ke arah luar, jika keadaan getaran semakin tinggi (simpangan semakin besar), sehingga menyebakan pemuaian. Bawah: Pergeseran kurva potensial melalui tegangan elastik menyebabkan terjadi pergeseran minimum, menyebabkan terjadinya regangan elastik.

$$\begin{aligned}
 E''(r_0) &= \frac{m(m+1)}{r_0^2} Ar^{-m} - \frac{n(n+1)}{r_0^2} Br^{-n} \\
 &= \frac{mn}{r_0^2} E_0
 \end{aligned} \tag{14.15}$$

dan turunan ketiga sebagai asimetri kurva  $E$  adalah

$$\begin{aligned}
 E'''(r_0) &= -\frac{m(m+1)(m+2)}{r_0^3} Ar^{-m} + \frac{n(n+1)(n+2)}{r_0^3} Br^{-n} \\
 &= \frac{mn(m+n+3)}{r_0^3} E_0
 \end{aligned} \tag{14.16}$$

(Persamaan di atas diperoleh dengan mensubstitusi pers. [14.14]). Dengan didapat tiga turunan energi potensial di atas, maka energi



Gambar 14.20: Kurva potensial untuk sebuah partikel di dalam Nitrogen padat atau kristal NaCl. Titik minimum dan titik balik digambarkan.

potensial minimum dapat ditulis dalam deret Taylor sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 E &= E_0 + \frac{1}{2} E'' x^2 + \frac{1}{6} E''' x^3 \\
 &= E_0 \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{mn}{r_0^2} x^2 - \frac{1}{6} \frac{mn(m+n+3)}{r_0^3} x^3 \right)
 \end{aligned} \tag{14.17}$$

dengan  $x = r - r_0$  adalah jarak minimum.

$E''$  secara langsung memberikan modulus elastisitas dan  $E''$  memberikan muai termis kristal. Misalkan kristal ditempatkan di dalam ruang dengan tekanan serbasama  $p$ . Pada sebuah partikel yang mengambil luas  $r_0^2$  akan bekerja gaya sebesar  $F = pr_0^2$ . Gaya yang beraturan seperti ini dapat diturunkan dari potensial linier  $U = -Fx = pr_0^2x$  dan akan tumpang tindih dengan potensial bebas regangan  $E(x)$ . Dapat pula dikatakan bahwa potensial ini akan miring ke sebelah kiri dengan sudut tertentu, yaitu jika  $E'(x) = pr_0^2$ , atau berarti pula pada  $x = pr_0^2/E''(x)$  atau secara relatif disekitar:

$$\frac{x}{r_0} = \frac{pr_0^3}{mnE_0}$$

Faktor dari  $p$  adalah tiga kali modulus elastisitas (karena arah regangan geser ada tiga  $[x,y,z]$ ) atau kebalikan dari kompresibilitas:

$$\epsilon = \frac{r_0^3}{3mnE_0}$$

Untuk suatu tarikan, atau tekanan negatif, terdapat suatu harga maksimal, di atas harga tersebut kristal akan mengalami kerusakan. Tarikan ini sesuai dengan kemiringan tangen dari kurva  $E(r)$ . Pada perlakuan demikian tidak akan timbul lagi gaya-gaya yang melawan tarikan. Posisi titik balik dari kurva  $(E(r)$  pers. [14.12] dengan pertolongan pers. [14.14] didapat:

$$r_w = r_0 \left( \frac{m+n}{n+1} \right)^{1/(m+n)} \quad (14.19)$$

Paling tidak pada regangan  $d = (r_w - r_0)/r_0$  kristal akan mengalami kerusakan. Untuk harga  $m$  dan  $n$  yang realistik diperoleh harga  $d$  sekitar 10 hingga 30%, yang ternyata untuk logam-logam *duktile* terpenuhi. Bahan-bahan *rapuh* tidak akan mengikuti mekanisme ini, melainkan telah patah pada harga regangan yang sangat kecil, di mana terdapat *kekosongan* di dalam kisi kristal, khususnya adanya *dislokasi* di dalam kisi kristal sangat berperan dalam hal ini (lihat § 14.5.4).

Pemuiaian termis dapat djelaskan sebagai berikut: Pada temperatur  $T$  partikel-partikel kisi mempunyai energi potensial sama dengan  $3/2kT$

(demikian pula dengan energi kinetik). Partikel-partikel di dalam kisi mengalami getaran sehingga simpangan partikel akan melalui titik setimbang pada jarak  $r_o$ . Jika partikel tidak lagi bergetar secara harmonik, melainkan terdapat simpangan yang lebih besar, sehingga posisi titik setimbangnya bergeser dari posisi  $r_o$ , yaitu  $r$ , maka dikatakan kristal mengalami pemuaian. Dengan memandang kembali ketidaksimetrian kurva potensial, hal ini dapat dijelaskan lebih rinci. Asimetri kurva potensial pada proses pemuaian termis ini menyebabkan simpangan rata-rata partikel tidak lagi berada pada  $r_o$ , melainkan akan bergeser lebih ke arah kanan dari  $r_o$ .

Dengan potensial yang dinyatakan pada pers. [14.17], untuk amplitudo getaran  $x = r - r_o$  dapat dihubungkan dengan temperatur:

$$\frac{1}{2} E_o'' x^2 + \frac{1}{6} E_o''' x^3 = \frac{3}{2} kT$$

Untuk  $T$  yang tidak begitu besar, amplitudo memenuhi persamaan:

$$\text{ke arah kiri} : x = -\sqrt{\frac{3kT}{E_o''}} + \zeta$$

$$\text{ke arah kanan} : x = +\sqrt{\frac{3kT}{E_o''}} + \zeta$$

Titik tengah getaran, secara pendekatan, terletak di sekitar:

$$\zeta = \frac{\frac{1}{6} E_o'' \frac{3}{2} kT}{\frac{1}{2} E_o''^2} = \frac{m+n+3}{2mn} \frac{kT}{E_o} r_o$$

yaitu di sebelah kanan dari posisi setimbang  $r_o$ . Koefisien muai linier adalah:

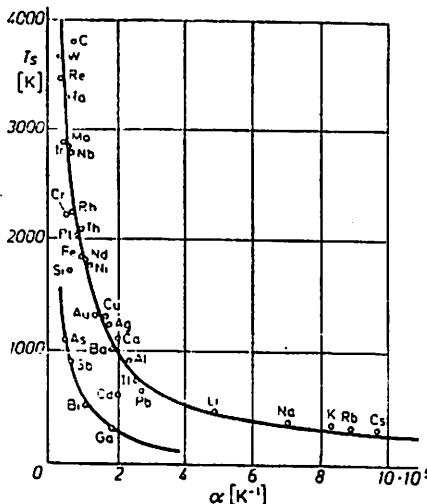
$$\alpha = \frac{\zeta}{r_o T} = \frac{m+n+3}{2mn} \frac{k}{E_o} \quad (14.20)$$

Kristal akan mengalami penguapan jika energi termis lebih kurang sama dengan energi ikat partikel-partikel di dalam kristal (berhubungan erat dengan entropi: lihat § 5.6.7). Kristal akan meleleh jika  $kT$  sama dengan faktor tertentu dari  $E_o$ . Berdasarkan pers [14.20], di samping  $\alpha \approx E_o^{-1}$ , diperoleh pula hubungan  $\alpha \approx T_s^{-1}$ , yang untuk kebanyakan logam dipenuhi (gbr. [14.21]). Dari hubungan yang ada

dapat pula diketahui bahwa logam akan mengalami pelelehan jika logam dari 0 K mengalami pemuaian sekitar 2%. Unsur-unsur setengah logam seperti As, Sb, Bi, Ga mengalami pelelehan pada temperatur yang lebih rendah (dapat dijelaskan menurut kurva potensial).

#### 14.1.5 Ikatan pada Kristal

Semua gaya yang bekerja sehingga kristal tetap berada dalam keadaan seperti adanya pada akhirnya berhubungan dengan gaya elektrostatik. Gaya magnetik dalam hal ini diabaikan. Dalam banyak kejadian gaya Coulomb mempunyai peran penting dan gaya ini bekerja secara "terselubung" serta mempunyai harga yang berbeda-beda, bergantung dari susunan inti dan elektron dari partikel yang mengisi kristal.



Gambar 14.21: Hubungan antara temperatur leleh  $T_s$  dan koefisien muai. Hiperbola yang berada lebih ke dalam sesuai dengan teori. Parameternya untuk unsur logam dan setengah logam adalah berbeda.

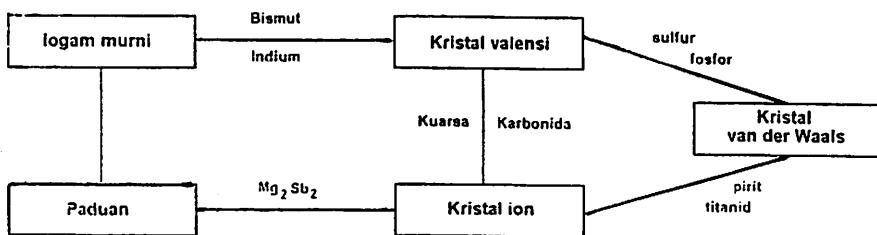
**Kristal Ionik.** Gaya ini terdapat dengan jelas jika kristal disusun oleh ion-ion, seperti misalnya  $\text{Na}^+ \text{Cl}^-$ . Unsur-unsur menjadi ion jika terdapat energi yang melebihi energi satu atau beberapa elektron,

misalnya untuk contoh NaCl, jika energi afinitas elektron  $E_A$  dari Cl tidak lebih kecil dari energi ionisasi  $E_I$  dari Na, maka atom-atom Na dan Cl bebas tidak akan dapat saling menukarkan elektronnya, akan tetapi muncul energi sisa yang dihasilkan bersama-sama penempatan muatan dari partikel bermuatan menjadi kristal. Energi yang dihasilkan NaCl adalah sebagai berikut: (angka-angka dalam eV/partikel):

	Energi yg. Dihasilkan	Energi Batas
Energi ionisasi Na		$E_I = 5,1$
Penempatan elektron Cl	$E_A = 3,6$	
Bagian potensial tarik menarik		8,8
Bagian potensial tolak menolak		0,9
Energi ikat	6,4	

Dalam larutan air perbandingan adalah mirip. Untuk kasus ini terdapat *energi hidrasi* yang berasal dari persenyawaan H<sub>2</sub>O (momen dipol molekul) untuk "sentakan" ion.  $E_A$  untuk Na adalah demikian kecil, karena pengaruh muatan inti Cl melalui konfigurasi elektron kulit yang hampir penuh  $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^5$  pada akhirnya, elektron 3p dengan lintasan yang lebih sempit akan mengalami pengaruh lebih besar, sebaliknya inti Na melalui konfigurasi  $1s^2 2s^2 2p^6$  dengan elektron 3s mempunyai lintasan lebih besar akan mengalami pengaruh lebih kecil.

Umumnya karakter ion suatu ikatan akan mengambil jarak horizontal terhadap ion partner dalam sistem periode. Suku tarik menarik potensial kisi secara sederhana merupakan energi Coulomb antara ion yang susunannya kemungkinan dapat saling dipertukarkan. Dengan demikian pers. [14.12] dapat dituliskan untuk  $n = 1$ . Suku tolak menolak energi



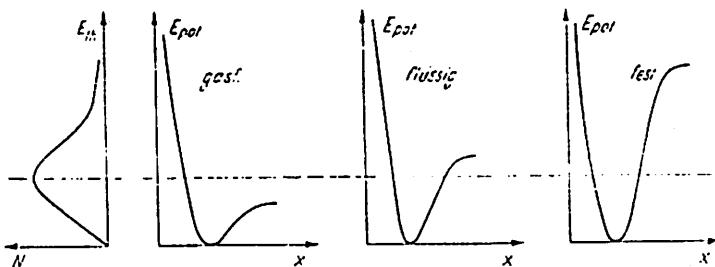
Gambar 14.22: Hubungan antara beberapa macam ikatan [dikutip dari Setz, dari W. Finkelburg].

potensial kisi akan muncul, jika elektron-elektron kulit mencoba menembus satu sama lain dan energi ikat elektron ini cenderung sangat "tajam" ( $m \approx 10$ ; kebanyakan dihitung dengan menggunakan energi potensial "pelindung" yang menurun secara eksponensial). Dari pers[14.14] selanjutnya, jika mengacu pada jarak setimbang  $r_0$ , hanya diperlukan koreksi kecil ( $n/m \approx 0,1$ ) pada potensial tolak menolak.

Tentunya potensial tarik menarik dari ion yang saling bertetangga tidak secara sederhana sesuai dengan energi Coulomb  $-e^2/4\pi\epsilon_0 r_0$ , sehingga sumbangan semua ion harus pula diperhatikan. Faktor ini dinyatakan dalam faktor Madelung  $u$  sebagai berikut:

$$E_{\text{anz}} = -\mu \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0} \quad (14.21)$$

$u$  sangat bergantung pada bentuk kisi dan untuk kisi NaCl harganya adalah  $u_{\text{NaCl}} = 1,748$  dan  $u_{\text{CsCl}} = 1,763$  (kubus BCC),  $u_{\text{ZnS}} = 1,638$  (kisi intan).



Gambar 14.23: Kurva potensial dari interaksi antar partikel, dibandingkan dengan energi termis pada keadaan agregat berbeda-beda (skematis); gas yang dipakai sebagai cuplikan adalah tidak ideal.

Pada kristal ion terdapat kemungkinan terbatas, bahwa masing-masing permukaan kisi dapat mengalami pergeseran, karenanya harus diketahui posisi ion yang terdapat di antaranya, di mana terdapat ion yang sama, terletak saling berseberangan. Karenanya pula kristal-kristal ion sulit mengalami deformasi (*deformasi plastis*).

**Kristal Valensi.** Ikatan yang terdapat di dalam kristal ion, misalnya kristal terdiri dari molekul ionik *AB*, berhubungan dengan "pergeseran" (perpindahan) dari satu atau beberapa muatan elektron dari ion *A* ke *B*. Pergeseran ini tidak harus sempurna. Hal lain yang ekstrim adalah adanya satu atau beberapa elektron yang terdapat antara *A* dan *B* dan mempunyai lintasan orbit yang sama. Elektron tersebut mempunyai tempat yang cukup sehingga akan mempunyai energi lebih rendah dibanding seandainya energi tersebut dimiliki oleh atom sendiri (lihat d 16.3.1). Energi yang mengalami penurunan ini tidak lain adalah *energi ikat*. Energi ikatan ini khususnya amat kuat jika diwakili oleh dua elektron sekaligus. Berdasarkan prinsip Pauli kedua elektron ini haruslah mempunyai spin yang berlawanan agar dapat mengitari orbit yang sama. Pengandaian untuk *ikatan kovalen* ini kemungkinan jika kedua atom mempunyai kulit elektron yang "terbuka" untuk ditempati elektron keduanya. Jika tidak, maka diperlukan energi tambahan agar elektron dapat berada pada orbit yang lebih tinggi lagi.

Ikatan kovalen terjadi pada unsur-unsur yang memiliki sifat yang sama dan di antaranya adalah unsur-unsur yang terletak dalam satu kolom atau dalam deret horizontal yang berdekatan dalam sistem berkala unsur-unsur. Kisi ruang yang dibentuk oleh atom-atom serupa ini hanya akan terjadi jika atom-atom paling tidak mempunyai valensi tiga. Syarat demikian adalah lebih baik untuk atom bervalensi empat (deretan ke empat) dan kurang baik untuk valensi tiga dan lima, atau unsur-unsur yang terletak dalam deretan ke tiga dan lima pada sistem berkala. C, Si, Ge, SiC adalah jenis *kristal valensi*; ikatan 3-5 seperti pada GaAs, InSb sebagian mempunyai karakter ion.

Gaya-gaya kovalen mempunyai arah yang sangat kuat. Kebanyakan kristalnya tidak mempunyai kemungkinan bilangan koordinasi lebih besar (biasanya 12 atau 8), melainkan didikte oleh "struktur" valensi dengan empat koordinasi (jika bervalensi empat), tanpa "memperhatikan" pengisian ruang secara optimal. Dengan adanya sifat yang agak longgar ini karena adanya arah ikatan yang amat kuat, menyebabkan kristal-kristal merupakan kristal yang amat keras dan rapuh. Intan (C), Karbon-Silikat (SiC) dan Borium nitrit (BN) adalah bahan-bahan yang paling keras dan termasuk yang mempunyai titik lebur tertinggi.

**Kristal Molekul.** Satu atau dua atom bervalensi dua telah mengalami kejemuhan pada molekulnya dan tidak mempunyai ikatan apapun dalam pembentukan kristalnya. Di dalam kristal molekul molekul ini terikat dengan gaya-gaya yang sangat lemah. Molekul- molekul tersebut paling tidak mempunyai momen dipol permanen, sehingga terdapat potensial yang menimbulkan gaya tarik menarik antar molekul dengan susunan paling efisien ( $\uparrow\downarrow$  atau  $\rightarrow\rightarrow$ ) yang bergantung  $r^{-3}$  (energi potensial antara dipol dan muatan titik sebanding dengan  $r^{-2}$ , antara dipol-dipol sebanding  $r^{-3}$ ). Pada jarak yang cukup dekat energi interaksi dapat mencapai harga 1 eV.

Sebuah ristal yang dibentuk oleh molekul *A* dan *B*, dengan *A* mempunyai momen dipole permanen  $p_A$ , *sedangkan B* tidak, keduanya akan tetap "terikat" dengan cara sebagai berikut:

Medan  $E$  dari dipol  $A$  mempengaruhi molekul tetangga  $B$  sehingga timbul momen dipol dengan arah berlawanan  $p_B = a_B E$  ( $a$  adalah polarisabilitas). Karena  $E \propto r^{-3}$ , maka energi interaksi keduanya menjadi  $W \propto p_A p_B / r^3$ , yaitu sebanding dengan  $r^{-6}$ .

Molekul-molekul, jika keduanya tidak memiliki momen dipol permanen dapat pula membentuk kristal karena adanya gaya Van Der Waals atau *gaya dispersi london*. Karena elektron-elektron yang terdapat pada molekul tidak tetap, terjadi akibat adanya deviasi distribusinya yang menyebabkan timbulnya momen dipol temporer, akan tetapi perata-rataan terhadap waktu dari momen dipol ini adalah sama dengan nol. Momen dipol temporer ini mempengaruhi molekul tetangga sehingga pada molekul tetangga terdapat pula momen dipol yang arahnya antiparalel. Sebagai hasil pengaruh interaksi ini, yaitu energi interaksinya, adalah sebanding dengan  $r^{-6}$ , mirip seperti di atas, akan tetapi lebih lemah. Gas-gas mulia seperti  $H_2$ ,  $Ne$ ,  $O_2$  karenanya mempunyai titik didih dan titik lebur yang rendah.

Potensial tolak menolak yang menjaga jarak kesetimbangan berasal dari larangan tumpang tindih dari elektron-elektron yang menempati kulit atom dan bentuknya sangat tajam. Energi interaksinya sebanding dengan  $r^{-12}$  atau  $e^{-r_0/\alpha}$ .

Ikatan karena momen dipol terdapat pada kristal-kristal yang dibentuk oleh molekul, salah satunya pada es, masih terdapat *ikatan hidrogen*. Sebuah proton dapat mempunyai kelakuan mirip elektron, terbagi antara dua molekul bertetangga atau saling dipertukarkan, jika terdapat donor proton (misalnya sebuah grup -OH atau NH-) terletak saling berlawanan dengan akseptor proton (misalnya O yang mempunyai pasangan elektron "kesepian" atau dengan perkataan lain kekurangan dua elektron untuk menjadi konfigurasi elektron gas mulia). Pada ahli Kimia menggambarkan situasi ini sebagai *tautomer berfluktuasi* antara "batas struktur" seperti  $NH \dots O^- N^+ \dots H^+ O$ . Energi ikat yang dihasilkan pada peristiwa tersebut adalah energi ikat campuran dari mekanika kuantum terdapat penurunan energi titik nol proton (gaya pertukaran) dan gaya tarik menarik elektrostatik antara

grup bermuatan pada "batas struktur". Adanya ikatan hidrogen (sering pula disebut *ikatan jembatan hidrogen*) tidak hanya mengikat air dan es seara bersamaan, tetapi juga struktur-struktur biologis atau struktur elementer biologis seperti molekul protein (khususnya pada  $\alpha$  - heliks) dan asam nukleat (DN heliks ganda).

**Kristal Logam.** Pada logam yang memiliki elektron-elektron yang mudah terlepas, cenderung terjadi "sosialisasi" elektron-elektron ybs. Tidak hanya atom-atom yang bertetangga, melainkan seluruh atom-atom yang terdapat di dalam kristal, memberikan kontribusi elektron valensinya untuk kristal keseluruhan. Dalam sistem kristal seperti ini, karena sifat elektron yang "bebas" bergerak di dalam kristal, melalui ion-ion logam, elektron-elektron tersebut dapat dianggap sebagai "gas elektron". Energi ikat berhubungan dengan energi titik nol elektron valensi atom-atom logam, yang selain sebagai elektron valensi juga sebagai elektron yang berkeliaran di seluruh volume kristal. Pada logam-logam transisi, dengan elektron harus mengisi kulit  $d$  terlebih dahulu, akan terdapat kontribusi ikatan kovalen sehingga kristal mempunyai kekerasan dan titik lebur yang tinggi.

Terlepas apakah ikatan melalui elektron valensi yang kelihatannya tanpa mempunyai arah tertentu, kemasan kristal logam mempunyai bilangan koordinasi yang tinggi (FCC, HCP juga BCC). Pergeseran permukaan kisi satu sama lain, yang berlawanan pada kristal ion, dalam hal ini adalah dimungkinkan:

"Ion-ion" suatu lapisan yang terletak di titik-titik kisi adalah sama, tidak terpengaruh di dalam "piring" tetangga mana ion-ion tergeser. Karenanya volume logam mudah diubah-ubah bentuknya. Berapa besar logam dapat menahan perubahan bentuk volumenya, sangat bergantung pada ikatan kovalen yang terdapat pada kristalnya, yang khususnya untuk logam-logam transisi adalah besar. Pada logam paduan dan logam-logam yang tidak murni, atom-atom logam "asing" akan bertaut pada suatu permukaan kisi sehingga mempersulit luncuran logam.

#### 14.1.6 Struktur Es

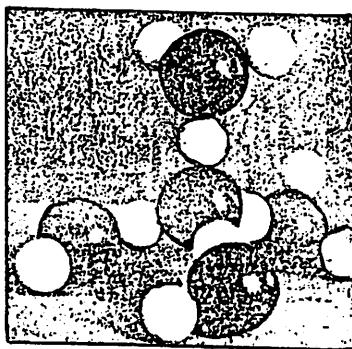
Oksigen mempunyai konfigurasi elektron  $1s^2 2s^2 2p^4$ . Oksigen kekurangan dua elektron untuk menjadi konfigurasi elektron Ne, yaitu dua elektron pada kulit 2p. Berdasarkan prinsip bangun elektron di dalam atom, elektron 2s mempunyai energi lebih rendah dibanding dengan elektron 2p (energi ikat 2s lebih besar dari 2p). Dari aturan Hund tiga orbital p, yaitu  $p_x$ ,  $p_y$ ,  $p_z$  dengan sumbu simetri saling tegak lurus satu sama lain, pertama harus terisi masing-masing oleh satu elektron (hingga Nitrogen). Elektron ke delapan dari Oksigen menempati salah satu orbital ini, katakanlah di orbital  $p_x$  (jadi orbital p oksigen:  $p_{x2}$ ,  $p_{y1}$ ,  $p_{z1}$ ). Maka terdapat dua elektron sisa yang tidak berpasangan (pada orbital  $p_{y1}$ ,  $p_{z1}$ ) dengan awannya membentuk hantel<sup>3)</sup> yang saling tegak lurus satu sama lain. Elektron-elektron tersebut dapat terikat dalam satu ikatan dengan elektron kulit 1s dari atom hidrogen. Kemudian terjadi "juluran panjang" inti O melalui awan elektronnya (muatan efektifnya =  $2e^-$ ), dengan perkataan lain, atom O cenderung menutup kulit-kulit elektron karena sifat afinitas elektronnya yang lebih elektronegatif:

Elektron ikatan (pengikat) akan berada lebih dekat dengan atom O dan sebagian akan meninggalkan inti atom H. Oksigen akan lebih bersifat negatif, setiap H akan mempunyai muatan parsial lebih positif. Adanya gaya tolak menolak Coulomb dari kedua atom H menyebabkan keduanya membentuk sudut dari sudut  $90^\circ$  pada awal ikatan O-H menjadi  $105^\circ$ . Sudut ini merupakan sudut yang berada di antara dua sudut titik berat suatu tetrahedral beraturan. Struktur elektron atom O mengalami deformasi yang mirip seperti pada atom C pada molekul CH<sub>4</sub>. Dari delapan elektron terluar (enam berasal dari O dan dua berasal dari H) dalam kondisi seperti disebutkan di atas secara energetis adalah yang paling efisien, sehingga tidak ada lagi perbedaan antara elektron *s* atau *p*, karena semuanya membentuk empat pasangan elektron, sebagai pasangan elektron *hibrida* yang tersusun dalam empat bagian secara tetrahedral menduduki "tonjolan". Empat tonjolan

3) Hantel adalah istilah untuk beban besi yang dipakai oleh para pengangkap besi (body builder).

ini telah ada sejak dari molekul  $\text{H}_2\text{O}$  bebas, tidak ada kondisi khusus apakah dua dari tonjolan tersebut mengikat proton dan dua lainnya sebagai "pasangan bebas", adalah sama saja. Hanya gaya tolak menolak Coulomb menghindar dari pengaruh proton, bahwa juga pada "pasangan bebas" dapat terikat sebuah proton ( $\text{H}_4\text{O}^+$ ). Ion  $\text{H}_3\text{O}^+$  relatif sering terbentuk di dalam air dan es (lihat bawah). Ion ini menentukan apa yang di dalam kimia secara skematis disebut sebagai ion H.

Di dalam kisi es "pasangan bebas" elektron sebagian terlepas, yaitu positif H bertetangga dengan molekul  $\text{H}_2\text{O}$  justru merupakan partner



Gambar 14.24: Sebuah atom O (hitam) di dalam es (sebagian juga terdapat di dalam air) secara tetrahedral dikelilingi oleh H. Atom H mana dari keempat susunan tersebut berasal tidak lagi dapat dibedakan jika struktur diamati dari berbagai masam sisi secara heksagonal [dikutip dari Kortuem, dari W. Finkelnburg].

yang sesuai dengan valensinya, secara persis dapat dikatakan terdapat ikatan hidrogen antara keduanya. O cenderung untuk menempatkan diri di sekitar atau bertetangga dengan empat molekul  $\text{H}_2\text{O}$  yang semuanya terikat bersama melalui ikatan hidrogen. Dua di antara empat ikatan hidrogen ini diperantara oleh dua H yang dibawa oleh O di dalam kisi tersebut. Sedangkan dua lainnya berhubungan dengan H "asing"; akan tetapi perbedaan ini sebagian tenggelam karena adanya kebebasan H pada ikatan hidrogen, di antara dua tempat yang diperbolehkan saling terjadi pertukaran (lihat keterangan di bawah).

Es mirip seperti intan, terjadinya kristalisasi di dalam kisi mengambil bentuk di sekeliling tetrahedral. Suatu kisi dapat dibentuk oleh dua FCC saling mengapit (tumpang tindih) satu sama lain (lihat § 14.1.1), atau dapat pula oleh dua HCP saling mengapit satu sama lain. Intan mempunyai kemungkinan pertama untuk ini, sedangkan es menempati urutan kedua (lihat soal 14.1.8). Dari bentuk bangun (struktur) tetrahedral (tetrahedral susu atau model atom C sederhana, biasanya dipakai sebagai alat peraga di laboratorium Kimia) tidak hanya dapat dibentuk kisi intan akan tetapi dapat pula dibuat kisi es dan dengan cara demikian dapat dipelajari kenyataan yang ada pada struktur-struktur tersebut.

Es mempunyai kelebihan arah tertentu, yaitu sumbu-*c* yang berada di sekitar tiga bilangan simetri, yang kadang-kadang terlihat seperti mempunyai enam bilangan simetri. Sumbu-*c* terletak tegak lurus pada bidang suatu "gumpalan salju" atau pada sumbu suatu parutan es yang amat halus. Molekul  $\text{H}_2\text{O}$  dari fase gas cenderung menempati posisi pada suatu titik di sisi sebagian bidang permukaan *c* (permukaan kisi adalah tegak lurus terhadap sumbu -*c*). Kadang-kadang molekul hanya terikat pada satu sumbu ikat, sedangkan sumbu ikat lainnya terikat molekul berikutnya. Permukaan *c* yang baru sebaliknya sukar untuk "memulai": Satu "molekul tetesan" hanya "menemukan" satu ikatan, molekul berikutnya demikian pula, hanya molekul ketiga, keempat dst. terikat dengan dua ikatan. Karenanya gumpalan salju berkembang lebih cepat pada permukaannya dibanding pada permukaan yang tegak lurus permukaannya. Pada intan perbandingan ikatan ini agak berbeda.

Di dalam  $\text{H}_2\text{O}$  cair kebanyakan molekul tersusun di dalam kisi es pula. Suatu "daerah" yang mirip es ini, yang secara tetap dapat lenyap dan kemudian terbentuk kembali, dipisahkan melalui ketidakberaturan, sehingga merupakan daerah yang terisolasi. Air sesungguhnya terdiri dari dua fase (atau bahkan lebih banyak lagi jika dipandang bahwa air terdiri dari molekul-molekul kompleks yang dapat dibedakan). Fase ini bertanggung jawab pada anomali kerapatan air: semakin tinggi temperatur, maka struktur kompleks molekul es yang terdapat di dalam daerah terisolasi akan semakin berkurang, hingga akhirnya lenyap.

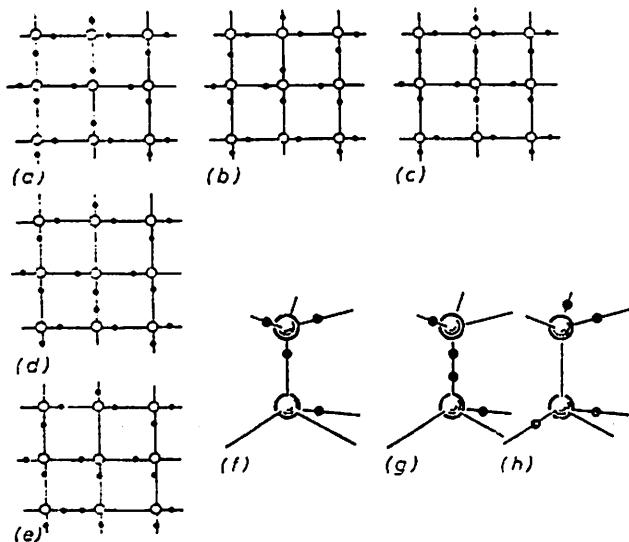
Tanpa adanya pemuaian air akan semakin rapat dengan kenaikan temperatur.

**Kesalahan Kisi pada Kristal Es.** Kristal beraturan dari es ini dapat dibedakan dalam dua macam:

**1. Kesalahan ion:** Sebuah O dapat dikelilingi secara langsung oleh tiga H, yang biasanya hanya dikelilingi oleh dua H. Dengan dasar netralitas (jumlah muatan positif dan negatif sama = netral), karena sesuatu, di suatu tempat di dalam kristal terdapat O lain yang hanya mempunyai satu H yang terikat padanya. Ion  $\text{H}_3\text{O}^+$  dan  $\text{OH}^-$  ini membentuk pasangan dengan satu H berpindah dari posisi normalnya pada ikatan O - O.

**2. Kesalahan Bjerrum:** Biasanya setiap satu ikatan O - O mempunyai hanya satu H. Jika terjadi pengecualian tidak terdapat atau tidak ada posisi yang menguntungkan untuk ditempati satu atom H, keadaan ini disebut sebagai *kesalahan d* atau *kesalahan l* (*d* = "dopplet" [=ganda] dan *l* = "leer" [kosong]). Keadaan ini dapat dibayangkan, bahwa kesalahan *d* dan *l* terjadi secara bersamaan, jika sebuah  $\text{H}_2\text{O}$  normal mengalami rotasi sebesar  $120^\circ$  di sekitar empat arah valensinya. Tolak menolak antara dua proton pada kesalahan *d* memberikan peningkatan energi yang besar dibanding pada ikatan normalnya. Mirip dengan kesalahan *d*, kesalahan *l* juga terjadi karena adanya "kekosongan proton" yang secara energetik terjadi peningkatan.

Kesalahan ion dan Bjerrum pada prinsipnya dapat timbul dengan kombinasi, terjadi karena alasan energetik dan terjadi amat sangat jarang. Peristiwa kesalahan kombinasi ini menyebabkan molekul-molekul yang kelebihan dan kekurangan (menjadi ion)  $\text{H}_3\text{O}^+$  dan  $\text{OH}^-$  mempunyai keadaan energi yang tinggi. Oleh karena itu, kesalahan ion dan Bjerrum mengikuti distribusi Boltzmann dan muncul sangat jarang jika temperatur semakin rendah. Apabila terjadi, maka kesalahan ini dapat beroindah dengan cepat di dalam kristal es.  $\text{H}_3\text{O}^+$  dalam hal ini akan memberikan sebuah proton pada molekul tetangganya. Akan tetapi hal ini sangat jarang terjadi dibandingkan dengan pemberian



Gambar 14.25: a-h. Kesalahan dalam kristal es dan perpindahannya. a) Kristal ideal. b) Terbentuk suatu pasangan ion. c) Terpisah lebih jauh. d) Terbentuknya pasangan kesalahan Bjerrum. e) Terpisah lebih jauh. f), g) dan h) konfigurasi ion sebenarnya pada kesalahan d dan l.

pada  $\text{OH}^-$  yang terletak persis di sebelahnya, sehingga kesalahan kombinasi ini dapat lenyap. Perpindahan kesalah ion atau kesalahan Bjerrum berarti adanya perpindahan (transport) muatan dan hal ini memberikan sumbangan pada sifat dielektrisitas dari es.

**Entropi Titik Nol Es.** Entropi kristal es heksagonal yang diekstrapolasi dari entropi titik nolnya memberikan harga sekitar  $3,4 \text{ Jk}^{-1} \text{ Mol}^{-1}$  dan hal ini merupakan contoh yang baik dari entropi struktur murni. Entropi suatu keadaan adalah logaritma natural dari probabilitasnya, yaitu logaritma dari jumlah kemungkinan realisasi yang sama untuk terjadinya keadaan ini. Pengetahuan tentang struktur kristal es memungkinkan untuk menghitung harga entropinya. Setiap O yang terdapat di dalam kisi es terdapat empat ikatan. Pada setiap ikatan tersebut terdapat dua tempat yang mungkin untuk ditempati oleh atom H. Biasanya hanya satu ikatan yang diduduki, karena setiap atom O mengikat dua H. Konfigurasi seperti ini adalah konfigurasi paling

efisien secara energetik. Selain itu akan terjadi kesalahan Bjerrum atau ion yang pada temperatur rendah tidak akan memberikan peran lagi. Terdapat kristal-kristal es yang bebas dari kesalahan, yaitu dengan membuat kristal es dari  $N$  molekul air. Berapa banyak molekul-molekul yang ada, secara sederhana dapat diperoleh, jika jumlah konfigurasi yang dibolehkan ditentukan pertama untuk salah satu dari kedua keadaan dan kemudian untuk keadaan kedua. Suatu konfigurasi tanpa kesalahan Bjerrum terjadi jika setiap ikatan pada O mengandung hanya satu atom H (tetapi setiap ikatan pada O tidak harus mempunyai dua H). Suatu konfigurasi tanpa kesalahan ion terjadi jika setiap ikatan O mengandung dua atom H (tetapi setiap ikatan pada O tidak harus mempunyai satu H).

Jumlah semua konfigurasi yang disusun dari  $N$  molekul (tanpa memandang bebas dari kesalahan) dapat ditentukan sebagai berikut:

Terdapat atom H sebanyak  $2N$  dengan  $2N$  ikatan sehingga totalnya akan terdapat  $4N$  tempat. Maka akan didapat:

$$\binom{4N}{2N} = \frac{(4N)!}{[(2N)!]^2}$$

tempat (lihat § 17.1.2) untuk distribusi H. Berdasarkan pendekatan dengan menggunakan rumus Stirling (§ 17.1.3) dapat ditulis kembali menjadi

$$\frac{(4N)^{4N}}{[(2N)^2]^2} = 2^{4N} = 4^{2N}$$

**Konfigurasi tanpa kesalahan Bjerrum:**

Setiap  $2N$  ikatan terdapat dua kemungkinan konfigurasi dengan probabilitas  $4^{2N}$ . Maka hanya terdapat  $4^N = 4^{2N}/4^N$  konfigurasi yang bebas kesalahan Bjerrum.

**Mencari Probabilitas konfigurasi tanpa kesalahan ion:**

Pandang  $N$  molekul yang masing-masing atom O mengikat dua H. Setiap molekul  $\text{H}_2\text{O}$  yang terdapat di dalam kisi akan mempunyai enam posisi yang berbeda (tiga posisi diperoleh dengan merotasikan

setiap keempat ikatannya sekitar = 12 posisi), dua darinya karena posisi atom H yang tidak dapat dibedakan berada pada posisi yang sama sehingga akan hanya terdapat:

$$6 = \binom{4}{2}$$

posisi. Setiap enam posisi dari  $N$  molekul  $\text{H}_2\text{O}$  hanya terdapat satu yang bebas kesalahan ion pada kisi (tetapi tidak mengandung konfigurasi tanpa kesalahan Bjerrum). Maka terdapat  $6^N$  konfigurasi tanpa kesalahan ion dalam  $4^N$  probabilitas. Hanya satu dari

$$\binom{8}{3}^N = 4^{2N}/6^N$$

konfigurasi yang umumnya tanpa kesalahan ion.

Secara logis konfigurasi tanpa kesalahan Bjerrum dan ion adalah saling tidak bergantung. Dengan anggapan dalam jumlah konfigurasi  $6^N$  yang bebas kesalahan ion dengan bagian yang sama, sebanyak  $1/4^N$  juga tanpa mengandung kesalahan Bjerrum dalam konfigurasi tersebut pada umumnya. Maka terdapat  $6^N/4^N = (3/2)^N$  konfigurasi yang bebas kesalahan keduanya. Keadaan suatu kisi diam ( $T = 0$  K) dalam hubungan dengan perhitungan di atas dapat direalisir. Jumlah ini adalah dengan probabilitas termodinamik  $P_o$  dari keadaan ini. Entropinya diperoleh  $S_o = k \ln P_o = k N \ln 3/2 = 3,37 \text{ JK}^{-1} \text{ Mol}^{-1}$ .

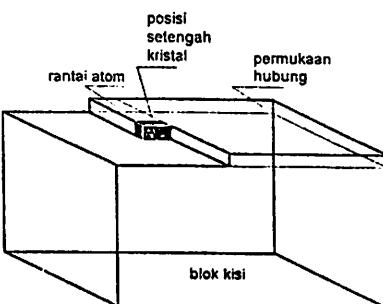
#### 14.1.7 Pertumbuhan Kristal

Suatu kristal berkembang umumnya melalui *permukaan penghubung* pada satu atau beberapa arah tertentu dengan indeks yang kecil, yaitu khususnya pada tempat terdapat kerapatan atom yang besar dan saling bertumpukan satu dengan lainnya. Permukaan penghubung ini sendiri berkembang, untuk kasus paling sederhana, secara atom demi atom. Setiap saat, pada posisi pertumbuhannya di dalam kristal, yaitu posisi di mana terdapat probabilitas terbesar atom-atom tetangga tertumpuk dengan atom "awal", disebut sebagai *posisi setengah kristal* yang berakhir dengan terbentuknya permukaan penghubung. Peristiwa

ini berhubungan dengan penggunaan energi yang paling efisien, yaitu energi digunakan untuk mengikat atom-atom tetangganya yang persis sama dengan setengah dari sekian banyak ikatan, seperti kelakuan ikatan atom-atom yang terdapat di dalam kristal:

Tiga terhadap enam atom di dalam kisi kubus sederhana, dua atom terhadap empat dalam kisi intan dan es, empat terhadap delapan dalam kisi kristal BCC, enam terhadap dua belas dalam kisi FCC. Pemisahan sebuah atom dari posisi setengah kristal memerlukan *energi pemisahan*, yang sama dengan energi ikat sebuah atom yang terdapat di dalam kristal, karenanya hanya akan hilang setengah dari energi ikat (setengah bagian lainnya digunakan oleh atom tetangganya).

Terjadinya posisi setengah kristal memerlukan penampang lintang penumpukan  $\sigma$  untuk mengikat atom tetangganya dari fase uap atau cair. Penampang lintang ini merupakan penampang lintang efektif, bukan penampang lintang geometris, yang antara lain juga harus diperhatikan, bahwa atom yang tertumpuk harus memenuhi arah orientasi tertentu. Jika fase uap atau cairan mengandung  $n$  atom/cm<sup>3</sup>, yang masing-masing bergerak dengan kecepatan  $v$ , maka *waktu tuggu terjadinya tumpukan atom tetangga adalah*  $T_{ab} = 3/n\sigma v$  (lihat teori kinetik gas § 5.2.1). Di lain pihak atom-atom yang tertumpuk mengalami getaran dengan frekuensi  $\nu$  dan mempunyai probabilitas



Gambar 14.26: Posisi setengah kristal sebagai "titik awal" suatu partikel yang merupakan awal rantai partikel berkembang lebih lanjut. Partikel ini meneguhkan setengah dari seluruh ikatan yang terdapat di dalam kristal.

Sebanding dengan  $c^{-E/kT}$ , dengan mengambil kembali energi pemisahan  $E$ . Waktu tunggu rata-rata untuk terjadinya pemisahan adalah  $T \text{ an} = v^{-1} e^{-E/kT}$ . Dari rumusan sederhana ini terdapat: keadaan

$$n = \frac{3\nu}{9v} e^{-E/kT}$$

setimbang  $T \text{ an} = T \text{ ab}$ , sehingga Rumusan di atas adalah mirip seperti rumusan Claussius Clapeyron untuk kesetimbangan tekanan uap atau kosentrasi. Dalam keadaan kesetimbangan daerah kristal yang sedang berkembang mengalami "pembalikan" secara stokhastik dan kebetulan, yaitu berkembang membesar dan berbalik secara acak. Perkembangan yang layak hanya terjadi melalui penjenuhan atau penurunan temperatur. Sublimasi atau persenyawaan pada keadaan bawah jenuh atau pemanasan adalah mungkin. Keduanya mempunyai kontribusi dalam berkembangnya kristal dengan cepat, yaitu jika terdapat diviasi dari keadaan kesetimbangan, maka perkembangan kristal semakin cepat.

Harus dianggap, bahwa paling tidak untuk kisi kubus sederhana pada keadaan jenuh "ringan" telah terbentuk rantai atom-atom awal (bakal kristal), karena satu atom pertama pada rantai yang baru yang mustinya mengikat tiga hanya mengikat dua atom lainnya dan mempunyai kesempatan terbesar untuk dapat terpisah sebanding dengan  $e^{E/3kT}$ , sehingga  $T \text{ an} > T \text{ ab}$ . Rintangan untuk terbentuknya bakal kristal ini dapat dipengaruhi pula oleh pegangan permukaan:

Jika sebuah atom berada di tengah antara bagian "kosong" dari permukaan penghubung dan berada jauh dari rantai awal (rantai bakal kristal) atau yang akan dibakalkan, di mana pada kisi kubus sederhana hanya terikat melalui satu ikatan, maka atom akan menggunakan waktu terpendeknya untuk meninggalkan posisi awalnya sehingga berada lebih dekat dengan rantai awal atau yang dibakalkan. Lompatan ke ikatan tetangga adalah hal yang paling mungkin dari "lenyap" (keluar atau bersenyawa). Jika sebuah atom demikian, atau lebih baik lagi pasangan atom, dapat berada pada posisi setengah sisi kubus,

maka pembentukan awal berhasil terbentuk, apabila atom-atom lainnya semakin cepat tertumpuk di tempat tersebut untuk mengkonsolidasi dirinya dengan atom-atom yang telah membentuk rantaian tersebut.

Agar awal permukaan penghubung berhasil dibuat adalah sangat sukar. Kadang-kadang karena kesukaran ini kristal tersebar berbentuk spiral (*perkembangan spiral*, lihat § 14.5.4), tanpa membentuk permukaan penghubung terlebih dahulu.

Khususnya dalam pembuatan *semikonduktor perkembangan epitaksi* adalah penting. Pada pemukaan penghubung suatu kristal terdapat pula bahan lain, antara lain terdapat pada *struktur kisi substrat*. Keadaan transisi dari parameter kisi yang berbeda dimungkinkan melalui suatu "perpindahan" penghubung seluruhnya; dengan cara ini berhasil dibuat *kristal tunggal* (monokristal) lapisan film (tipis), yang relatif mempunyai kesalahan kisi yang kecil sehingga mempunyai sifat elektronik yang lebih baik.

**Pembiakan Kristal.** Dalam hal ini dibedakan antara pembiakan kristal satu komponen (pembiakan dilakukan dari cairan atau uap murni) dan pembiakan kristal komponen jamak (pembiakan dilakukan dari larutan atau melalui substitusi komponen lain melalui pemanasan). Dalam hampir semua pembiakan dilakukan dengan jalan "menyuntikkan" atau mengumpan bakal kristal. Distribusi temperatur dan konsentrasi (pendinginan dan keadaan jenuh) adalah hal yang sangat terpengaruh. Hal-hal lain yang diinginkan atau yang tidak diinginkan dalam pembiakan kristal dapat diatur kemudian.

Pada pembuatan semikonduktor prosedur terpenting adalah dengan prosedur cawan pelelehan (pembiakan melalui pelelehan). Pada prosedur Bergmann cawan didorong oleh T-gradien. Cawan (kebanyakan dipakai mengandung puncak berbentuk pipa) karena bentuknya akan membentuk satu macam bakal kristal pada prosedur Stockbarger dibatasi oleh dua T-gradien pada batas fase. Pada prosedur Kyropoulos dan Czouc Hralski Suntikan kristal yang didinginkan dimasukkan ke dalam lelehan dan diangkat secara perlahan-lahan.

Khusus dalam pembuatan logam mulia sintetik digunakan prosedur Verneuil : Bubuk polikristal atau bahan pengikat lainnya dipanaskan di atas api atau disemprotkan api sehingga diantaranya akan terbentuk monokristal.

Polikristal atau bahan yang tidak murni pada prosedur *zone pelelehan* dilelehkan melalui pemanasan, yang perlahan-lahan akan bergerak lebih lanjut. Di dalam bahan tersebut terbentuk monokristal dengan susunan tertentu. Ketidakmurnian yang berada pada fase cair (koefisien distribusi!) akan menjauhi daerah monokristal. Dalam keadaan darurat prosedur dapat dilakukan ulang. Zone (daerah) lelehan dapat pula membentuk titik-titik ("noda") terdistribusi serbasama.

Dari larutan diperoleh kristal melalui pendingin atau penguapan. Peninggian kemampuan larut pada  $T$  dan  $p$  yang tinggi memungkinkan untuk membentuk pembiakan *hidrotermis* dari kuarsa alam dalam proses pemurniannya dari hasil penambangan.

Dari bahan yang diuapkan kemudian terbentuk lapisan-lapisan uap, yang karena pengaruh lapisan-lapisan alas yang menebal mengalami kristalisasi membentuk *amorf; whiskers* kebanyakan terbentuk melalui "pemindahan" posisi atom-atom pada arah putaran sekrup. Suatu kawat panas (Van Acken dan De Boer) digunakan sebagai alas lapisan dan mengatur pembiakan kristal melalui temperatur. Dari fase padat telah berhasil dilakukan rekristalisasi suatu kristal, yaitu mengubah suatu bentuk kristal menjadi bentuk lainnya pada fase padat, khususnya dengan menggunakan  $p$  dan  $T$  yang tinggi, seperti halnya pembuatan intan sintetis.

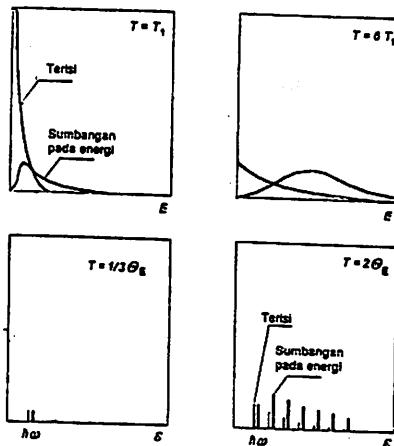
## 14.2 Getaran Kisi

### 14.2.1 Panas Jenis Spesifik

Jika zat padat dipandang sebagai suatu sistem yang mengandung partikel-partikel kisi dapat bergetar, haruslah tiap osilator, berdasarkan hukum distribusi serbasama klasik, mempunyai distribusi energi kinetik dan potensial yang sama, yaitu masing-masing derajat kebebasan mempunyai energi sebesar  $3/2 k T$  (tiga derajat kebebasan

sama artinya dengan tiga arah koordinat). Akan tetapi muncul pertanyaan, apa satuan yang dapat bergetar dari kisi. Apakah atom? Jika demikian halnya, maka untuk 1 gramatom terdapat energi sebesar  $3NkT = 3RT$ , yaitu sama dengan panas jenis atom yang besarnya adalah  $3R = 6 \text{ K}^{-1} \text{ Mol}^{-1}$ , yaitu sama dengan harga panas jenis yang berhasil diukur oleh Dulong-Petit. Jika atom-atom yang terdapat di dalam molekul bergetarsaling tidak bergantung, maka diperoleh aturan Neumann Kopf sebagai berikut: Panas molar adalah sama dengan jumlah panas atom yang terdapat di dalam molekul yang bersangkutan. Untuk air dan es dengan panas Mol  $3 \cdot 6 = 18 \text{ cal/Mol K}$  kelihatannya aturan Neumann-Kopf berlaku. Sedangkan untuk intan, berdasarkan pengukuran diperoleh harga  $0,5 \text{ cal/g K}$ , dengan aturan di atas hanya didapat sebesar  $0,12 \text{ cal/g K}$ .

Dengan adanya perbedaan ini, pengamatan panas jenis kembali pada harga hasil pengukuran Dulong-Petit; semakin tinggi temperatur, maka semakin ringan partikel-partikel kisi (bandingkan: C-Si-Ge) dan semakin padat kisi (bandingkan: intan-grafit-es). Einstein pada tahun 1907 mengungkapkan hal yang berhubungan



Gambar 14.27: Teori panas jenis spesifik zat padat menurut klasik (atas) dan Einstein (bawah). Kurva bergaris tipis dan balok menggambarkan derajat keadaan yang ditempati; kurva bergaris tebal dan balok melukiskan energi keadaan.

secara paralel dengan radiasi panas: Rumusan Rayleigh-Jeans untuk kerapatan radiasi (lihat § 11.2.6) yang diturunkan secara klasik gagal menjelaskan fenomena ini untuk temperatur semakin rendah dan frekuensi semakin tinggi (katastrofe ultraviolet). Frekuensi partikel kisi semakin tinggi jika partikel semakin ringan dan semakin kuat terikat satu sama lain di dalam kisi. Kemudian Einstein mengemukakan teori panas jenis zat padat, mirip seperti rumusan Planck untuk radiasi benda hitam: Bahwa energi osilator-osilator, dalam hal ini adalah partikel yang terdapat di dalam kisi zat padat, haruslah mengalami kuantifikasi, berarti energi partikel yang bergetar, juga apabila partikel netral, tidak terpengaruh oleh radiasi elektromagnetik, adalah sama dengan kelipatan bilangan bulat dari  $h\omega$ ,  $E_j = jh\omega$  [mekanika kuantum pada saat ini menambahkan energi titik nol osilator sehingga energi dituliskan menjadi  $(j + 1/2)h\omega$ ]. Pengandaian demikian tidak mengubah persoalan secara mendasar.

Pada temperatur  $T$  terdapat  $j$  keadaan dengan energi  $E_j = jh\omega$  dan berdasarkan distribusi Boltzmann  $N = N_0 e^{jhw/kT}$ , dengan  $N_0$  adalah keadaan dasar dengan energi  $E_0 = 0$ . Jumlah total partikel adalah

$$N = \sum_{j=0}^{\infty} = N_0 \sum_{j=0}^{\infty} e^{-jh\omega/kT}$$

Persamaan di atas adalah deret geometri dengan faktor  $e^{-hw/kT}$ , sehingga jumlahnya adalah  $1/(1 - e^{-hw/kT})$ . Jika dinyatakan dengan konstanta  $N$  maka jumlah keadaan yang ditempati pada keadaan vibrasi ke  $j$  adalah

$$N_j = N (1 - e^{-h\omega/kT}) e^{-jh\omega/kT} \quad (14.22)$$

Akan ditentukan energi total dari sistem yang mengalami getaran sebagai berikut:

$$\begin{aligned} E &= \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_j N_j \\ &= N h\omega (1 - e^{-h\omega/kT}) \sum_{j=0}^{\infty} j \varepsilon_j \quad (14.23) \end{aligned}$$

Penjumlahah dapat dicari dengan menggunakan deret geometris dua kali (lihat § 17.1.6):

$$\begin{aligned} E &= N \frac{e^{-\hbar\omega/kT}}{1 - e^{-\hbar\omega/kT}} \hbar\omega \\ &= N \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} \end{aligned} \quad (14.24)$$

Selanjutnya pandang untuk kasus batas atau keadaan temperatur terendah dan tertinggi. Pada  $kT \gg \hbar\omega$  fungsi eksponensial  $e$  dapat dituliskan dalam deret sehingga diperoleh harga energi:

$$E \approx NkT \quad (kT \gg \hbar\omega) \quad (14.25)$$

Harga energi ini adalah persis sama dengan hasil perhitungan klasik untuk satu derajat kebebasan. Sebagai hasil rumusan di atas, harga panas jenis spesifik adalah sesuai dengan yang diperoleh dari pengukuran Dulong-Petit. Pada  $kT \ll \hbar\omega$  fungsi  $e$  menjadi sangat kecil, demikian pula dengan harga energi dan panas jenis spesifik sangat kecil dibanding dengan harga yang diperoleh oleh Dulong-Petit:

$$\begin{aligned} E &= N\hbar\omega e^{-\hbar\omega/kT}, \\ c &= \frac{\partial E}{\partial T} = \frac{N\hbar^2\omega^2}{k} T^{-2} e^{-\hbar\omega/kT} \quad (14.26) \\ &\quad (kT \ll \hbar\omega) \end{aligned}$$

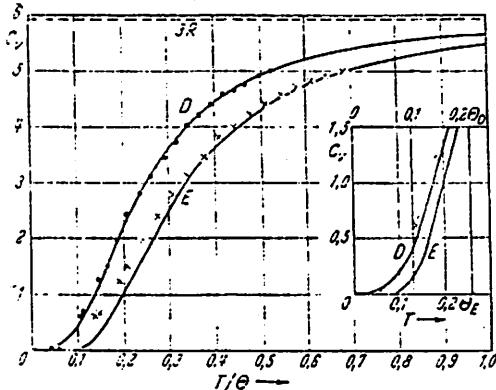
Keadaan antara dua keadaan batas di atas diperoleh kira-kira:

$$T = \Theta_E = \frac{\hbar\omega}{k} \quad (14.27)$$

adalah temperatur Einstein.

Pengukuran lebih teliti menunjukkan bahwa panas jenis Einstein pada keadaan temperatur rendah lebih tajam menuju nol. Hal ini disebabkan bahwa Einstein hanya menganggap terdapat satu frekuensi, yaitu frekuensi getaran kisi. Kisi juga mengalami getaran dengan frekuensi yang berbeda-beda, yaitu getaran yang terjadi pada satu grup dengan frekuensi tertentu dengan grup partikel lain dengan frekuensi yang berbeda. Adanya kenyataan demikian menyebabkan  $c$  menurun terhadap  $T$ .

Vibrasi atau getaran ini tidak lain sebagai gelombang suara. Debye mengemukakan pemikiran berbeda bahwa kandungan panas yang terdapat di dalam zat padat tersimpan di dalam gelombang diam



Gambar 14.28: Kapasitas panas molar (panas atom) dalam  $\text{cal K}^{-1} \text{ Mol}^{-1}$ , digambar menurut teori Einstein (E) dan Debye(D). Pada gambar utama digambarkan dua kali titik-titik hasil pengukuran, agar absis  $T/\Theta$  untuk kedua kurva teoritik tersebut identik ( $\infty_D = 1320\text{K}$  dan  $\Theta_D = 2000\text{K}$ ). Pada gambar sebelah kanan absis dinyatakan dalam  $T$ . Dalam hal ini kurva Debye untuk  $T$  rendah khususnya lebih jelas terlihat tumpang tindih dengan hasil eksperimen.

suara. Berdasarkan pemikiran Einstein bahwa energi mengalami kuantisasi, maka tidak semua gelombang terdapat di dalam kristal zat padat (seandainya hal tersebut berlaku, maka akan terdapat sangat banyak sekali), hanya gelombang yang pada permukaan batas kristal mempunyai keadaan vibrasi tertentu, misalnya sebuah simpul (hasilnya sebenarnya hampir sama, jika terdapat perut). Selain itu secara fisis, jika diandaikan terdapat gelombang dengan panjang gelombangnya lebih kecil dari dua kali konstanta kisi tidak akan memberikan makna berarti, karena gelombang demikian juga tidak akan sebaik gelombang berpanjang gelombang panjang (lihat soal 14.2.1). Pertama-tama pandang sebuah 'kisi linier' yang terdiri dari  $N$  atom, masing-masing berada pada jarak yang sama. Agar pada ujung-ujung rantai ini terdapat simpul (panjang  $L = Nd$ ), maka jumlah seluruh setengah gelombang harus sama dengan panjang kristal

ini.  $Nd = n\lambda/2$ , atau  $\lambda = 3N d/n$  atau jika dinyatakan dalam bilangan gelombang  $k = 2\pi/\lambda$ :

$$k = \frac{\pi n}{N d} \quad (14.28)$$

Di samping itu haruslah  $\lambda \geq 2d$  atau  $n \leq N$ . Berdasarkan hal tersebut maka akan terdapat persis  $N$  gelombang yang dibolehkan:  $n = 1, 2, \dots, N$ . Hasil ini juga tetap berlaku untuk kisi tiga dimensi: suatu kisi mempunyai sedemikian banyak bentuk gelombang diam atau vibrasi normal suatu arah vibrasi tertentu, sebanyak jumlah partikel yang terdapat di dalam sistem yang mengalami vibrasi. Jumlah vibrasi normal masih harus dikali dengan 3 (1 untuk vibrasi longitudinal dan 2 arah vibrasi transversal). Setiap bentuk gelombang, berdasarkan Einstein, merupakan energi yang terkuantisasi atau dengan perkataan lain merupakan kelipatan bilangan bulat dari satu satuan kuantum sebesar  $\hbar\omega$ . Vibrasi tersebut menyumbangkan energi panas total sebesar  $\hbar\omega/(e\hbar\omega/kT - 1)$ . Dalam hal ini tentunya, seperti halnya untuk semua gelombang,  $\omega = c_s/\lambda = kc_s$  ( $c_s$  adalah kecepatan suara).

Selain hal di atas patut pula diketahui, bagaimana distribusi Frekuensi getaran atau energi getaran tersebut, atau dengan perkataan lain berapa jumlah getaran yang terdapat di dalam interval  $(\omega, \omega + d\omega)$  atau  $(k, k + dk)$ . Pandang suatu kubus dengan satu sisinya berada pada titik nol, terorientasi sepanjang sumbunya dengan panjang sisi  $a$ . Suatu gelombang diam dengan bagiannya yang terdapat di dalam ruang dinyatakan dalam  $k \cdot r$ , 'lenyap' secara keseluruhan persis pada permukaan kubus, jika setiap komponen gelombang  $k$  dikalikan dengan  $a$  dan memenuhi syarat pers[14.28];  $k_i = \pi/a$ . Akhir dari vektor  $k$  yang dibolehkan dalam hal ini membentuk suatu titik kisi dengan kerapatan konstan (secara umum skalanya juga identik dengan kisi ruang balik); konstanta kisinya menjadi  $\pi r/a$ . Hingga pada batas  $\lambda = 2d$ , atau  $k = \pi/d$  terdapat titik  $k$  persis sama dengan  $N = (a/d)^3$ , atau dengan perkataan lain terdapat titik-titik di dalam ruang balik (ruang fase) yang persis sama dengan jumlah partikel di dalam kisi real. Jika digambarkan secara geometris, interval  $(k, k + dk)$  terletak di dalam elemen volume bola kosong  $4\pi k^2 dk$ , di mana terdapat sebanyak  $4\pi k^2 dk (\pi/a)^3$  titik  $k$ .

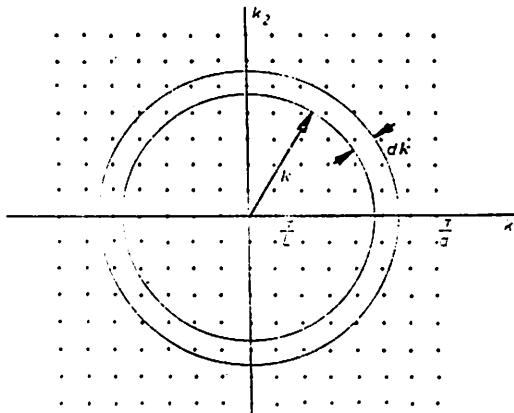
Dalam interval analog dengan  $(k, k + dk)$ , yaitu  $(\omega, \omega + d\omega)$  terdapat

$$3 \frac{a^3}{\pi^3} 4\pi \frac{\omega^2 d\omega}{c_s^3}$$

vibrasi normal ( $\omega = k c_s$ ; faktor 3 menyatakan jumlah arah vibrasi: 1 longitudinal dan 2 arah transversal). Vibrasi ini mempunyai energi sama dengan:

$$dE = 3 \frac{4\pi a^3 \hbar \omega^3 d\omega}{\pi^3 c_s^3} \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}$$

Dengan menyingkat  $x = \hbar\omega/kT$ , jumlah partikel  $N a^3/d^3$  dan



Gambar 14.29: Ruang  $k$  dengan berbagai mode vibrasi yang mungkin dari sebuah kisi yang panjang sisinya  $L$  dan mempunyai konstanta kisi  $d$ . Jumlah mode yang terdapat di dalam interval  $k, + dk$  adalah sebanding dengan  $k^2 dk$ .

temperatur Debye

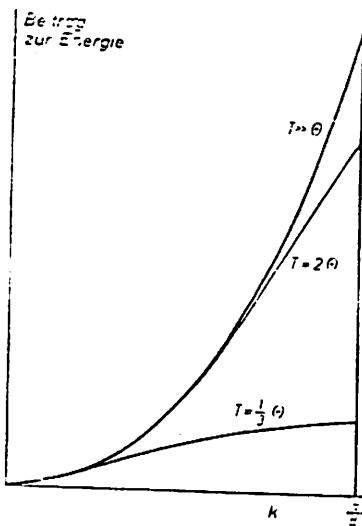
$$\Theta_D = \frac{\hbar \omega_{gr}}{k} = \frac{\hbar k_{gr} c_s}{k} = \frac{\hbar \pi c_s}{kd} \quad (14.29)$$

diperoleh energi vibrasi total sbb:

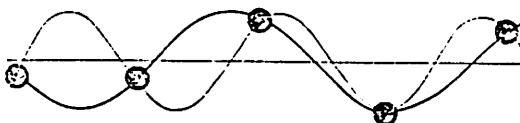
$$E = 3 N k T \frac{T^3}{\Theta_D^3} \int_0^{\Theta_D/T} \frac{1}{x^3} dx e^x - 1 \quad (14.30)$$

Tanpa memandang interval tersebut juga dapat dicari panas jenis spesifik dengan menurunkan pers. [14.30] terhadap  $T$ ; kemudian panas jenis dicari untuk batas temperatur  $T > \Theta_D$  dan  $T < \Theta_D$  sebagai berikut:

Untuk  $T > \Theta_D$ , dengan harga  $x$  yang kecil integran pada pers. [14.30],  $e^x$  dapat dituliskan dalam deret. Perhitungan integral menghasilkan  $1/3 (\Theta_D/T)^3$  atau  $E = NkT$ ,  $c = Nk$ , persis sama dengan harga panas jenis menurut Dulong-Petit.



Gambar 14.30: Teori panas jenis spesifik zat pada dari Debye: sumbangan mode vibrasi untuk harga  $k$  yang berbeda pada harga energi total pada temperatur yang berbeda.



Gambar 14.31: Secara fisis adalah tidak berarti jika dianggap bahwa didapat zat padat terdapat gelombang dengan  $\lambda = 2d$  (garis tipis). Simpangan semua partikel dapat dinyatakan sebagai gelombang dengan  $\lambda = 2d$ .

Untuk  $T < \Theta$  dapat dilakukan integrasi dengan mengambil atas hingga  $\infty$  (harga batas ini diambil tidak menyebabkan hasil integrasi keliru). Integral tertentu ini menghasilkan panas jenis yang sebanding dengan bilangan  $\pi^4/15$  dan  $T$  sebagai berikut:

$$\begin{aligned} E &= \frac{\pi^4}{15} N k T \frac{T^3}{\Theta_D^3} \\ c &= \frac{4\pi^4}{15} N k \frac{T^3}{\Theta_D^3} \end{aligned} \quad (14.13)$$

Pada  $T \rightarrow 0$  harga panas jenis sesuai dengan hasil eksperimen, yaitu menurun mendekati nol sebanding dengan  $T^3$ . Hal ini secara sederhana dapat dijelaskan sebagai berikut:

Pada temperatur rendah praktis hanya vibrasi yang mempunyai energi  $h\omega \approx kT$  yang akan mengalami eksitasi, yaitu titik-titik yang mengisi ruang fase kisi (ruang  $k$ ), berjari-jari dengan faktor  $T/\Theta$  lebih kecil dari jari-jari bola keseluruhan hingga harga Frekuensi batas. Bola yang lebih kecil ini akan memenuhi hanya  $T^3/\Theta_D^3$  bagian dari semua vibrasi normal. Vibrasi normal yang mengalami eksitasi mempunyai energi  $\sim kT$ , atau  $E \sim T^4$ ,  $c \sim T^3$ .

Kurva Debye dengan satu-satunya parameter adalah  $\Theta_D$  menggambarkan bentuk kurva  $c(T)$  lebih baik dibanding dengan kurva Einstein. Akan tetapi, masih juga terdapat sedikit perbedaan dengan kurva hasil eksperimen. Perbedaan kurva Debye dengan kurva hasil eksperimen adalah karena model kisi Debye menganggap semua kecepatan vibrasi sama dengan kecepatan suara. Seperti akan terlihat nantinya bahwa anggapan tersebut tidak seluruhnya benar: Gelombang suara, khususnya gelombang pendek yang kebanyakan terjadi pada peristiwa ini mempunyai sifat *dispersif*. Selain itu, batas Frekuensi Debye ( $v_{gr} = c_s/2d$ ) sebagai dari  $v_{gr} = k\Theta_D/h$  sesuai dengan batas Frekuensi optis (lihat tabel[14.5]), walaupun Frekuensi tersebut berbasal dari daerah yang berbeda (Frekuensi akustik, atomik, optik, dan panas).

Tabel 14.5: Frekuensi Debye

Bahan	Elastik $\nu_{gr} \cdot 10^{12}$ det. Perhitungan dari pers[14.4]	Termis $\nu_{gr} \cdot 10^{12}$ det. Perhitungan dari $\Theta_D$ pers[14.6]	Optik $\nu_{gr} \cdot 10^{12}$ det. Absorpsi UV lihat gbr[14.37]
NaCl	6,66	6,42	5,77
KCl	5,13	4,89	4,77
Ag	4,50	4,69	-
Zn	6,35	6,41	-

#### 14.2.2 Dinamika Kisi

Pada panjang gelombang yang tidak begitu besar dibanding dengan dua kali konstanta kisi, kristal mempunyai kelakuan sangat berbeda, spektrum energinya tidak lagi kontinum. Telah disebutkan sebelumnya bahwa untuk harga panjang gelombang di bawah  $2d$  tidak mempunyai arti fisis sama sekali karena hanya terdapat gerak partikel kisi dan gerak ini hanya dapat dinyatakan dalam bentuk gelombang dengan  $\lambda \leq 2d$  atau  $k \leq \pi/d$ . Untuk spektrum kontinum tidak terdapat batasan seperti itu.

Perbedaan penting lainnya adalah gaya elastik yang menentukan vibrasi; gaya ini tidak bergantung pada simpangan partikel kisi terhadap 'ruang absolut', melainkan terhadap simpangan partikel tetangganya. Hal yang menentukan untuk gaya ini adalah jarak tetangga terdekat partikel kisi. pada gelombang longitudinal dengan panjang gelombang pendek yang terpenuhi syarat gelombang kisi  $\lambda = 2d$  ( $k = \pi/d$ ) partikel-partikel tetangga akan mengalami vibrasi berlawanan fase terhadap partikel kisi yang dipandang. Jarak tetangga terdekat dalam jarak simpangan yang besar adalah  $d - 2a$  ( $a$  adalah amplitudo vibrasi) dan terhadap waktu akan mengalami perubahan

menjadi  $d - 2a e^{i\omega t}$ . Pada panjang gelombang sembarang faktor 2 berubah menjadi  $(1 - \cos kd)$  (lihat gbr. [14.32]). Maka jarak tetangga terdekat dapat dituliskan menjadi:

$$d - a(\cos kd) e^{i\omega t}$$

Deviasi dari jarak kesetimbangan  $d$  menyebabkan gaya "balik"

$$F_{\text{el}} = -D a(\cos kd) e^{i\omega t}$$

kehilangan elastisitasnya. Selanjutnya, jarak pada posisi berlawanan menjadi  $(d + a(1 - \cos kd)) e^{i\omega t}$ . Gaya yang bekerja pada sistem mempunyai arah yang sama. Dalam hal ini diketahui bahwa suatu partikel akan mendorong partikel lainnya, sementara partikel lain menarik lainnya sehingga

$$F_{\text{cl}} = -2D a(\cos kd) e^{i\omega t}$$

Di samping itu untuk gaya inersial vibrasi ini benar-benar berlawanan terhadap 'ruang absolut'. Simpangannya menjadi  $x = a e^{i\omega t}$  dengan percepatan  $x = -\omega^2 a e^{i\omega t}$ , sehingga gaya inersial:

$$F_{\text{tr}} = -m \ddot{x} = m \omega^2 a e^{i\omega t}$$

Gaya elastik dan inersial satu sama lain haruslah saling mengangkat, sehingga

$$\omega^2 = \frac{2D}{1 - \cos kd} \quad (14.32)$$

Pers. [14.32] disebut *relasi dispersi* untuk vibrasi longitudinal di dalam suatu kisi dengan sel elemen mengandung 1 partikel<sup>4)</sup>

Untuk gelombang panjang ( $\lambda \approx 2d$ ,  $k < \pi/d$ ) harga  $\cos kd \approx 1 = k^2 d^2/2$  dan dari pers. [14.32] diperoleh:

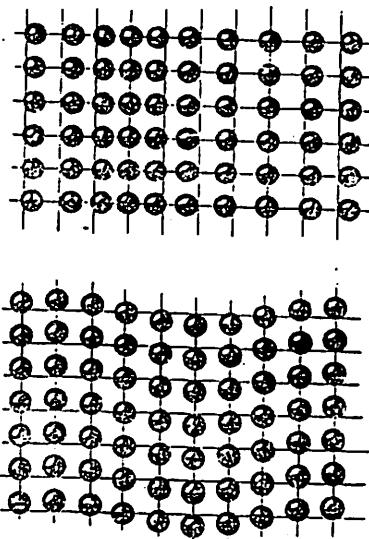
$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} kd \quad \left( k \ll \frac{\pi}{d} \right)$$

4) Disebut relasi dispersi karena hubungan antara  $\omega$  dan  $k$ , yaitu  $\omega \propto k$ .

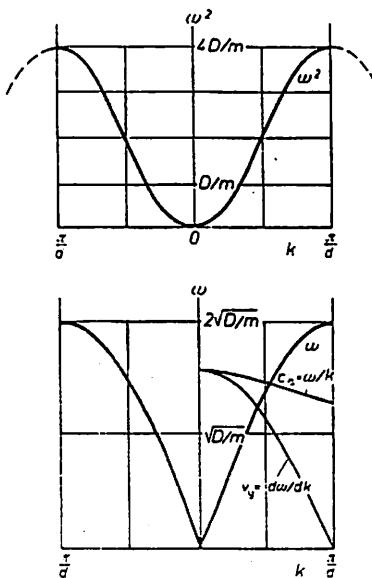
Kecepatan fase dan grup untuk gelombang panjang adalah saling tidak bergantung dan dinyatakan sebagai:

$$\begin{aligned} c_s &= \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{D}{m}} d \\ v_{gr} &= \frac{d\omega}{dk} = \sqrt{\frac{D}{m}} d \end{aligned} \quad (14.33)$$

(untuk mengetahui definisi  $v_{gr}$  lihat § 4.2.5). Konstanta "pegas"  $D$  diberikan dari kelengkungan pada alas dari kurva potensial kisi yang mirip parabolik dan dapat pula dinyatakan dalam modulus elastisitas



Gambar 14.32: Vibrasi longitudinal dan transversal dari suatu kristal. Simpangan partikel tetangga berbeda sebesar  $d - a \{1 - \cos k(x + d)\}$ . Perbedaan ini menentukan besarnya gaya-gaya (bayangkan terdapat pegas di antara partikel tetangga).



Gambar 14.33: Relasi dispersi  $w(k)$  suatu kisi dengan sebuah partikel terdapat di dalam sel elemen dan interaksi terjadi hanya dengan partikel tetangganya. Kecepatan fase dan grup gelombang ( $c_s$  dan  $v_{gr}$ ) juga dapat diketahui.

(Young)  $\epsilon$ , yaitu:  $D = U'' - \epsilon d$  (lihat § 14.1.4). Untuk gelombang panjang memberikan kecepatan suara dari teori klasik sebagai berikut:

$$c_s = v_{gr} = \sqrt{\frac{\epsilon d^3}{m}} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\rho}}$$

Pada batas panjang gelombang pendek ( $k = \pi d / d$ ) dari pers[14.32] didapat:

$$\omega = \sqrt{\frac{4D}{m}}, \quad c_s = \sqrt{\frac{D}{m}} \frac{2d}{\pi} \quad (14.34)$$

akan tetapi

$$v_{gr} = 0;$$

getaran dari atom-atom tetangga yang berlawanan fase memberikan gelombang diam.  $k = \pi/d$  adalah sesuai dengan syarat Bragg atau daerah pertama dalam zone Brillouin untuk gelombang yang datang

pada arah tegak lurus (§ 14.1.3). Juga gelombang suara yang memenuhi syarat ini, dalam hal ini akan direfleksi kembali pada arah semula. Kelakuan gelombang suara ini persis gelombang cahaya dan gelombang elektron (lihat § 14.1.3).

Pada kisi yang mengandung lebih banyak atom di dalam sel elemen (kisi elementer) akan muncul beberapa cabang pada spektrum kisi ini. Sebagai contoh pandang kisi NaCl. Pada muatan partikel tidak mengalami gangguan, melainkan hanya terjadi pertukaran partikel antara partikel massa  $m_1$  dan  $m_2$  pada jarak  $d/2$  pada arah tertentu, yaitu pada arah bidang (100). Sepanjang arah ini merambat gelombang kisi logitudinal. Karena adanya perbedaan massa partikel, maka vibrasi keduanya akan mempunyai amplitudo berbeda, yaitu  $a_1$  dan  $a_2$ . Misalnya partikel 1 mengalami simpangan maksimum, maka partikel 2 yang bertetangga dengannya akan berada pada jarak:

$$\frac{d}{2} - a_1 + a_2 \cos \frac{kd}{2} \quad \text{dan} \quad \frac{d}{2} + a_1 - a_2 \cos \frac{kd}{2}$$

Kedua partikel ini bekerja dengan cara jika partikel pertama menggeser, maka partikel kedua akan menarik dengan gaya yang sama dengan gaya yang dikerjakan oleh partikel 1 sehingga secara keseluruhannya terdapat gaya sebesar

$$\begin{aligned} F_{1,\text{el}} &= 2D \left( a_1 - a_2 \cos \frac{kd}{2} \right) \\ &= F_{1,\text{tr}} = m_1 \omega^2 a_1 \end{aligned} \quad (14.35a)$$

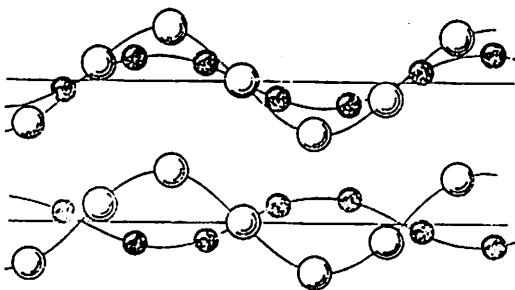
Demikian pula berlaku untuk partikel 2 jika diamati kejadian sesaat dengan simpangan maksimum:

$$\begin{aligned} F_{2,\text{el}} &= 2D \left( a_2 - a_1 \cos \frac{kd}{2} \right) \\ &= F_{2,\text{tr}} = m_2 \omega^2 a_2 \end{aligned} \quad (14.35b)$$

Kedua persamaan homogen di atas (pers. [14.35a] dan [14.35b]) untuk amplitudo  $a_1$  dan  $a_2$  hanya memenuhi jika determinan persamaan ini sama dengan nol, yaitu

$$\begin{vmatrix} 2D - \omega^2 m_1 & -2D \cos kd/2 \\ -2D \cos kd/2 & 2D - \omega^2 m_2 \end{vmatrix} \quad (14.36)$$

$$= 4D^2 \sin kd/2 - 2D\omega^2(m_1 + m_2) + m_1 m_2 \omega^4 = 0$$



Gambar 14.34: Getaran akustik (atas) dan optik (bawah) dengan panjang gelombang yang sama. Ion logam (bitam) walaupun ukurannya kecil mempunyai massa dua kali massa atom nonlogam (putih).

(dalam hal ini digunakan  $\sin^2 a = 1 - \cos^2 a$ ). Untuk setiap  $k$  terdapat dua harga  $\omega$  yang memenuhi yang dapat dicari dari persamaan kuadrat dari pers[14.36] untuk  $\omega$ , yaitu :

$$\omega^2 = \frac{D}{\mu} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\mu^2}{m_1 m_2} \sin^2 \frac{kd}{2}} \right) \quad (14.37)$$

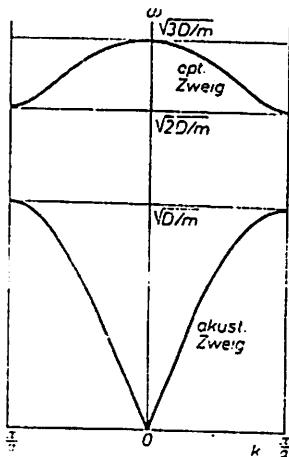
$\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$  adalah massa reduksi. Tanda + dan - secara umumnya menghasilkan dua cabang yang terpisah pada diagram  $\omega - k$ : cabang optik adalah jika terdapat tanda + dan cabang akustik jika tanda - (lihat gbr. [14.34]).

Untuk gelombang panjang ( $kd \ll \pi$ ,  $\sin^2/2 \approx k^2 d^2 / 4$ ) dan memberikan frekuensi kedua cabang sebagai berikut:

$$\omega_{lo} = \sqrt{\frac{2D}{\mu}} \quad (\text{cabang optik})$$

$$\omega_{la} = \sqrt{\frac{2D}{m_1 + m_2}} \quad (\text{cabang akustik}). \quad (14.38)$$

Pada cabang optik  $v_{gr} = 0$  (gelombang diam); sedangkan cabang



Gambar 14.35: Relasi dispersi  $w(k)$  dari suatu kisi yang mengandung dua partikel di dalam sel elemennya dan mengalami interaksi hanya dengan partikel tetangganya. Khusus untuk kasus  $m_1 = 2m_2$ . Cabang akustik dan optik dipisahkan oleh daerah frekuensi 'terlarang'.

akustik mempunyai kelakuan persis seperti kisi mengandung 1 partikel di dalam sel elemennya. Untuk gelombang pendek ( $kd = \pi$ ,  $\sin^2 kd/2 = 1$ ) dan misalnya untuk kasus  $m_1 = m_2$ , diperoleh frekuensi vibrasi kasus ini sebagai berikut:

$$\omega_{ko} = \sqrt{\frac{2D}{m_2}} \quad (\text{cabang optik} \text{ nonumber}) \quad (14.39)$$

$$\omega_{ka} = \sqrt{\frac{2D}{m_1}} \quad (\text{cabang akustik}) \quad (14.40)$$

Pada harga batas ini kedua macam gelombang mempunyai karakter sama dengan gelombang diam. Kurva  $\omega(k)$  dari cabang akustik akan meningkat kedua sisinya mulai dari  $k = 0$ , mirip seperti sel elemen yang mengandung 1 partikel. Karena  $\omega(k) \propto \sqrt{m_1}$ , maka cabang optik juga muncul dari kedua sisi kurva.

Pengertian dari apa yang telah dibahas di atas dapat dengan jelas jika diamati gelombang transversal. Amplitudo  $a_1$  dan  $a_2$  dalam hal ini diberikan dari pers. (14.35a) dan [14.35b] sebagai berikut:

$$m_1 a_1 = \mp m_2 a_2$$

(tanda - untuk cabang optik dan + untuk cabang akustik). Pada gelombang akustik kedua macam partikel akan bergetar bersama-sama (searah), sedangkan pada gelombang optik bergetar berlawanan arah (gbr[14.34]). Pada gelombang akustik ikatan antara partikel tertangganya semakin kuat, jika gelombang semakin pendek; karena harga  $\omega$  menjadi besar. Sebaliknya, pada gelombang optik, pada umumnya perbedaannya tidak begitu besar dibanding dengan akustik. Apabila kedua partikel mempunyai muatan berbeda (misalnya sebagai kristal ion), gelombang optik akan berhubungan dengan polarisasi yang besar (jumlah momen dipol listrik/satuan volume) dibanding pada gelombang akustik, walaupun polarisasi ini penting artinya khusus untuk kasus diluar  $m_1 = m_2$ . Vibrasi optis menyebabkan terjadinya absorpsi cahaya yang kuat, oleh sebab itu dinamakan demikian.

Karena jarak-jarak partikel kisi pada vibrasi transversal dan longitudinal umumnya berbeda sehingga untuk tiap dua cabang akustik dan optik terdapat satu vibrasi longitudinal dan transversal, dengan vibrasi transversal sesuai dengan kedua arah getarnya sehingga muncul bilangan 2. Jika sel elemen mengandung  $p$  partikel, maka akan terdapat  $3p$  cabang akustik dan  $3p - 3$  cabang optik.

### 14.2.3 Optika Kristal Ionik

Kristal ion umumnya mempunyai dua daerah absorpsi yang bersih satu sama lain. Satu di daerah ultraviolet, berasal dari elektron-elektron dari ion kulit (jika dibayangkan bahwa elektron valensi yang tidak

terikat seperti pada atom Na misalnya mengalami pertukaran dengan elektron lain, berasal dari atom lain, maka jelaslah mengapa frekuensi eksitasi ion jarang terletak pada daerah panjang gelombang cahaya tampak). Daerah absorpsi lainnya disebabkan oleh vibrasi kisi, khususnya karena vibrasi optis kisi dan terletak dalam daerah ultamerah. Di luar kedua daerah ini kristal dalam kasus ideal tentunya, hanya jika daerah absorpsi memasuki daerah frekuensi cahaya tampak.

Suatu berkas cahaya dengan frekuensi sudut  $\omega$  memasuki kristal ionik tipe NaCl. Vektor medan listrik cahaya  $E$  mengeksitasi kisi, sehingga kisi mengalami getaran dipaksakan yang terhadap getaran harmonik hanya berbeda karena adanya gaya 'penggerak' getaran  $+eE$  yang masing-masing bekerja pada kation dan anion. Untuk gelombang yang tidak begitu pendek (gelombang berdasarkan pers. [14.35a] dan [14.35b] dengan  $\cos kd/2 \approx 1$ ), persamaan gerak getaran untuk kedua ion dapat ditulis dalam bentuk:

$$\begin{aligned} m_1 \omega^2 a_1 &= 2D (a_1 - a_2) + eE, \\ m_2 \omega^2 a_2 &= 2D (a_2 - a_1) - eE \end{aligned} \quad (14.41)$$

Diperlukan simpangan relatif antara kedua ion  $\alpha_1 - \alpha_2$  untuk menentukan polarisasi dielektrik  $P = ne(\alpha_1 - \alpha_2)$  (dianggap di dalam satuan volume terdapat  $n$  kation dan  $n$  anion). Jika persamaan pertama pada pers. [14.41] dibagi dengan  $m_1$  dan persamaan kedua dengan  $m_2$  dan kedua hasil perkalian saling dikurangkan, didapat

$$a_1 - a_2 = \frac{eE}{\mu(\omega_0^2) - \omega^2},$$

dengan  $\omega_0 = 2D/\mu$ , yaitu batas Frekuensi gelombang panjang dari cabang optik. Dengan demikian, polarisasi  $P$  dan berdasarkan pers. [6.48] diperoleh hubungan konstanta dielektrik sebagai berikut:

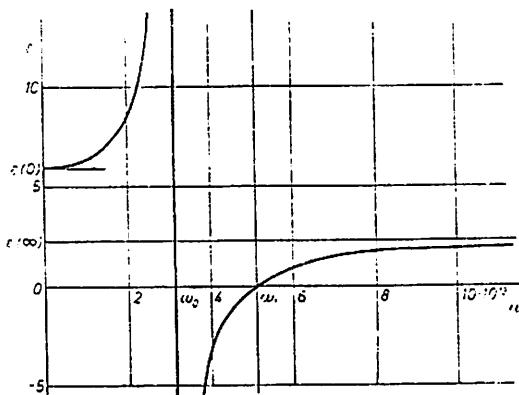
$$\varepsilon = 1 + \frac{P}{\varepsilon_0 E} = 1 + \frac{ne^2}{\varepsilon_0 \mu(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (14.42)$$

Harga batas  $\epsilon$  untuk  $\omega > \omega_0$  haruslah lebih besar dari 1. Kenyataannya dalam hal ini harga  $\epsilon$  ditentukan dari bagian polarisasi yang mengalami vibrasi, yaitu elektron-elektron kulit. Selanjutnya akan dijelaskan dengan menggantikan angka 1 menjadi  $\epsilon(\infty)$  sebagai berikut:

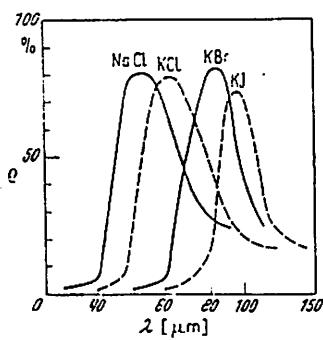
$$\epsilon = \epsilon(\infty) + \frac{nc^2}{\epsilon_0 \mu (\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (14.43)$$

Selain itu untuk  $\omega = 0$

$$\epsilon = \epsilon(0) = \epsilon(\infty) + \frac{nc^2}{\epsilon_0 \mu \omega_0^2}$$



Gambar 14.36: Kurva dispersi dari konstanta dielektrik suatu kristal ionik. Daerah dengan harga  $\epsilon$  negatif antara  $\omega_0$  dan  $\omega_1$  adalah daerah absorpsi.

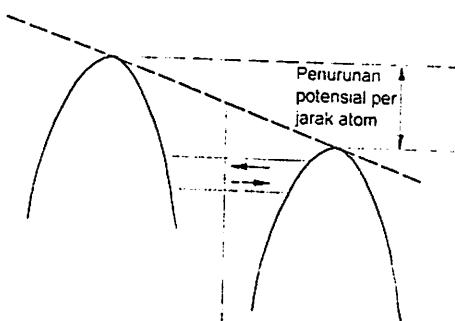


Gambar 14.37; Derajat refleksi beberapa halogenida pada daerah ultramerah. Maksimum yang tajam diperoleh dengan menggunakan batu *rubens* sebagai monokromatisme. Maksimum spektrum absorpsi mempunyai posisi yang sama dengan refleksi.

Selain pers. [14.43] dapat pula ditulis

$$\varepsilon = \varepsilon(\infty) + \varepsilon(0) \frac{\varepsilon_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (14.44)$$

$$\frac{dn}{\omega d} = \frac{\omega}{\omega_0^2} \left( \frac{\varepsilon(0)}{n_1} \right) \quad (14.45)$$



Gambar 14.38: perbedaan 'tinggi' potensial kisi karena medan luar menyebabkan elektron bergeser ke kanan, jika pita keadaan tidak terisi penuh. Penumpukan elektron-elektron tersebut akan menyebabkan terdapatnya medan yang berlawanan arah sehingga 'sisi pita' kembali ke posisi semula. Selain itu medan tersebut memudahkan elektron untuk berpindah dari kiri ke kanan dengan faktor eksponensial sebanding dengan perbedaan potensial.

Kurva dispersi ini (gbr. [14.36]) menjelaskan kelakuan konstanta dielektrik dari seluruh kelakuan optik kristal ideal. Dari absorpsi dan dispersi diperoleh hubungan indeks bias dan konstanta dielektrik sebagai:  $n = \sqrt{\varepsilon}$ . Antara  $\omega_0$  dan  $\omega_1$  harga  $\varepsilon$  adalah negatif, sehingga harga indeks bias  $n$  menjadi imajiner. Dalam hal ini  $\omega_1$  ditentukan berdasarkan persamaan:

$$\varepsilon(\infty) = \varepsilon(0) \frac{\varepsilon_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2},$$

atau

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 \left( \frac{\epsilon(0)}{\epsilon(\infty)} \right). \quad (14.46)$$

(Relasi Sach-Lyddane-Teller)

Harga  $n$  imajiner mempunyai arti, berdasarkan hubungan  $k = \omega/nc$  adalah menyebabkan harga  $k$  imajiner:

$$k = i\chi = -i \frac{\omega}{|n|c}.$$

Bagian gelombang yang terdapat di dalam ruang  $E = E_0 e^{ikx} = E_0 e^{-\chi x}$  akan menurun secara eksponensial terhadap kedalaman  $x$ .  $X$  adalah *koefisien ekstingsi*. Jika redaman getaran kisi turut diperhatikan, maka daerah absorpsi akan melebar khususnya di sebelah kiri  $\omega_0$ , sehingga vibrasi resonansi yang kuat akan mengambil energi yang dibawa oleh gelombang datang.

Kedua sisi daerah absorpsi ini masing-masing disebut sebagai *dispersi 'normal'*, yaitu  $\epsilon$  dan  $n$  bertambah sebanding dengan  $\omega$  dan kecepatan fase gelombang menurun. Untuk  $\omega \gg \omega_0$  berlaku :

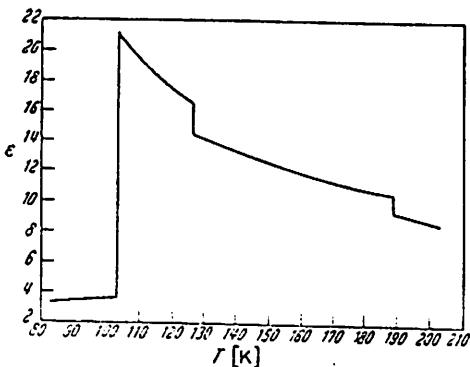
atau

$$\epsilon \approx \epsilon(\infty) + \epsilon(0) \left( 1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right),$$

$$n \approx n_1 + \frac{\omega^2}{2\omega_0^2} \left( \frac{\epsilon(0)}{n_1} \right),$$

#### 14.2.4 Fonon

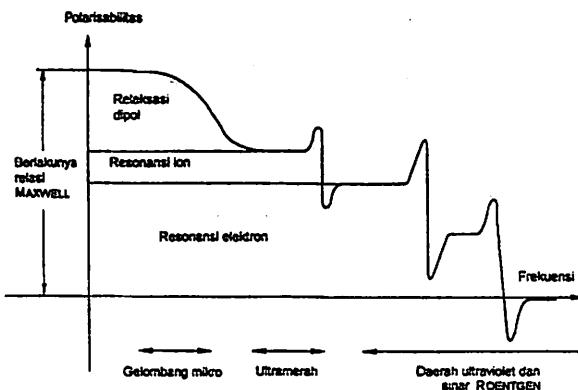
Suatu vibrasi kisi dengan Frekuensi  $\omega$  dapat mempunyai energi vibrasi seperti partikel tunggal, yang dibedakan hanya dari kelipatan bilangan bulat dari  $\hbar\omega$ . Dengan demikian, misalnya suatu gelombang cahaya pada kisi dapat memberikan atau mengambil energi hanya



Gambar 14.39: Ketergantungan konstanta dielektrik  $\epsilon$  terhadap  $T$  untuk  $\text{H}_2\text{S}$  pada 5 kHz. Ketergantungan Debye terhadap  $T^{-1}$  untuk sumbangan monomen dipol molekul, yang praktis di dalam kristal dalam keadaan 'bebas' menyebabkan kurva polarisabilitas molekul murni terputus secara tajam, yaitu jika momen dipol 'membeku'.

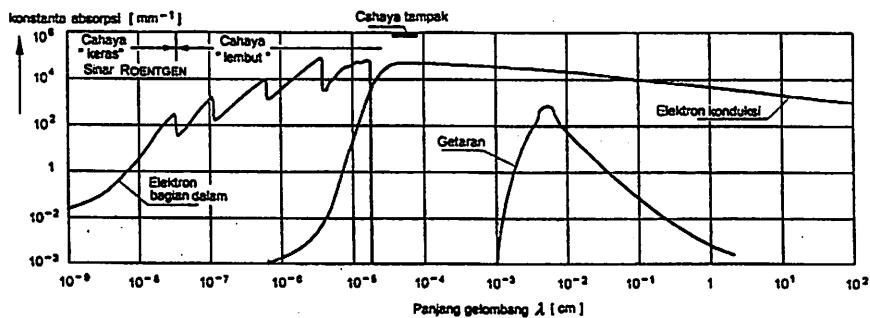
kelipatan bulat dari harga tersebut. Dengan cara yang serupa, seperti pada gelombang medan elektromagnetik, peristiwa kuantisasi energi atau frekuensi ada vibrasi diartikan sebagai adanya kuantisasi gelombang suara atau *fonon* dengan energi  $\hbar\omega$ . Setiap getaran normal bergantung energi totalnya dapat tersusun dalam sejumlah fonon. Jika energinya membesar menjadi  $p\hbar\omega$  maka dikatakan bahwa terdaapt atau timbul  $p$  fonon pada getaran tersebut.

Istilah fonon memudahkan diskusi tentang tereksitasi atau dieksitasinya suatu vibrasi karena cahaya, elektron atau neutron. Dalam semua peristiwa ini semua proses dapat dijelaskan melalui tumbukan dengan fonon. Selain energinya diperlukan pula satu besaran fonon lainnya, yaitu momentum  $\hbar k_s$ , dengan  $k_s$  sebagai bilangan gelombang kisi. Dalam hal ini tentu berlaku  $\omega/k_s = c_s$  (kecepatan fase gelombang kisi). Pada setiap tumbukan tetap berlaku hukum kekekalan energi dan momentum. Oleh karena itu, juga berlaku pernyataan bahwa  $E_s = \hbar\omega$  untuk energi fonon. Keberadaan anggapan bahwa momentum



Gambar 14.40: Kurva dispersi (tergantung frekuensi) dari 'konstanta' dielektrik (polarisabilitas) suatu zat padat secara skematis. Dalam daerah gelombang mikro momen dipol permanen tidak dapat mengubah medan secara serta merta. Dalam daerah ultramerah pergeseran ion satu sama lain mengalami pemisahan, juga dalam daerah ultraviolet pergeseran elektron kulit terhadap inti sebagai mekanisme polarisasi. Relaksasi dan resonansi dibedakan secara nyata melalui kuat atau tidaknya redaman. Hanya di bawah tingkat pertama dispersi berlaku relasi Maxwell  $n^2 = \epsilon$  dengan konstanta dielektrik statik: antara  $n(\omega)$  dan  $\epsilon(\omega)$  secara umum berlaku untuk daerah di luar resonansi.

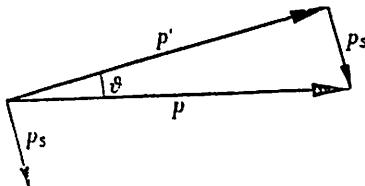
fonon  $p_s = \hbar k_s$  adalah sangat rumit. Suatu gelombang cahaya dengan  $k$ , maka sesuatu dengan  $k'$  haruslah muncul. Seperti halnya pada peristiwa hamburan inelastik Bragg (tanpa perubahan  $\omega$ , § 14.1.3)



Gambar 14.41: Sumbangan vibrasi kisi, elektron konduksi dan elektron-elektron yang terdapat di kulit atom bagian dalam berhubungan dengan absorpsi optik (secara skematis dari R.W. Pohl). Kristal ionik dan isolator mempunyai daerah yang dapat dilewati sangat lebar karena tidak terdapat elektron konduksi.

di dalam kisi hanya mungkin, jika  $k - k'$  adalah sebuah vektor di dalam ruang balik. Sekarang vektor gelombang  $k_s$  suatu gelombang kisi yang memenuhi syarat batas, adalah selalu merupakan vektor di dalam ruang balik. Maka untuk kasus secara umum, momentum  $h(k - k')$  akan diambil oleh kisi sebesar  $hg$  dan terbagi dalam momentum fonon sebesar  $hk_s$ . Hanya untuk kasus terakhir dapat menyebabkan perubahan harga energi (perubahan  $\omega$ ) dari cahaya datang dan proses disebut sebagai proses inelastik; bagian yang diambil oleh kisi tidak bergantung karena massa kisi yang besar.

Juga pada tumbukan dengan sebuah fonon, perubahan  $\omega$  foton adalah sangat kecil, seandainya dapat diukur. Hal ini dapat dibuktikan



Gambar 14.42: Pada hamburan sebuah foton dengan timbulnya atau perubahan momentum fonon (hamburan Brillouin) energi foton jarang dipengaruhi. Oleh karena itu, berlaku:  $p_s = 2p \sin V/2$ .

dari hukum kekekalan momentum sebagai berikut.

Foton sebelum tumbukan :

$$p; E = pc$$

$$\text{hukum kekekalan energi: } pc = p'c + p_s c_s$$

Foton setelah tumbukan :

(14.47)

$$p'; E' = p'c$$

$$\text{hukum kekekalan momentum: } p = p' + p_s$$

$$\text{Fonon : } p_s; E_s = p_s c_s.$$

Jika  $c_s \ll c$ , maka tetap terjadi perpindahan momentum secara efisien, yaitu  $p_s = 2p$  kehilangan energi  $p_s c_s$  adalah kecil dibanding dengan  $pc$ . Dengan perkataan lain  $p_s - p$ : berarti bahwa fonon pada peristiwa tumbukan inelastik hanya dapat dibelokkan. Oleh karena itu, diskusi tentang efek Compton (§ 12.1.3), yang pada pembahasan itu, lalu berlaku untuk kasus tertentu saja, juga berlaku untuk semua kasus: sudut pembelokan dari foton bergantung pada momentum dan energi fonon sebagai berikut:

$$p_s = 2p \sin \frac{\vartheta}{2}. \quad E_s = p_s c_s = E \frac{c_s}{c} \quad (14.48)$$

Hamburan fonon-fonon ini (hamburan Brillouin) menghasilkan cahaya yang dihamburkan monokromatis karena Frekuensi 'garis, hamburan hanya mengalami perubahan sebesar  $\Delta\omega \approx \omega(c_s/c)$ , yaitu kira-kira sebesar  $10^{-6}$  kali Frekuensi semula. Dengan menggunakan sinar laser peristiwa ini dapat diamati dengan baik dan berguna sebagai salah satu cara untuk mengetahui *spektrum fonon*. Juga hamburan neutron-fonon dapat digunakan. Semua rumusan tetap berlaku seperti adanya, jika untuk neutron dianggap mempunyai bilangan gelombang De Broglie  $k$ . Kasus paling sederhana dari hamburan Brillouin pada temperatur yang tidak begitu rendah terjadi, bahwa Frekuensi yang dipancarkan yang juga dihamburkan secara tidak murni (hamburan Tyndall) dan kemudian dapat dimonitor melalui spektrograf, sehingga dapat diamati adanya perbedaan 'garis' spektrum yang mengalami pergeseran yang berhubungan dengan timbul atau lenyapnya sebuah fonon.

#### 14.2.5 Hantaran Panas pada Isolator

Pada logam panas merambat persis seperti rambatan arus, yaitu dibawa oleh elektron-elektron konduksi dan pada isolator melalui fonon. Kandungan panas sebuah benda padat dapat dianggap sama dengan energi gas fonon, sehingga peristiwa hantaran panas dapat dipandang sebagai peristiwa transport dalam gas fonon. Energi panas dalam gas dapat diantar melalui dua cara: Pertama sebagai energi sisa

gas yang mengalir, tempat yang lebih panas sebagai lingkungannya, seperti halnya pada proses pertukaran panas; kedua sebagai difusi energi pada gas yang diam karena adanya gradien temperatur, sementara gas di setiap tempat di dalam wadahnya berada dalam keadaan kesetimbangan dengan lingkungannya. Hanya peristiwa kedua adalah aliran panas dan darinya dapat didefinisikan *koefisien konduktivitas* sebagai konstanta kesebandingan antara *arus panas*  $u$  dan gradien temperatur  $T$ .

Dengan mengingat kembali penurunan pada § 5.3.5, dapat dicari kerapatan partikel. Pada kedua sisi yang dibatasi oleh suatu permukaan, berada pada jarak yang sama dengan lintasan bebas rata-rata di dalam gas, diketahui kerapatan partikel gas, temperatur dan kecepatan masing-masing:  $n_1, T_1, V_1$  dan  $n_2, T_2, v_2$ . Maka

**kerapatan partikel:**

$$\text{dari kiri} : j_{\leftarrow} = \frac{1}{3} n_1 v_1$$

$$\text{dari kanan} : j_{\leftarrow} = \frac{1}{3} n_2 v_2$$

$$\text{perbedaan} : j_{\rightarrow} - j_{\leftarrow} = 0$$

$$\text{sehingga} \quad n_1 v_1 = n_2 v_2 \quad (14.49)$$

**kerapatan aliran energi:**

$$\text{dari kiri} : u_{\leftarrow} = \frac{1}{3} n_1 v_1 \frac{3}{2} k T_1$$

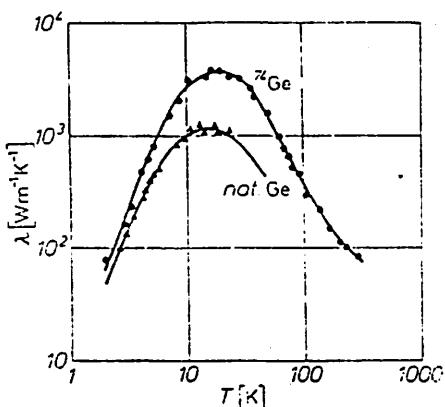
$$\text{dari kanan} : u_{\leftarrow} = \frac{1}{3} n_2 v_2 \frac{3}{2} k T_2$$

$$\text{perbedaan} : u_{\rightarrow} - u_{\leftarrow} = \frac{1}{2} n v k (T_2 - T_1)$$

$$\text{sehingga} \quad \chi = \frac{1}{2} n v k l$$

Rumusan di atas dapat digunakan dengan baik untuk fonon, dengan menganggap  $n$  adalah kerapatannya dan  $v$  adalah kecepatan suara. Sedangkan lintasan bebas rata-rata  $l$  dibatasi dengan tumbukan dengan

batas kristal dan ketidakmurnian kristal serta adanya *tumbukan fonon-fonon*. Seandainya vibrasi kisi harmonik sempurna, yaitu potensial kisi elastik sempurna ( $U = U_0 + \alpha x^2$ ), maka tidak akan terdapat interaksi antar fonon, seperti halnya kemungkinan interaksi yang kecil antar foton di dalam vakum. Interaksi pada optika nonlinier terjadi karena anharmonisitas medium seperti kristal yang diberikan cahaya berintensitas tinggi. Sehubungan dengan hal di atas, tumbukan fonon-fonon juga terjadi karena adanya anharmonisitas getaran kisi.



Gambar 14.43: Konduktivitas panas dari Ge alamiah (20% Ge, 27%  $^{72}\text{Ge}$ , 8%  $^{73}\text{Ge}$ , 37%  $^{74}\text{Ge}$  dan 8%  $^{76}\text{Ge}$ ) serta diperkaya dengan  $^{74}\text{Ge}$  (96%) [data diambil dari T. H. Geballe dan G. W. Hull].

Tidak semua tumbukan fonon-fonon mengikuti batas lintasan bebas rata-rata. Tumbukan 'normal' fonon-fonon dengan masing-masing bilangan gelombang  $k_1$  dan  $k_2$  sehingga menimbulkan fonon ketiga dengan bilangan gelombang  $k_3 = k_1 + k_2$ , tidak mempengaruhi baik aliran momentum maupun energi. Hanya jika kisi mengambil momentum, maka akan terjadi kesetimbangan termis antara kisi dan gas fonon. Kisi hanya dapat mengambil momentum dalam bentuk  $hg$ , dengan  $g$  adalah vektor di dalam ruang balik. Tumbukan demikian dengan kekekalan momentum  $k_1 + k_2 = k_3 + g$  disebut sebagai *proses*

*pembalikan* (Peierl, 1929).  $l$  pada pers[14.49] untuk kristal murni sama dengan lintasan bebas rata-rata. Hanya pada temperatur yang sangat rendah  $l$  diberikan sebagai ukuran kristal. Dalam rumusan tersebut tersembunyi hubungan ketergantungan  $X$  terhadap temperatur  $T$  pada kerapatan fonon  $n$ , yang menurut Debye sebanding dengan  $T^3$  (§ 14.2.1;  $n$  sebanding dengan panas jenis spesifik). Jika pada temperatur tinggi tumbukan fonon-fonon menentukan untuk harga  $l$ , maka harga  $X$  umumnya akan menurun karena probabilitas tumbukan sangat cepat meningkat terhadap kenaikan  $T$  (terdapat lebih banyak pasangan tumbukan, menyebabkan siap terjadi 'pembalikan' pada kisi). Pada amorf padat seperti glasir dan harga  $X$  juga meningkat dengan bertambah tingginya temperatur, karena 'cairan bawah dingin' ini terdiri dari kristalin semu yang berukuran sangat kecil yang tersusun oleh molekul-molekul 'pemanas', yang ukurannya sangat menentukan untuk harga lintasan bebas rata-rata  $l$ .

### 14.3 Logam

#### 14.3.1 Gas Elektron Klasik

Logam secara kimia dikenal bahwa mudah memberikan elektron, yaitu elektron-elektron valensinya karena elektron mempunyai energi ionisasi yang rendah. Pemberian elektron pada grup OH menyebabkan logam dan oksidanya membentuk *basa*. Sifat-sifat fisis khusus logam seperti: pengantar listrik dan panas yang tinggi, tidak tembus cahaya (opak), licin dan dapat merefleksikan gelombang, secara sederhana berhubungan dengan mudah terlepasnya elektron-elektron valensi. P. Drude dan H. A. Lorentz mengandaikan bahwa elektron-elektron valensi tidak lagi terikat oleh atomnya masing-masing, melainkan terikat oleh kristal keseluruhan, sehingga elektron-elektron ini bebas bergerak di seluruh kristal logam melalui kisi dan ion-ionnya dan elektron-elektron tersebut dapat dianggap sebagai 'gas'. Gambaran kelakuan elektron ini secara 'mengejutkan' dapat menjelaskan sifat-sifat logam dengan baik, walaupun terdapat kelemahan pada hal lain. Suatu *gas elektron* berdasarkan hukum distribusi serba sama mempunyai energi kinetik sama dengan  $3/2kT$ , sehingga *panas jenis*

spekifis logam, selain panas jenis ion-ion sendiri sebesar 6 cal/Mol, terdapat sumbangan karena elektron sebesar 3 cal/Mol (dianggap terdapat 1 elektron valensi/atom). Mengapa aggapan tersebut tidak sesuai, Fermi nantinya berhasil menjelaskan fenomena yang lebih baik lagi dengan menggunakan statistik Fermi (§ 14.3.2).

Dengan kemampuan teori Drude-Lorentz muncul hukum-hukum seperti OHM dan Wiedemann-Franz. Elektron-elektron bergerak dengan kecepatan termis  $v$ , hingga mencapai lintasan bebas rata-rata  $l$ , sehingga waktu yang diperlukan elektron untuk bergerak sepanjang lintasan bebas rata-rata adalah  $\tau = l/v$  dan kemudian elektron dibelokkan karena mengalami tumbukan. Di dalam medan listrik  $E$  elektron mengalami percepatan pada arah berlawanan medan sebesar  $v = -e E/m$ . Dalam waktu  $\tau$  elektron menempuh lintasan bebas rata-ratanya dan mengalami tambahan kecepatan sebesar  $v = -e E\tau/m$ , yang lebih besar. Akan tetapi, tumpang tindih dengan kecepatan termis yang acak. Apabila elektron mengalami tumbukan, kecepatan tambahan ini akan kembali lenyap dan gerak elektron dianggap seperti semula kembali. Di pertengahan lintasan bebas rata-rata elektron mempunyai kecepatan drift sebesar  $v_d = -1/2e E\tau/m$  yang berlawanan arah dengan arah medan listrik. *Mobilitas* (kecepatan pembawa muatan/medan) adalah  $1/2 e \tau/m$  dan konduktivitas untuk  $n$  elektron/cm<sup>3</sup> adalah :

$$\sigma = e n \mu = \frac{1}{2} \frac{e^2 n \tau}{m} \quad (14.50)$$

tidak bergantung pada harga medan (hukum OHM).

*Konduktivitas panas*  $\chi$  dari gas elektron dapat diturunkan dari rumus gas atomik (pers. [14.49]):

$$\chi = \frac{1}{2} n v l k \quad (14.51)$$

Perbandingan konduktivitas panas dan listrik dinyatakan oleh persamaan:

$$\frac{\chi}{\sigma} = \frac{mkv^2}{c^2} = \frac{3k^2}{\epsilon^2} T \quad (14.52)$$

Pers. [14.52] ini sesuai dengan hukum yang secara empiris, melalui eksperimen, yang didapat oleh Wiedemann-Franz (lihat kembali pers. [6.64]).

Untuk besaran-besaran  $\sigma$  dan  $\chi$  adalah penting untuk mengetahui, apa yang terjadi dibalik peristiwa tumbukan, yang menyebabkan lintasan bebas rata-rata elektron terhenti. Sebagai pasangan tumbukan elektron atau pusat tumbukan yang paling utama dari semuanya adalah ion logam dan elektron-elektron bebas lainnya. Hal ini mempunyai arti bahwa lintasan bebas rata-rata elektron hanya mempunyai orde dalam Å, yang ternyata lebih kecil dari perkiraan semula. Mengapa ion-ion logam yang bergerak secara periodik dan menempati susunan teratur dan elektron-elektron bebas lainnya tidak akan mengalami hamburan, akan dijelaskan pada pembahasan berikut. Hanya gangguan dari periodisitas yang mempengaruhi pusat hamburan. Gangguan-gangguan tersebut berhubungan dengan:

- adanya partikel lain,
- adanya deviasi pada kisi dari bangun kisi sebenarnya, dislokasi, seperti terdapat pada peristiwa deformasi mekanik dls.
- adanya vibrasi kisi akibat agitasi termis, yang juga menyebabkan adanya deviasi jarak antara partikel-partikel yang terdapat di dalam kisi.

Semua faktor-faktor di atas mempengaruhi waktu lintas elektron  $\tau$  sehingga menyebabkan perubahan harga  $\nu$ . Sebaliknya konsentrasi elektron  $n$  untuk logam praktis tidak bergantung pada temperatur. Sifat hantaran logam akan semakin baik apabila logam semakin murni semakin monokristalin dan bebas tegangan dan semakin rendah temperaturnya (semakin digin). Tahanan sisa pada temperatur mendekati titik nol absolut (jangan tertukar dengan pengertian tahan

superkonduktor) dari suatu logam adalah sebagai kriteria dari kemurniannya. Di samping kemurnian logam, dislokasi yang menentukan pusat hamburan, dapat diukur melalui pengukuran 'garis ukuran regangan' secara kasar melalui regangan mekanik.

Sekarang akan dibahas hamburan elektron melalui partikel bermuatan yang terdapat di dalam kisi (kerapatan partikel  $N$  dan jumlah muatan  $Ze$ ), lebih tepat lagi melalui posisi partikel di dalam kisi yang mempunyai keadaan muatan berbeda sebagai kisi normal. Hamburan ini mempunyai kelakuan persis seperti hamburan Rutherford pada pembahasan pembelokan partikel a karena dihamburkan oleh inti. Pembelokan (sudut pembelokan) akan semakin besar jika partikel semakin dekat dengan pusat hamburan, atau dengan perkataan lain jika harga parameter tumbukan  $p$  semakin kecil. Dalam hal ini dapat dianggap bahwa perbedaan partikel yang dihamburkan dan tidak dihamburkan melalui sudut pembelokan  $90^\circ$ . Sesuai dengan pers. [13.3], suatu parameter tumbukan  $p$  yang sama dengan jarak minimal  $\alpha$  hingga elektron berenergi  $E$  berada didekatnya

dan terjadi tumbukan sentral, maka:

$$\rho_{kr} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0\varepsilon E}$$

Energi elektron adalah energi termis sehingga

$$p_{kr} = \frac{2Ze^2}{12\pi\epsilon_0\varepsilon kT}$$

Penampang lintang hamburan adalah  $S = \pi p_{kr}^2$ , sehingga waktu bebas rata-rata didapat sebagai:

$$\tau = \frac{l}{v} = \frac{1}{NS} = \frac{1}{\sqrt{3kT/m}}$$

dan konduktivitas adalah

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{2} \frac{e^2}{m} n \tau \\ &= \frac{18\pi}{\sqrt{3}} \frac{\epsilon_0^2 \varepsilon^2 k^{3/2} T^{3/2} n}{m^{1/2} Z^2 e^2 N} \end{aligned} \quad (14.53)$$

Kenaikan konduktivitas terhadap  $T^{3/2}$  adalah jarang dapat diamati. Pada semikonduktor kenaikan ini selalu tersembunyi karena ketergantungan konsentrasi muatan  $n$  terhadap  $e^{-E/kT}$  yang lebih besar, sedangkan pada logam umumnya didapat ketergantungan  $\sigma \sim T^{3/2}$ . Peristiwa ini berhubungan dengan hamburan elektron karena pergeseran partikel-partikel kisi karena mengalami getaran termis, dengan perkataan lain berhubungan dengan *tumbukan elektron-fonon*. Suatu hamburan pada objek-objek dengan kekerapan sebanding dengan  $T$ , berdasarkan pers[14.50] haruslah berhubungan dengan ketergantungan konduktivitas terhadap  $T^{3/2}$ . Apabila dianggap bahwa yang pada temperatur  $T$  mempunyai energi sebanding dengan energi vibrasi kisi dan energi spesifik fonon tidak bergantung pada  $T$ , yaitu  $h\nu_{gr}$ , maka jumlahnya akan sebanding dengan  $T$ .

#### 14.3.2 Gas Fermi

Pengamatan klasik menganggap bahwa bebas elektron tidak dapat berdekatan satu sama lain pada jarak yang sangat dekat di dalam ruang. Akan tetapi, anggapan ini tidak berdasar, karenanya pengamatan klasik tidak dapat menentukan momentum elektron secara eksak. Menurut mekanika kuantum sebaliknya, elektron dapat mengisi seluruh ruang yang tersedia sebagai gelombang  $\psi$  dan mempunyai probabilitas untuk mempengaruhi elektron-elektron lain agar menuruti kelakuannya. Relasi ketidakpastian menunjukkan bahwa sungguh-sungguh terdapat pengaruh momentum elektron yang saling berlawanan tersebut. Misalkan elektron terkurung di dalam kristal dengan ukuran linier  $L$ . Kemungkinan terbesar ketidakpastian posisi elektron di dalam kristal adalah  $\Delta x = L$ . Pada harga ketidakpastian posisi elektron maksimum ini akan memberikan harga ketidakpastian momentum minimal sebesar  $\Delta p = h/L$ . Adanya interval momentum ini menuntut setiap elektron berada pada keadaan momentum tersebut dan tidak membiarkan elektron lain untuk memasuki keadaan tersebut (kecuali jika elektron lain mempunyai spin yang berlawanan). Perhitungan yang teliti berdasarkan mekanika kuantum membuktikan hasil sebagai berikut: Jika vektor momentum  $p$  yang mungkin

digambarkan untuk elektron yang terkurung tersebut, maka akan terbentuk titik-titik kisi yang masing-masing terletak pada jarak  $h/L$ . Setiap keadaan elektron mengambil volume sebesar  $(h/L)^3$  di dalam ruang momentum. Setiap  $(h/L)^3$  dapat diisi paling banyak dua elektron yang mempunyai spin berlawanan arah. Titik atau sel kisi tersebut sesungguhnya tidak berhubungan dengan kisi kristal (tentunya juga tidak berhubungan dengan kisi balik) dan akan muncul pula dalam 'kotak' potensial tiga dimensi.

Di dalam ruang momentum dengan koordinat  $p_x, p_y, p_z$  yang berhubungan dengan energi kinetik  $E$  tentu ( $E = p^2/2m$ ), dengan jari-jari ruang  $p = \sqrt{2mE}$ . Jika diinginkan kemungkinan  $N$  elektron menghemat energi, seperti halnya distribusi energi yang terjadi pada keadaan temperatur rendah, maka haruslah dipilih harga momentum yang kecil.  $N$  elektron memerlukan  $N/2$  sel atau suatu volume dalam ruang momentum sebesar  $1/2 N (h/L)^3$ . Volume ini berbentuk bola, persis seperti bumi. Jari-jari bola tidak lain adalah momentum Fermi  $p_F$ , yang dapat dicari dari  $1/3N (h/L)^3 = 4\pi p_F^3/3$  sehingga  $p_F = h(3N/8\pi L^3)^{1/3}$ , atau jika dinyatakan dalam kerapatan partikel  $n = N/L^3$ :

$$p_F = h \left( \frac{3}{8\pi} n \right)^{1/3} \quad (14.54)$$

Momentum Fermi ini berhubungan dengan energi:

$$E_F = \frac{p_F^2}{2m} = \frac{h^2}{2} \left( \frac{3}{8\pi} n \right)^{2/3} \quad (14.55)$$

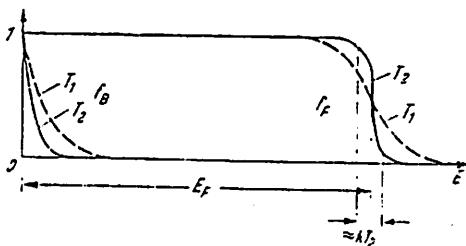
disebut sebagai energi Fermi suatu partikel gas yang berkelakuan seperti disebutkan di atas disebut mengalami *degenerasi* atau gas Fermi. Temperatur yang mengikuti hubungan  $E_F = kT$  disebut sebagai *temperatur degenerasi*  $T_F$  atau *temperatur Fermi*. Pada temperatur  $T$  suatu gas mengalami degenerasi jika  $T \ll T_F$ . Harga energi Fermi untuk logam dengan  $n = 10^{22}$  dan  $n = 10^{23}$  elektron/cm<sup>3</sup> adalah  $E_F = 1,7$  dan  $7,9$  eV,  $T_F = 1970$  dan  $9120$  K.

Jumlah keadaan yang berada dalam interval energi antara  $E$  dan  $E + dE$  sesuai dengan volume suatu kulit bola di dalam ruang  $p$ . Secara

sederhana jumlah keadaan tersebut dapat diperoleh dengan menyatakan  $n$  pada pers. [14.55] dalam  $E$ , kemudian menurunkannya terhadap  $E$ , sehingga diperoleh:

$$dn = 4\pi \left( \frac{2m}{h^2} \right)^{3/2} \sqrt{E} dE \quad (14.56)$$

Pada  $T = 0$  semua keadaan-keadaan ini, di bawah  $E_F$  akan terisi penuh oleh elektron, sedangkan di atasnya tidak terdapat elektron sama sekali. Pada temperatur tinggi batas energi  $E_R$  yang tajam ini akan 'terbenam': 'balok es Fermi' mengalami 'pelelehan', elektron



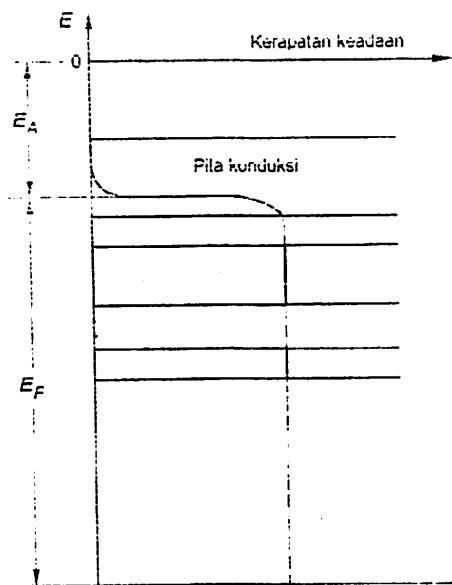
Gambar 14.44; Distribusi Fermi dan Boltzmann pada temperatur yang sama. Akan tetapi, mempunyai jumlah partikel yang berbeda. Perbedaan kerapatan partikel justru memaksa keadaan transisi dari distribusi Boltzmann menjadi distribusi Fermi.

akan mengalami perubahan keadaan sedikit di atas dan di bawah  $E_F$ . Peristiwa ini sesuai dengan lebar energi sebesar  $kT$  pada kedua sisi  $E_F$ . Dengan istilah yang lebih tepat dikatakan terdapat probabilitas, bahwa suatu keadaan mempunyai energi  $E$  mengikuti fungsi sebagai berikut:

$$f(E) = \frac{1}{e^{(E-E_F)/kT} + 1} \quad (14.57)$$

(penurunan fungsi ini lihat § 17.3.2). Fungsi ini mempunyai harga  $1/2$  pada  $E = E_F$  dan kedua sisinya menjadi antisimetri terhadap  $0$  dan  $1$ . Jarak fungsi tersebut terhadap harga asimtotnya akan berkurang dengan bertambahnya  $E$  sebesar  $kT$  sebesar faktor  $e$ . Pada,  $T \gg T_F$

fungsi distribusi ini menjadi fungsi distribusi Boltzmann yaitu gas tidak lagi mengalami degenerasi yang sebelumnya keadaannya sangat berbeda sama sekali. Untuk kasus  $kT < E_F$  paling tidak dapat dijelaskan melalui fungsi distribusi Boltzmann yang 'mirip' ekor distribusi Fermi, yang terletak di atas 'balok es Fermi', akan tetapi



Gambar 14.45: Kurva Fermi mengatur bagian keadaan yang ditempati, tidak bergantung apakah dalam daerah  $E$  yang diamati atau tidak.

energinya harus dihitung mulai dari  $E_F$ : Untuk  $E = E_F > kT$  fungsi distribusi menjadi  $f(E) = e^{-(E - E_F)/kT}$ . Semuanya ramalan ini juga masih berlaku jika keadaan energi yang tersedia tidak seperti keadaan energi gas elektron bebas yang dinyatakan pada pers. [14.56], melainkan jika terdapat beberapa daerah energi terlarang, seperti halnya pada *model pita* (lihat § 14.3.5).

Pada gas yang tidak mengalami degenerasi semua partikel mempunyai energi rata-rata di sekitar  $kT$  (persisnya  $3/2kT$ ) lebih tinggi dibanding pada  $T = 0$ . Pada gas Fermi keadaan demikian berlaku jika partikel menempati keadaan di bawah  $E_D$  'sejauh'  $kT$ , yaitu untuk

partikel yang menempati bagian  $kT/E_F$  (persisnya bagian ini terletak pada garis  $KT$  sebesar  $3/2kT/E_F$ , karena kerapatan keadaan ini, pada tempat tersebut, lebih besar dari rata-ratanya). Panas jenis spesifik dari gas Fermi (per  $\text{cm}^3$ ) tidak sama dengan  $3/2 kn$ , melainkan hanya  $3/2k^2T_{\text{TL}}/E_F$  atau secara eksak jika dilakukan penyelesaian dari 'ekor' kurva Fermi diperoleh:

$$c_{\text{el}} = \frac{\pi}{4} \frac{kT}{E_F} kn \quad (14.58)$$

Sumbangan gas elektron pada harga panas jenis suatu logam adalah kira-kira 100 kali lebih kecil dari harga yang diharapkan dari Dulong-Petit sebesar 6 cal/Mol. Dengan demikian, semua paradoks dapat dijelaskan dengan baik bahwa panas jenis logam merupakan kontribusi terbesar adalah berasal dari ion-ionnya. Hanya pada temperatur rendah ( $T \leq 1 \text{ K}$ ), di mana kontribusi kisi pada harga panas jenis tidak lagi sebanding dengan  $T^3$ , panas jenis sumbangan elektron dapat diukur. Diperoleh ketergantungan seperti diharapkan:

$$c = c_{\text{el}} + c_{\text{kisi}} = \gamma T + \delta T^3$$

dan dari harga  $\gamma$  yang diukur dapat dicari besarnya energi Fermi  $E_F$  berdasarkan pers. [14.58]. Dalam hal ini kadang-kadang massa elektron dianggap sebagai massa efektifnya, yang harganya mengalami deviasi terhadap harga massa elektron sebenarnya. Asumsi tersebut berasal dari interaksi elektron-kisi, elektron-fonon, dan elektron-elektron. Kerapatan elektron yang terlalu besar menyebabkan adanya gaya interaksi Coulomb satu sama lain sehingga gas Fermi berubah menjadi cairan Fermi. Gerak sebuah elektron mempengaruhi elektron-elektron lainnya. Maka akan muncul gerak kolektif dari cairan Fermi (lihat § 14.3.4). Pengaruh yang menentukan terjadi pada temperatur sangat rendah.  $^3\text{He}$  cair adalah cairan Fermi (kebalikan dari  $^4\text{He}$  adalah cairan Bose;  $^3\text{He}$  cair mempunyai spin elipatan  $1/2$ , karenanya memenuhi fungsi distribusi Fermi-Dirac).

### 14.3.3 Optika Logam

Gelombang cahaya sukar dapat menembus gas elektron yang rapat di dalam logam, seperti halnya juga gelombang mikro menembus elektron dengan kerapatan yang amat jarang di ionosfir. Gelombang akan direfleksi oleh logam dan dapat diketahui dari kilapan tertentu dari permukaannya. Akan tetapi, terdapat batas harga frekuensi tertentu untuk peristiwa refleksi ini. Frekuensi tersebut bergantung pada frekuensi Langumir dari gas elektron dan tidak bergantung pada kerapatan partikel  $n$ , demikian pula seperti pada plasma ionosfir (lihat § 8.3.6):

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{ne^2}{\epsilon \epsilon_0 m}} \quad (14.59)$$

Untuk  $n = 10^{22}$  dan  $10^{23}$  diperoleh harga  $\omega_0$  masing-masing sebesar 3,5 dan 11,1 eV, dengan panjang gelombang sesuai dengan  $\lambda = 340$  dan 110 nm. Harga  $\epsilon$  secara dominan hanya dipengaruhi oleh ion-ion kisi, karena elektron-elektron bebas justru mempunyai frekuensi sebesar  $\omega_0$ . Kenyataan bahwa kelakuan logam bergantung pada konsentrasi elektronnya dalam daerah panjang gelombang ultraviolet dekat atau jauh menjadi transparan, paling tidak untuk lapisan logam tipis (contoh Na pada  $\lambda \geq 210$  nm). Bersamaan dengan itu logam akan kehilangan sifat refleksinya. Untuk kebanyakan logam, emas misalnya, terletak pada daerah cahaya aviolet. Dengan menjatuhkan pancaran cahaya violet pada emas, emas menjadi berwarna lebih kekuningan.

Sifat absorpsi dan refleksi dari isolator juga dapat dijelaskan dari konstanta dielektrik suatu bahan (§ 14.2.3). Di dalam medan listrik  $E$  elektron-elektron bebas bergerak menurut  $mx = -eE$ , amplitudo vibrasinya di dalam medan bolak-balik adalah  $x_0 = eE/m\omega$ , besarnya vektor polarisasi (jumlah momen dipol/satuan volume)  $P = -ex_0 = -e^2 n E / m \omega^2$  sehingga konstanta dielektrik menjadi:

$$\epsilon = \epsilon_{\text{ion}} - \frac{e^2 n}{\epsilon_0 m \omega^2} = \epsilon_{\text{ion}} \left( 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) \quad \text{rumus (14.60)}$$

Untuk  $\omega = \omega_0$ ,  $\epsilon$  berharga negatif. Dalam hal ini tidak mungkin terjadi adanya transmisi gelombang tidak terendam. Koefisien absorpsi dapat diperoleh sama dengan:

$$\alpha = \frac{\omega}{c|n|} = \frac{\omega}{c\sqrt{\epsilon_{ion}}\sqrt{\omega_0^2/\omega^2 - 1}}$$

Untuk  $\omega \ll \omega_0$  maka  $a \approx \omega^2/C\epsilon_{ion}\omega_0$ , yaitu  $a \ll \omega/c = \lambda$ : kedalaman yang dapat ditembus suatu gelombang cahaya untuk logam tertentu hanya 0.1 panjang gelombangnya atau lebih rendah lagi.

Persamaan gerak yang menghasilkan pers. [14.60] diturunkan dengan anggapan bahwa elektron bebas sempurna. Bahwa konduktivitas umumnya mempunyai harga yang terbatas, menunjukkan elektron mengalami pula gaya gesekan efektif. Gaya gesek ini dapat dinyatakan dalam besaran *mobilitas*, yaitu melalui  $e\tau/\mu$ ; persamaan gerak yang lebih lengkap (termasuk gaya gesek) adalah  $eE = mx/\mu$  atau untuk medan gelombang berbentuk sinusoida  $eE_0 = -m\omega^2x_0 + ie\omega x_0/\mu$ . Dengan demikian, pers. [14.60] dapat ditulis kembali menjadi :

$$\epsilon = \epsilon_{ion} + \frac{e^2 n}{\epsilon_0(-m\omega^2 + ie\omega/\mu)}$$

atau jika disubstitusikan  $\mu = 1/2 e\tau/m$ :

$$\epsilon = \epsilon_{ion} + \frac{e^2 n}{\epsilon_0 m(-\omega^2 + 2i\omega/\tau)} \quad (14.61)$$

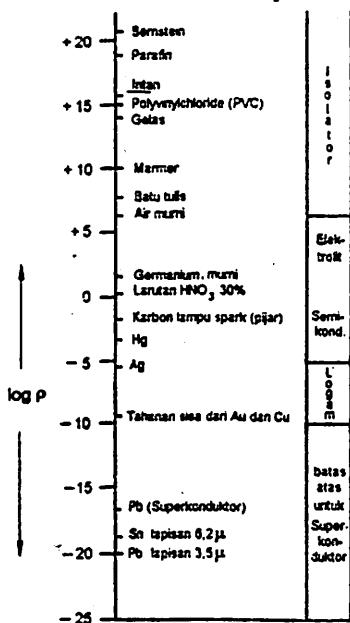
Untuk  $\omega \gg \tau^{-1}$  berlaku pers. [14.60]; untuk  $\omega \ll \tau^{-1}$  diperoleh bahwa  $\epsilon = \epsilon_{ion} + e^2 n \tau / \epsilon_0 2i\omega m = \epsilon_{ion} + s/\epsilon_0 i\omega$ . Koefisien absorpsi (bagian imajiner dari indeks bias/panjang gelombang) adalah

$$\alpha \approx \sqrt{\frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega \lambda^2}} = c \sqrt{\frac{\sigma \omega}{\epsilon_0}} \quad (14.62)$$

Rumus ini telah didapat sejak P. Drude mengemukakan teorinya. Pada konduktor yang tidak begitu baik terdapat *absorpsi* Drude pada frekuensi rendah ( $\omega \ll \tau^{-1}$ ) oleh gas elektron. Pada semikonduktor dan isolator (harga  $\omega_0$  lebih kecil) dengan konsentrasi *impuritas* yang kecil (harga  $\tau$  menjadi besar) sabsorpsi Drude dapat mengatasi gangguan elektron 'bebas' dengan mudah.

#### 14.3.4 Listrik dan Aliran Panas

Teori Drude-Lorentz dari konduktivitas listrik (§ 14.3.1) menghasilkan serangkaian kegunaannya melalui pengandaian-pengandaian tersebut: Gerak elektron di dalam medan listrik akan dipengaruhi oleh gerak driftnya, keberadaan ion-ion kisi praktis tidak mempengaruhinya kecuali gangguan periodik yang menyebabkan elektron mengalami hamburan: Demikian juga, adalah kecil pengaruh elektron yang mengalami gerak drift satu sama lain. Tembaga pada temperatur kamar mempunyai konduktivitas  $s = 6 \cdot 10^7 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$ . Maka berdasarkan pers. [14.50] mobilitas elektron pada tembaga berharga  $10^{-2} \text{ m}^2/\text{V} \cdot \text{det}$ . dan lintasan bebas rata-rata sekitar  $100 \text{ \AA}$ . Pada temperatur  $10 \text{ K}$  konduktivitasnya menjadi 100 kali lebih besar, berarti bahwa elektron konduksi melewati (drift) lebih dari  $10^4$  jarak antar atom tanpa mengalami tumbukan. Pada temperatur He ( $4,2 \text{ K}$ ) lintasan bebas rata-rata elektron untuk beberapa logam dapat mencapai beberapa cm.



Keterangan:  $\rho [\Omega \cdot \text{cm}]$

Gambar 14.46: Tahanan jenis spesifik  $\rho$  merupakan salah satu sifat bahan, melebar adalah daerah sifat-sifat. Harga  $\rho$  untuk superkonduktor adalah batas atas; dalam setiap peristiwa harga tahanan sangat kecil untuk dapat diukur.

Bawa elektron di dalam kristal yang mengandung ion ideal praktis tidak mengalami pertukaran energi dapat ditilik dari sifat gelombangnya (§14.3.5). Elektron-elektron konduksi lainnya dengan sendirinya praktis tidak terpengaruh oleh sifat periodisitas kisi. Sangat jarang terjadnya tumbukan antara elektron dapat dihubungkan dengan kemampuan melindungi diri akibat adanya muatan dan umumnya dapat ditinjau dari sifat *bola Fermi*.

Mirip seperti di dalam larutan elektrolit, bahwa setiap muatan akan ditutupi oleh awan ion pasangannya dengan ukuran awan tersebut dapat ditentukan dari panjang Debye-Hueckel  $d_{DH} = \sqrt{\epsilon \epsilon_0 kT/e^4 n}$ , maka setiap muatan positif di dalam logam akan mengumpulkan elektron konduksi di sekitarnya, setiap muatan negatif menimbulkan vakum elektron. Untuk menyatakan jari-jari awan muatan ini,  $kT$  dapat digantikan dengan energi Fermi  $E_F$ . Selain itu muncul faktor  $\sqrt{2/3}$  yang berhubungan dengan sifat simetri susunan bola, bukan suatu permukaan seperti dijelaskan pada § 6.4.5. Harga konsstanta dielektrik eion yang dipandang hanya karena polarisasi ion-ion

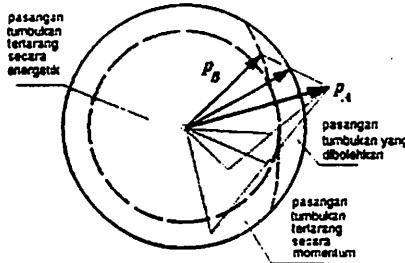
$$d_a = \sqrt{\frac{\epsilon_{ion} \epsilon_0 E_F}{3e^2 n}} \quad (14.63)$$

Tentunya harga  $d_a$  tidak boleh jauh lebih kecil dari konstanta kisi karena jika demikian, elektron dikatakan terikat pada ion-ion. Dengan memasukkan harga  $E_F$  dari pers. [14.55] diperoleh harga  $d_a = \sqrt{r_{on}^{1/3}}$  seperti yang diharapkan. Dengan demikian dapat dikatakan bahwa jari-jari awan muatan pelindung terletak di antara harga jari-jari Bohr  $r_o$  dan jarak rata-rata elektron  $n^{-1/3}$ . Medan akibat muatan pusat hanya berpengaruh hingga jarak  $d_a$ , pada daerah lebih jauh lagi medan tersebut akan dipengaruhi oleh muatan berlawanan dari awan elektron. Penampang lintang tumbukan antara dua elektron konduksi atau sebuah elektron da sebuah ion berkurang dari harga klasiknya, yaitu  $S = (e^2/4\sqrt{\epsilon_0 kT})^2 = 2 \cdot 10^5 \text{ \AA}^2$ , sedangkan menurut § 14.3.1 harganya sekitar  $10^5 \text{ \AA}^2$ .

Pembentukan awan elektron ini dapat pula dijelaskan sebagai

berikut: Elektron-elektron konduksi bukan merupakan gas yang tidak terstruktur, melainkan membentuk struktur yang mendekati bentuk kisi kristal. Kerapatannya akan besar pada daerah di dekat ion. Elektron-elektron tersebut tetap satu sama lain mempertahankan jaraknya dan kebanyakan bergerak secara kolektif melalui kisi. Gerakan kolektif elektron demikian juga merupakan getaran plasma yang menyebabkan terjadinya absorpsi cahaya (lihat §14.3.3). Sebuah elektron yang ditembakkan atau juga foton pada peristiwa refleksi dari logam atau pada proses transisi melalui vibrasi plasma tersebut, pada umumnya dengan frekuensi Langmuir  $\omega_0$  dapat mengeksitasi logam. Seluruh gas Fermi ini akan meluap ke sana kemari, mengalami vibrasi. Vibrasi ini terkuantisasi. Elektron hanya dapat memberikan energi dalam bilangan bulat, kelipatan dari  $h\omega_0$  pada vibrasi plasma. Dalam hal ini dilakukan pengukuran kehilangan energi melalui peristiwa refleksi dan menggambarkannya dalam bentuk kurva yang mirip kurva Franck-Hertz, yaitu dengan cara mengukur ketidaksamaan antara sudut datang dan sudut pantul, kemudian dihitung dengan menggunakan hukum kekekalan momentum; dengan asumsi bahwa *plasmon* mempunyai energi  $hk$ , dengan  $k$  adalah vektor gelombang vibrasi plasma.

Untuk hantaran listrik diperoleh gambaran bola Fermi (yaitu dengan menggunakan relasi ketidakpastian Heisenberg + prinsip Pauli) sebagai 'batasan' untuk mengetahui kekerapan terjadinya tumbukan elektron-elektron. Misalkan sebuah elektron A dipercepat di dalam



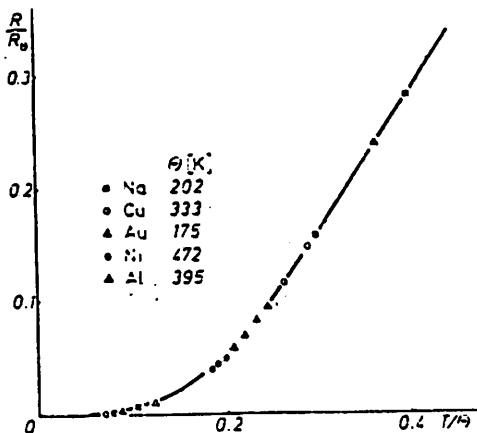
Gambar 14.47: Sebuah elektron yang mengalami peningkatan energi hanya dapat bertumbukan dengan elektron terbatas di dalam bola Fermi, karena berdasarkan hukum kekekalan energi dan momentum, apabila tidak demikian, maka keadaan akhir berada pada keadaan energi yang telah terisi.

median sehingga energi elektron berada sebesar  $\epsilon$  lebih tinggi dari permukaan bola Fermi dan mencoba untuk memberikan kelebihan energi ini melalui tumbukan dengan elektron B lainnya. Setelah tumbukan energi kedua elektron tersebut berada pada energi rata-rata keduanya. Tumbukan akan benar-benar berpengaruh pada energi elektron, seandainya terjadi tumbukan A dengan sebuah elektron B dengan energi jauh lebih kecil, berada di dalam bola. Akan tetapi semua keadaan di dalam bola telah dipenuhi. Tumbukan yang paling mungkin antara dua elektron terjadi hanya di permukaan bola Fermi atau sedikit lebih tinggi dari permukaan tersebut. Selain itu proses tumbukan haruslah memenuhi hukum kekekalan momentum. Dengan demikian, maka pasangan tumbukan haruslah terletak pada daerah bola Fermi dan secara geometri didefinisikan sebagai berikut: Dari titik  $p_A$  di geser sekumpulan garis pada bola Fermi dan pada setiap garis diberi tanda titik  $p_B$ , yang terletak pada jarak yang sama dengan permukaan bola dari garis tersebut, yaitu seperti  $p_A$ . Maka akan diperoleh seperti bulan sabit yang dibatasi oleh sebuah garis yang hampir merupakan garis lurus sedemikian dengan kulit bola setinggi  $h = p_F \epsilon / 2E_F$  (lihat gbr. [14.47]). Volume kulit bola tersebut adalah  $p_F h^2$  dan membentuk  $\epsilon^2 / 3E_F^2$  bagian dari bola Fermi seluruhnya. Frekuensi tumbukan antara elektron konduksi akan berkurang dengan faktor sebesar bagian ini, sedangkan lintasan bebasnya  $l$  akan bertambah sebesar faktor yang sama. Energi yang diperoleh dari medan sebesar  $eEl$  atau energi termis  $kT$  akan menggantikan  $\frac{1}{2}$ , tergantung mana yang lebih besar. Umumnya  $kT$  selalu jauh lebih besar, selain terdapat medan yang lebih besar dalam kasus 'elektron panas'. Maka  $l$  bertambah dengan faktor  $(kT/eE)^2$ , dan diperoleh dengan menukar  $E_F$  dari pers [14.55] dan  $S \approx d^2$  dari pers. [14.63] didapat :

$$l \approx r_0 \left( \frac{\epsilon^2}{r_0 k T} \right)^2 \quad (14.64)$$

( $r_0$  = jari-jari Bohr). Dengan demikian, diperoleh harga  $S \sim l/v \sim T^2$ ,  $v$  adalah kecepatan Fermi  $v_F = p_F/m$ , bukan merupakan kecepatan termis

klasik  $\nu \sim T^{1/2}$ . Faktor yang terdapat dalam kurung pada pers. [14.64] pada temperatur kamar lebih kurang 500 diperoleh harga  $l = 10^{-3}$  cm. Harga  $l$  ini adalah lebih panjang dari  $l$  untuk tumbukan elektron-fonon, yaitu  $l \sim T^1$ , berarti pula bahwa  $\sigma \sim T^1$  (lihat kembali § 14.3.1; dalam pembahasan tersebut dihasilkan  $\sigma \sim T^{3/2}$ ), karena



Gambar 14.48: Ketergantungan tahanan (resistan) terhadap temperatur (dalam perbandingan terhadap resistansi Debye) untuk logam (kurva Grueneisten,  $\Theta$  adalah temperatur Debye,  $R_\Theta$  adalah tahanan pada  $T = \Theta$  [data berasal dari Bardeen]).

$\nu \sim T^{1/2}$ ). Karenanya sumbangan dari proses tumbukan elektron-elektron hanya berpengaruh pada temperatur rendah. Demikianlah seperti diilustrasikan oleh kurva Grueneisten (gbr. [14.48]), yang menggambarkan dengan baik tahanan (resistan) semua logam, dalam satu kesatuan, yaitu jika temperatur dinyatakan dalam bagian temperatur Debye  $\Theta_D$  dan diperoleh resistansi dalam bagian  $R_\Theta$ , tahanan pada temperatur Debye adalah :

$$R = R_\Theta \left( \frac{1}{\Theta^2/T^2 + a\Theta/T} \right) \quad (a \approx 0,15)$$

Pada logam murni hantaran panas juga lebih disebabkan oleh elektron konduksi, sedangkan untuk logam yang kurang murni lebih dipengaruhi oleh fonon, mirip seperti pada isolator. Karenanya konduktivitas panas antara logam, semikonduktor, dan isolator tidak sebesar seperti konduktivitas listrik: Dalam hal ini tidak berlaku hukum Wiedermann-Franz. Pada temperatur rendah baru kelihatan pengaruh kontribusi elektron pada logam. Dalam hal ini konduktivitas panas dapat dituliskan kembali seperti:

$$\chi = \frac{1}{3} c_{el} v$$

(lihat § 5.3.5 dan § 14.3.1). Harga panas jenis dalam bab tersebut dalam  $c_{el} = \sqrt{2} k^2 T n / 4E_F$  (pers. [14.58]) dan untuk  $v$  digantikan dengan kecepatan Fermi  $v_F = 2E_F/m$ , harga  $l$  diperoleh dari pers. [14.64]. Selain itu konduktivitas listrik diperoleh

$$\sigma = n \epsilon \mu = \frac{1}{2} \frac{n \epsilon^2}{m} \frac{l}{v_F},$$

maka perbandingan kedua konduktivitas tersebut diperoleh kembali sebagai :

$$\frac{\chi}{\sigma} = \frac{3}{2} \frac{e^2 E_F}{m v_F k^2 T v_F} \approx \frac{e^2}{k^2 T}$$

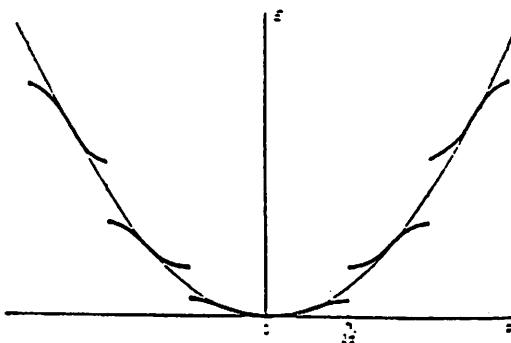
Hal ini sangat mengejutkan, jika dipandang kembali perbedaan antara teori klasik dan kuantum.

Pembatasan lintasan bebas melalui tumbukan elektron dan fonon diperoleh lintasan bebas yang bertambah dengan penurunan temperatur. Jika  $l$  pada temperatur rendah dinyatakan dalam besaran kristal, jarak dari ion 'asing', maka akan diperoleh bahwa  $c_{el} \sim T$  dan  $\chi \sim T$ . Dalam kondisi yang sama, konduktivitas listrik tidak bergantung pada temperatur lagi.

### 14.3.5 Pita Energi

Telah dibahas kelakuan elektron sebagai partikel bebas di dalam logam, yang bergerak tanpa gangguan melalui potensial periodik ion-ion kisi. Pembahasan di atas merupakan pendekatan kasar, karena pada dasarnya terdapat juga interaksi elektron dengan ion-ion kisi, paling tidak pada momentum yang dipunyai elektron. Dalam pandangan yang agak berbeda, gerak sebuah elektron dengan energi dan momentum  $E$  dan  $p$  dipandang sebagai gelombang  $\psi$  berfrekuensi  $\omega = E/h$  dengan panjang gelombang  $\lambda = h/p$  atau dengan vektor rambatan gelombang  $k = p/h$ . Probabilitas elektron terdapat pada suatu posisi di dalam ruang kisi dinyatakan dalam  $\psi^2(r)$ . Jika gelombang  $\psi$  memenuhi kondisi Bragg untuk peristiwa refleksi pada sembarang permukaan kisi, maka tidak akan diperoleh kemungkinan adanya gelombang  $\psi$  yang dapat menembus kisi, melainkan hanya terdapat suatu gelombang diam dan gelombang yang direfleksikan. Khususnya jika sudut jatuh adalah tegak lurus permukaan kisi, dengan jarak tegak lurus  $d$ , maka akan muncul gelombang pada  $k = n\sqrt{d}/d$  atau  $p = n\sqrt{h}/d$ .

Untuk sebuah elektron bebas  $E$  dan  $p$  saling bergantung satu sama lain menurut persamaan  $E = p^2/2m$  atau  $E = h^2k^2/2m$ .



Gambar 14.49: Interaksi dengan potensial kisi grafik parabola  $E(p)$  dari elektron akan berubah menjadi parabola terputus-putus, yaitu suatu seri pita energi.

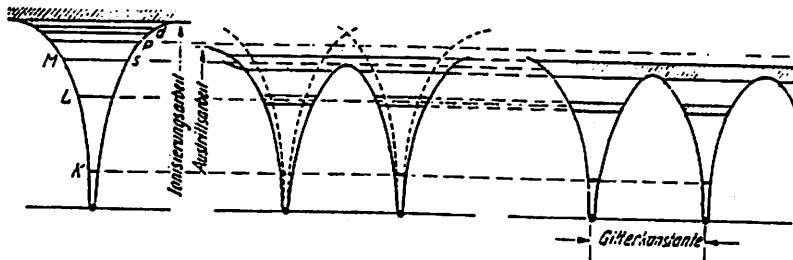
Hubungan parabolik ini (lihat gbr. [14.49]) akan terputus pada harga  $p$  atau  $k$  kritis yang harus memenuhi syarat Bragg (harga tersebut merupakan vektor  $k$  yang berakhir pada ujung zone Brillouin). Dalam hal ini gelombang yang menembus permukaan kisi akan berubah menjadi gelombang diam, misalnya untuk  $k = \pi/d$  dan  $\lambda = 2d$  (syarat batas panjang gelombang Debye). Untuk gelombang diam demikian akan terpenuhi dua fungsi periodik sebagai berikut:  $\psi = \sin \pi x/d$  dan  $\psi = \cos \pi x/d$ . Hal kedua  $\psi^2$  pada posisi ion ( $x = 0, d, \dots$ ) adalah mencapai maximum, di daerah antaranya  $O$  dan kebalikan untuk fungsi pertama. Jelaslah bahwa gelombang cosinus mempunyai energi total lebih rendah, karena energi digunakan untuk elektron berada di dekat ion kisi. dalam keadaan bebas harga  $E$  untuk  $p = \pi h/d$  akan terpecah menjadi dua keadaan dengan perbedaan harga energi yang besar. Dalam keadaan ini parabola  $E$  harus terputus; bagian ujungnya yang bebas akan surut kebelakang, sedangkan ujung lainnya maju ke depan., maka bagian yang terputus tersebut akan membentuk garis  $S$  yang menyatakan keadaan energi elektron yang dibolehkan, sedangkan 'jurang' yang berada di antaranya disebut sebagai zone terlarang. Lebar keadaan energi yang dibolehkan dapat diperoleh melalui pendekatan sederhana ini, yaitu melalui  $p^2/2m = r^2 h^2/2md^2 \approx 3\text{eV}$  (pada  $d = 3\text{\AA}$ ). Untuk lebar daerah energi terlarang, yaitu perbedaan energi potensial antara gelombang sinus dan cosinus diperoleh dalam orde  $e^2/4\pi\epsilon_0 d$ , sesuai dengan syarat Bohr (§ 12.3.4) yang harganya dalam orde beberapa eV juga.

Struktur pita energi tentunya bergantung dari struktur kristal dan arah rambatan gelombang elektron. Struktur zone Brillouin menunjukkan arah di mana lompatan dari suatu pita terhadap pita lainnya. Permukaan  $E(k)$  tetap bukan merupakan permukaan rotasi. Sehubungan dengan itu, juga keadaan momentum pada arah yang berbeda memenuhi 'jarak' yang berbeda, yaitu pada 'jarak' terjauh di mana terletak permukaan  $E(k)$  paling bawah. Batas yang diisi pada ruang  $p$  dan  $k$ , yang pada elektron bebas sebagai permukaan bola Fermi, pada kisi adalah sebagai permukaan Fermi yang biasanya mengandung topologi yang sangat rumit. Sifat-sifat elektromagnetik

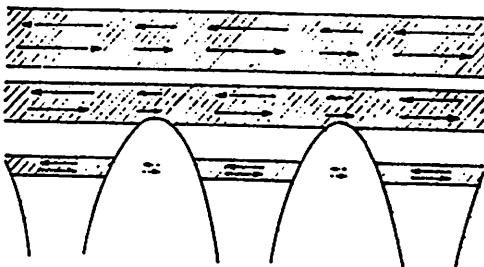
dan optik lebih rinci dari logam berdasarkan topologi permukaan Fermi yang rumit dan pita energi dapat lebih dimengerti dengan baik. Dalam hal ini terkandung pengertian ketergantungan tahanan (resistan) terhadap medan magnet (*magnetoresistan*), *resonansi siklotron* dari elektron konduksi dan *hole* dan *efek De Häs- Van Alpen*, yaitu osilasi kuantum dari suseptibilitas sebagai fungsi dari medan magnet yang digunakan (mirip seperti efek pertukaran Josephson, §14.7). Sebaliknya efek-efek ini menawarkan proses eksperimental untuk mengetahui struktur pita energi lebih rinci.

Keberadaan pita energi menyebabkan pula pandangan berbeda. Pembahasan yang diberikan di sini bermula pada gas elektron bebas dan gangguan yang mempengaruhi gerak elektron berasal dari ion-ion kisi yang tersusun secara periodik. Akan tetapi, pembahasan dapat pula dimulai dari suatu batasan, yaitu dari kelakuan atom logam terisolir (ion+elektron valensi) dan pembahasan seperti ini adalah agak berbeda dengan pembahasan sebelumnya. Kemudian akan dibicarakan bagaimana satu elektron yang berasal dari atom suatu atom berpindah melalui 'kanal' menuju atom lainnya, yaitu akan dibicarakan probabilitas elektron terdapat pada suatu atom adalah terbatas, misalkan dibatasi dalam waktu  $\tau$ . Berdasarkan relasi ketidakpastian dari energi dan waktu, akan diperoleh keadaan energi elektron yang tadinya eksak akan melebar sekitar  $\Delta E = h/\tau$ . Dalam batasan, jika elektron dianggap sebagai partikel klasik (partikel yang memenuhi kaedah klasik), pada lintasan setiap Bohr, yaitu dalam waktu  $md/h = 1^{15}$  det. elektron dapat melintasi kanal, sehingga kembali diperoleh  $\Delta E = h^2/md$ . Elektron-elektron yang berada di kulit terbawah mempunyai probabilitas untuk melewati kanan lebih kecil karena mempunyai term pelebaran energi yang kecil (lihat gbr. [14.50]). Hal ini berhubungan dengan kesesuaian antara keadaan dari pembentuk kisi dan pita energi dari kristal. Adanya kerumitan dalam hal ini adalah karena kerap terdapat tumpang tindih antara pita energi suatu keadaan dengan pita energi keadaan tetangganya, sehingga praktis berkelakuan seperti satu pita energi. Setiap pita mengandung sedemikian banyak keadaan-keadaan elektron, sesuai dengan keadaan pembentuk kristal sebanyak

$N$ , yang secara umum mengandung  $N$  keadaan elektron. Hal ini juga muncul pada gambaran pita energi dari gas elektron 'mirip' bebas: keadaan-keadaan tersebut sesuai dengan jumlah sel yang terdapat di dalam ruang fase sebesar  $h^3$ , yang mengikuti kaidah statistik Fermi. Jika pada satu arah di dalam ruang kristal terdapat  $N_x$  pembentuk kristal (pada arah lainnya terdapat  $N_y$  dan  $N_z$  pembentuk kristal, sehingga  $N_x N_y N_z = N$ ), sesuai dengan ukuran kristal  $a = N_x d$ , maka pelebaran momentum dari pita seluruhnya pada arah  $N_x$  menjadi  $\Delta p = rh/d$  terbagi dalam jarak masing-masing sebesar  $h/a$ . Dengan demikian, diperoleh kenyataan penting sebagai berikut:

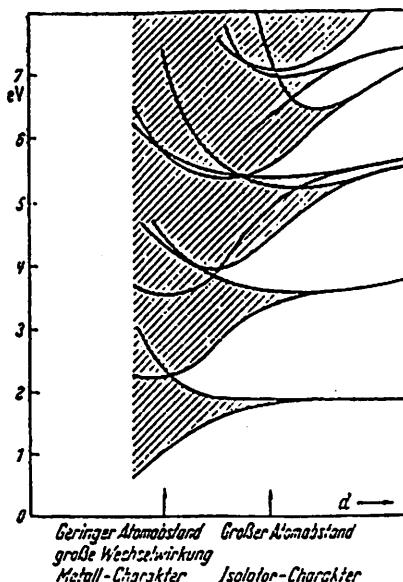


Gambar 14.50: Apabila terdapat atom-atom yang saling mendekat satu sama lain, tidak hanya terjadi tumpang tindih potensial masing-masing menjadi 'galeri melengkung', malainkan juga energi keadaan elektron yang mulanya eksak akan melebar. Pada bagian kanan gambar merupakan ilustrasi rantaian atomi-atomi, di kiri digambarkan permukaan kristal. Pada kedua ilustrasi di atas dapat dibaca besarnya fungsi kerja elektron.

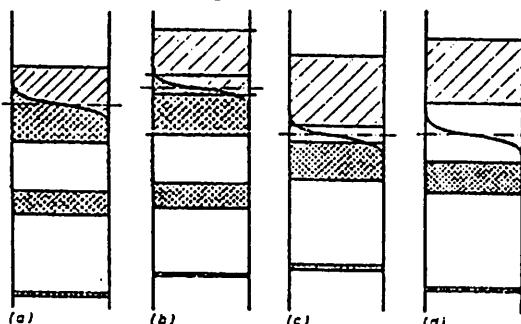


Gambar 14.51: Pita energi elektron dalam 'pegunungan' potensial. Tanda panah menggambarkan arah percepatan elektron di dalam medan luar: massa efektifnya kurang lebih terjadi ditengah-tengah pita tandanya.

Di dalam pita yang terisi penuh, mirip seperti pada bola Fermi dari elektron bebas, terdapat momentum dan momentum yang mempunyai arah sebaliknya. Karenanya suatu pita yang penuh tidak membolehkan



Gambar 14.52: Dengan mengecilnya konstanta kisi  $d$  keadaan elektron akan melebar. Dari suatu isolator dapat dibuat suatu konduktor logam dengan jalan melakukan kompresi yang cukup pada bahan isolator tersebut dan sebaliknya (perhitungan dilakukan oleh Slater berdasarkan *self consistance field* dari Hartree-Fock) [dari W. Finkelnburg].



Gambar 14.53: a-d. Skema pita energi untuk a) suatu logam dengan suatu elektron valensi (logam alkali), b) suatu logam dengan dua elektron valensi (alkali tanah), c) suatu semi konduktor, dan d) suatu isolator.

gerakan semua titik berat elektron, misalnya tidak terdapat aliran arus muatan.

#### 14.3.6 Elektron dan Hole

'Titik' kisi 'menyediakan' suatu spektrum tertentu untuk elektron di dalam pita energinya. Berapa jauh spektrum tersebut dapat diisi oleh elektron seluruhnya, adalah bergantung dari unsur murni dengan pembentuk kisi berikatan kovalen yang dipunyai oleh molekul terisolasi sempurna, dalam kasus demikian berarti keadaan ditempati oleh pasangan elektron ikatan. Keadaan-keadaan yang terletak lebih tinggi tetap kosong, tidak terisi oleh elektron. Pada saat terjadinya pembentukan kristal pasangan elektron ikatan kebanyakan menempati keadaan pita energi terisi penuh, dengan perkataan lain pasangan elektron ini mengisi pita energi hingga penuh dan di atas pita energi ini adalah kosong. Jika zone terlarang (*energy gap*) yang berada di antaranya sangat lebar, bahan dikatakan sebagai *isolator*, selain itu dinamakan *semikonduktor* (daerah transisi (*energy gap*) adalah tetap). Logam ditandai atom-atom yang mempunyai kulit tidak terisi penuh oleh elektron (kulit *s* untuk logam alkali, *d* untuk logam-logam transisi, kulit *p* pada logam-logam lainnya). Pada logam alkali tanah yang mempunyai kulit *s* terisi penuh, secara energetik kulit *d* terletak lebih dekat (hingga dua periode pertama), sehingga sebagai pembentuk kristal dapat terjadi ikatan alternatif. Dalam membentuk kisi pita-pita energi logam ini akan saling tumpang tindih satu sama lain, sehingga pita-pita yang terdapat di sebelahnya melebar. Pita yang terbentuk tentu tidak terisi penuh oleh elektron.

Bagaimana elektron bergerak didalam pita ? Dalam pembahasan ini tidak dibicarakan untuk kasus elektron mempunyai keadaan momentum yang sama atau dengan perkataan lain elektron tetapi berada pada suatu keadaan dari  $N$  keadaan yang ada, sehingga elektron dengan momentum tertentu yang dipunyainya bergerak di dalam kisi kristal. Kasus yang menarik adalah bagaimana elektron mengubah keadaannya, khususnya bagaimana ia meningkatkan energi dan

momentumnya. Hal ini tentunya hanya mungkin terjadi jika di atas keadaan awal elektron terdapat keadaan-keadaan kosong. Di samping itu haruslah terdapat gaya yang mempercepat elektron, misalnya terdapat medan listrik. Adanya gaya yang mempercepatnya membuat elektron memberikan reaksi sesuai dengan keadaannya di dalam diagram  $E(k)$ , sering bahkan bereaksi sangat unik terhadap gaya yang ada. Kecepatan elektron adalah kecepatan grup paket gelombang  $\psi$  yang dibentuk oleh gelombang-gelombang yang terdapat dalam daerah yang sempit dalam  $k$  yang dipilihnya. Kecepatan grup ini, berdasarkan pers. [4.58] adalah  $v_g = \partial w / \partial k = \hbar^{-1} \partial E / \partial k$ . Untuk elektron bebas  $E = p^2 / 2m = \hbar^2 k^2 / 2m$ , maka didapat  $v_g = p/m$ , yaitu sama dengan kecepatan biasa. Pada elektron yang terdapat di dalam kristal kondisinya sangat kompleks. Pandang khususnya suatu percepatan dan gaya  $F$  yang ada sebagai berikut:

$$\begin{aligned} v_g &= \hbar^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial E}{\partial k} \right) = \hbar^{-1} \frac{\partial}{\partial k} \left( \frac{\partial E}{\partial k} \right) \cdot \left( \frac{\partial k}{\partial t} \right) \\ &= \hbar^{-1} \frac{\partial^2 E}{\partial k^2} \end{aligned}$$

Selanjutnya seperti diketahui bahwa gaya tidak lain sama dengan perubahan momentum terhadap waktu  $F = p = \hbar k$ . Maka diperoleh:

$$v_g = \hbar^{-2} \frac{\partial^2 E}{\partial k^2} F = \frac{1}{m_{\text{ef}}} F,$$

dengan

$$m_{\text{ef}} = \hbar^2 \left( \frac{\partial^2 E}{\partial k^2} \right)^{-1} \quad (14.65)$$

Masa efektif  $m_{\text{ef}}$  ini mengatur reaksi elektron di dalam kristal terhadap suatu gaya. Jika lebar pita, seperti pendekatan di atas untuk elektron bebas diramalkan adalah  $\Delta E \approx \hbar^2 / 2md$ , maka tentunya  $m_{\text{ef}}$  menggantikan massa elektron  $m$ . Akan tetapi pernyataan ini tidak dapat dianggap sebagai pernyataan umum. Karena elektron tidak bereaksi secara satu per satu terhadap gaya, melainkan haruslah seluruh elektron yang mengisi kisi terpengaruh. Dengan perkataan lain dapat pula dikatakan bahwa elektron harus membayar "sesuatu" untuk

menghindari geraknya dengan harga  $k$  konstan di dalam kisi. Jika elektron harus mengubah momentumnya, maka seluruh kisi juga harus disertakan. Pada tabel [14.6] diberikan beberapa massa efektif elektron.

Pada bagian bawah sisi pita lengkungannya adalah  $\partial^2 E / \partial k^2$  umumnya lebih lengkung dibanding dengan parabola biasa. Sehubungan dengan hal tersebut maka  $m_{\text{ef}}$  di daerah tersebut lebih kecil dibanding dengan massa elektron  $m$  biasa. Dalam gambaran skematis (gbr. [14.49]) parabola "lama" hampir tidak

Tabel 14.6: JARAK PITA-PITA, MOBILITAS ELEKTRON DAN HOLE DAN MASSA EFEKTIF ELEKTRON KONDUKSI UNTUK BEBERAPA SEMIKONDUKTOR.

	$\Delta E$ [eV]	$\mu^-$ [cm <sup>2</sup> /V det.]	$\mu^+$ [cm <sup>2</sup> /V <sub>det.</sub> ]	$m_{\text{ef}}/m$
Intan	5,40	1800	1200	-
SiC	3,00	-	-	-
Si	1,17	1300	500	-
Ge	0,74	4500	3500	0,110
GaAs	1,52	-	-	0,070
GaSb	0,81	4000	1400	0,042
InAs	0,36	33000	460	0,024
InSb	0,23	77000	750	0,015
PbS	0,29	550	600	-
AgCl	3,20	50	-	0,350
KBr	-	100	-	0,130
CdS	2,58	-	-	-
ZnO	3,44	-	-	-
ZnS	0,91	-	-	-

berubah, maka  $m_{\text{ef}} \approx m$ , maka terdapat beberapa titik belok pada kurva  $E(k)$ . Di sana kelengkungan sama dengan nol, sehingga  $m_{\text{ef}} \approx 0$ . Di bagian atas pita  $m_{\text{ef}}$  berharga *negatif*. Elektron yang mempunyai massa efektif negatif bergerak pada arah berlawanan terhadap gaya yang ada.

Jika pita hampir terisi hingga batas bagian atasnya, maka keadaan dipita disebut keadaan yang tidak terisi sedikit, atau disebut pula sebagai *defek elektron* atau *hole*. Hole mempunyai kelakuan sebaliknya dibanding dengan kekurangan elektron: Hole bermuatan positif dan mempunyai harga  $E$  dan  $k$  sebaliknya dibanding elektron yang terdapat di sana: massa efektifnya berubah sesuai dengan  $\partial^2 E / \partial^2$ , demikian pula dengan tandanya, berarti pula bahwa hole yang berada di bagian atas pita mempunyai massa positif. Suatu hole digerakkan dengan gaya positif  $eeE$ , dipercepat pada arah normal, sebuah elektron dengan massa efektif positif digerakkan oleh gaya negatif  $-eeE$ , keduanya menyebabkan arus positif. Berapa besar harga arusnya, bergantung pada konsentrasi elektron dan hole.

## 14.4 Semikonduktor

### 14.4.1 Semikonduktor Murni

Kebanyakan semikonduktor mempunyai ikatan biner, yaitu terdiri atas unsur semikonduktor bervalensi  $p$  dan  $8 - p$ . Semikonduktor diklasifikasikan berdasarkan valensi, sesuai dengan kolom di dalam sistem periodik, di mana unsur pembentuk semikonduktor berasal (misalnya: ZnS adalah tipe semikonduktor 2-6, GaAs adalah tipe 3-5, SiC adalah tipe 4-4; kelakuan Si dan Ge murni adalah mirip seperti SiC). Bahan lain yang juga penting, tidak termasuk dalam klasifikasi di atas adalah Cu<sub>2</sub>O.

Skema keadaan-keadaan energi untuk elektron yang terdapat di dalam semikonduktor murni adalah sangat sederhana: Pita valensi adalah terpisah dengan pita konduksi melalui zone terlarang (*energy gap*) yang lebarnya  $E_0$ . Zone terlarang ini menentukan sifat listrik dan optik bahan. Elektron konduksi dapat dieksitasi dengan mudah melalui agitasi termis (tumbukan foton- elektron) atau secara optis (melalui tumbukan foton-elektron, kadang-kadang juga dengan pengaruh fonon), yaitu elektron lompat melewati zone terlarang. Misalkan di dalam pita konduksi terdapat  $n$  elektron/cm<sup>3</sup>, demikian pula di pita valensi terdapat  $n$  hole/cm<sup>3</sup>. Akan dijelaskan laju terjadinya eksitasi dan rekombinasi, yaitu jumlah elektron yang pindah dan kembali per

$\text{cm}^3 \text{det}^{-1}$ . Eksitasi, apakah secara termis atau optis, terjadi dari pita yang terisi penuh ke pita kosong. Karenanya laju eksitasi tidak bergantung pada  $n$ . Rekombinasi terjadi karena adanya reaksi bimolekuler antara elektron dan hole dan lajunya sebanding dengan  $n^2$ . Perubahan  $n$  terhadap waktu dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\dot{n} = a - \beta n^2 \quad (14.66)$$

Harga  $a$  akan semakin besar jika  $T$  semakin tinggi dan pada eksitasi optik, jika intensitas cahaya semakin tinggi. Pada keadaan setimbang maka  $\dot{n} = 0$ , sehingga

$$n = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \quad (14.67)$$

Dalam hal ini tidak penting apakah kesetimbang terjadi karena kesetimbangan termis atau hanya karena kesetimbangan jumlah elektron hole yang mengalami eksitasi optis atau rekombinasi. dalam kasus eksitasi termis dari distribusi Fermi akan diperoleh secara langsung hubungan antara  $\alpha$  dan  $\beta$ .

Pada  $T = 0$  pita valensi terisi penuh oleh elektron, sedangkan pita konduksi kosong, berarti pula bahwa energi Fermi  $E_{\text{szF}}$  terletak di zone terlarang. Pada temperatur lebih tinggi elektron-elektron akan berpindah ke pita konduksi dan dalam jumlah yang sama dengan jumlah elektron yang pindah terbentuk hole di pita valensi. Simetri ini mempunyai arti bahwa pada kerapatan keadaan yang sama pada kedua pita, bahwa  $E_{\text{szF}}$  terletak persis di tengah zone terlarang (walaupun hal ini tidak terkontrol, tetapi harga  $f = 1/2$ ). Dalam kondisi demikian  $E_0 \gg kT$  (jika tidak memenuhi syarat demikian, bahan bukanlah semikonduktor, melainkan semilogam): pebandingan antara jumlah elektron yang terdapat di pita konduksi dan hole di pita valensi dapat dijelaskan menurut ekor fungsi distribusi Boltzmann sebagai berikut:

Derajat penempatan pada "ketinggian"  $\epsilon$  di atas pinggir pita konduksi yang terletak sekitar  $E_0/2$  di atas energi Fermi adalah:

$$f(\epsilon) = \exp\left(-\frac{E_0/2 + \epsilon}{kT}\right) \quad (14.68)$$

Persamaan di atas juga berlaku untuk hole yang berada di pita valensi dengan energinya turun ke bawah. Jika digunakan pendekatan *kuasi elektron bebas*, diperoleh kerapatan keadaan di pita dari  $\epsilon(k) = \hbar^2 k^2 / 2m$ :

$$dN = \frac{1}{\pi N} \left(-\frac{2m}{E_{ef}}\right) \epsilon^{1/2} d\epsilon \quad (14.69)$$

Dari keadaan ini bagian sebesar  $f(\epsilon)$  terisi penuh, maka jumlah total elektron konduksi adalah:

$$n = \int_0^{\infty} f(\epsilon) dN = N e^{-E_0/2kT}$$

dengan

$$N = 2 \left(\frac{mkT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}$$

$$= 3 \cdot 1 - 10^{19} \text{ cm}^{-3} \quad (300 \text{ K}) \quad (14.70)$$

Di pita valensi terdapat hole yang sama banyak dengan elektron di pita konduksi. Produk  $n^2 = N^2 e^{-E_0 kT}$  tidak bergantung pada posisi batas energi Fermi, harganya juga akan tetap, jika dilakukan *dopping* (lihat §14.4.2), yaitu jika kerapatan hole  $p$  lebih besar dibanding dengan kerapatan  $n$  elektron dan tetap berlaku :

$$np = N^2 e^{-E_0/kT} \quad (14.71)$$

Dengan pemberian harga  $n = 1,59$  maka akan didapat jumlah konsentrasi pembawa muatan  $n + p$  terkecil, jika  $n = p$ . Peristiwa demikian terdapat pada semikonduktor murni dan pada semikonduktor yang mengandung impuritas keadaan ini juga dapat dicapai, yaitu jika  $n$  atau  $p$  yang berasal dari ketidakteraturan (pusat gangguan pada kisi) saling

kompensasi satu sama lain. Suatu semikonduktor yang tidak murni demikian tidak mempunyai kemampuan menghantar yang tinggi dibanding dengan semikonduktor murni, sementara di lain pihak, semikonduktor yang mengandung impuritas satu sisi dapat menghantar hingga beberapa orde lebih baik. Untuk  $n = p$ :

$$n = N e^{-E_0/2kT} \quad (14.72)$$

(Kurva karakteristik Arrhenius untuk semikonduktor) atau dengan membandingkannya dengan pers [14.57] sebagai berikut:

$$a = \beta N^2 e^{-E_0/kT} \quad (14.73)$$

Hubungan dengan  $\alpha$  dan  $\beta$  berlaku hanya untuk eksitasi karena termis. Untuk eksitasi optis dengan menggunakan cahaya berintensitas  $I$ ,  $\alpha \sim I$ , sehingga untuk  $n = p$ :

$$n \sim \sqrt{I} \quad (14.74)$$

Dalam hal ini mobilitas umumnya bergantung sangat lemah terhadap  $T$ , selain itu  $n$  dan  $p$  juga menentukan koefisien konduktivitas bahan yang bersangkutan., yaitu

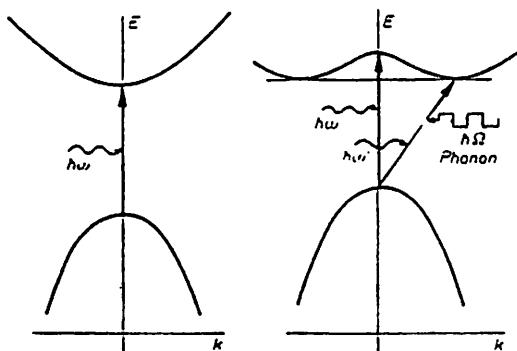
$$\sigma = \epsilon(n\mu_n + p\mu_p)$$

Umumnya mobilitas elektron di dalam semikonduktor lebih besar dibanding pada logam, khususnya untuk tipe ikatan 3 - 5 (dapat mencapai orde  $10^5 \text{ cm}^2/\text{V det}$ ). Pengaruh tumbukan dengan fonon pada semikonduktor murni adalah sangat terbatas pada tumbukan dengan fonon, selain dengan kisi sendiri.

Lebar zone terlarang dapat dinyatakan sebagai batas frekuensi dari absorpsi atau sebagai sisi absorpsi  $w_{gr} = E_0/h$ . Frekuensi yang kecil tidak akan diabsorpsi (terlepas dari adanya eksitasi sehingga simpangan getaran kisi kecil), pada  $w_{gr}$  sering bahkan terjadi absorpsi

yang sangat besar (baca: tajam). Kadangkala  $E_0$  seting tida langsung muncul sebagai "sisi" absorpsi. Patut pula diperhatikan bahwa sebuah foton dengan frekuensi yang menarik perhatian elektron menyebabkan energi elektron meningkat, akan tetapi hanya dapat diberikan momentum minimal (foton  $p = h/\lambda = \Delta E/c$ ; elektron:  $p = mv = \sqrt{2mE}$ ; fonon:  $p = h\lambda = \Delta E/c_s$ ;  $c_s \ll c$ ,  $\Delta E \ll mc^2$ ). Dengan demikian, akan diperboleh transisi optis dalam diagram  $E - k$  yang praktis tegak lurus ke atas, jika tidak ada fonon yang turut mengambil bagian. Sisi dari pita valensi dan konduksi tidak selalu terletak pada harga  $k$  yang sama. Sisi absorpsi optis dapat berhubungan dengan harga  $E$  tertinggi dibanding dengan energi yang berasal dari pita sendiri, yaitu  $E_0$ , karena secara termis, transisi terjadi melalui fonon dan selalu menggunakan "jarak" energi yang minimal.

Jika  $E_0 < 3,1 \text{ eV}$ , maka kristal semikonduktor tidak berwarna dan dapat ditembus cahaya. Jika sebaliknya sisi absorpsi dapat memotong sebagian spektrum cahaya tampak (panjang gelombang ultraviolet), maka kristal cenderung akan merefleksikan cahaya berwarna tertentu, sedangkan cahaya berwarna komplementernya akan diteruskan. Pada



Gambar 14.54: Transisi langsung dan tidak langsung. Transisi optis praktis terjadi secara tegak lurus pada diagram  $E(k)$ ; sedangkan transisi termis cenderung mencari perbedaan energi minimal, karena jumlah momentum fonon dan elektron harus sama.

$E_0 < 1,5$  eV seluruh cahaya pada daerah panjang gelombang cahaya tampak akan diabsorpsi, kristal mempunyai sifat mirip seperti logam. Selanjutnya patut pula diketahui bahwa warna tidak terletak pada absorpsi kisi dasar, melainkan oleh hamburan atau absorpsi dari impuritas. Logam transisi yang tidak berwarna dalam  $\text{Al}_2\text{O}_3$  (*korund*) akan memberikan berbagai warna pada logam mulia, selain intan; koloida emas di dalam gelas akan menghamburkan cahaya merah lebih banyak dibanding dengan rubin dalam gelas.

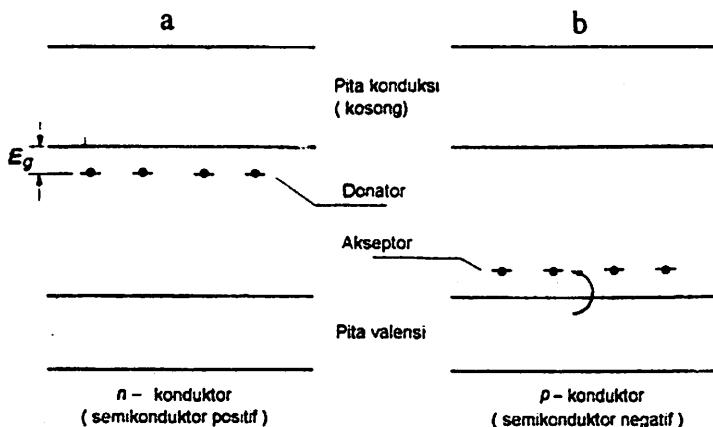
#### 14.4.2 Impuritas pada Semikonduktor

Setiap gangguan yang terdapat di dalam kisi terhadap kisi idealnya dapat menimbulkan keadaan energi tambahan bagi elektron yang sering terletak pada zone terlarang. Gangguan tersebut adalah:

1. Kandungan yang bukan stoichiometri;
2. Adanya atom lain di tempat kisi reguler;
3. Tempat yang tidak terisi partikel di dalam kisi (kekosongan= pusat gangguan); partikel yang seharusnya telah dari awal tidak menempati posisinya (bukan partikel stoichiometri) atau partikel berpindah tempat di pinggir kisi (kekosongan kisi Schottky);
4. Antara partikel kisi; partikel asing telah terdapat pada awal pembuatan, karena kelebihan (bukan partikel stoichiometri) atau partikel ini dapat berpindah dari tempatnya di dalam kisi (kekosongan kisi Frenkel)
5. Batas kristalit dan batas keseluruhan kristal;
6. Pergeseran letak (dislokasi);
7. Susunan yang tidak sempurna dari keseluruhan kisi: kasus ekstrim adalah terbentuknya rantai tidak disengaja pada semikonduktor amorf.

Kesalahan pada kisi ini akan dibicarakan lebih rinci pada § 14.5. Di sini hanya akan dibahas kasus khusus semata, yaitu kekeliruan letak atom pembentuk pada tempat reguler di dalam kisi karena lensi berbeda, misalkan atom P atau B yang terdapat di dalam kisi Si atau Ge.

Atom P tidak mempunyai valensi 4 seperti halnya atom Si, melainkan 5. Atom ini dapat dengan baik menempati kisi Si dan 4 elektron Si akan berpasangan dengan 4 elektron P membentuk "jembatan" mengikat Si tetangganya. Kisi di atas akan mempunyai perbedaan harga konstanta dielektrik  $\epsilon$  di vakum dengan kisi komplit dan netral, karena elektron kelima dari P terletak seperti elektron pada atom H. Maka jari-jari lintasan BOHR dari elektron pada *sistem yang mirip atom hidrogen* ini akan bertambah dengan faktor  $\epsilon$ , sedangkan term energinya akan mengecil dengan faktor  $\epsilon^2$ . Energi ionisasinya tidak lagi seperti elektron pada atom H sebesar 13,6 eV, melainkan hanya 0,1 eV atau lebih kecil lagi, atau tidak lebih besar dari  $kT$  pada temperatur kamar. Kelebihan 1 elektron ini akan menempati suatu term energi yang terlokalisir pada term atom P, disebut sebagai *term energi donator*; dari term ini elektron secara termis dapat pindah ke pita konduksi dengan mudah. Kemudahan pindahnya elektron ini dapat mencapai beberapa orde jika dibandingkan dengan elektron yang terikat. Persis seperti P, pada B terdapat kekurangan 1 elektron untuk menjadi konfigurasi gas mulia. Sebuah hole pada atom mirip hidrogen berhubungan dengan *term energi akseptor* dan mudah terionisasi ke pita valensi.



Gambar 14.55: a. dan b. Skema pita suatu semikonduktor dengan donator dan akseptor.

Pada ketidakmurnian (impuritas) P atau As yang cukup pada kristal Si atau Ge menjadikannya sebagai tipe konduktor  $n$  dengan B, Al atau Ga menjadi konduktor tipe  $p$ . Dengan konsentrasi impuritas yang rendah telah mencukupi untuk menimbulkan hantaran intrinsik dengan faktor  $e^{-E_0/2kT} \approx 10^{-10}$ . Misalkan dalam  $1 \text{ cm}^3$  terdapat  $D$  donator dan  $A$  akseptor. Donator  $d$  mempunyai elektron, sedangkan akseptor  $a$  hole. Selain itu terdapat pula  $n$  elektron di pita konduksi dan  $p$  hole di pita valensi, semua terdapat dalam  $1 \text{ cm}^3$ . Maka muatan total memerlukan kondisi:

$$n + A - a = p + D - d \quad (14.75)$$

(ionisasi donator dan akseptor masing-masing berhubungan dengan muatan negatif dan positif). Dalam hal ini tidak dapat dikatakan bahwa semua  $D - d$  kekurangan elektron yang terdapat di donator berada pada pita konduksi. Hal tersebut akan terjadi untuk kasus tidak terdapat akseptor sama sekali, dengan perkataan lain, pita konduksi dan donator terdapat di bawah salah satunya. Maka berlaku persamaan yang analog pers. [14.72]:

$$n = ND e^{-E_d/kT} \quad (14.76)$$

$E_d$  adalah jarak antara pita energi donator dan pita konduksi. Jika terdapat akseptor, maka harus diperhatikan tiga macam kesetimbangan sebagai berikut:

Rekombinasi Ioniasi

Pita konduksi-pita valensi

$$\begin{aligned} \beta np &= \eta \\ \text{Pita konduksi-Donator} & \quad (14.77) \\ an(D - d) &= \gamma d \end{aligned}$$

### Pita valensi-Akseptor

$$\varepsilon p(A - a) = \delta a$$

#### Pembahasan

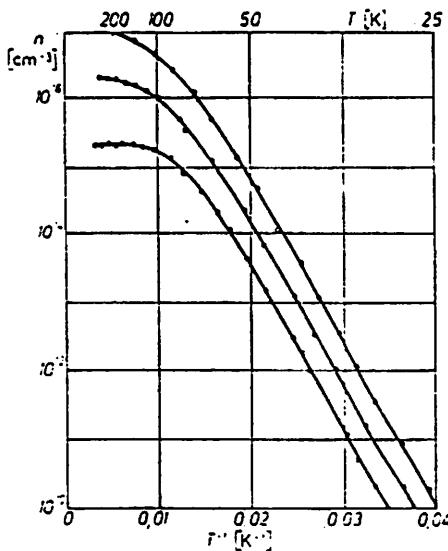
pada § 14.4.1 dengan pengamatan yang analog menunjukkan, bahwa  $\gamma/\alpha = N e^{-E_d/kT}$  dan  $\delta/\varepsilon = P e^{-E_d/kT}$ .

Misalkan  $A \ll D$ . Pada temperatur rendah hampir semua tempat pada donator terisi penuh:  $d \approx D$ . Sedikitnya  $n$  di pita konduksi berdasarkan pers. [14.71] menyebabkan terdapatnya sekian banyak hole di pita valensi, maka akseptor mustilah hampir tidak terisi:  $a \ll A$  dan berdasarkan pers. [14.77]  $p = \delta a / \varepsilon A$ . Jika terdapat keadaan  $p \ll D$  yang tentunya pasti akan tercapai, maka muatan total menjadi  $n + A = D - d = \gamma D/\alpha n$ . Sekarang tergantung apakah  $n$  lebih kecil dari  $a$  atau tidak. Untuk  $n \ll A$  maka  $n = \gamma D/\alpha A = N D A^{-1} e^{E_d/kT}$ , sedangkan untuk  $n \gg A$  maka  $n = \sqrt{\gamma D/\alpha}$ , yang tidak lain adalah identik dengan pers[14.76]. Keadaan transisi antara kedua kasus di atas terjadi pada  $T = E_d/k \ln(N D/A)$ . pada temperatur yang lebih tinggi lagi terjadi keadaan  $d < D$ , sehingga pada  $n > A$  haruslah  $D - d = n$ , yaitu keadaan untuk pertama kali  $D$  tercapai, terjadi pada  $T = E_d/k \ln(N/D)$ . Dalam keadaan ini muatan total menjadi  $n = D$ : Berarti bahwa semua elektron donator terdapat di pita konduksi.

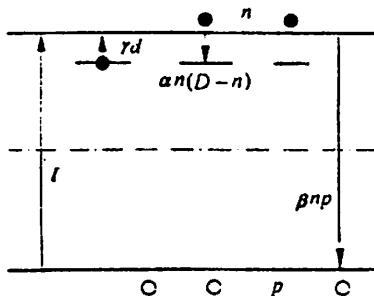
Struktur pita seperti diilustrasikan pada gbr. [14.55] berasal dari beberapa "perbesaran" dan peran pentingnya terdapat dalam berbagai semikonduktor, misalnya pada *konduktor foto* dan *kristal luminisen*.

Jika suatu keadaan pada pita konduksi tidak terisi oleh elektron, disebut sebagai *traps*. Sehubungan dengan pengertian ini dapat terjadi traps hole di dekat pita valensi. Muatan total mempunyai hubungan yang sama seperti pernyataan sebelumnya:

$$n + d = p + n$$

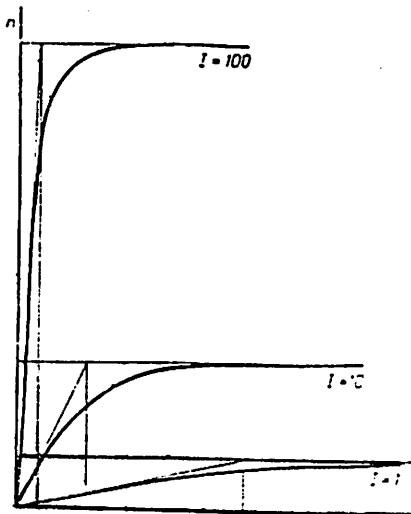


Gbr. [14.56] menunjukkan kurva tipe ini. Kurva  $n(T)$  ini hanyalah sebagai salah satu dari model yang dibolehkan. Selanjutnya terdapat pula faktor pita-pita  $e^{-E_d/kT}$  atau  $e^{-E_d/2kT}$ .



Gambar 14.57: Model yang disederhanakan suatu konduktor foto atau semikonduktor luminisen dengan konsentrasi traps elektron  $D$ , konsentrasi elektron  $n$  di pita konduksi,  $p$  di pita valensi,  $d$  di traps. Arah transisi yang diberikan pada gambar sesuai dengan arah transport elektron.

Kelakuan terhadap waktu dari konduktor oto sel CdS dengan pengukuran penyinaran atau lapisan luminisen pada tabung televisi sangat bergantung pada trap demikian.



Gambar 14.58: Pelemahan konsentrasi elektron konduksi suatu konduktor foto pada intensitas cahaya pengeksitasi  $I$  yang berbeda berdasarkan model pada gbr. [14.57] untuk  $n \ll d \ll D$ .

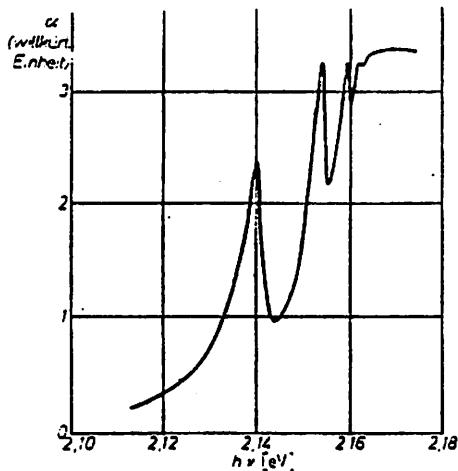
Semakin banyak terdapat traps, semakin kecil aliran foto stasioner terjadi, sehingga semakin lama terjadi pencapaian tingkat energi stasionernya. Traps yang terletak lebih rendah dengan harga  $\gamma$  kecil, khususnya dalam hal ini akan menyebabkan pengaruh yang amat besar, karena traps dapat menangkap hampir seluruh elektron. Mirip keadaan ini adalah terjadinya pelemahan aliran foto dan rekombiasi  $\beta$   $n p$  yang berperan sebagai fotoemisi pada tabung televisi (dalam hal ini eksitasi terjadi bukan karena cahaya, melainkan melalui tumbukan elektron). Posisi dan jumlah traps adalah menentukan sifat-sifat teknis penting dari bahan semikonduktor ini.

#### 14.4.3 Elektronik Semikonduktor

Jika tabung elektron klasik dibandingkan dengan perangkat yang terbuat dari bahan semikonduktor, secara mendasar, terdapat perbe-

daan bahwa penggunaan ruang untuk perangkat semikonduktor adalah lebih kecil, proses pembuatannya yang murah dan kemampuannya yang lebih baik. Bawa sebuah komputer pada saat sekarang ini dibuat hanya sebesar tabung elektron klasik atau bahkan lebih kecil lagi, bukanlah hanya karena keuntungan konstruksi semata, melainkan karena perangkat semikonduktor yang dapat dibuat berukuran mini atau bahkan mikro. Waktu *on* suatu alat tidak dapat lebih kecil dari ukuran bagian aktifnya dibagi dengan *c*. Perangkat semikonduktor lebih cepat. Daerah frekuensinya dapat mencapai 10 hingga 1000 GHz. Dengan bentuknya yang kompak, memungkinkan penggunaan energi yang jauh lebih sedikit dari suatu perangkat keras semikonduktor. Tidak ada arus yang menyebabkan panas terlalu besar, menggunakan bateri dan mudah dibawa-bawa yang secara teknis lebih baik, umumnya pemenuhan estetik mempunyai dampak negatif.

Transisi sederhana dari tipe semikonduktor *np* dalam penggunaan dan kombinasinya dapat mengubah hampir semua besaran fisis dalam besaran lainnya: Tegangan listrik, arus listrik, medan magnet, cahaya, berkas partikel tegangan mekanik dapat mempengaruhi transisi tipe *np* sedemikian, bahwa timbul suatu tegangan padanya sehingga tahanan

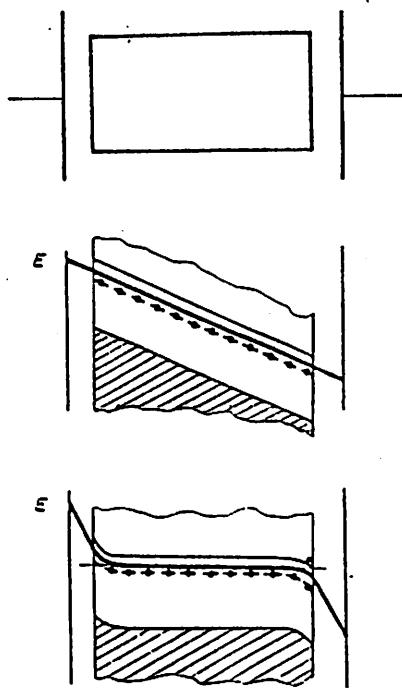


Gambar 14.59: Spektrum absorpsi dari  $\text{Cu}_2\text{O}$  pada 77 K [data dari Baumeister]. Sisi absorpsi tumpang tindih dengan peak eksiton.

semikonduktor ini mengalami perubahan, mengemisi cahaya, panas atau dingin, bahkan terdapat gerakan mekanik.

Dari perangkat yang terbuat dari semikonduktor yang tidak terbilang jumlahnya, yang sejak 20 tahun terakhir ini dikembangkan manusia, dalam hal ini hanya akan dipandang *dioda kristal* sebagai penyearah dan sebagai *dioda foto* seperti *trioda/kristal* atau transistor lempengan (datar).

**Dioda Kristal** adalah suatu kristal semikonduktor dengan separuh bagian masing-masing di dopping dengan bahan yang berbeda, yaitu sebagian menghantarkan *n* dan sebagian lagi menghantarkan *p*. Dopping pada masing-masing bagian lapisan tersebut misalkan digunakan As dan Al pada kristal Ge. Lapisan tipe *n* mengandung



Gambar 14.60: Semikonduktor di dalam medan listrik. Tengah: keadaan segera setelah medan diberikan. Bawah: Kesetimbangan dengan munculnya "lapisan" pinggir dan batas horizontal Fermi.

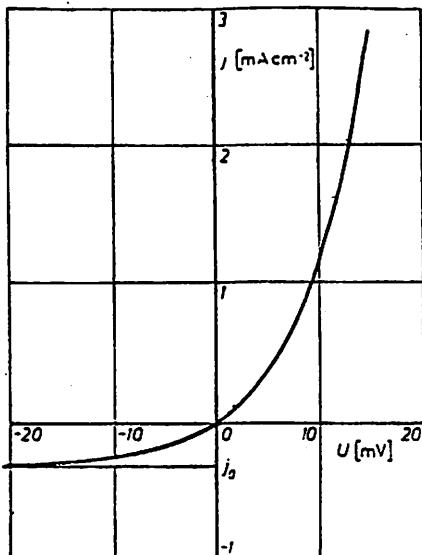
banyak elektron dengan jumlah hole lebih sedikit, sedangkan pada lapisan tipe  $p$  sebaliknya. Pada daerah batas keduanya ('junciton'), pada lapisan tipe  $n$  terjadi penurunan  $n$  yang besar dan sebaliknya pada lapisan  $p$  terjadi pula penurunan jumlah  $p$  yang besar. Elektron akan terakumulasi pada lapisan tipe  $p$  dan hole sebaliknya, hanya jika pada "lapisan ganda" tersebut terdapat medan listrik, sehingga aliran arus selanjutnya dapat dihindari. Dalam keadaan ini arus konduksi mengalami kompensasi pada medan lapisan ganda tersebut menjadi arus difusi sehingga terjadi penurunan konsentrasi, berarti pula bahwa potensial kimia  $U - kTe^{-1} \ln n$  untuk elektron dan  $U_kTe^{-1} \ln p$  untuk hole sama di semua tempat (lihat § 6.4.5). Pada lapisan transisi terdapat "tingkat yang terjal" dari potensial listrik murni dengan ketinggian:

$$U_0 = \frac{kT}{e} \ln \frac{n_2}{n_1} = \frac{kT}{e} \ln \frac{p_2}{p_1} \quad (14.80)$$

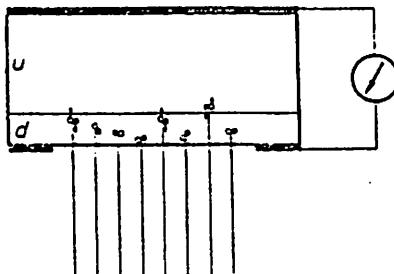
1 dan 2 adalah simbol untuk kedua lapisan pada kristal.

Suatu medan luar yang diberikan menggeser kerapatan arus medan  $j_{\text{medan}}$  dan kerapatan arus difusi  $j_{\text{dif}}$  yang sebelumnya, dalam keadaan tanpa medan, keduanya mempunyai harga sama dengan  $j_0$ . Tegangan luar  $U$  praktis akan menurun pada daerah transisi lapisan, karena tahanannya lebih besar dari bagian lapisan  $n$  ataupun  $p$ . "Ketinggian" potensial dapat meningkat atau menurun dengan faktor  $U$ . Probabilitas pembawa muatan yang menyebabkan kerapatan arus medan akan dapat menembus "ketinggian" potensial tersebut akan menurun atau meningkat sebanding dengan faktor  $e^{FeU/kT}$ , berlaku sama baik untuk  $n$  maupun  $p$ . Dengan demikian maka  $j_{\text{medan}} = j_0 e^{FeU/kT}$ . Distribusi konsentrasi dan karenanya kerapatan arus difusi bola dikatakan tidak mengalami perubahan:  $j_{\text{dif}} = j_0$ . Dengan demikian diperoleh kerapatan arus total sebagai berikut:

$$j = j_{\text{medan}} - j_0 = j_0 (e^{+eU/kT} - 1), \quad (14.81)$$



Gambar 14.61: Kurva karakteristik tegangan-arus dari suatu dioda penyuarah.



Gambar 14.62: Dioda foto. Cahaya dengan frekuensi tertentu dapat menimbulkan pasangan elektron-hole yang umumnya segera mengalami rekombinasi kembali, selain di daerah lapisan batas  $p - n$ , karena pada daerah ini terdapat medan listrik yang cukup besar. Muatan yang terdapat di lapisan batas ini mengalir untuk digunakan, yaitu jika tahanannya lebih kecil dari tahanan lapisan batas.

jika garis-garis medan listrik berasal dari sisi  $p$  ke  $n$  (*arah aliran*) dan

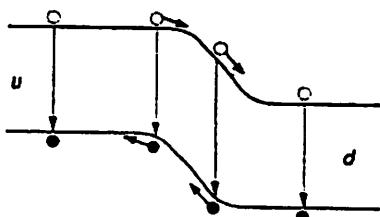
$$j = j_s (e^{-eU/kT} - 1) \quad (14.80a)$$

jika terjadi arus pada arah sebaliknya (*arah halangan*). Garis

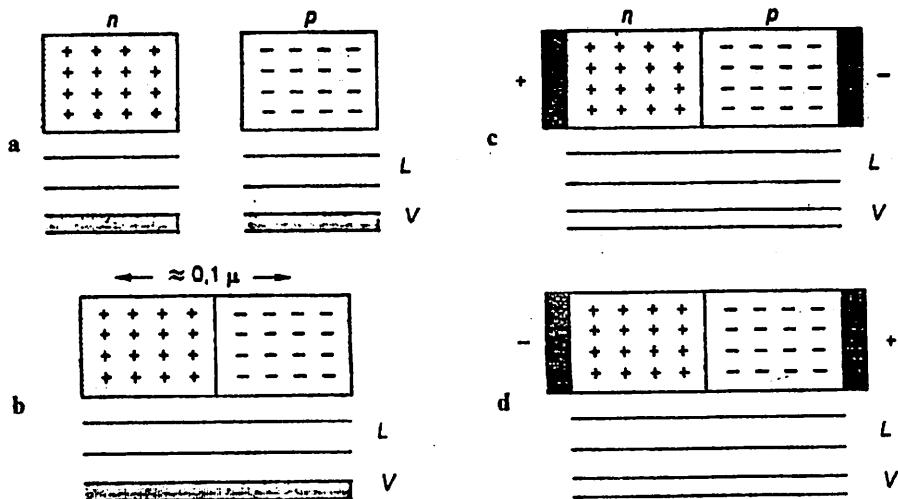
penyebaran ini adalah tidak simetri: Pada arah halangan praktis hanya mengalir  $j_o$  (ordenya  $1\text{mA/cm}^2$ ), tidak bergantung dari  $U$ ; pada saat  $U = 1\text{V}$  arah aliran telah terdapat arus sebesar  $10^{17}$  kali lebih besar.

Peristiwa transisi terjadi pada dioda dapat pula dijelaskan melalui gbr. [14.64] dengan mengamati ion kisi, yang berkelakuan sebagai muatan ruang yang tinggal, jika terjadi "penyedotan" (perpindahan) muatannya. Pada *pn junction* karena adanya kombinasi pembawa muatan timbul "lapisan batas" dan karenanya tidak terdapat transport muatan lagi, karena pembentukan lapisan batas ini dapat mencapai ketebalan  $10^{-5}\text{ cm}$ . Jika dioda diberikan tegangan, sehingga pembawa muatan dinamis dapat berpindah, lebih jauh dari lapisan batas tersebut (gbr. [14.64c]), maka pada bagian tengah lapisan akan terjadi hantaran yang jelek, karena bertambah besarnya tahanan; apabila polaritas tegangan dibalik (gbr. [14.64d]), maka lapisan batas semakin menipis atau tahanan mengecil.

Kristal dioda dibuat dengan berbagai metode, bergantung pada kegunaan praktisnya (akumulasi doping, penumbuhan epitaksial, teknis etsa, teknis legirung) dan dalam berbagai macam bentuk dari daerah yang mengandung tipe *n* dan *p* (*dioda lancip* dan *lempeng*, *dioda pin* dengan lapisan transisi yang ditebalkan, *dioda Schottky, gun, zener, Esaki* dengan bentuk garis karakteristik khusus, yang sebagian menyentuh lapisan batas yang tipis sebagai kanal dari pembawa



Gambar 14.63: Skematis bangun donator elektron yang mengalami kenaikan batas permukaan Fermi (lapisan *n*). Bangun akseptor mengalami penurunan (lapisan *p*). Batas energi Fermi konstan (potensial elektrokimia) mempengaruhi pelengkungan pita, berarti terdapat medan listrik yang kuat pada lapisan batas mempengaruhi elektron dari lapisan *n* dan hole naik lapisan *p*.

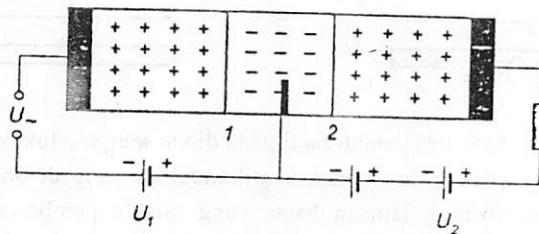


Gambar 14.64: a-d. Aktivitas yang terjadi pada diode semikonduktor. Pada daerah permukaan kontak (batas) dua bahan semikonduktor yang di doping dengan unsur berbeda membentuk lapisan batas yang miskin pembawa muatan dan masing-masing pembawa muatan untuk tipe semikonduktor tersebut saling mengalami rekombinasi di lapisan batas (b). Lapisan batas ini mengalami "penebalan" (c) juga sebagian "membukit" dan (d), bergantung pada arah medan yang diberikan.

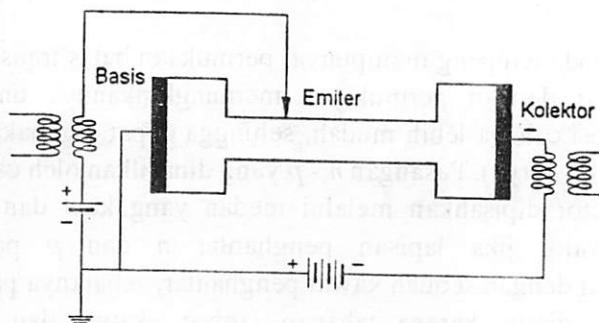
muatan). Dioda lempeng mempunyai permukaan batas transisi terletak sangat dekat dengan permukaan, memungkinkannya untuk dapat mengabsorpsi cahaya lebih mudah, sehingga dapat digunakan sebagai *dioda foto* (sel surya). Pasangan *n* - *p* yang dihasilkan oleh cahaya pada semikonduktor dipisahkan melalui medan yang kuat dan keduanya menyatu, yaitu jika lapisan penghantar *n* dan *p* pada diode dihubungkan dengan sebuah kawat penghantar, sebaiknya pada daerah "punggung" dioda, karena tahanan lapisan, kawat dan alat yang digunakan kecil dari permukaan transisi. Biasanya sel surya yang paling sederhana dan dapat digunakan sebagai sumber energi untuk

satelit dan di rumah-rumah terbuat dari basis Si atau Ge. Dasar dari kecilnya efisiensi transfer energi (cahaya matahari menjadi arus listrik, besarnya efisiensi hampir 10%) adalah karena kehilangan rekombinasi yang tidak dapat dihindari; jika lapisan batas transisi sangat tipis maka cahaya terlalu sedikit dapat diabsorpsi, sedangkan jika terlalu tebal, medan tidak cukup kuat untuk dapat memisahkan pembawa muatan.

**Dioda elektroluminisen.** Pada dioda elektroluminisen (LED) terdapat peran sebaliknya: Medan yang diberikan mempengaruhi elektron dan hole yang sebagian diinjeksi ke elektroda, di dekatkan satu sama lain, hingga terjadi rekombinasi yang menyebabkan emisi cahaya pada daerah *junction*.

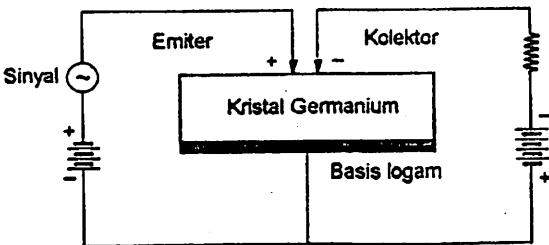


Gambar 14.65: Transistor lempeng (triode kristal). Tegangan di elektroda bagian tengah (emiter) memandu arus antara elektron- elektron luar sehingga tidak terdapat arus sama sekali (basis-kolektor).



Gambar 14.66: Transistor benang. Terdapat 3 switch seperti pada transistor lempeng. Karena tipisnya transistor ini pada emiter terdapat pengaruh yang kuat dari pembawa muatan yang diinjeksi [dari Schottky, dikutip dari W. Finkelnbeurg].

**Transistor.** Pada transistor ditambahkan suatu lapisan tipis tipe *n* pada kristal penghantar *p* atau sebaliknya, sehingga terdapat dua *junction pn* dengan kutub (polar) saling berlawanan yang saling menindih satu sama lain (transistor *pnp* dan *npn*). Pada tiap-tiap ketiga lapisan dibat kontak (*kontak emiter*, *basis* an *kolektor*). Akan dipandang transistor lempeng datar *pnp* (lihat gbr. [14.65]). Jika tidak terdapat tegangan,



Gambar 14.67: Trasistor lancip. Emiter dan kolektor hanya bekerja secara ekuivalen. Kolektor membuka ke arah penyekat, sedangkan emiter ke arah aliran. Pada rangkaian basis-emiter kristal mempunyai tabanan cukup kecil, sehingga perbedaan tegangan juga kecil, menyebabkan perubahan aliran besar, yang dipindahkan ke rangkaian basis-kolektor; akan tetapi di basis-kolektor terdapat perbedaan tegangan yang berbeda: penguatan tegangan adalah sebanding dengan perbandingan tabanannya [dari Bardeen dan Brattain, dikutip dari W. Finkelnburg].

distribusi potensial untuk kasus ideal adalah simetris; tidak terdapat arus. Sekarang diberikan potensial basis lebih rendah (bateri  $U_1$ ). *Junction pn* sebelah kiri akan "terbuka" untuk arus dan terjadi arus hole yang mengalir ke basis, seandainya pada waktu yang bersamaan potensial kolektor tidak diturunkan (bateri  $U_2$ ). Dalam hal ini lapisan *n* dibuat sangat tipis, sehingga hole hanya cenderung ke kolektor karena kecenderungan potensial dan sebagian besar bergerak ke sana. Potensial basis hanya berfungsi sebagai pemandu kemampuan lewat *junction* sebelah kiri tanpa arus, yaitu berguna, seperti halnya potensial

kisi dari trioda. Kecilnya tegangan  $U_1$  berfungsi sama misalnya  $U_\infty$ , menjadikan arus kolektor praktis tanpa gangguan. Pada tahanan luar pada rangkaian kolektor-basis, yang hanya dibatasi oleh tahanan dalam dari *junction*, terdapat penurunan tegangan sebesar  $R_{Jkol}$ , yang harganya lebih besar dari  $U_1 + U_\infty$ .

Agar arus elektron mengalir pada emiter-basis, yang juga bertambah karena tegangan awal basis, yang tidak mengganggu arus basis, maka dibuat doping yang sangat rendah pada lapisan *n* dibanding dengan lapisan *p*, dengan demikian maka arus hole menjadi dominan. Pada transistor *npn* tentu terjadi hal sebaliknya.

#### 14.4.4 Semikonduktor Amorf

Gelas adalah produk sintesa yang tertua dalam teknologi manusia indexamorf (sejak lebih dari 3000 tahun). Darimana datangnya sifat transparen gelas, sebelumnya tidak diketahui dengan benar. Semua penyebab untuk absorber cacat kisi terdapat di dalam gelas: Kisi gelas jauh dari struktur ideal, jauh dari sifat stichiometri dan mengandung sejumlah besar konsentrasi ketidakmurnian (impuritas). Zone terlarang pada bahan gelas mustilah terdapat saling silang dengan term impuritas. Amorf gelas dapat bersifat semikonduktor indexamorf!semikonduktor index semikonduktor!amorf, khususnya yang mengandung unsur ke 4, 5, dan 6. Grup-grup unsur tersebut, dalam perbandingan kosentrasi tertentu adalah gelas Charkoalgenida, Se-Te-As-Ge atau gelas STAG. Prosedur mesin fotokopi Xerox menggunakan semikonduktor penghantar foto dalam bentuk amorf dari unsur Se. Khususnya penguapan Si dan Ge pada permukaan tertentu dengan geometri kristal yang mengalami deviasi selalu membentuk lapisan amorf. Tipe khusus dari semua konduktor ini, bahwa kemampuan menghantarnya praktis tidak bertambah melalui penambahan berbagai unsur doping, yang tentunya mempunyai sifat kontras dibanding dengan kristal semikonduktor biasa.

Terdapatnya rantai yang khas pada amorf justru merupakan ikatan unsur pembentuknya; salah satunya disebabkan oleh adanya perbedaan valensi unsur-unsur 'asing' yang dikandung, yaitu karena struktur

ikatan yang terdapat di sekelilingnya adalah bersesuaian dan justru dalam hal ini semua elektron valensi digunakan, baik donator maupun akseptor tidak tersisa sama sekali, yang tentunya tidak terjadi pada struktur kristal ideal. Akan tetapi, sisi pita tidak tajam seperti halnya pada kristal ideal, melainkan pita valensi dan konduksi tercampur dengan sebagian pita terlarang membentuk spektrum kuasi kontinu dan seandainya tidak terlalu jauh menjorok ke zone terlarang (gap), melainkan hanya terjadi tumpang tindih satu sama lain seperti yang dikemukakan dalam model Cohen-Fritzsche Ovshinsky. Kerapatan jumlah dalam ruang energi  $N(e)$  keadaan-keadaan yang terdapat di pita yang menjorok ke zone terlarang terbatas pada *sis mobilitas*  $E\mu$  yang demikian kecil, sehingga tidak dapat dijelaskan dengan menggunakan model kuasi pembawa muatan bebas (lintasan bebas rata-rata pada  $E\mu$  sama dengan jarak atomik), melainkan dapat dijelaskan dengan kanal teraktifasi termis dari satu kekosongan kisi (pusat gangguan) kisi ke kekosongan kis lainnya.

*Variable range hopping* ini berhasil menjelaskan kenyataan yang "aneh", bahwa pada kebanyakan gelas dan semikonduktor amorf yang diuapkan membentuk lapisan umumnya ketergantungan Arrhenius biasa  $\sigma \propto e^{-E/T}$  pada temperatur rendah menjadi fungsi  $\sigma \propto e^{-A/T^{1/4}}$  (pada lapisan yang sangat tipis berlaku  $\sigma \propto e^{-A/T^{1/3}}$ ). Jika batas energi Fermi  $E_F$  terletak di bawah  $E\mu$ , maka pada temperatur rendah semua pembawa muatan tidak akan berhasil mencapai sisi mobilitas; karenanya konduktivitas Arrhenius tidak berlaku lagi. Kira-kira di atas  $E_F$  keadaan-keadaan memenuhi ujung distribusi Boltzmann dari fungsi distribusi Fermi dengan derajat "pengisian"  $E^{-e/kT}$  ( $e = E_1 - E_F$ ). Untuk dapat pindah ke keadaan energi kekosongan (pusat gangguan) lainnya yang terletak sejauh  $r$ , maka elektron harus dapat menembus potensial "penghalang" (*barrier*) segi empat dengan ketebalan  $r$  (probabilitas menembus  $e^{-xr}$ , lihat § 16.3.2). Laju perpindahan pembawa muatan seluruhnya  $j$  adalah jumlah elektron yang tersedia dikalikan dengan probabilitas menembus potensial, atau  $j \propto e^{-xr-e/kT}$ . Pada temperatur rendah elektron-elektron yang berada pada daerah energi kecil harus memerlukan energi yang cukup besar untuk menempuh jarak  $r$  agar

dapat berada pada keadaan kekosongan kisi lainnya. Sebaliknya, pada temperatur tinggi elektron tidak memerlukan energi yang begitu besar. Pada sebuah bola berjari-jari  $r$ , di bagian tengahnya terdapat kekosongan (pusat gangguan) dengan deviasi energi tidak lebih besar dari  $\Delta\epsilon = 3/4\pi r^3 N$  terhadap energi dari kekosongan yang ada. Akan ditentukan variasi  $T$  dan  $r$  untuk harga  $j$  maksimum, yaitu harga  $X_r + \Delta\epsilon/kT = X_r + 3/4\pi r^3 NkT$  harus minimal, maka diperoleh  $r_m = (9/4\pi n k T)^{1/4}$ . Semakin rendah  $T$  maka pembawa muatan harus melompati "jarak" yang semakin jauh. Maka laju transisi dan kerapatan arus dapat dituliskan dalam bentuk:

$$j \sim \exp\left(-\frac{3}{2}\chi r_m\right) = \exp\left(\frac{-A}{T^{1/4}}\right) \quad (14,81)$$

Untuk kasus dua dimensi, yaitu jika tebal lapisan dapat diabaikan jika dibandingkan dengan  $r_m$  maka suku eksponensial analog dengan  $-A'/T^{1/3}$ .

## 14.5 Cacat Kisi

### 14.5.1 Kristal Ideal dan Real

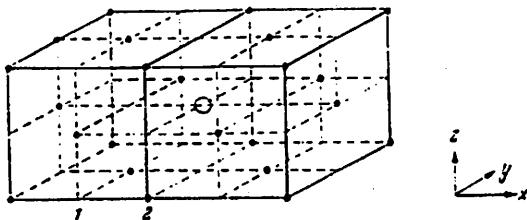
*Kristal ideal* didefinisikan sebagai kristal yang mempunyai susunan atom-atom atau ion beraturan (struktur kristal).

*Kristal real* mempunyai susunan yang mengalami modifikasi dari struktur kristal ideal. Apabila diperhatikan gerak termis pembentuk kisi di sekitar posisi setimbangnya, maka cacat pada struktur kristal dapat dikelompokkan dalam:

- Cacat termis*: mengandung kisi-kisi kosong (kekosongan kisi) dan antara partikel kisi terdapat partikel lain.
- Cacat kimia*: mengandung partikel "asing" pada titik kisi atau tempat antara kisi.
- Dislokasi*.

Cacat kisi karena termis disebut pula sebagai *cacat eigen*, karena cacat ini muncul dari kristal sendiri melalui aktifasi termis; dua *cacat bangun kisi* yang disebutkan terakhir erat hubungannya dengan arti

dari istilah yang digunakan, muncul hanya karena pembentukan kristal atau melalui pengaruhluar yang sangat kuat (penampilan plastis, radiasi) yang mempengaruhi kristal.



Gambar 14.68: Kisi FCC dengan kekosongan (kesalahan Schottky).

Hampir semua sifat-sifat makroskopik, khususnya sifat mekanik dan listrik, cacat kisi kristal memegang peran penting.

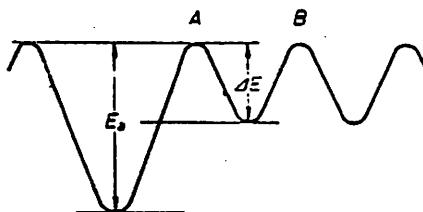
#### 14.5.2 Cacat Termis

Tempat di dalam kisi dapat tidak terisi oleh partikel (cacat Schottky); suatu partikel dapat pula menduduki tempat di antara kisi (cacat anti-Schottky). Keduanya dapat secara bersamaan muncul di dalam kristal:

Apabila suatu tempat di dalam kisi tidak diduduki partikel (terjadi kekosongan) dan partikel menempati posisi antara kisi, kesalahan demikian dinamakan cacat Frenkel. Konsentrasi dan perubahan yang terjadi pada kesalahan atau cacat demikian ditentukan oleh kehilangan atau munculnya partikel lain di dalam kristal. Hal yang paling menentukan adalah energi aktifasi  $E_a$  dari pembentukan cacat kristal. Umumnya energi ini terletak antara 0,5 hingga 2 eV.

Selanjutnya, pandang suatu model kinetik sederhana dari cacat Frenkel. Misalkan dari  $N$  tempat/cm<sup>3</sup> di dalam kisi terdapat  $n$  tempat yang tidak terisi; atom yang seharusnya menduduki  $n$  tempat terdapat

di antara tempat-tempat di kisi dan mengandung energi sebesar  $\Delta E$  lebih besar dari energi seandainya partikel menempati tempat sebenarnya di dalam kisi.  $\Delta E$  mempunyai arti sebagai perbedaan enthalpi bebas. Partikel di kisi dan yang berada di tempat antara kisi dipisahkan oleh gelombang suara (gbr. [refg14.69]), jika dipandang dari tempat di kisi yang mempunyai energi sebesar  $E_a$ . Sebuah partikel kisi mempunyai probabilitas setiap saat sebesar  $v \cdot e^{-E_a/kT}$  untuk dapat berpindah ke tempat antara kisi. Apabila sebuah atom berpindah ke tempat antara kisi, maka atom dapat kembali ke tempat semua (*rekombinasi kekosongan*) atau berpindah ke tempat di antara kisi yang lain (*difusi tempat antar kisi*). Probabilitas, dengan mengambil acuan suatu tempat di kisi, untuk kedua peristiwa ini adalah sama, selama puncak pada gbr [14.69] terjadi antara A dan B. Pada kisi tiga dimensi misalnya, tersedia sejumlah tempat di antara kisi pada segala arah lebih banyak untuk partikel mengalami penumpukan. Atom-atom yang terdapat di antara kisi ini tidak segera mengalami rekombinasi setelah berpindah, melainkan tetap berpindah pada lintasannya dalam waktu yang lama, hingga atom menemukan tempat kosong di kisi. Lintasan bebas rata-rata atom pada peristiwa ini adalah sama seperti diketahui sebelumnya,  $l = 1/nS_{sz}$  dan laju rekombinasi adalah  $vn/l$ , dengan  $v$  adalah kecepatan



Gambar 14.69: Potensial yang terdapat antara tempat reguler di dalam kisi (potensial kisi) dan tempat di antara kisi (skematis).

pindah, yaitu jangkauan perpindahan-kekerapatan perpindahan:  $v = dv_o e^{-(E - \Delta E)/kT}$  Sehingga laju rekombinasi menjadi:

$$-\dot{n}_{rek} = \nu_o d S_{ef} n^2 e^{-(E - \Delta E)/kT}$$

Dalam keadaan kesetimbangan laju rekombinasi adalah sama dengan laju pembentukan

$$\dot{n}_{pem} = \nu_o N e^{-E_a/kT}$$

sehingga

$$\dot{n}_{kes} = \sqrt{\frac{N}{d}} S_{ef} e^{-(E_a)/2kT}$$

Umumnya  $n$  berubah menurut persamaan sbb:

$$\dot{n} = \nu_o N e^{-(E_a)/kT} - \nu_o d S_{ef} n^2 e^{(E - \Delta E)/kT} \quad (14.82)$$

Jika kristal dipanaskan secara cepat, maka kristal akan berubah menjadi kristal yang mengandung cacat.  $n_{kes}$  tidak segera kembali seperti sediakala, melainkan kembali dalam konstanta waktu

$$\tau = \nu_o^{-1} e^{(E_a)/kT} \quad (14.83)$$

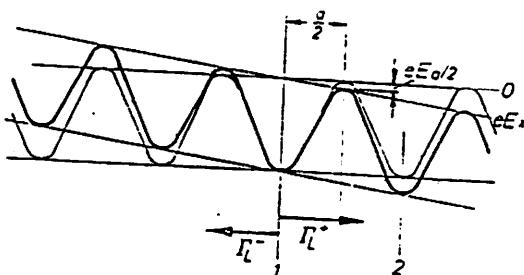
yang disebut sebagai *waktu relaksasi* atau *waktu penyembuhan*. Waktu relaksasi ini sangat panjang pada temperatur rendah. Kristal yang mengandung cacat pada temperatur rendah dikatakan tetap mengalami *pembekuan* dibanding dengan temperatur pada saat kristal dibuat. Kristal seperti ini tidak mempunyai waktu untuk dapat merehabilitasi cacatnya. Jika waktu  $t$  telah berlalu temperatur kristal tetap rendah, maka waktu tersebut dapat dicari dengan menggunakan pers. [14.83].

Pengukuran cacat termis pada kristal logam dan ion menggunakan parameter *koefisien difusi diri*  $D_s = D_{so} e^{-E/kT}$ , sehingga dari kurva *ketergantungan terhadap temperatur Arrhenius* dapat ditentukan *energi pembentukan kekosongan kristal*. Pada kristal ion *konduktivitas*  $\sigma$  (hantaran sendiri) dipandang sebagai adanya peristiwa difusi dari ion isi di dalam medan. Harga  $\sigma$  akan berubah untuk berbagai macam

cacat kristal (misalnya cacat Schottky), maka hubungan  $\sigma$  dan  $D_s$  dapat dicari dari relasi Einstein, yaitu:

$$\sigma = \frac{N\epsilon^2}{kT} D_s \quad (14.84)$$

Untuk mengerti hubungan ini pandang misalnya struktur kristal FCC dari NaCl yang mengandung kekosongan  $n$  yang terdistribusi secara statik. Pada arah sumbu x (lihat gbr. [14.70] dan [14.38] kembali) misalkan diberikan medan listrik  $E$ . Karenanya kekerapan kekosongan pada arah sumbu x adalah  $\Gamma_k^+$  dalam faktor  $e^{aeE/kT} \approx eaE/2kT$  lebih besar dari  $\Gamma_k^-$  pada arah sumbu x negatif. Arus kation pada arah medan



Gambar 14.70: Potensial kisi atau tempat antara kisi tanpa dan dengan medan listrik  $E$ .  $E$  menyebabkan peningkatan probabilitas perpindahan partikel ke kiri dan ke kanan.

dapat diberikan sebagai perbedaan perubahan jumlah kekosongan pada permukaan 2 dan 1 dan dikalikan dengan matan elementer  $e$ , sehingga didapat:

$$j_e = e \frac{a}{2} N \frac{4}{n} \frac{1}{12} (\Gamma_k^- - \Gamma_k^+) = \frac{N\epsilon^2}{kT} D_s E = \sigma E,$$

diperoleh dengan menggunakan pers. [14.84].

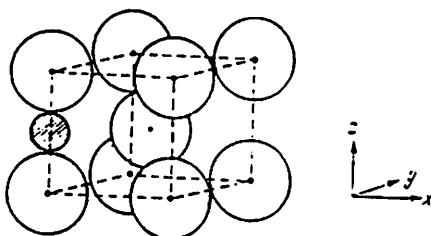
Cacat termis mempengaruhi sifat kristal lainnya, misalnya: panas *jenis spesifik* dan *tahanan jenis*. Hamburan elektron koduksi pada tempat yang kosong di kisi dan tempat di antara kisi menyebabkan

meningkatnya harga tahanan jenis, yang bertentangan dengan sifat semikouktor normal; naiknya tahanan jenis memenuhi persamaan sebagai berikut:  $p \sim n \sim e^{-E/2kT}$ .

#### 14.5.3 Cacat Kimia

Atom "asing" dapat menempati tempat di kisi atau di antara kisi. Kasus kedua khususnya muncul jika atom "asing" lebih kecil dibanding dengan atom asli (misalnya, atom *H*, *C* atau *N* *di dalam berbagai logam*). Atom "asing" demikian secara kuantitatif digambarkan sebagai *pusat dilatasi* dan untuk mengetahui hal tersebut biasanya dilakukan melakukan pengukuran sifat inelastik kristal. Atom-atom "asing" bermuatan tentu dapat diketahui berdasarkan perubahan sifat listrik dan optik kristal tersebut.

Untuk sifat elastik dari baja efek Snoeck khususnya mempunyai peran penting. Kisi BCC kristal Fe ( $\alpha$  - Fe) dapat ditempati oleh atom C secara ekuivalen di bagian tengah permukaan dan sisi (lihat gbr. [14.71]) (*kekosongan oktaedral*). Ukuran kekosongan ini tidak cukup besar sehingga atom C akan menyebabkan atom-atom asli terangkat sedikit dan dalam kasus tanpa tegangan sama sekali bahkan mengangkap ke segala arah. Jika diberikan tegangan mekanik pada arah sumbu *x*, maka kekosongan oktaedral dapat berada di tengah permukaan *x* - *y* dan, sama pula kejadiannya, bagian tengah sisi pada sumbu *x* menjadi lebih besar dan secara energetik untuk ditempati oleh atom C. Atom-atom C dapat terkumpul dan berpindah-pindah tempat antara tempat yang kosong tersebut, sehingga menimbulkan regangan tambahan sebesar  $\epsilon_q$  pada arah sumbu *x*.  $\epsilon_q$  sebanding dengan kelebihan atom C yang menempati kekosongan pada arah sumbu *x*,  $\delta n_x$ , yang melebihi konsentrasi  $n/3$  dari atom C ( $n$  = kerapatan total atom C). Tentunya regangan tambahan ini tidak terjadi pada saat perlakuan tegangan tersebut. Pada pembeaanan bolak balik sinusoidal (getaran), pertama-tama akan terjadi perbedaan fase sehingga terdapat kurva histeris dengan luas kurva menentukan jumlah energi yang hilang setiap getaran, atau dengan perkataan lain sebagai energi yang hilang karena redaman (lihat § 3.4.7)



Gambar 14.71: Struktur kristal BCC yang mengandung atom lain (pada posisi di tempat antara kisi di tengah-tengah permukaan kubus terlihat seperti di dalam ruang).

Model kinetik untuk hal ini adalah dengan mengambil parameter probabilitas perubahan tempat  $\omega$  pada arah sumbu  $x$ ,  $y$  atau  $z$  yang disebabkan tegangan  $\sigma$  yang sebanding dengan  $e\Delta E/kT$ , yaitu dengan penambahan  $\sigma \sim e\Delta E/kT$ . Jika perubahan laju ini dinyatakan dalam persamaan kinetik untuk  $\delta n$ , maka akan diperoleh persamaan yang mirip pada § 14.5.2 sbb:

$$\delta \dot{n}_x = \omega_0 (\delta n_{x,\text{kes}} - \delta n_x),$$

dengan  $\omega_0 \approx 3\omega$  dan  $\delta n_{x,\text{kes}} \sim \frac{1}{9}n\Delta E/kT$ , yaitu persamaan keseimbangan untuk  $\delta n_x$ , yaitu suatu harga dalam pemberian beban yang sangat panjang. Hubungan  $\delta n_x$  yang sebanding dengan regangan tambahan  $\varepsilon_q$  adalah

$$\dot{\varepsilon}_q = \omega_0 (\varepsilon_{q,\text{kes}} - \varepsilon_q) = \omega_0 (I_q \sigma - \varepsilon_q) \quad (14.86)$$

$I_q$  adalah elastisitas pelengkungan, yaitu kebalikan dari harga modulus elastisitas. Pada pembebahan sinusoidal  $\sigma = \sigma_0 e^{i\omega t}$ ,  $\varepsilon_q$  juga berubah secara sinusoidal  $\varepsilon_q = \varepsilon_{q0} e^{i\omega t}$ , dan jika terdapat pergeseran fase, suku yang mengadung perubahan fase terkandung secara implisit di dalam harga  $\varepsilon_{q0}$ . Dari pers [14.86] diperoleh:  $i\omega \varepsilon_{q0} = \omega_0 I_q \sigma - \omega_0 \varepsilon_{q0}$ , sehingga

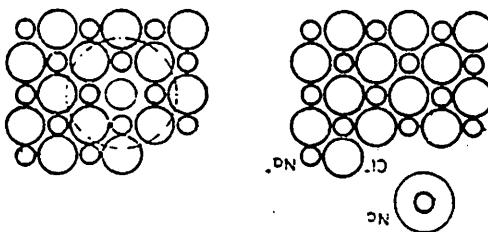
$$\varepsilon_{q0} = \sigma_0 \frac{I_q}{1 + i\omega/\omega_0}$$

Pelengkungan dari regangan tambahan diberikan dengan membentuk:

$$I = \frac{I_q}{1 + \omega^2/\omega_0^2} \quad (14.87)$$

Dari frekuensi relaksasi  $\omega_0$  kristal menurut frekuensi  $\omega^2$  akan menjadi kaku. Perbedaan fase  $\phi$  dengan  $\tan \phi = \omega/\omega_0$  menentukan kurva histerisis.

**Pusat F (NaCl).** Pusat F (Farbe  $\approx$  Warna) dari NaCl jika disinari dengan cahaya akan menampilkan warna biru kekuningan. Warna ini akan menjadi sangat terang jika kristal disinari dengan cahaya Roentgen, berkas neutron atau elektron dengan pemanasan pada logam alkali uap. Logam alkali apa pun yang ditempatkan di dalam kristal, tidak banyak berpengaruh terhadap warna yang ditampilkan tersebut: Karena absorpsi adalah sifat dasar dari kristal basis, bukan



Gambar 14.72: Pusat F di dalam kristal NaCl. Sebuah atom Na berlaku sebagai ion (atas kiri). Misalkan terjadi sebuah elektron menggeser ion Cl ke permukaan dan menjadikan dirinya sebagai "atom" yang mirip atom hidrogen. Ion-ion tersebut akan mengelilingi awan elektron pada jarak tertentu.

berasal dari atom atau ion impuritas. Pada uap Cl pusat warna dapat "diperbaiki" atau dengan perkataan lain dapat menjadi warna semula. Warna tampilan pada kristal yang mengandung impuritas kurang terang dibanding dengan kristal aslinya.

Semua penyebab adanya pusat warna (pusat F) tersebut adalah disebabkan oleh terdapatnya kekosongan unsur halogen. Kekosongan Cl pada kristal NaCl akan timbul kelebihan muatan + di dalam kisi. Kekosongan tersebut dapat menjerat elektron atau dan mengikat atom yang mirip atom hidrogen. Energi ionisasi sistem demikian pada lingkungan dengan kostanta dielektrik  $\epsilon = 2,25$  untuk NaCl, berdasarkan pers. [12.14] adalah  $13,6 \text{ e.V.e}^2 = 2,7 \text{ eV}$  dan menyebabkan terdapatnya spektrum absorpsi pada 450 nm, yaitu pada daerah panjang gelombang cahaya biru (dalam hal ini digunakan konstanta dielektrik  $\epsilon = n^2$ , bukan konstanta dielektrik statik). Kesesuaian dengan hasil pengamatan tidak berlaku untuk semua alkali-halogenida dan hal ini sebenarnya tidak begitu mengherankan, karena konstanta dielektrik yang digunakan sebenarnya belum tentu mewakili keadaan sebenarnya, dalam hal ini patut diketahui bahwa jari-jari Bohr untuk elektron demikian adalah hanya sekitar  $0,53 \text{ \AA.e} = 1,2 \text{ \AA}$ , yaitu lebih kecil dari jarak atom Na dan Cl yang terdapat di dalam kisi kristal.

Dua pusat F yang terdapat di antara Cl di dalam kisi akan membentuk pusat M, jika terletak di antara tiga Cl disebut pusat Z. Suatu pusat V berasal dari terjeratnya sebuah hole.

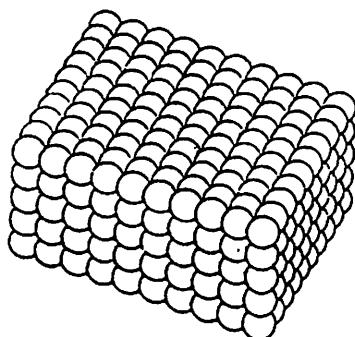
#### 14.5.4 Dislokasi

Jika suatu kristal keseluruhan mengalami deformasi karena dikerjakan beban padanya, misalnya melalui tegangan tarik, maka semua atom-atom yang terdapat di dalam kristal akan meregang pada arah tarikan secara beraturan, sehingga jarak antar atom membesar dan seandainya terjadi demikian, teori kurva potensial pada § 14.1.4 tidak dapat digunakan lagi. Seandainya terjadi demikian, maka kurva tegangan-regangan menjadi lebih sederhana, karena hanya merupakan turunan kedua dari kurva  $E(x)$ , dengan  $x$  adalah regangan, yaitu deviasi relatif terhadap jarak posisi setimbang. Dengan demikian, akan diperoleh suatu kurva lengkung beraturan yang jika terdapat tegangan dan regangan putus (patah) menjadi garis horizontal. Dengan adanya kurva berbentuk demikian, deformasi yang dialami kristal atau benda

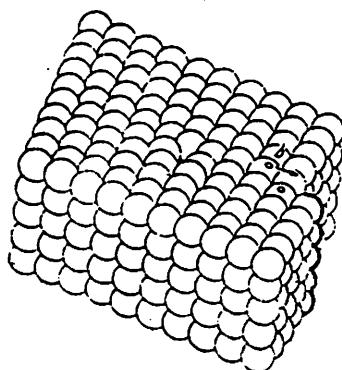
padat umumnya adalah elastik dan jika bebas ditiadakan benda dapat kembali ke bentuk asalnya.

Kurva tegangan-regangan sebenarnya (misal lihat gbr. [3.70]) pada daerah elastik telah mempunyai kenaikan yang tidak konsisten terhadap sifat elastiknya dan mengalami patahan pada ujung batas kurva, berarti terdapat relatif tegangan kecil secara horizontal di daerah tampilan plastis. Sementara tegangan patahan seperti dibahas pada §14.1.4 menghasilkan hal yang juga penting untuk ini, tetapi tegangan patahan sebenarnya selalu mempunyai harga yang lebih kecil dibanding harga yang diramalkan.

Pada sebuah kristal tunggal hal tersebut terlihat lebih jelas, bahwa tampilan plastis terjadi melalui luncuran bidang penghubung kisi kristal, khususnya bidang yang mempunyai indeks Miller kecil yang saling terkait dalam hubungan yang "kecil" satu sama lain. Suatu kawat yang mengalami tarikan sebagian besar mengalami luncuran sepanjang bidang penghubung, kira-kira  $45^\circ$  terhadap arah tarikan. Suatu bidang penghubung dapat pula meluncur di atas bidang penghubung lainnya, yaitu atom-atom pada bidang yang meluncur tersebut akan terangkat dalam waktu bersamaan. Hal ini menyebabkan terjadinya regangan lokal dalam ukuran tertentu (misalnya terdapat sebesar 0,225 pada kemasan bola kompak). Karenanya batas ketegaran bahan tidak boleh



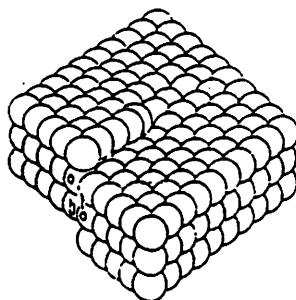
Gambar 14.73: Kristal kubus yang tidak mengalami gangguan.



Gambar 14.74: Dislokasi bertingkat pada kristal kubus. Vektor asal  $b$  memberikan gambaran arah bagaimana atom tetanggannya harus digeser untuk memperbaiki gangguan tersebut.

terlalu kecil dibandingkan dengan modulus elastisitas (kurang lebih 1/10 harga modulus elastisitas), yang juga masih terlalu besar.

Dalam kenyataannya bidang penghubung tidak meluncur secara bersamaan, melainkan hanya sebagian darinya, paling tidak meluncur beberapa deretan atom-atom. Maka akan terjadi gangguan yang menggeser kisi, yaitu suatu *pergeseran letak* atau *dislokasi* (Taylor, Olowan, Polanyi, 1934). Tipe paling sederhana

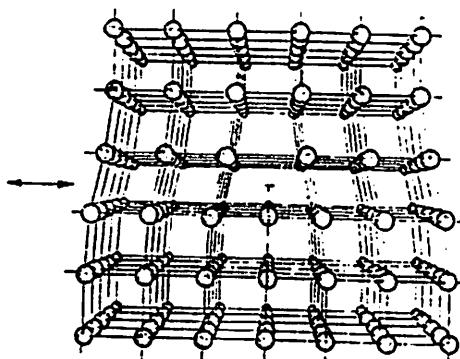


Gambar 14.75: Dislokasi sekrup pada kristal kubus.

dari dislokasi ini adalah *dislokasi bertingkat*! bertingkat, sehingga bentuk kristal masih sesuai dengan bentuk kisi reguler aslinya, hanya terdapat satu permukaan penghubung yang tidak sempurna mengalami pergeseran, berakhir dengan terbentuknya *dislokasi garis*. Di lingkungan dislokasi garis kristal mengalami deformasi yang besar (gbr. [14.74], bagian belakang tertekuk dan depan meregang). Tegak lurus terhadap bidang penghubungan yang mengalami pergeseran ini dapat pula terjadi dislokasi karena pergeseran kecil atom-atom. Jika pergeseran atom-atom di dalam kristal keseluruhan bergerak melintang, maka sepanjang bidang penghubung terjadi pergeseran sejauh konstanta kisi. Dislokasi garis bergerak secara tegak lurus terhadap gaya geser dan terletak pada bidang penghubung.

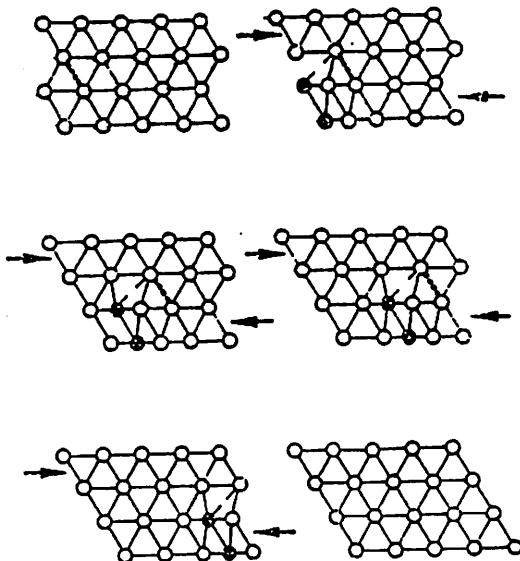
Dengan adanya gaya geser yang sama dapat pula terjadi pergeseran lain, yaitu terjadinya luncuran sebagian dari dua bidang penghubung (gbr. [14.75]). Dalam hal ini regularitas (keteraturan) kisi menjadi terganggu melalui garis dislokasi (pergeseran garis) yang dalam hal ini bergerak searah dengan gaya geser (juga terletak di bidang penghubung). *Dislokasi sekrup* ini dapat pula dibayangkan dengan memolong sebagian kisi dengan pisau di mana arah gaya geser terdapat, kemudian kedua potongan tersebut dipisahkan pada jarak konstanta kisi. Vektor pergeseran  $b$  adalah sebagai vektor asal dan haruslah merupakan vektor kisi, di mana kisi kristal yang bergerak setelah mengalami pergeseran harus dikembalikan ke posisi semulanya. Pada dislokasi sekrup  $b$  terletak paralel terhadap garis dislokasi. Setiap permukaan kisi yang mengandung  $b$  dapat menjadi bidang luncuran. Pada dislokasi bertingkat  $b$  terletak tegak lurus terhadap bidang luncuran. Dalam hal luncuran yang tidak begitu besar, terdapat *pendakian* (kemiringan) dislokasi, untuk kasus dislokasi bertingkat adanya pergeseran lanjutan atau tarikan dari bidang yang mengalami pergeseran pada arah tegak lurus terhadap bidang luncuran, sehingga terjadi transport partikel kisi yang hanya dapat terjadi pada temperatur tinggi.

Bentuk pergeseran atau dislokasi umum dapat merupakan kombinasi dari dislokasi bertingkat dan sekrup. Garis dislokasi dapat bergerak dari satu permukaan ke permukaan lainnya atau bahkan membentuk cincin tertutup. Tentang deformasi lokal yang muncul, muncul interaksi dislokasi. Dari gbr. [14.78] dapat dilihat,



Gambar 14.76: Dislokasi bertingkat pada kristal kubus. "Bidang penghubung ekstra" yang mengalami pergeseran terhadap pada arah tegak lurus terhadap bidang luncuran. Kedua bidang tersebut berpotongan pada garis dislokasi [dari Wert dan Thomson, dikutip dari W. Finkelburg].

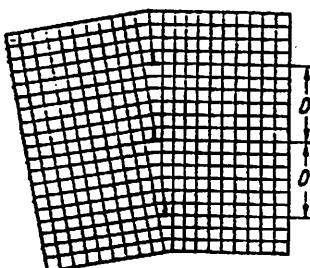
bahwa dislokasi bertingkat cenderung tersusun membentuk "dinding dislokasi", karena pada adanya kombinasi daerah regangan dan pemanasan yang secara energetis lebih menguntungkan. Karenanya terdapat *sudut batas butir* yang kecil. Dengan dasar yang sama dapat terjadi penumpukan atom-atom "asing" pada daerah yang mengalami dislokasi, khususnya pada daerah regangannya. Karenanya luncuran dan naikan mengalami cacat atau bahkan tidak mungkin terjadi sama sekali. Hal ini misalnya terjadi pada logam yang paling keras, mengandung impuritas, yaitu baja. Pada peristiwa deformasi daerah dislokasi dapat menjadi saling terkait satu sama lain atau tersubstitusi atom "asing". Karenanya bahan yang mengalami deformasi, selama deformasi tidak begitu besar, mengalami pengerasan. Suatu kristal tunggal besi dapat dengan mudah mengalami pelekungan, akan tetapi



Gambar 14.77: Dengan tegangan tekan, melalui terputusnya ikatan suatu deretan atom-atom (dalam gambar dimisalkan terdapat ikatan tunggal) akan terbentuk dislokasi bertingkat. Dislokasi ini merambat tanpa batas tertentu (pemisahan suatu ikatan dan terikatnya rantai lainnya) sepanjang bidang luncuran dan menghilang, dan muncul lagi pada sisi lainnya. Karenanya zat padat dapat bersifat lebih塑性 (plasti), jika dibandingkan untuk menggeser bidang penghubung yang tidak mengalami deformasi.

hanya dapat dilakukan satu kali. Bentuk dislokasi tertentu dengan pembebanan dapat mengalami dislokasi baru yang berasal dari bahan tersebut (Franck-Read-Quelle).

Di dalam larutan tidak jenuh atau uap sesungguhnya kristal dapat dikembangkan secara perlahan-lahan, karena jika keadaan lewat jenuh akan terjadi lapisan atom yang tidak sempurna, sehingga tidak dapat lagi terjadi akumulasi atom untuk membentuk lapisan. Selanjutnya, (lihat § 14.1.7). Dalam keadaan ini cenderung terjadi dislokasi sekrup,



Gambar 14.78: Tampilan penampang kisi yang mengalami dislokasi bertingkat dengan garis dislokasi sejajar mengikat dua kristalit yang saling mempunyai orientasi bertingkat "ringan" (sudut batas butir yang kecil).

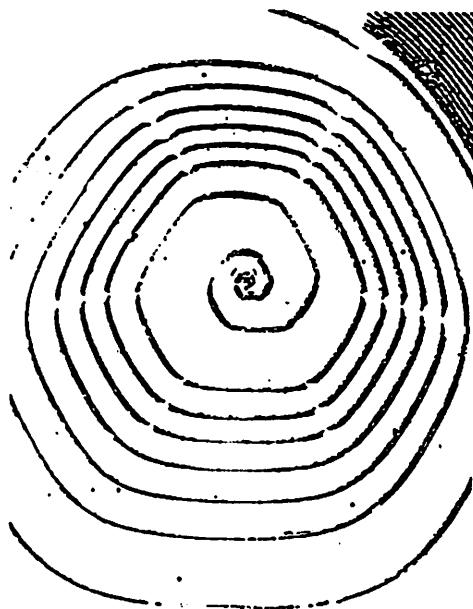
karena pada daerah setengah sisinya secara energetis memungkinkan untuk terjadinya akumulasi atom-atom lain yang tidak terbatas, di mana setengah sisi ini akan mengalami "rotasi" terhadap garis dislokasi. Keadaan ini disebut sebagai *pengembangan spiral* dari kristal. Pengembangan kristal berbentuk spiral ini terhadap satu garis dislokasi tunggal, tanpa terjadinya dislokasi lainnya, barangkali disebabkan oleh *pengembangan whiskers* dan sifat elastisitasnya yang mendekati sifat kristal ideal (mempunyai ketegaran terhadap geseran yang kuat dan dapat berubah bentuk).

## 14.6 Zat Padat Makroskopik

### 14.6.1 Definisi dan Sifat Umum

Zat padat yang terbentuk karena ikatan kovalen (kebalikan dari gaya ikat elektrostatis yang tidak terarah pada kristal ion dan logam), dapat membentuk suatu molekul tunggal (misal: intan) atau terdiri dari molekul-molekul demikian. Bergantung dari jumlah valensi sebagai satuan pembangun molekuler (disebut *monomer*) yang tersedia, akan membentuk struktur valensi garis linier, permukaan atau ruang (*polimer derajat tinggi*). Struktur ini dapat sebagai kristal sempurna, yaitu keteraturan struk kristalnya dapat dikenal melalui spektrografi (difraksi) sinar Roentgen atau tidak membentuk struktur yang

beraturan sama sekali (amorf) atau hanya sebagian mempunyai keteraturan (*kristalin parsial*).



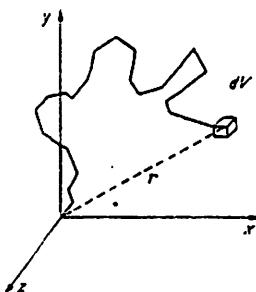
Gambar 14.79: Operasi dari elektron mikroskop dari permukaan suatu kristal yang sedang mengalami pengembangan: dalam pengembangannya kristal mempunyai kesukaran untuk membentuk bidang baru dari bidang penghubung yang ada secara sempurna, karenanya terjadi dislokasi sekrup (pengembangan spiral) [dari Gabm, dikutip dari W. Finkelnburg].

Contoh untuk kristalin sempurna polimer berderajat tinggi adalah struktur jarum seperti kristal tunggal S, Se, Te dan polietilen ( $\text{CH}_2$ )<sub>n</sub>; struktur lapisan seperti P, As, Sb, Bi, C sebagai gafit, Sn, SiC, BN. Contoh-contoh amorf atau kristalin parsial polimer berderajat tinggi adalah gelas anorganik (mempunyai struktur ruang penghubung yang tidak beraturan) dan bahan-bahan organik alamiah dan buatan. Struktur terakhir berdasarkan bentuk molekulnya dapat lagi dibagi menjadi *amorf polimer berderajat tinggi linier* (misalnya gelas pleksi), *polimer berderajat tinggi kristalin parsial* (misal: polietilen,), *polimer terhubung* (contoh: plastik vulkanisir). Seluruh zat padat makroskopik

yang akan dibahas di sini hanya berhubungan dengan sifat elastisitas makromolekul yang bersangkutan.

#### 14.6.2 Ukuran Panjang Makromolekul Linier

Suatu tipe khusus rantai molekul terdiri dari sejumlah besar  $n$  elemen dengan panjang  $a$  yang untuk kasus ekstrim secara statistik dapat bergerak dengan bebas saling terkait antara satu elemen dengan elemen lainnya: Setiap elemen mempunyai probabilitas yang sama untuk memilih arah gerakannya, tanpa bergantung pada gerakan elemen terdahulu. Jika salah satu ujung *rantai statistik* ini terletak pada titik acuan dan timbul pertanyaan: di mana letak ujung yang



Gambar 14.80: Makromolekul sebagai rantai dari  $N$  segmen tunggal (elemen) dengan orientasi masing-masing tidak tertentu. Probabilitas bahwa ujung rantai terletak di dalam elemen volume  $dV$  adalah sama dengan probabilitas sebuah partikel yang mengalami difusi melewati lintasan (langkah) dari nol hingga ke  $N$  justru terdapat di dalam elemen volume  $dV$ .

lain: pertanyaan ini identik dengan persoalan difusi sebagai berikut: Diketahui bahwa sebuah partikel pada saat  $t = 0$  terletak pada  $r = 0$ ; di mana posisi partikel setelah bergerak menempuh  $n$  lintasan bebas rata-rata sejauh  $a$ ? Lebih persis lagi adalah berapa besar probabilitas  $P(r)dV$  bahwa sebuah partikel akan terdapat di dalam elemen volume  $dV$  yang terletak di  $r$ ? Jika semua arah mempunyai probabilitas yang

sama, maka probabilitas mempunyai distribusi simetri bola; harga rata-ratanya sama dengan nol. Kuadrat pergeseran rata-rata dapat diperoleh secara sederhana berdasarkan anggapan bahwa, rata-rata setiap lintasan bebas rata-rata yang baru adalah selalu tegak lurus terhadap lintasan yang lama. Setelah melalui  $n$  langkah maka telah dilalui jarak sejauh  $r_0 = \sqrt{n}a$ . Hal ini akan memberikan distribusi Gauss di sekitar  $r = 0$  dengan lebar  $r_0$ , berarti bahwa  $P(r)dV \sim e^{-r^2/2n}a^2$ . Perhitungan secara teliti menghasilkan persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} P(r)dV &= a^{-3} \left( \frac{3\pi}{2n} \right)^{3/2} e^{-3r^2/2n} dV \\ &= b^2 \pi^{-3/2} e^{-b^2 r^2} \\ b^2 &= \frac{3}{2na^2} \end{aligned} \quad (14.88)$$

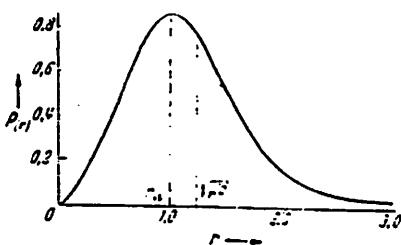
Jika tidak dipertanyakan untuk elemen volume tertentu, di mana rantai berakhir, melainkan bertanya berapa panjang totalnya  $r$ , berlaku secara sama tidak dipandang arahnya, maka dilakukan semua posisi yang terdapat di seluruh elemen permukaan kristal  $4\pi r^2 dr$ :

$$P(r)dr = 4\pi r^2 dr b^2 \pi^{-3/2} e^{-b^2 r^2} dr \quad (14.88a)$$

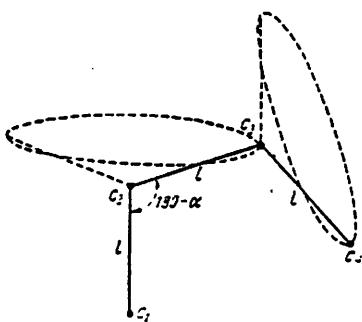
Persamaan ini adalah persamaan distribusi Maxwell (gbr. [14.81]) dengan panjang rantai yang paling mungkin dan jarak rata-ratanya seperti:

$$r_w = \frac{1}{b} = \sqrt{\frac{2}{3}}na, \quad r_m = \frac{1}{b} = \sqrt{r^2} = \sqrt{na} \quad (14.89)$$

Pada makromolekul real lemennya tidak begitu bebas terarah satu sama lainnya. melainkan hanya menurut sudut valensi konstan  $\alpha$  (gbr. [14.82]). Hal ini berhubungan dengan statistik dan tidak untuk seluruh ruang, melainkan hanya pada permukaan kerucut. Kebanyakan rantai tidak hanya sekali mengalami rotasi seperti ini (cacat steradian sisi grup). Rantar yang mengalami rotasi bebas pada permukaan



Gambar 14.81: Probabilitas bahwa jarak antara ujung suatu rantai statistik justru sama dengan  $r$ , merupakan distribusi Maxwell jika seandainya penurunan berbeda.



Gambar 14.82: Kenyataannya orientasi rantai satu sama lain tidaklah sebebas yang diduga. Pada polietilen  $(CH_2)_m$  sudut tetrahedral angata ikatan C-C tetap tidak mengalami perubahan. Pada selimut kerucut dimungkinkan terjadinya rotasi, hanya terjadi kesalahan rotasi yang kecil akibat atom H yang engalanu lompatan, dua posisi pada selimut kerucut (posisi trans dan sis) secara energetis lebih menguntungkan (di sini tidak digambarkan).

Kerucut mempunyai  $m$  elemen dan panjang  $l$ , panjang total rantai ini bukan  $ml$ , melainkan hanya  $ml \cos \alpha/2$ ; kuadrat panjang rata-ratanya bukan  $r^2 = ml^2$  seperti pada rantai statistik, melainkan

$$r^2 = ml^2 \frac{1 + \cos \alpha/2}{1 - \cos \alpha/2} = ml^2 \cot^2 \frac{\alpha}{2}$$

Rantai berkelakuan seperti rantai statistik dengan panjang elemen

$$a = l \frac{\cot^2 \alpha/2}{\cos \alpha/2}$$

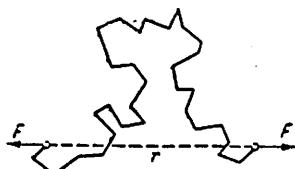
dan jumlah elemen adalah

$$n = m \frac{\cos^2 \alpha/2}{\cot^2 \alpha/2} = m \sin^2 \alpha/2$$

Untuk "menangkap" ujung rantai statistik (gbr. [14.83]) diperlukan sebuah gaya  $F$  yang dapat melawan kecenderungan rantai yang menggulung, berdasarkan ramalan tidak terdapat gaya antara elemen rantai yang menentukan posisi masing-masing elemen, akan tetapi terdapat energi potensial  $U$  rantai secara keseluruhan yang mempunyai harga sama untuk setiap konfigurasi. Gaya  $F$  adalah gaya statistik murni, yaitu gaya entropi. Dibayangkan misalnya panjang suatu rantai dapat bertambah sebesar  $dr$  karena adanya gaya tarik ini  $F$ . Berdasarkan hukum pertama termodinamika, adanya kesetimbangan energi  $dU = dW + dQ$ . Dalam hal ini  $dU = 0$  (karena  $U$  tidak bergantung pada konfigurasi) dan jika  $dQ$  dapat dinyatakan sebagai  $dQ = TdS$ , maka

$$dW = F dr = -dQ = -T dS \quad (14.90)$$

Gaya ini memberikan pengertian bahwa menyebabkan rantai berada dalam keadaan yang paling tidak mungkin dengan entropi terkecil dan harus mempunyai panjang yang terpanjang. Entropi dari konfigurasi



Gambar 14.83: Suatu rantai statistik mengerjakan gaya tabanan tarik  $F$ , tidak menyebabkan terjadinya tegangan di dalam, melainkan karena deformasi menyebabkan rantai mencari konfigurasi terkecil yang mungkin: "gaya entropi".

yang dipandang diperoleh berdasarkan pers[5.75] dari probabilitas

$$S = k \ln P(r) dV = \text{konst.} - kb^2 r^2 \quad (14.91)$$

maka

$$dS = -kb^2 r dr \quad (14.92)$$

dengan demikian diperoleh gaya sebesar:

$$F = 2kTb^2 r \quad (14.93)$$

Rantai mengerjakan suatu gaya pada terjadinya regangan yang mempunyai ketergantungan terhadap panjang secara kuasi (semu). Akan tetapi, faktor  $T$  menunjukkan adanya hubungan dengan efek termodinamika.

### 14.6.3 Elastisitas Plastik

Suatu bahan makromolekul elastik seperti plastik terdiri dari rantai molekul, yang (untuk kasus plastik karena atom S) saling berhubungan satu sama lain. Pandang suatu rantai yang mengisi ruang yang mengandung  $N$  rantai statistik dalam  $\text{cm}^3$  dan stu sama lain terorientasi secara statistik di dalam ruang dan berakhir di titik penghubung (simpul-simpul, ujung rantai bebas dan rantai tertutup dalam hal ini harus diabaikan). Masing-masing rantai mempunyai  $n$  elemen sehingga mengandung  $b^2$  dan  $r^2$ . Jika sistem mengalami deformasi, maka rantai haruslah berubah sesuai dengan perbandingan perubahan dimensi makroskopiknya. Berdasarkan ramalan ini maka konstanta elastisitas dapat ditentukan.

Suatu kubus dengan panjang rantai  $l$  yang mengandung sistem makroskopik diregangkan pada arah sumbu -  $x$  dengan gaya  $F$  sehingga mengalami perubahan panjang sebesar  $\Delta l = \varepsilon l$ . Dalam waktu bersamaan terdapat pula kontraksi melintang sebesar  $\Delta l' = -\eta l$ . Karenanya volume menjadi  $(1 + \varepsilon)(1 - \eta)^{2/3}$  yaitu tetap sama dengan volume semula  $l^3$ , karena bahan seperti ini memiliki modulus yang jauh lebih besar dari bahan-bahan lainnya (lihat §3.4.5). Dengan

rantai yang dikandung kubus, terdapat  $Nl^3/3$  pada arah sumbu-*r* dan haruslah mengalami regangan dari panjang rata-ratanya  $r_m$  menjadi  $r_m(1 + \varepsilon)$ ; sedangkan  $Nl^3/3$  rantai terdapat pada sumbu- *y* dan *z* dan mengalami pemampatan sebesar  $r_m(1 - \eta)$  secara bersamaan. Berdasarkan pers. [14.92] perubahan entropi untuk kasus ini adalah

$$\begin{aligned}\Delta S &= -2k b^2 r_m l^3 \left( \frac{N}{3} r_m \varepsilon - \frac{2N}{3} r_m \eta \right) \\ &= -\frac{2N}{3} k b^2 r_m^2 l^3 \left( \varepsilon - 2 + 2\sqrt{\frac{1}{1+\varepsilon}} \right) \\ &= -N k l^3 \left( \varepsilon - 2 - \varepsilon + \frac{3}{2} \varepsilon^2 \right) \\ &\approx -N k l^3 \frac{3}{2} \varepsilon^2\end{aligned}$$

Kerja untuk deformasi adalah

$$W = -T \Delta S = \frac{3}{2} N l^3 k T \varepsilon^2,$$

gaya

$$F = \frac{2W}{\varepsilon l} = 3 N l^2 k T \varepsilon,$$

tegangan tarik menjadi

$$\sigma = \frac{F}{l^2} = 3 N k T \varepsilon,$$

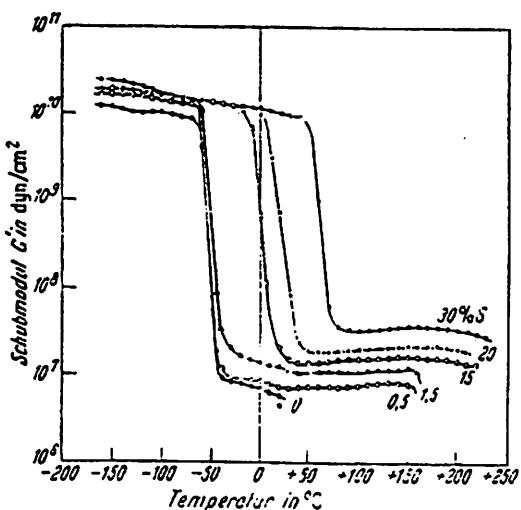
dan modulus elastisitas diperoleh

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = 3 N k T$$

dari pengamatan yang analog diperoleh pula modulus geser sebagai berikut:

$$G = N k T.$$

Plastik juga sangat keras, jika semakin besar derajat penghubung *N*, yaitu jika semakin besar jumlah Sulfur. Modulus elastisitasnya juga bertambah sebanding dengan temperatur: Dalam pembebahan yang konstan, material polimer berderajat tinggi guna menunjukkan



Gambar 14.84: Ketergantungan terhadap temperatur dari modulus geser karet vulkanisir (mengandung sulfur sebagai penghubung rantai ikatan). Kemampuan mengalami rotasi bebas dari elemen rantai mengalami pembekuan pada daerah  $T$  yang relatif sempit.

kenaikan temperatur. Ketergantungan terhadap temperatur adalah jauh terlindungi dari ketajaman lompatan harga modulus elastisitas jika dilakukan penurunan temperatur secara dratis melalui pendinginan pada batas tertentu: Plastik di aliran udara sekeras batu dan mudah patah. Temperatur batas ini dapat ditentukan dari kenyataan bahwa ramalan rantai yang dapat berotasi di permukaan kerucut mengalami "pembekuan". Pada proses regangan demikian elemen-elemen (kebanyakan grup  $\text{CH}_2$ ) bertahan; jika atom-atom H tetangga masing-masing terletak saling berlawanan, maka energi potensial akan lebih besar sekitar  $E_0$ , dibandingkan jika atom-atom terletak secara bersilangan. Probabilitas untuk tetap bertahan pada rotasi demikian adalah sebanding dengan  $e^{-E_0/kT}$  dan akan menurun secara cepat dengan penurunan temperatur, bahwa keadaan transisi dari elastisitas plastik dan elastisitas normal yang praktis mengandung rantai lebih tegar hampir tajam sama dengan transisi fase.

## 14.7 Superkonduktor

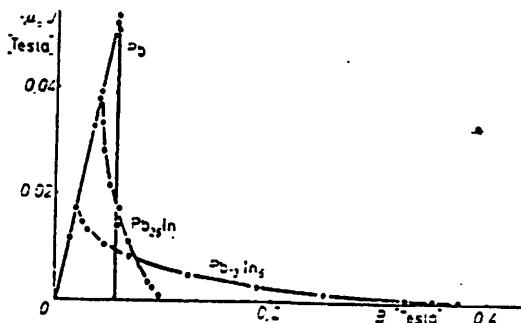
Jika air raksa (Hg) dicelupkan di dalam He cair bertemperatur sangat rendah, dalam waktu yang cukup lama dan dengan memompa uapnya, kira-kira didinginkan di bawah sedikit titik didihnya, yaitu pada temperatur 4,211 K, maka tahanan Hg tiba-tiba akan melompat turun hingga dalam orde pangkat sepuluh: Pada temperatur melewati *titik balik  $T_c$*  = 4,183 K Hg menjadi *superkonduktor* (Kammerling Onnes, 1911 di Leiden, 3 tahun setelah berhasil membuat He cair di laboratorium yang sama). Sejak saat itu dapat dibuktikan adanya sifat superkonduktor dari lebih dari seribu macam yang berasal dari berbagai logam, legirung, ikatan antar logam, juga semikonduktor. Tahanan unsur murni umumnya sangat sukar diperoleh karena harganya yang sangat kecil, paling tidak harganya  $10^{-20}$  kali dari harga tahanan normal.

Bahan-bahan superkonduktor terdistribusi di seluruh susunan unsur-unsur pada sistem periodik. Sifat yang "aneh" ini, akan tetapi berdasarkan teori dapat dijelaskan, bahwa untuk tipe logam yang dikenal sebagai konduktor yang baik (Cu, Ag, Au, logam alkali dan alkali tanah) tidak dapat bersifat sebagai superkonduktor. Bahan-bahan feromagnetik dan semikonduktor saling menunjukkan sifat eksklusif: Adanya Fe dan Gd menyebabkan terganggunya sifat superkonduktor suatu bahan, yang dalam keadaan murni bersifat superkonduktor. Terutama sederetan unsur-unsur logam yang bermula dan berakhir dengan konfigurasi elektron *d* (logam *d*) seperti Ti, V; Zr, Nb, Mo, Tc, Ru; La, Ta, W, Re, Os, Ir; dan Zn, Cd, Hg, dan unsur-unsur yang bermula dengan konfigurasi *p* seperti: Al; Ga; In, Sn; Tl, Pb. Pada setiap deretan unsur-unsur ini, masing-masing untuk dua unsur mempunyai harga  $T_c$  yang tinggi: unsur yang mempunyai jumlah elektron valensi tidak sama dengan 1 adalah mempunyai sifat superkonduktor terbaik (aturan Mathias). Dalam hal ini unsur-unsur tersebut terutama terdapat dalam periode tinggi dalam sistem berkala. Sifat ini juga ditunjukkan oleh unsur-unsur aktinida seperti superkonduktor Th, Pa, U dibandingkan dengan unsur-unsur tanah jarak (tidak bersifat superkonduktor, selain La, sifat superkon-

duktornya akan terganggu jika terdapat campuran dengan unsur tanah jarang, khususnya seperti Gd). Dalam beberapa hal, untuk unsur-unsur antara logam dan nonlogam akan bersifat superkonduktor hanya jika mengalami modifikasi kristal dalam logam bertekanan tinggi (Si, Ge, Se, Sb, Bi). Rekor temperatur terendah pada tahun 970-an dicapai untuk bahan  $Nb_3Ge_{0,2}Al_{0,8}$  dengan  $T_c \approx 20,9$  K. Keberhasilan ini menimbulkan spekulasi adanya "eksiton superkonduktor" yang mempunyai  $T_c$  lebih tinggi lagi (lihat penjelasan di bawah ini).

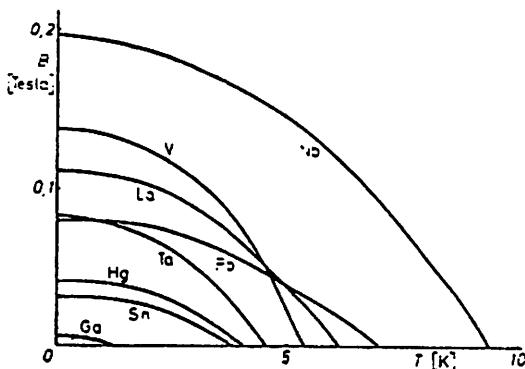
Tipe superkonduktor adalah mempunyai tahanan jenis  $p$  eksak sama dengan nol, sehingga jika bahan diberikan arus listrik sekali saja maka sepanjang tahun dapat mengalir dengan baik, tanpa mengalami pelemahan karena timbulnya panas Joule. Karena  $E \approx j$  di dalam bahan superkonduktor tidak akan muncul medan listrik. Arus super kebanyakan timbul secara induktif yaitu medan magnet ditiadakan. yang sebelumnya telah membentuk 'cincin' (lintasan berbentuk) superkonduktor.

Suatu 'konduktor sempurna' dengan  $p = 0$  adalah telah cukup aneh jika dijelaskan dengan fisika klasik untuk menjelaskan teka-teki rumit kelakuan elektron yang dapat bergerak melalui kisi di dalam konduktor normal. Keanehan sifat superkonduktor berangkat lebih jauh dari sekedar pengertian  $p = 0$ . Hal ini ditunjukkan oleh efek Meissner-Ochsenfeld. Suatu bahan konduktor normal ditempatkan di dalam medan magnet sebagai cuplikan. Medan magnet tersebut tidak akan mengalami gangguan sama sekali dengan adanya cuplikan konduktor, medan tersebut bahkan dapat menembus bahan (dalam hal ini yang menarik perhatian adalah untuk konduktor yang bukan bersifat feromagnetik dengan  $\mu \sim 1$ ). Jika cuplikan didinginkan hingga temperatur di bawah  $T_c$ , seketika cuplikan mengalami perubahan menjadi superkonduktor, walaupun medan ditiadakan: Di dalam bahan superkonduktor (tipe I, lihat penjelasan di bawah) selalu terdapat  $B \approx 0$ . Hal ini tegas-tegas bertentangan (secara hipotetik) dengan teori konduktor sempurna yang menyatakan bahwa  $B$  bukan penyebab untuk dapat perubahan sifat, walaupun seandainya terjadi perubahan  $p \approx 0$  (lihat soal 14.7.1).



Gambar 14.85: Superkonduktor lunak dan keras (Tipe I dan II). Daerah superkonduktor sebenarnya, terjadinya magnetisasi dalam yang mengkompensasikan medan magnet luar, pada Pb berubah menjadi keadaan normal secara tiba-tiba (medan magnet kritis  $B_c$ ). Pada Pb legirung terjadi pergeseran ke keadaan di mana terjadi kompensasi magnetisasi yang tidak sempurna (ketidaksempurnaan efek Menssner-Ochsenfeld) [Data dari Livingston].

Pada percobaan yang lebih teliti harga medan magnet luat  $B_h$  yang diberikan pada cuplikan tidak boleh terlalu besar, karena menyebabkan tidak timbulnya sifat superkonduktor. Umumnya medan magnet mengalami penurunan pada 'lompatan' temperatur (gbr. [14.86]):  $T_c$



Gambar 14.86: Keadaan tansisi antara superkonduktor-normal pada diagram  $B(T)$  untuk berbagai logam murni. Semua kurva transisi mendekati bentuk parabola (lihat teks).

adalah sebagai fungsi medan magnet  $T_c(B)$ , atau sebaliknya, medan magnet kritis  $B_c(T)$  sebagai fungsi dari  $T$ . Pada keadaan medan magnet tertentu  $B_m$ ,  $T_c \approx 0$ . Keadaan transisi antara daerah superkonduktor dan normal pada  $T_c(B)$  yang diberikan pada permukaan  $B-T$  dapat berjalan secara reversibel. Keradaan nedab kritis hanya beberapa ratus Gauss (maksimum untuk unsur murni: 0,198 T untuk Nb) menunjukkan kemungkinan untuk magnet superkonduktor jauh dari berhubungan dengan magnet biasa. Selanjutnya berikut akan dibahas bagaimana superkonduktor 'keras' (tipe II) dengan efek Menssner yang tidak sempurna dapat melewati daerah ini.

Efek Meissner-Ochesenfeld dapat dimengerti, jika diandaikan, pada lapisan permukaan yang tipis terdapat arus sirkuler superkonduktor yang dapat terhindar dari medan magnet luar yang mencoba menembusnya. Pada suatu kawat tipis, dengan sumbunya sejajar medan magnet  $B$ , arus ini akan melingkupi kawat. Tebal lapisan di mana arus mengalir, terdapat hingga mencapai ketebalan beberapa ratus Å (lihat soal 14.7.2) Ternyata superkonduktor yang mendekati ketebalan ini menunjukkan adanya ketidaksempurnaan efek Meissner. Arus sirkuler mempengaruhinya sedemikian, seolah bagian dalam kawat termagnetisasi seluruhnya. Karena di dalamnya tidak terdapat  $B$ , dari pers. [7.38] untuk bahan dengan  $\mu \sim 1$  berarti

$$\begin{aligned} \text{di bagian dalam} &: B_a \mu_0 H_a \\ \text{di bagian luar} &: B \approx \mu_0 (H_a + J) \approx 0, \end{aligned}$$

maka magnetisasi di bagian dalam kawat adalah

$$J = \frac{B_a}{\mu_0}$$

Magnetisasi ini *memenuhi* kerja yang dibuat medan magnet, yaitu dalam satuan volume sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{B_a} J dB = -\frac{1}{\mu_0} \int_0^{B_a} B dB \quad (14.94) \\ &= -\frac{1}{2\mu_0} B_a^2 \end{aligned}$$

Karenanya superkonduktor secara energetik terletak lebih 'tinggi' di sekitar harga kerja di atas dibanding tanpa medan magnet. Walaupun berdasarkan pengalaman tidak terlihat mengapa elektron di dalam bahan superkonduktor dapat menyesuaikan diri melintang terhadap deviasi statistik medan magnet (tanpa medan  $E$ ) dan selain itu mengapa hal ini harus dihubungkan dengan sifat superkonduktor, akan tetapi di luar dari pada itu semua, anggapan ini adalah sekaligus dapat membuktikan salah satu kunci misalnya tentang pengertian medan magnet kritis.

Keadaan transisi antara superkonduktor dan konduktor normal secara termodinamika dapat dianggap sebagai transisi fase. Keadaan stabil suatu bahan adalah jika bahan pada  $T$  dan  $p$  mempunyai energi bebas  $G = U - TS$  yang kecil (di sini ditulis  $U$  bukan  $H$  agar tidak tertukar dengan simbol medan magnet;  $U$  berhubungan dengan tekanan dan kerja akibat medan magnet). Jika terdapat medan magnet, maka kelakuan bahan persis seperti pada proses peleahan atau penguapan: Seperti zat padat, dibandingkan dengan zat cair, energi, maupun entropi pada keadaan superkonduktor suatu bahan terletak lebih rendah dibanding pada keadaan normalnya. Pada  $T$  rendah, karena harga  $U$  yang kecil menyebabkan bahan lebih stabil, sedangkan pada  $T$  tinggi terdapat entropi yang besar (keteraturan menjadi kecil) dari keadaan normalnya. Titik balik diperoleh dari  $G_s - G_n$  sebagai berikut:

$$T_c = \frac{U_n - U_s}{S_n - S_s}$$

Pengukuran langsung untuk perbedaan entropi  $S_n - S_s$  pada temperatur  $T = 0$  adalah  $10^{-3} \text{ J Mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$ , yaitu sekitar  $10^{-4}k$  untuk setiap atom. Apakah hal ini berhubungan dengan satu atom (atau lebih baik lagi adalah untuk 1 elektron) yang menggunakan entropi sebesar  $10^4$  yang merupakan suatu putusan probabilitas antara dua atau lebih ( $S = k \ln 2 = 0,693k$  adalah merupakan putusan penting keadaan biner untuk, misalnya keadaan spin up dan spin down). 'Energi stabilisasi'  $U_n - U_s = T_c(S_n - S_s)$  adalah sangat kecil sekali (kira-kira  $10^{-8} \text{ eV/atom}$ ).

Semakin besar medan magnet, maka semakin kecil pula perbedaan  $U_n - U_s$ , yang pada efek Meissner-Ochsenfeld penting sebagai kerja magnetisasi  $B^2/2\mu_0$  menjadinya sebagian tidak berguna. Pada medan kritis maksimum  $B_m \approx B_c(O)$  kerja ini justru sama dengan 'energi stabilisasi'  $U_n - U_s$ :

$$\frac{1}{2\mu_0} B_m = U_n - U_s$$

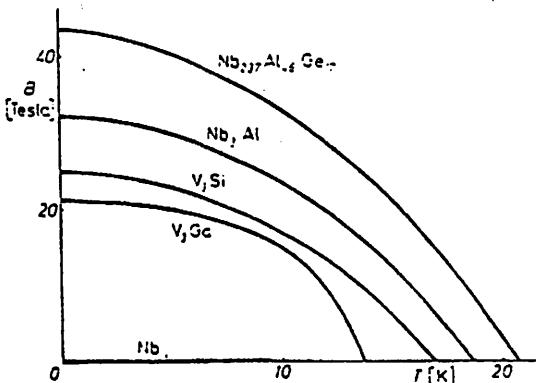
Karenanya pada  $B_a > B_m$  terdapat entropi keadaan normal yang lebih efisien. Seandainya  $U$  dan  $S$  tidak bergantung pada temperatur, maka akan diperoleh kurva batas dari  $T_c(B)$  sebagai parabola terbuka yang mempunyai harga kecil sebagai berikut:

$$\begin{aligned} G_s &= U_s + \frac{1}{2\mu_0} B_c^2 - TS_s \\ &= G_n = U_n - TS_n, \\ T_c(B) &= T_0 \left(1 - \frac{B^2}{B_m^2}\right) \end{aligned}$$

Dalam kenyataannya sering diperoleh kurva parabola, akan tetapi mengalami rotasi  $90^\circ$ , yang terbuka ke arah harga  $B$  yang kecil.  $U$  dan  $S$  tidak mungkin tidak bergantung pada  $T$ . Khususnya entropi pada  $T = 0$ , berdasarkan hukum termodynamika ke 3, haruslah menuju ke nol. Hal ini menyebabkan bahwa kurva batas pada  $T = 0$  selalu tegak lurus bermuara pada sumbu  $B$ . Pada soal 14.7.6 hingga 14.7.8 kurva batas ini dibahas lebih rinci.

Logam murni kebanyakan menunjukkan keadaan transisi yang amat tajam antara keadaan normal dan superkonduktor yang sesuai dengan efek Meissner (superkonduktor tipe I). Pada berbagai jenis legirung kebanyakan antara kedua keadaan tersebut terdapat daerah 'keadaan vorteks' atau 'keadaan mengambang', yaitu keadaan di mana arus super tidak cukup baik untuk menimbulkan magnetisasi, agar bahan terlindung sepenuhnya dari medan magnet luar (gbr. [14.85]). Karenanya garis-garis sempit medan magnet yang paralel beraturan akan menembus bahan, sehingga inti menjadi konduktor normal.

Garis-garis medan magnet yang sempit ini dan perubahannya menyebabkan adanya medan listrik dan menyebabkan harga tahanan menjadi berhingga, yang melalui istilah 'tertangkapnya' garis-garis tersebut pada 'pusat pasak' sehingga terpusat di daerah tersebut menyebabkan kerapatan arus dapat mencapai  $10^7 \text{ A/cm}^2$ . Sesuai dengan efek Meissner tidak serpuna terdapat pula kerja magnetisasi yang kecil dan medan kritis membesar (dapat mencapai 100 kali lebih besar dibanding dengan medan kritis pada superkonduktor tipe I). Dengan superkonduktor 'keras' ini dapat ditumbulkan medan magnet yang



Gambar 14.87: Daerah transisi antar superkonduktor dan konduktor normal dalam diagram  $B(T$  untuk berbagai macam legirung, khususnya yang mempunyai temperatur balik tinggi. Kurva transisi dari logam yang 'terbaik' (Nb) dalam skala ini sukar terlihat. Kurva transisi dari berbagai legirung jarang berbentuk parabola [data dari Former dkk.].

luar biasa besar tanpa batasan energi dengan penggunaan utopinya: Wadah vakum tinggi tanpa gesekan, rel kereta mengambang tanpa gesekan, magnet untuk reaktor fusi, inti memori super cepat untuk komputer (soal 14.7.3).

Kenyataan yang penting selanjutnya adalah pengukuran panas jenis spesifik bahan superkonduktor. Hal ini, berlawanan dengan keadaan normal, secara eksak seringkali sesuai dengan kurva Arrhenius:  $c = a e^2 \Delta E/kT$  sementara pada kebanyakan bahan  $\Delta E \approx 3.5kT_0$ . Panas ini diartikan sebagai 'energi angkat' elektron ke keadaan kekosongan energi  $\Delta E$  yang pada temperatur  $T \approx 0$  semua keadaannya

telah terisi penuh dari pemisahan tersebut; pada  $T = 0$  terisi, ekor Fermi'. Jika hal tersebut benar adanya, haruslah ditemukan hal yang analog dengan kasus ujung spektrum absorpsi pada semikonduktor: Foton dengan energi  $h\nu < \Delta E$  tidak dapat mengangkat elektron ke keadaan energi kekosongan, sedangkan untuk gelombang dengan  $\lambda$  kecil dapat terjadi. Akan tetapi, foton mempunyai panjang gelombang dalam orde cm. Pembuktian lainnya diperoleh dari efek kanal (*tunnel effect*) elektron tunggal: Suatu lapisan isolator yang sangat tipis ditempatkan di antara dua konduktor dapat ditembus oleh elektron. Kurva karakteristik arus-tegangan dari konduktor normal akan meningkat, jika seandainya kurva tersebut sangat tajam; sebaliknya pada bahan superkonduktor yang terdapat di dalam medan akan terjadi, yang dengan ketebalan isolator dikali  $e$  selalu diperoleh harga keadaan energi kekosongan sebesar  $\Delta E$  juga. Energi kekosongan untuk bahan semikonduktor mempunyai pengertian berbeda dari zone (daerah) terlarang: Zone terlarang adalah kepunyaan kisi kristal, sedangkan energi kekosongan adalah milik elektron.

Adanya energi kekosongan  $\Delta E$  menjelaskan tidak adanya tahanan dari arus super. Hukum kekekalan energi dan momentum melarang adanya pertukaran momentum antara elektron dan kisi. Hal ini dibolehkan seandainya kecepatan kritisnya tidak melampaui harga yang erat hubungannya dengan  $\Delta E$  (soal 14.7.4). Kekosongan energi ini berdasarkan teori Bdeen-Cooper-Schrieffer (teori BCS), diartikan sebagai *kerja pisah* dari *pasangan Cooper*. Pada keadaan normal dua elektron akan saling terikat jika mempunyai momentum yang sama dan melalui interaksi tidak langsung dengan fonon kisi; untuk mendapatkan masing-masing elektron, maka pasangan tersebut harus dipisahkan. Interaksi tersebut dapat dianalisa secara kasar sebagai berikut: Sebuah elektron menimbulkan suatu polarisasi kisi, dengan menarik muatan positif sehingga berada di dekatnya dan karenanya elektron berada dalam 'kuali' potensial. Elektron lain dapat juga terikat di dalam 'kuali' ini. Gambaran primitif ini tidak memberikan alasan mengapa justru selalu turut serta dua elektron, mengapa ikatan dapat terjadi pada jarak yang cukup besar ( $10^4$  Å) dan

banyak hal lain lagi. Adanya vibrasi kisi mempengaruhi sifat superkonduktor telah lama diketahui secara eksperimen dari *efek isotop*: Temperatur balik suatu isotop suatu unsur bergantung pada nomor massa  $A$ , persis sama seperti temperatur Debye, yaitu energi karakteristik fonon  $T_c \sim A^{-1/2}$ .

Elektron-elektron juga secara berpasangan (pasangan Cooper) dapat menembus lapisan isolator (efek kanal) dan berkelakuan sangat berbeda dari hanya elektron tunggal (lihat pembahasan di atas), akan tetapi masih terlalu absurd. Tanpa pemberian medan telah mengalir kanal arus searah 'dari langit' (efek Josephson-Gleich). Hal ini tentunya tidak mengherankan, seandainya lapisan isolator patah di sembarang tempat dan tentunya hal ini dapat pula terjadi pada bahan superkonduktor. Jika diberikan tegangan yang konstan  $V$  pada Josephson *junction*, maka akan mengalir arus bolak-balik dengan frekuensi  $\omega = 2eV/h$  yang dapat terjadi pada lapisan yang dapat ditembus dengan ketebalan (kira-kira 10 Å) dan diperoleh tegangan (dalam  $\mu$ V, tertinggi dalam mV), akan tetapi efek Josephson ini telah muncul di dalam daerah ultraviolet dengan ketebalan lapisan dalam  $0.1\text{ mm}$  (efek bolak-balik Josephson). Pembuatan generator gelombang mikro demikian secara prinsip amat murah: Suatu batang logam diuapkan pada suatu plat gelas, kemudian lewatkan udara pada tempat penguapan hingga terbentuk lapisan oksida. Selanjutnya, uapkan bahan logam lainnya, pasangan elektroda pada lapisan yang terbentuk, lindungi cuplikan dari medan magnet bumi dan masukkan cuplikan ke dalam He cair. Secara teoritis persoalan ini adalah 'amat sederhana', sejauh diketahui secara mekanika kuantum dan mempunyai semangat untuk menemukan adanya paradoks, seperti halnya seorang mahasiswa bernama Brian Josephson ini. Elektron adalah gelombang  $\psi$ . Pasangan elektron Cooper juga mempunyai sifat gelombang  $\psi$  dengan fase yang dipunyai bersama. Hubungan ikatan fase tertentu ini akan 'terpecah' jika gelombang melalui isolator. Adalah kebetulan seandainya kedua bahan superkonduktor mempunyai fase yang sama. Sepasang elektron yang akan melewati dinding potensial lapisan isolator, fasenya akan mengalami perubahan dalam

harga tertentu. Sekarang bergantung, apakah elektron yang menyeberang tersebut datang dengan fase yang 'benar', seperti yang dipunyai oleh gas elektron; jika benar maka harus ditambah sesuatu pada vibrasi tersebut; seandainya tidak, elektron tentunya akan direfleksi oleh permukaan dan kembali ke tempat asal semula. Hal ini sebenarnya dapat dengan mudah dipikirkan, bahwa 'kondisi atau syarat yang dibolehkan' untuk kedua arah arus adalah sangat berbeda, selain secara praktis kasus tertutup, bahwa perubahan fase di dalam lapisan isolator tersebut adalah kelipatan bulat dari  $\pi$ . Perbedaan arah kedua arus tersebut adalah arus searah Josephson.

Tegangan searah  $V$  menyebabkan bergesarnya tingkat energi dari pasangan elektron Cooper pada kedua bahan superkonduktör tersebut sebesar  $2eV$  satu sama lain. Karena  $E \propto \hbar\omega$  maka kedua gelombang  $\psi$  mempunyai perbedaan frekuensi sebesar  $\Delta\omega = 2eV/h$ . Dengan pengambangan (pergeseran) energi ini maka syarat yang dibolehkan mengubah arahnya, juga arah atau tanda arus kanal mengalami perubahan. Sebagaimana frekuensi ambang berasal dari  $\hbar\omega = 2eV$ , maka panjang gelombang juga mengalami modulasi ruang dari  $hk = h/\lambda = 2eBd$ . Sepanjang lapisan isolator tersebut (panjang  $l$ ) terjadi perubahan arah arus yang berbeda dan jika  $l$  adalah kelipatan bulat dari panjang gelombang, maka arus akan meningkat naik: Arus searah Josephson yang dinyatakan dalam  $B$  mengalami osolasi dengan periode  $\Delta B = h/2eld$ . Efek ini membedakan arus searah Josephson dari kasus trivial suatu penghilangan pada lapisan isolator.

Jika ingin diketahui interferensi bagian arus tersebut dengan pemberian medan magnet pada Josephson *junction*, maka lapisan harus dibuat demikian besar (soal 14.7.5). Interferensi terjadi juga pada cincin kawat yang dipisahkan oleh dua *junction*. Kemudian dilakukan pengukuran yang tidak eksak berapa besar fluks medan magnet yang melingkupi cincin kawat. Interferensi kuantum ini dapat timbul antara dua *junction* yang terletak pada jarak 1 meter, walaupun medan magnet sama sekali tidak menembus cincin tersebut. Penggunaan yang mungkin dari efek Josephson ini adalah dengan menggunakan

generator gelombang mikro, pengukuran harga  $e/h$  dan magnetometer berkemampuan tinggi yang telah menjadi tema tidak habis-habisnya.

Dengan 'superkonduktor fonon'. dengan pengetahuan yang terbatas hingga saat ini diketahui, bahwa pasangan elektron Cooper mengalami pertukaran dengan fonon yang berasal dari kisi dan sebagai hasil teori ini adalah suatu superkonduktor yang mempunyai temperatur balik kurang dari 20-30 K. Seandainya terdapat pertukaran eksiton dengan pasangan elektron tersebut, maka pasangan telah lama tidak lagi bersamaan, sehingga akan diperoleh superkonduktor untuk  $0^\circ$  sehingga tidak diperlukan lagi 'suppersolasi'. Ketika superkonduktor eksiton dikenal dari semua bahan yang dihaluskan dan berserat, tidak tertutup kemungkinan untuk bahan yang berasal dari bahan organik. Tidak tertutup kemungkinan bahwa suatu saat atau di suatu tempat akan muncul kehidupan yang dapat menggunakan superkonduktor.

### Soal-soal § 14.1

14.1.1 Pada temperatur hingga  $910^\circ$  besi menjadi kristal a-Fe (*body center cubic*, bersifat feromagnetik), di atas temperatur itu menjadi kristal  $\gamma$ -Fe (*face center cubic*, tidak feromagnetik). Dalam kristal yang mana di antara keduanya mempunyai ruang kosong lebih banyak? Dalam kristal yang mana terdapat lebih banyak partikel antar kisi berbentuk bola ? Berapa banyak tempat yang bersesuaian terdapat dalam kedua kisi tersebut ? Jika antara kedua ramalan di atas timbul hal yang bertolak belakang, bagaimana dapat diatasi ? Apa yang dapat disimpulkan tentang sifat-sifat partikel antar kisi, misalnya atom C, pada proses pendinginan setelah dilakukan pemanasan, jika hanya dibiarkan (pemanasan pada  $200 - 600^\circ\text{C}$ ), dengan proses pendinginan seketika dari sampel ? Jika pada salah satu proses di atas menjadikan ruang antara kisi menyempit untuk atom C, apa yang terjadi selanjutnya ? Buatlah kesimpulan tentang kekerasan dan duktilitas !

14.1.2. Penggosok intan membedakan permukaan sebagai berikut: permukaan oktahedral, dodekahedral dan empat persegi, sesuai dengan

keterbatasan bentuk kristal, yang juga diketahuinya dari bentuk 'dalam'. Dapatkah Anda menghubungkan bentuk permukaan-permukaan tersebut dengan bidang kristal ? Para penggosok memotong intan dengan cara meletakkan sebuah pasak baja berukuran kecil pada permukaan potensial kristal, dan dengan sekali 'ketokan' singkat, menggunakan palu kecil, akan didapat potongan intan yang dikehendaki. Bagaimana hal tersebut dapat dilakukannya, sebagaimana kita ketahui bukankah intan jauh lebih keras dibanding baja ? Cara termudah untuk memperoleh potongan intan adalah dengan cara memotongnya sepanjang permukaan oktahedral, sedikit lebih mudah sepanjang permukaan dodekahederal dan paling sukar sepanjang permukaan empat persegi; intan praktis tidak dapat dibelah pada arah lainnya. Untuk menghaluskan ketidakrataan yang terdapat di setiap permukaan, dapat dilakukan dengan cara meratakan permukaan atau bahkan seluruh permukaan dibuang sama sekali dan akhirnya dilakukan penggosokan pada 'arah yang baik'. Untuk permukaan berbentuk empat persegi, penggosokan pada arah sisi adalah terbaik, sedangkan pada arah diagonal jelek. Untuk permukaan oktahedral, penggosokan yang baik biasanya dilakukan pada salah satu sisi dibandingkan menggosok di puncaknya. Pemotongan horizontal puncak oktahederal akan menghasilkan segi enam, pada permukaan empat persegi menghasilkan segi empat dan untuk permukaan dodekahederal menghasilkan rhombohedris. Apakah pengalaman empiris di atas memberikan pengertian atomik?

**14.1.3.** Tentukan energi kisi yang dinyatakan dalam konstanta Madelung untuk suatu kristal satu dimensi yang mengandung ion positif dan negatif secara berselang-seling. Selanjutnya, cobalah bagaimana deret yang muncul menjadi konvergen. Ingatkah Anda pada deret:  $\ln(1+x) \approx x - x^2/2 + x^3/3 - \dots + \dots$ . Gunakan rumusan ini untuk kristal NaCl dengan jarak antar ion seperti jarak pada kristal sempurna (kerapatan NaCl  $2,165 \text{ g/cm}^3$ ).

**14.1.4.** Kurva potensial suatu atom kisi diberikan berdasarkan gaya tarik menarik Coulomb ( $E_{\text{pot}} \approx A r^{-1}$ ) dan gaya tolak menolak yang amat tajam ( $E_{\text{pot}} \approx B r^n$ ). Dari potensial seperti itu carilah: posisi

maksimum dan minimum dari energi potensial, kelengkungan karena lingkungan yang terdapat di sekitarnya, posisi titik balik (kenaikannya). Apa arti dari konstanta  $A$ ,  $B$  dan  $n$  sehingga dari perhitungan didapat kristal sebenarnya ? Apakah harga parameter tersebut penting ? Data empiris apa dapat dan harus digunakan untuk pemodelan seperti di atas: konstanta kisi, panas penguapan, frekuensi maksimum kisi.

**14.1.5** Jelaskan kembali tentang teori regangan (pengembangan) yang telah dijelaskan di teks secara kuantitatif (perhitungan atau grafik, atau sebaiknya kedua-duanya !). Sebagai pendekatan, ambil letak titik pusat getaran di tengah-tengah antara dua titik ujung pada kurva potensial. Apakah penyederhanaan ini dapat diterima ?

**14.1.6.** Pada benda padat dikerjakan tegangan (misalnya gaya tarik). Pengaruh apa yang muncul pada kurva potensial karenanya ? Bagaimana kurva potensial, khususnya titik minimumnya bgeser ? Bagaimana dengan konstanta elastis (modulus  $E$  dan lain sebagainya.) yang dinyatakan dalam parameter kurva potensial ? Terdapat batas ketegaran dan apakah harga yang diperoleh karena diberikan tegangan di atas masih dapat diterima ? Bila tidak, mengapa ?

**14.1.7.** Berapa orde energi kisi yang diharapkan untuk berbagai macam ikatan berdasarkan model atomik ? Petunjuk: Hal ini kadang-kadang berhubungan, walaupun tidak selalu, dengan interaksi tetangga terdekat. Momen dipol molekul  $\text{H}_2\text{O}$  timbul karena atom O membawa muatan elementer negatif sebanyak 0,3 dan H 0,15 positif: jarak antara atom O dan H hampir persis sama dengan 1 Å, sedangkan 'sudut valensi' sebesar  $105^\circ$ ; misalkan dua molekul di dalam air atas es masing-masing berjarak 2,6 Å (bandingkan dengan kerapatan makroskopik !). pada atom Na elektron valensinya (3s) hanya mempunyai muatan efektif sebesar  $2e$  (mengapa ?); Berapa besar jari-jari Bohr ? Berapa besar energi titik nol elektron tersebut dalam sumur potensial dengan ukuran diameter demikian ? Logam menyediakan sumur potensial bersama untuk elektron konduksinya, yang sejauh ini dikenal bahwa energi titik nolnya adalah sama dengan energi Fermi!

14.1.8. Atom C di dalam intan dan  $H_2O$  di dalam es keduanya mempunyai valensi 4 dan mempunyai simetri ikatan tetrahedral. Akan tetapi mengapa intan lebih 'memilih' struktur kristal FCC dan es struktur hexagonal ? Dalam hal ini cukup diamati hanya dua tetangga terdekat dan distribusi muatan yang terdapat di sumbu ikatnya.

14.1.9. Tunjukkan bahwa pola gambar difraksi suatu kristal dengan menggunakan cahaya monokromatis dapat diperoleh dengan cara sebagai berikut: Tempatkan mata Anda di dekat kristal, maka akan didapat suatu model dari kisi balik (kisi resiprok), demikian pula orientasi kristal dan misalnya dengan skala  $10^8 : 1$  (1 cm dihitungan analog dengan 1 Å), pada jarak  $2\pi 10^8/\gamma$  pada arah cahaya primer di depan mata. Maka akan terlihat titik-titik kisi kristal persis pada arah yang sama, di mana cahaya refleksi terdapat.

## Soal-Soal § 14.2

14.2.1 Gambarkan gambar sesaat suatu gelombang sinus pada titik kisi tunggal satu dimensi. Gambarkan pula gelombang yang sama secara analitis. Apakah terdapat gelombang lain yang menggambarkan simpangan titik kisi persis pada titik yang sama ? Perhatikan pula untuk kasus  $\lambda < 2d$  dan  $\lambda > 2d$  ( $d$  adalah konstanta kisi). Jika terdapat gelombang yang ekuivalen, periksalah kembali hubungan antara  $\lambda'$  dan  $\lambda$  dari gelombang asal. Sekarang pandang gelombang yang merambat lebih jauh. Bagaimana perubahan (kalau memang ada) arah rambatan kedua gelombang ekuivalen tersebut ? Buat penyederhanaan melalui: Kecepatan fase tidak bergantung pada  $\lambda$ . Jawablah semua pertanyaan secara analitis (khususnya jika menggunakan vektor  $k$ ), walaupun dalam gambar tidak terlihat.

14.2.2. Berikan penjelasan secara paralel untuk pengamatan panas jenis spesifik suatu zat padat menurut teori klasik dan Einstein. Gunakan referensi kuantitatif dari gbr [14.27]. Dari mana asal pernyataan jumlah total osilator yang tidak bergantung terhadap  $T$  ? Bagaimana pengaruh temperatur ? energi apa yang terdapat pada osilator umumnya ? Osilator bagaimana kebanyakan memberikan porsi terbesar untuk energi ? Berapa 'lebar' distribusi dari energi ?

Ramalkan besarnya energi total dan panas jenis spesifik ! Dalam batas-batas apa teori Einstein akan berubah menjadi pendekatan klasik? Dapatkan hal tersebut dilihat dengan jelas ? Bagaimana penjelasan tentang deviasi kedua teori ini untuk daerah batas yang lain ?

#### 14.2.3. Hitungkan penjumlahan yang terdapat pada pers. [14.23].

Petunjuk:

$$\sum_{j=1}^{\infty} j q^{-j} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{v=1}^{\infty} q^{-v}$$

Dasar? Apakah skema

$$\begin{array}{cccc} q^{-1} & q^{-2} & q^{-3} & \dots \\ & q^{-2} & q^{-3} & \dots \\ & & q^{-3} & \dots \\ & & & \dots \end{array}$$

untuk selanjutnya dapat menolong?

14.2.4 gantikan teori klasik Einstein pada soal 14.2.2 menjadi teori klasik Debye dan jawablah semua pertanyaan yang ada berdasarkan kedua teori ini. Apa yang dapat Anda katakan tentang pendekatan  $T^3$  untuk panas jenis spesifik menurut Debye lebih jauh? Mengapa pendekatan ini hanya berlaku untuk temperatur rendah? Apa yang terjadi pada daerah transisi?

14.2.5. Debye (seperti halnya Rayleigh sebelumnya) menganggap semua getaran suatu zat padat adalah elastik (gelombang diam atau sering pula disebut gelombang berdiri) dan menjelaskan, bahwa getaran-getaran ini yang menyebabkan semua energi termis yang ada di dalam sistem. Akar suatu sisi yang panjang  $\alpha$  misalkan terdapat di dalam ruang hampa dan mengalami regangan tetap, sehingga semua gelombang akan mempunyai simpul di setiap ujungnya. Gelombang apa yang mempunyai sifat seperti ini (misalnya pertama pandang satu dimensi, kemudian untuk kasus tiga dimensi)? Gambaran ini akan lebih jelas jika menggunakan vektor gelombang  $k$ ; vektor mempunyai

panjang gelombang  $1/\lambda$  dan arahnya adalah sama dengan arah rambat gelombang. Bagaimana gelombang yang diperbolehkan ini terdapat di ruang  $k$ ? Berapa banyak terdapat gelombang demikian hingga ke batas Debye? Berapa banyak terdapat jumlah interval  $(v, v + dv)$ ?

14.2.6. Untuk  $m_1 = m_2$  secara sederhana akan didapat akar persamaan dispersi pada pers. [14.37]. Di mana letak perbedaannya untuk rumus pada pers. [14.32]? Apakah akan timbul cabang optik? Jika benar, bagaimana hal tersebut dapat terjadi, justru untuk  $m_1 = m_2$ ? Apakah antara kedua cabang terdapat daerah  $\omega$  terlarang? Tentukan kecepatan fase dan grup untuk dua cabang tersebut.

14.2.7. Dua fonon dengan  $\lambda$  berdekatan di atas harga  $2d$ , untuk arah yang berbeda tidak saling menumbuk satu sama lain dan keduanya menghasilkan fonon ketiga. Berapa besar harga  $\lambda$ ,  $k$  dan  $v$  untuk foton yang baru ini (pengandaian: tidak terjadi dispersi)? Bagaimana bentuk gelombang kisi untuk kasus demikian? Apakah akan dicapai dearah perpotongan Debye? Jika tidak, dapatkan gerak yang sama dari titik kisi digambarkan dengan gelombang yang diperbolehkan? Bagaimana vektor  $k$  untuk gelombang ini ( $k_3$ )? Dalam kondisi bagaimana  $k_3$  akan berlawanan arah dengan  $k$  fono mula-mula? Bagaimana kejadian ini dapat diinterpretasikan? Apakah berlaku hukum kekekalan momentum untuk kasus tiga fonon, atau bagaimana?

14.2.8. Hubungan apa yang terdapat antara konstanta dielektrik, derajat absorpsi dan refleksi suatu kristal? Lihat misalnya gbr. [11.11] dan pers. [14.37].

14.2.9. Intan (khususnya intan buatan) dapat berfungsi sebagai penghantar panas yang baik dibanding dengan tembaga, akan tetapi sekaligus sebagai isolator yang baik secara elektris. Bagaimana dapat dijelaskan keadaan yang bertentang dengan hukum Wiedemann-Franz tersebut?

14.2.10. Diskusikan gbr. [14.43]. Mengapa  $^{74}\text{Ge}$  dapat mengantarkan panas lebih baik dibanding dengan campuran isotop alamiahnya? Bagaimana dapat Anda buat hubungan  $\lambda(T)$  secara kuantitatif dan bagaimana penjelasan Anda tentang kelakuan ini? Mengapa  $\lambda$  akan kembali menurun untuk temperatur yang tinggi?

### Soal-Soal § 14.3

14.3.1. Berapa 'tinggi' batas energi Fermi untuk elektron konduksi suatu logam, semikonduktor dan plasma? Carilah angka untuk besaran-besaran yang bersangkutan. Apakah gas elektron tersebut mengalami degenerasi?

14.3.2. Pandang suatu kristal kubus sederhana dengan konstanta kisi  $d$ . Pada harga-harga momentum kritis  $n \ h/h$  elektron akan timbul suatu efek pada elektron tersebut; apakah itu? (refleksi Bragg !). Apakah akan terdapat gelombang dengan momentum melebihi harga tersebut? Apakah gelombang diam  $\psi$  akan mengalami perubahan fase? Apa pengaruhnya terhadap energi keadaan? Berapa banyak harga  $E$  yang ada setelah terjadi 'momentum kritis' tersebut? Bagaimana perubahan relasi energi-momentum untuk elektron bebas dan elektron yang terdapat didalam kristal? Apakah dengan cara ini dapat diketahui gambaran pita-pita energi dan darah terlarang?

14.3.3. Jika sebuah partikel tidak lagi dapat terlokalisir, maka tidak akan dapat dijelaskan kecepatan dan percepatan dengan cara biasa. Untuk kasus ini kelakuan mekanisme harus dinyatakan lebih banyak melalui energi, momentum dan melalui frekuensi dan panjang gelombang dari gelombang  $\psi$ . Kecepatan hanya dapat dinyatakan sebagai kecepatan grup gelombang yang bersangkutan. Bagaimana pernyataannya dalam  $E(p)$ ? Bagaimana menentukan besaran yang berperan dalam menentukan kelembaman (massa efektif)? Perhatian: Sebagaimana biasa, gaya adalah sama dengan perubahan momentum terhadap waktu. Jika kurva  $E(p)$  mengalami perubahan seperti halnya di dalam kristal, maka massa efektif akan bergantung pada  $E$ . Bagaimana kelakuannya di pinggir dan di tengah pita energi?

14.3.4. Diskusikan tentang analogi antara elektron dan elektron defek (*hole*). Apakah muatan, massa, energi dan momentum *hole* dapat ditentukan? Apakah *hole* juga antipartikel?

### Soal-soal § 14.4

14.4.1. Pada suatu isolator pita yang terisi penuh elektron dan pita yang sama sekali kosong dipisahkan oleh zone terlarang dengan lebar  $E_o$ . Diskusikan pembentukan pembawa muatan termis dan rekombinasinya. Apakah koefisien rekombinasi juga akan diperoleh untuk pita dalam keadaan setimbang terisi penuh elektron? Jika tidak, dalam keadaan bagaimana terdapat peran tersebut? Bagaimana ketergantungan tahanan jenis terhadap temperatur yang akan Anda peroleh? Bagaimana lebar zone (daerah) terlarang dapat ditentukan dengan mengukur tahanan bahan?

14.4.2. Isolator terbaik mempunyai lebar daerah terlarang dari 3-5 eV (mengapa tidak melebihi harga tersebut?) dan mengandung ketidakmurnian sebesar  $10^{-6}$  partikel (1 partikel 'asing' dalam setiap  $10^6$  partikel kisi). Berapa besar mobilitas pembawa muatan dan konduktivitas yang akan diperoleh menurut perkiraan Anda?

14.4.3. Konstanta dielektrik dari Ge adalah 16,1 dan untuk Si 17,3. Suatu monokristal yang mengandung salah satu dari bahan tersebut di atas mengandung pula beberapa atom As dan Ga. Bagaimana dengan kelebihan atau kekurangan elektron pada atom 'asing' tersebut? Apakah keadaan terlokalisasi berhubungan dengan atom 'asing'? Apakah sistem di atas dapat dipandang sebagai sistem mirip atom hidrogen? Dapatkah Anda tentukan energi, jari-jari Bohr dari keadaan ini?

14.4.4. Anda ingin menentukan konsentrasi, tanda pembawa muatan (positif atau negatif) dari suatu semikonduktor. Paling tidak pengukuran apa saja yang harus Anda lakukan?

14.4.5. Suatu kristal logam atau semikonduktor ditempatkan di dalam sebuah kondensator (tanpa kontak dengan plat kondensator). Gambarkan pergeseran struktur pita yang terjadi dan batas energi Fermi! Di mana letak muatan permukaan dan berapa besar muatan tersebut? Dapatkah pembawa muatan ini terkonsentrasi di dalam suatu lapisan tipis? Gunakan istilah panjang Debye-Hueckel. Bandingkan dengan ketebalan lapisan pinggir yang terdapat didalam diode dan transistor yang dijelaskan dalam teks.

14.4.6. Suatu semikonduktor tipe *n* berada dalam keadaan kontak dengan logam dan diketahui pula bahwa batas energi Fermi logam terletak di bawah tingkat energi donator semikonduktor. Apa yang terjadi dengan elektron dan pita energinya karena kotak tersebut? Gambarkan struktur pita sebelum dan sesudah kotak dilakukan. Bagaimana dengan batas energi Fermi selanjutnya? Berapa tebal lapisan pinggir? Muatan total apa yang terdapat di dalamnya? Berapa orde medan yang harus diberikan untuk membuat lapisan pinggir 'membukit'? Apa yang terjadi jika antara logam dan semikonduktor diberikan tegangan? Perhatikan polaritas keduanya.

14.4.7. Pada gbr. [14.64] bentuk pita pinggir tidak digambarkan benar-benar eksak. Jika Anda menemukan kesalahan tersebut, maka akan Anda peroleh kurva karakteristik diode. Petunjuk: Mengapa pita digambarkan tidak horizontal dan hanya pada daerah batas mengalami kenaikan? Berapa perbedaan tinggi antara ujung kiri dan kanan? Berapa tebal daerah terlarang seharusnya untuk menghubungkan kedua bahan?

14.4.8. Suatu semikonduktor mempunyai donator ('traps') yang terletak agak rendah (lebih kurang 1 eV) di bawah ujung pita konduksi. Bagaimana elektron yang terdapat di ujung pita dapat sampai ke pita konduksi? Diskusikan khususnya 'pelepasan termis'. Bagaimana ketergantungan laju pelepasan terhadap temperatur *T*? Bagaimana kedalaman traps dapat ditentukan dari pengukuran konduktivitas ('energi aktifasi')? Apa yang terjadi jika temperatur dinaikkan? ('kurva Glow').

14.4.9. Elektron cepat yang mengalami perlambatan (pengereman) di dalam kristal ZnS atau kristal yang mirip lainnya akan menyebabkan elektron valensi berpindah ke pita konduksi dan dapat kembali ke keadaan semua melalui emisi cahaya. Apakah bahan yang memiliki kelakuan 'fosforesensi' demikian dapat digunakan sebagai layar televisi? Kondisi apa saja menurut Anda yang terdapat pada peristiwa emisi cahaya yang menyebabkan terjadinya 'fosforesensi' tersebut (misalnya tenggang waktu timbulnya cahaya dan lain sebagainya.)? Bagaimana kondisi tersebut digambarkan dalam model pita? Sifat-

sifat apa saja yang terdapat pada peristiwa 'fosforesensi' yang baik untuk pelat yang dapat menyala tersebut?

14.4.10. Diskusikan gbr. [14.56]. Apa yang diukur untuk memperoleh data tersebut? Apa artinya penurunan garis lurus dan apa arti kenaikannya? Mengapa terjadi keadaan jenuh pada temperatur tinggi? Bagaimana ketiga kurva tersebut dapat dibedakan? Dapatkah Anda meramalkan konsentrasi As? Mengapa kurva mengalami pelengkungan pertama kali untuk kemudian di dapat keadaan jenuh? Apakah kurva  $\sigma(T)$  mempunyai bentuk yang sangat berbeda? Pengandaian:  $\mu \sim T^{-3/2}$ ; sampai di mana kebenaran pengandaian ini? Pengukuran apalagi yang diperlukan untuk membuktikan hal tersebut?

14.4.11. Ramalkan konduktivitas minimal suatu logam, dengan lintasan bebas rata-rata sesuai dengan ukuran jarak antar atom. Dalam kondisi bagaimana dapat diperoleh harga tersebut?

14.4.12. Pada gbr. [14.59] diberikan koefisien absorpsi untuk  $\text{Cu}_2\text{O}$  pada 77 K sebagai fungsi dari energi foton. Bagaimana struktur kristal  $\text{Cu}_2\text{O}$ ? Apakah warna sangat bergantung pada ketebalan kristal? Apa arti peak tersebut? Dapatkah Anda menentukan energi peak dari seri tersebut? Di mana akan diperoleh keadaan dasar? Apakah dari harga energi tersebut dapat disimpulkan sifat kristal (koefisien dielektrik)? Dapatkah dibuat ramalan tentang kristal dari harga energi tersebut? Bagaimana bentuk kurva absorpsi jika pengukuran dilakukan pada temperatur kamar?

### Soal-Soal § 14.6

14.6.1. Buatlah pembuktian bahwa pers. [14.88] merupakan penyelesaian persamaan difusi dan sesuai dengan syarat awal pada  $t = 0$  semua molekul akan diperoleh pada posisi yang sama!

14.6.2. Dikatakan bahwa orang Jerman merupakan keong pengumpul anggur dan dari keadaan alam setempat pada masa lalu, anggur haruslah diimport dari biara. Dengan pengandaian tentang kerapatan dan waktu dari kloster (biara) sama dengan kecepatan berjalan cepat seekor keong dan lintasan yang dibuatnya. setelah ia berhenti sejenak, kemudian mulai bergerak ke arah lain: berapa lama diperlukan waktu

agar dari biara hingga ke semua tempat di Jerman dipenuhi oleh keong?

**14.6.3.** Seorang 'manusia biru absolut' adalah orang yang di siang hari berjalan dengan frekuensi langkah normal terhuyung-huyung, tetapi di malam hari melangkah dengan probabilitas langkah yang sama ke segala arah, tidak bergantung pada arah langkah sebelumnya, sejauh ia mengetahui di mana letak rumahnya dan dapat melangkah masuk ke dalam, jika ia persis berada di depan pintu. Pintu rumah mempunyai lebar  $b$  dan ia berada pada jarak sejauh  $\alpha$  dari bar. Berapa lama waktu yang diperlukan olehnya sampai di rumah?

**14.6.4.** Berapa derajat penghubung rantai  $N$  akan diperoleh dari gbr. [14.84]? Berapa berat molekul dan bilangan koordinasi yang diperoleh antara titik-titik yang berhubungan dari dua rantai?

### Soal-Soal § 14.7

**14.7.1.** Suatu penghantar normal yang berada di dalam medan magneti statis  $B$  dapat dijelaskan berdasarkan persamaan Maxwell dan hukum Ohm. Buktikan bahwa  $B$  tidak dapat berubah jika konduktivitas berubah-ubah secara sembarang, walaupun jika harga konduktivitasnya menjadi lebih besar. Jika setelah keadaan transisi ini medan magnet ditiadakan, terjadi 'penghantar sempurna', karena keadaan di dalam penghantar tetap 'membeku'. Bandingkan keadaan ini dengan keadaan superkonduktor!

- Berapa tebal lapisan yang menyebabkan terjadinya arus super, seperti dijelaskan efek Meissner-Ochensfeld, bahwa di dalam bahan tetap tidak terdapat medan/ Gunakan persamaan Maxwell dan kerapatan arus  $j = nev$ . Pandang misalnya sebuah kawat panjang dengan sumbu sejajar medan magnet.
- Tunjukkan bahwa kelakuan medan akan dapat dijelaskan jika dianggap, bahwa untuk elektron yang berada di dalam superkonduktor berlaku relasi  $mv - eA$  harus sama dengan nol.  $A$  adalah potensial vektor darinya dapat diturunkan bahwa  $B = D \times A$  dan medan listrik induksi  $E = -A$  (secara

lengkap biasanya ditulis  $E = -\Delta\psi - A$ ). Apakah relasi  $mv - eA = 0$  juga berlaku untuk 'penghantar sempurna' dengan  $p = 0$ ? Jika tidak bagaimana dapat dijelaskan adanya deviasi sifat dari superkonduktor?

- c) Tunjukkan bahwa relasi  $mv - eA = 0$  untuk superkonduktor hanya dapat terpenuhi jika fluks magnetik yang timbul dari arus dincin (ring) mengalami kuantisasi, atau merupakan kelipatan bulat dari  $h/e$ ! Perhatian pula bahwa momentum angular elektron yang bergerak membentuk arus cincin juga mengalami kuantisasi sama halnya dengan elektron yang mengelilingi inti (mengapa?; lihat § 15.3.4); perhatikan pula hubungan antara  $v$ ,  $p$  dan  $h$ .

**14.7.3.** Keadaan "Dunia" pada 1 April 2100: 'Kereta api' superkonduktor jurusan Berlin-Hamburg 'menggelinding' pada pukul  $10^{\text{00}}$  dari stasiun Keruzberg (350 m di bawah permukaan air) dan akan sampai di stasiun Micheal di Hamburg pada pukul  $10^{59}$ . Berhenti hanya 1 menit. Sejak itu hubungan antar kota hanya memerlukan waktu 2 jam, pagi dan malam. Untuk hal ini pada insinyur mempertanyakan bagaimana membangun dan menghilangkan bunyi mesin: pertanyaan yang sama seperti terjadi lebih kurang seratus tahun yang lalu, ketika kuda diganti dengan lokomotif: Tidak ada seorang pun rupanya yang mempersoalkannya, baik pemakai jasa di dalam kereta api maupun penduduk di luar. Misalkan untuk membangun 'kereta api' superkonduktor tersebut diperlukan selinder berisi Nitrogen cair. Bagaimana pendapat Anda tentang hal ini? Apakah hal tersebut merupakan utopia semata?<sup>1)</sup>.

**14.7.4.** Tiap elektron di dalam bahan superkonduktor umumnya mempunyai ketergantungan momentum-energi sebagai berikut:  $E \Delta e + p^2/2m$ .  $\Delta E$  adalah 'kekosongan' energi. Apa artinya ketergantungan tersebut? Pasangan *Cooper* yang mempunyai energi tertinggi terletak pada  $E = 0$ . Suatu gas dari pasangan *Cooper* secara keseluruhan bergerak dengan kecepatan  $v$  berlawanan terhadap kisi. Momentum kemudian dapat dicari dari gas elektron yang bergerak, karena kekosongan energi berhubungan dengan hal ini. Elektron hanya dapat

direm jika pasangan tersebut terpisah dan elektron akan berada dalam keadaan momentum yang bersesuaian. Tunjukkan bahwa hukum kekekalan energi dan momentum untuk kasus ini hanya akan berlaku jika tercapai suatu keadaan kecepatan kritis, dan ramalkan pula kecepatan kritis tersebut.

Berapa besar arus super yang terjadi?

14.7.5. Ramalkan arus kanal (arus tunnel) yang melalui lapisan oksida  $10 \text{ \AA}$  yang ditempatkan antara dua bahan superkonduktor (lihat §16.3.2; potensial elektron pada oksida kira-kira 3 V lebih tinggi dibanding pada logam). Berapa besar frekuensi osilasi dari arus Josephson, jika *junction* diberikan tegangan sebesar 1 mV? Panjang permukaan kontak adalah 1 cm. Pada medan berapa arus searah Josephson akan mengalami perubahan tanda untuk pertamakalinya?

14.7.6. Lebar  $E_g$  dari energi kekosongan dari gas elektron suatu bahan superkonduktor yang bergantung terhadap temperatur: Pada  $T = 0$  harga  $E_{g0} \sim 3,5kT_0$  adalah terbesar. Untuk keadaan mendekati temperatur lompat  $T_0$  (untuk  $B = 0$ ), harganya akan menurun cepat dan akan lenyap seluruhnya pada  $T = T_0$ . Pada  $T = T_0$  tidak akan didapat perbedaan antara superkonduktor (keadaan *s*) dan keadaan normal *n*. Bandingkan proses perubahan  $s \leftrightarrow n$  dalam keadaan terdapat medan magnet dan tidak, seperti halnya dapat dibandingkan antara air dan uap. Bandingkan pula harga- harga  $G$ ,  $H$ ,  $S$  untuk masing-masing keadaan, dengan fase yang berbeda. Bagaimana kelakuan  $H_n$  dan  $H_s$ ,  $G_n$  dan  $G_s$  dan  $S_n$  dan  $S_s$  pada  $T = T_0$ ? Apakah terdapat kelakuan yang mirip untuk kasus penguapan? Perhatikan kembali batas kurva mendidih! Ehrenfest mendefinisikan transisi fase menjadi orde 1,2 dan 3: Pada transisi orde pertama  $H$  membuat 'lompatan', pada transisi orde kedua hanya terdapat lekukan sedikit ('ketidakstabilan' turunan pertama), pada transisi orde ketiga, pertama turunan kedua dari  $H$  tidak stabil, dst. Orde ke berapa transisi yang didiskusikan ini? Bagaimana dengan panas jenis spesifik, khususnya pada tekanan konstan, pada transisi orde berapa? Bagaimana dengan entropi? Dalam kasus apa akan muncul perpindahan panas 'laten'? Kapan pemanasan ekstrim

dan pendinginan ekstrim dimungkinkan dan kapan pembentukan tetesan dimungkinkan?

14.7.7. Seperti ditemukan pada soal 14.7.6, keadaan superkonduktor dan normal, untuk keadaan tanpa medan, pada titik transisi keadaan  $T_0$  adalah identik. Pada  $T = T_0$  haruslah didapat  $S_n = S_s = S_0$  (hukum ketiga). Untuk temperatur sembarang berlaku:

$$S(T) = S_0 + \int_0^T \frac{c}{T} dT$$

Mengapa? Konduktor  $s$  dan  $n$  dibedakan hanya dari keadaan gas elektronnya, yaitu karena keberadaan energi kekosongan dan pengaruh lajutnya. Gambarkan distribusi energi untuk kedua macam konduktor untuk temperatur  $T$ . Perhatikan 'penurunan' energi kekosongan dengan bertambahnya  $T$ . Berapa besar  $c_n$  (bandingkan dengan teori Sommerfeld untuk gas Fermi). Apakah rumusan  $c_n = \gamma T$  dapat diterima dan apa artinya  $\gamma$ ? Apakah  $c_s$  lebih kecil atau lebih besar untuk a)  $T = 0$ ; b)  $T \sim T_0$ ? Bagaimana bentuk  $c_s(T)$  untuk energi kekosongan konstan? Seringkali  $c_s$  dirumuskan sebagai berikut:  $c_s = a T^3$ . Apakah rumusan ini berhubungan dengan panas Debye dari kisi? Bagaimana hubungan  $a$  dan  $\gamma$  agar transisi fase pada  $T_0$  adalah transisi orde kedua?

14.7.8. Dengan jawaban soal 14.7.7 diskusikan batas kurva antara penghantar superkonduktor dan penghantar normal dalam diagram  $B - T$ . Bagaimana pengaruh khususnya kasus kurva bermuara pada sumbu  $B$  dan  $T$ ? Apakah kurva batas akan terbentuk parabola? Apa yang harus diukur sehingga besaran-besaran yang digunakan pada soal 14.7.6 dan 14.7.8 dapat diketahui? a) jika dipastikan bahwa kurva batas berbentuk parabola, b) jika kepastian ini tidak ada?

## Bab 15

# Teori Relativitas

### 15.1 Sistem Acuan

#### 15.1.1 Adakah Keadaan Diam Absolut?

Gerak adalah perubahan posisi: posisi selalu *relatif terhadap sesuatu yang diketahui*. Maka gerak adalah *relatif terhadap sesuatu*. Kesimpulan dan konsekuensi pernyataan ini diperoleh dalam waktu yang lama, yaitu sejak dari zaman Kopernikus hingga Einstein dan bahwa baik bumi maupun benda langit lainnya bukan merupakan titik acuan absolut yang diam.

Dua pengamat yang bergerak lurus beraturan satu sama lain, masing-masing pengamat mengira bahwa masing-masing mereka berada dalam keadaan diam. Suatu kesimpulan terhadap kejadian seperti ini dapat diketahui atau diperbaiki secara eksperimen, jika dibelakang hari terdapat kesalahan. Banyak contoh-contoh peristiwa yang berhubungan dengan pernyataan di atas dapat diamati di sekeliling kita. Cari peristiwa-peristiwa eksperimen seperti di atas dan cari pula jalan ke luarnya, seperti yang telah dibuat oleh Galilei sebelumnya. Dapat disimpulkan bahwa semua eksperimen mekanika yang dibuat di dalam dua sistem acuan haruslah berlangsung persis sama. Dasarnya sangat umum adalah: Semua peristiwa mekanika dapat diturunkan dari aksioma Newton dan penjelasannya sama sekali bukan berdasarkan kecepatan, melainkan menggunakan percepatan; karenanya dapat dibayangkan dengan mudah, apakah seseorang mengalami percepatan

atau tidak. Hal ini dapat diketahui dengan adanya gaya-gaya inersial. Kecepatan berperan penting untuk kasus di mana gaya-gaya bergantung kecepatan, yaitu seperti gaya tahanan udara atau gaya gesek; kecepatan di sini berarti sebagai kecepatan relatif antara dua benda. Apakah 'angin bergerak dengan sendirinya' atau apakah ia hanya 'angin yang berjalan', interaksi yang terdapat pada sistem demikian tidak mempunyai peran penting. Analog dengan efek Doppler di dalam akustik, yaitu cukup hanya memperhatikan kecepatan antara dua benda, yaitu sumber bunyi, pendengar dan udara (lihat § 4.3.5).

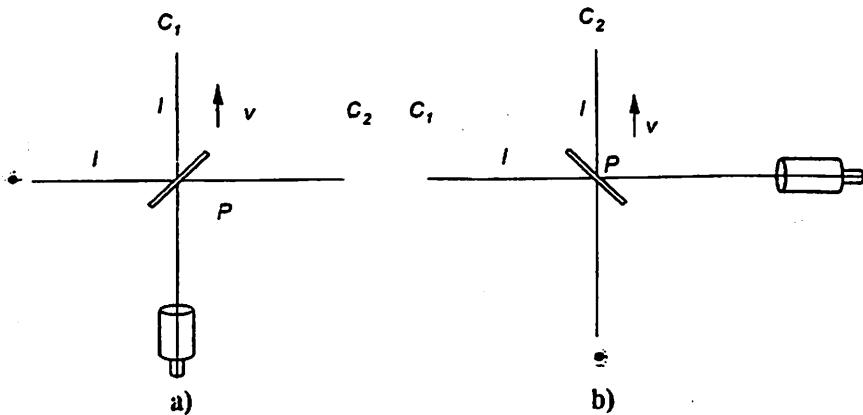
Apakah eksperimen optik dan elektromagnetik demikian kurang sensitif atau tidak berguna untuk meramalkan adanya gerak absolut suatu sistem, di mana gerak terjadi, pada mulanya tidak dimengerti. Hingga tahun 1900 orang meyakini bahwa cahaya adalah mirip dengan suara yang merambat di dalam materi, yaitu eter, jika cahaya digambarkan sebagai peristiwa getaran atau vibrasi, mustilah ada sesuatu yang bergetar. eter ini mustilah mempunyai kerapatan yang sangat kecil, mengisi seluruh jagad raya, kecuali mungkin pada benda-benda yang tidak tembus cahaya. Dengan segala macam alasan yang bertolak belakang ini telah didefinisikan apa yang disebut 'sistem absolut diam', yaitu sesuatu dimana benda itu terdapat. 'Gerak absolut', yaitu gerak terhadap eter, kemudian dapat dibuktikan kekeliruannya melalui percobaan dengan menggunakan metode optik.

### 15.1.2. Percobaan Michelson

Dari dua orang perenang yang jitu salah satunya berenang melintang menyeberangi sungai dan balik tepian semula kembali, sedangkan perenang lainnya mengarungi sungai berlawanan dengan arah arus dengan jarak tempuh yang sama dan kembali ke tepian semula. Perenang pertama menang, karena perbedaan waktu tempuhnya yang lebih singkat, yaitu:

$$\Delta t = \frac{L}{c} \frac{v^2}{c^2}, \quad (15.1)$$

jika keduanya berenang dengan kecepatan sama, yaitu  $c$  (relatif terhadap kecepatan air!) dan sungai mengalir dengan kecepatan



Gambar 15.1: a dan b. Percobaan Michelson, pembuktian gerakan bumi terhadap eter yang diam.

$v$  (lihat soal 1.2.10). Jika kedua perenang diganti oleh berkas cahaya, air diganti dengan eter dan tepian sungai dengan bumi (atau laboratorium tempat percobaan dilakukan), maka akan diperoleh analogi yang setara. Pengukuran perbedaan waktu seperti di atas dapat digunakan untuk mengetahui kecepatan  $v$ , dengan menganggap eter melalui bumi atau cahaya melalui eter. Dalam hal ini karena bumi bergerak mengelilingi matahari pada lintasannya, dengan kecepatan yang berbeda (perbedaan kurang lebih 60 km/det), maka perbedaan waktu tersebut haruslah identik dengan perbedaan waktu musim dingin atau panas.

Perbedaan waktu dalam orde yang dipertanyakan dapat diukur secara optis, yaitu sebagai perbedaan lintasan optik antara dua berkas cahaya yang ditangkap oleh sebuah layar interferensi. Percobaan dilakukan sebagai berikut: Satu berkas cahaya yang dijatuhkan pada suatu

cermin yang dapat ditembus cahaya sebagian sehingga membagi dua cahaya koheren yang dipantulkan dan yang diteruskan saling tegak lurus dan keduanya, analog seperti dua perenang di atas, masing-masing dipantulkan kembali pada arah lintasan semula dan keduanya disatukan kembali pada sebuah layar interferensi (gbr. [refg15.1]). Dengan 'panjang lengan' (panjang lintasan cahaya) ditentukan sebesar 25 m memberikan perbedaan lintasan optik antara kedua berkas cahaya tersebut sebesar setengah panjang gelombang cahaya hijau yang digunakan ( $\lambda_{hijau} = 500\text{nm}$ ), sehingga jelas terlihat bahwa terjadi interferensi dengan intensitas saling menghilangkan. Perbedaan lintasan optik yang sebanding dengan perbedaan waktu yang diharapkan rupanya tidak sama, baik pada musim dingin maupun pada musim panas. Hasil yang 'negatif' ini merupakan tema diskusi panjang dan merupakan salah satu pembuktian terbaik dari seluruh konsep fisika yang ada.

Tidak ada kesalahan eksperimen, sehingga menghasilkan hasil percobaan Michelson yang negatif untuk menjelaskannya melalui pertolongan hipotesa. Seandainya rambatan cahaya melalui gerak sumbernya dapat ditentukan (seperti halnya dari hipotesa Newton tentang korpuskel yang mengandung penolakan secara implisit tentang adanya eter), maka untuk suatu sumber yang terdapat di bumi tidak akan berpengaruh sama sekali. Percobaan Michelson juga telah dicoba dengan menggunakan cahaya bintang, hasilnya tetap negatif.

Hal terpenting adalah 'mengenal kembali hipotesa' adanya eter. Seandainya eter yang berada di dekat bumi, melaluinya atau ikut terkikis oleh atmosfir, maka tidak akan terbukti adanya gerak relatif antara labor tempat dilakukan percobaan dan eter. Seandainya dianggap bahwa udara juga mengandung eter, berdasarkan percobaan Fizeau dapat dibuktikan ketidakbenarannya. Dari percobaan ini dapat dihitung kecepatan cahaya di dalam udara yang mengalir. Disimpulkan (dalam sudut pandang adanya eter), bahwa benda membawa serta eter, akan tetapi tidak sempurna, bergantung dari indeks biasnya, dengan perkataan lain, semakin besar indeks biasnya, semakin baik eter ikut

'terbawa'. Udara dengan indeks bias 1 tidak menunjukkan suatu keadaan ikut sertanya eter.

Suatu penjelasan yang didasari eksperimen adalah berasal dari Lorentz dan Fitzgerald. Dari hasil percobaannya disimpulkan bahwa perbedaan waktu yang diharapkan dari perbedaan waktu tempuh antara kedua 'lengan' interferometer haruslah terkompensasi secara eksak, karena lengan yang letaknya berlawanan dengan 'angin eter' akan menghasilkan waktu tempuh cahaya lebih panjang dibandingkan dengan lengan yang berlawanan arah angin eter dan selisih kedua waktu tempuh tersebut justru saling mengkompensasi satu sama lain<sup>1</sup>. Dengan mengubah posisi peralatan, yaitu memiringkan lintasan cahaya, perpendekan waktu ini haruslah terjadi pada lengan lain. Hal ini berbunyi seolah secara 'ad hoc' sebagai spekulasi semata, akan tetapi, kenyataannya Lorentz dapat membuktikan persis sama dengan kelakuan sistem muatan listrik, yaitu pada arah gerak diperoleh waktu tempuh yang lebih singkat sebesar perbedaan waktu yang dicari. Dari percobaan ini hal penting yang tidak dapat ditolak dan dapat diambil sebagai kesimpulan adalah bahwa materi seluruhnya terdiri dari muatan, agar kelakuan tersebut dapat mempunyai ukuran untuk dapat dipostulasikan. Akan tetapi dalam hal ini patut diambil hikmah, bahwa orang tidak kehilangan kepercayaan akan keanehan tersebut, bahwa prilaku manusia dengan segala kelengkapan yang ada padanya dapat begitu saja dimanipulir oleh 'alam' dengan 'trick'-nya yang mencoba 'menutupi kebeharan' yang dibuat oleh kita tentang adanya keadaan gerak absolut.

### 15.1.3 Prinsip Relatif

Hipotesa penolong dari Lorentz digambarkan orang sebagai 'jeritan kematian' dari eter. Einstein mengutipnya dan merumuskannya kembali dalam kerangka yang lebih luas, sehingga pengertian-pengertian dan istilah yang bertolak belakang tentang adanya eter

1) Artinya misalkan waktu tempuh pada pertama (searah) dan kedua (berlawanan arah) masing-masing  $t_1$  dan  $t_2$ . Perbedaan waktu tempuh keduanya  $\Delta t = t_2 - t_1$  ( $t_2 > t_1$ ). Maka  $t_1 = t_2 - \Delta t$  dan  $t_2 = t_1 + \Delta t$ .

lenyap sama sekali. Hal yang menjadi titik tolak rumusan Einstein dapat dibagi dalam dua postulasi penting yang didasari pada pengalaman, seperti yang telah dibahas sebelumnya, yaitu:

**1. Prinsip relativitas: Tidak ada satu media untuk mengukur kecepatan.**

Dalam hal ini terdapat rumusan identitas hukum-hukum mekanika dan peristiwanya di dalam sistem inersial, juga secara umum identitas hukum-hukum alam lainnya yang terdapat di dalam sistem yang bergerak beraturan satu sama lain (apakah sebagai sistem inersial atau tidak) dan khususnya berhubungan dengan hasil negatif yang diperoleh dari percobaan Michelson. Tentunya perlakuan terhadap persoalan-persoalan 'yang telah ada' dilakukan secara 'brutal' dan diselesaikan menurut caranya.

**2. Kecepatan Cahaya adalah tidak bergantung pada gerak sumbernya.**

Hal ini telah dibuktikan berdasarkan percobaan Michelson dengan menggunakan sumber cahaya bintang yang juga menghasilkan hasil yang negatif terhadap adanya eter, seperti halnya jika menggunakan sumbe cahaya yang berasal dari bumi sendiri.

Pengamatan dari dua sumber cahaya yang berasal dari bintang menghasilkan kesimpulan yang sama. Dari 1 dan 2 diperoleh

Cahaya merambat di dalam sistem inersial (tidak bergantung macam sumbernya) pada semua arah dengan kecepatan yang sama dengan kecepatan di vakum, yaitu  $3 \cdot 10^8 \text{ m det}^{-1}$ .

Keberhasilan sebagai hasil pemikiran lebih lanjut yang diperoleh dari premis sederhana ini adalah sangat mengagumkan. Seluruh teori relativitas khusus berlandas dari kesimpulan ini. Untuk memperoleh secara kuantitatif keberhasilan ini akan dibahas beberapa media ilustrasi di bawah ini.

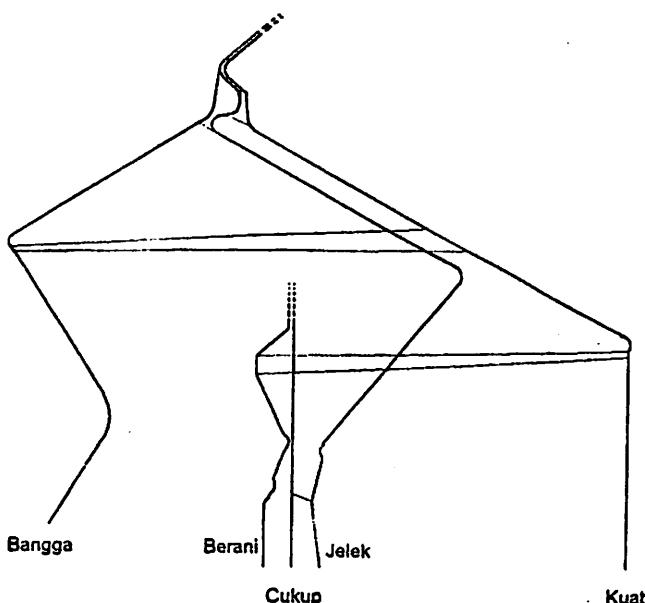
#### **15.1.4 Titik Kejadian**

Alam semesta tidak terdiri dari susunan statistik benda-benda, dalam arti secara sembarang, melainkan adalah suatu proses.

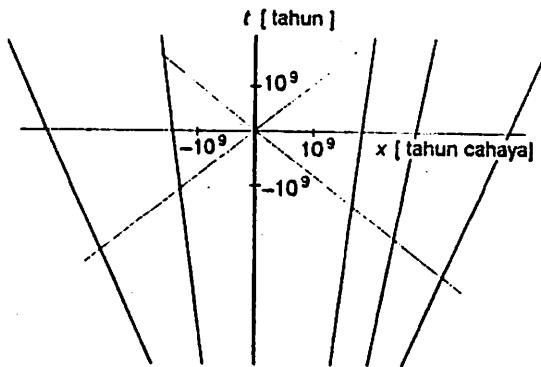
Melalui hubungan antara keadaan masa lampau dan masa depan akan diperoleh gambaran tentang alam semesta yang sempurna dan dapat dimengerti. Satuan dasar gambaran ini bukan 'benda', melainkan 'kejadian', lebih tepat lagi adalah *titik kejadian*. Suatu titik kejadian adalah suatu kejadian yang terdapat di dalam ruang dan waktu yang sangat kecil. Apa yang disebut sebagai sangat kecil adalah bergantung pada dari sudut pandang praktis: Detonasi bom hidrogen di Hiroshima adalah kejadian titik bagi para Astronom, barangkali juga bagian para geofisikawan tetapi bukan bagi fisikawan yang mempelajari atom.

Sebuah benda sesungguhnya hanya merupakan suatu hasil dari titik kejadian, yaitu kejadian yang terjadi di dan pada atau di sekitarnya. Penjumlahan semua titik kejadian adalah *garis semesta* benda. Apabila benda tidak berperan serta atau dengan perkataan lain benda tidak mengalami interaksi dengan benda lainnya, maka hingga sebatas pengertian ini dapat dikatakan bahwa benda tersebut tidak ada. Kebanyakan pandangan demikian sangat berguna untuk mengerti secara fisika kuantum dan ide-ide lainnya. Hal ini bukan berarti bahwa 'bulan sebenarnya tidak ada jika tidak seorang pun melihatnya; karena interaksinya dengan air laut misalnya terjadi tiada hentihentinya.

Titik kejadian yang kebanyakan mengesankan saya kebanyakan berkenaan dengan benda-benda yang terdapat di dalam badan saya, yang selalu memenuhi ruang yang terbatas dalam sudut pandang kosmis dan ruang waktu kurang lebih dalam daerah yang lebih sempit. Perbandingan kedua 'renggangan' ini tentunya menghasilkan arti jika gambaran tersebut dibuat dalam skala ruang dan waktu. Untuk persoalan-persoalan kosmik disarankan menggunakan satuan skala waktu, misalnya satu tahun, untuk ruang adalah 1 *tahun cahaya*. Apa yang hingga saat ini kita ketahui atau berpendapat tentang kosmos adalah dengan format kuadrat yang ukuran panjangnya sama dengan  $10^{10}$  satuan panjang (lihat § 15.4) dan 'garis semesta' kebanyakan objek paling tinggi mempunyai derajat 1 dimensi.



Gambar 15.2: Potongan kecil ruang-waktu: garis tebal menggambarkan garis semesta seseorang, titik-titik adalah berasal dari suatu objek logam, garis tipis berasal dari gelombang elektromagnetik. Dengan dasar teknis perbedaan kecepatan diabaikan. Bacalah sejarah Anda!



Gambar 15.3: Potongan besar dari ruang-waktu. Apakah dan bagaimana kenyataannya garis semesta melengkung masih dalam tanda tanya.

Semua gambaran di atas secara formal dan sederhana dapat digambarkan sebagai sebuah peta: Waktu sebagai 'dimensi keempat'

pada gambar ini bukan sesuatu yang misterius. Untuk menggambarnya di atas kertas paling tidak dikorbankan dua dimensi ruang. Suatu gambaran tersebut (harus diketahui: bahwa gambar ini dibuat oleh saya, prinsip relativitas menurut anggapan pribadi saya adalah benar) maka akan diperoleh 'garis semesta' atau 'garis di sini' (apa yang tergambar di sini adalah peran dari masa lalu dan yang akan datang). Selanjutnya, terdapat 'garis masa kini' yang mengandung semua kejadian yang terjadi 'sekarang', walaupun mungkin juga terjadi di sembarang tempat di alam semesta.

Seorang pengamat mempunyai 'garis di sininya' terletak di tempat yang berbeda. Maka terdapat keadaan relatif terhadap garis masa kini saya, jika ia bergerak relatif ke 'arah' saya dengan kecepatan  $v$ , maka garis tersebut dengan mudah dapat dibayangkan akan sedikit miring, membentuk sudut dengan tangen  $v/c$ . Pengamat lainnya, jika ia menaruh gambaran dirinya sendiri, maka sumbu 'disininya' terletak tegak lurus, sedangkan 'garis di sini' saya digambarkan sedikit miring.

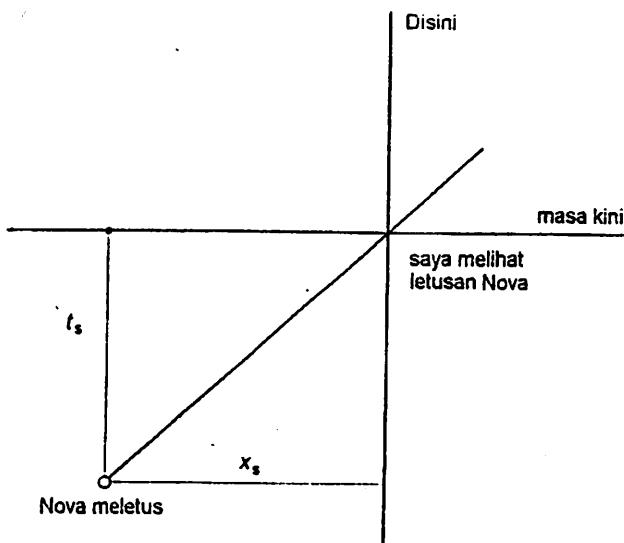
Semua kejadian yang sekarang saya *lihat*, terletak pada dua garis, dan terletak pada sudut  $45^\circ$  antara 'garis di sini dan masa kini' (sebagai titik acuan sistem koordinat) dan garis-garis tersebut meluncur ke kanan dan kiri bawah ke arah bawah. Jika saya mengirimkan cahaya atau gelombang radio yang tidak terarah pada garis 'di sini-sekarang' maka titik kejadian pertemuannya terjadi pada sembarang titik yang dibentuk oleh dua garis membentuk sudut  $45^\circ$  ke kanan dan kiri ke arah atas. Jika ditambahkan dimensi ruang pada sistem ini, maka terdapat garis yang membentuk sudut  $45^\circ$  dengan sumbu rotasi terhadap 'garis di sini' yang merupakan kerucut ganda. oleh karena itu, orang juga membicarakan secara umum tentang 'kerucut cahaya'. Bentuk bangun sistem ruang waktu ini tidak harus disalah artikan dengan kerucut cahaya ruang sebenarnya.

### 15.1.5 Pendataan Ulang

Dianggap bahwa saya mengamati (dan di sini) jatuhnya Nova sekarang (gbr. [15.4]), dengan perkataan lain: Pada  $x = 0, t = 0$  terdapat titik kejadian sebagai berikut: 'gelombang cahaya yang

diemisikan pada saat kejadian jatuhnya Nova sampai ke bumi'. Untuk menyusun semua titik kejadian 'jatuhnya Nova' harus saya ketahui salah satu parameter penentu  $x_s$  dan  $t^s$ , jarak Nova dari sistem tata surya. Kemudian  $t^s$  dapat ditentukan secara grafis, bahwa titik  $(x_s, t_s)$  terletak  $45^\circ$  pada kerucut cahaya. Dengan perkataan lain: Kejadian telah berlangsung sekian lamanya, seperti letaknya sejauh 1 tahun cahaya.

Setiap pengamat harus melalui ('memutari') jalan pembalikan data untuk menyusun kejadian yang jauh dalam skema  $(x, t)$ . Seperti halnya apa yang ditunjukkan oleh prinsip relativitas, khususnya untuk



Gambar 15.4: Pendataan ulang suatu kejadian digambarkan pada sumbu 'di sini masa kini'.

kecepatan cahaya konstan, setiap pengamat akan menyusun data tersebut dengan cara yang berbeda.

Penggunaan cahaya atau sinyal radio dapat dipakai secara sembarang, tetapi kelebihan praktis masing-masing telah diketahui dan

ketidaktentuan hasil percobaan Michelson pada dasarnya justru memudahkan persoalan. Hal yang berbahaya yang dapat mempengaruhi susunan secara langsung tidak terletak pada keadaan gerak pengamat atau sumber cahaya, karena cahaya yang merambat ke segala arah di dalam segala macam sistem dengan kecepatan yang sama, yaitu  $c$ .

## 15.2 Mekanika Relativistik

### 15.2.1 Relativitas Kesamaan

Seorang pengamat  $B$  bergerak dengan kecepatan konstan  $v$  relatif terhadap saya ke arah 'kanan' (lihat gbr. [15.5]). Sang pengamat juga pengamati kejadian yang jauh melalui pendataan ulang dengan pertolongan cahaya atau sinyal radio.

Pandang titik kejadian berikut:

$D$  : Sebuah Nova mengalami letusan 10 tahun cahaya ke arah 'kiri' dari  $B$ ;

$E$  : Sebuah Nova mengalami letusan 10 tahun cahaya ke arah 'kanan' dari  $B$ ;

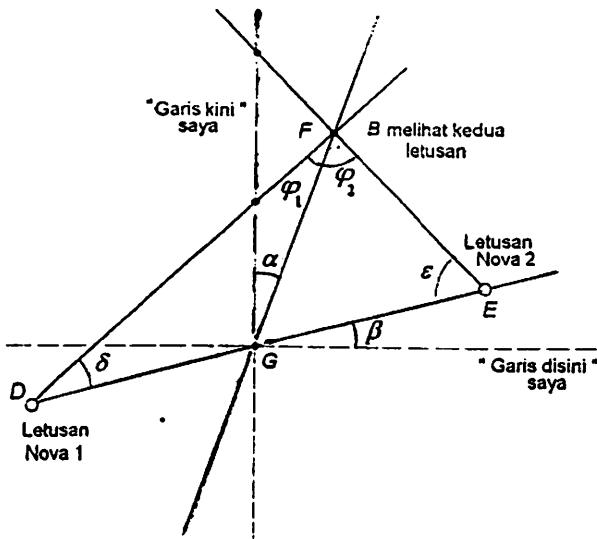
$F$  :  $B$  melihat kedua peristiwa letusan tersebut.

Apabila  $B$  melihat kedua-dua letusan yang terjadi secara bersamaan dan keduanya terletak pada jarak yang sama darinya, bagi  $B$  keduanya terjadi secara bersamaan sehingga terdefinisi pada sumbu masa kini  $DE$  sang pengamat. Kejadian tersebut terletak berlawanan dengan sumbu masa kini kita, membentuk sudut  $\beta$  berlawanan arah jarum jam ( $\beta$  dapat terletak pada titik nol atau negatif) dan memotong sumbu masa kini  $B$  di titik  $G$ . Karena kedua Nova harus terletak sama jauh terhadap  $B$ , maka  $GD = GE$ . Seperti telah diketahui sumbu 'masa kini'  $B$  dan sumbu masa kini kita terletak (vertikal) membentuk sudut  $\alpha$  dan mempunyai harga  $\tan \alpha = v/c$  sesuai dengan arah putaran jarum jam (diketahui bahwa  $B$  terletak di 'kanan'). Sudut ini lebih jelas terlihat, karena 'garis di sini' dan 'masa kini'<sup>2)</sup> saya tergambaran. 'Garis di sini' saya tentu saja dapat terletak

2) Digunakan istilah "garis disini" atau disingkat "disini" untuk menjelaskan garis yang menyatakan tempat atau posisi, sedangkan "garis masa kini" atau "kini" menyatakan waktu sekarang.

pada posisi yang berbeda. Perhatikan pula bahwa garis putus-putus pada gbr. [15.5] bukanlah 'garis semesta' dari kedua Nova: garis tersebut dapat pula menggambarkan suatu gerak sembarang relatif terhadap sang pengamat  $B$  dan saya. Hal yang penting adalah titik kejadian letusan Nova di  $D$  dan  $E$  dan kenyataan bahwa geraknya tidak berpengaruh terhadap rambatan cahaya.

Akan ditentukan sudut  $\beta$ . Berdasarkan ramalan bahwa kedua Nova pada saat letusannya terletak pada jarak yang sama jauh terhadap  $B$ , maka  $EG = GD$ . Dalam hal ini  $DF$  dan  $EF$  sebagai garis semesta cahaya, masing-masing membentuk sudut  $\pm 45^\circ$  dan terletak saling tegak lurus satu sama lain. Jika  $DEF$  adalah benar-benar segitiga bersudut lancip, maka menurut Thales dapat digambarkan di dalam sebuah setengah lingkaran dengan titik pusat terletak di  $G$ .  $GF$  tidak lain adalah jari-jari setengah lingkaran yang sama panjang dengan  $EG$  dan  $DG$ . Dengan demikian, segitiga  $GFE$  mempunyai kemiring yang



Gambar 15.5: Relativitas kesamaan. Seorang pengamat  $B$  yang bergerak relatif terhadap saya. Bukan hanya 'garis di sini' sang pengamat yang terletak berbeda terhadap 'garis di sini dan masa kini saya...', melainkan juga garis masa kininya, sama atau  $\phi_2 = \epsilon$  dan  $\alpha = \alpha_2 - 45^\circ = \beta = \epsilon - 45^\circ$  sehingga

$$\beta = \alpha$$

Pendataan ulang demikian dapat juga digunakan oleh  $B$ , seperti halnya juga benar apabila saya gunakan. Diperoleh bahwa 'garis masa kini' kita terletak pada sudut yang sama, tetapi pada arah putaran yang berlawanan terhadap 'garis di sini' kita.

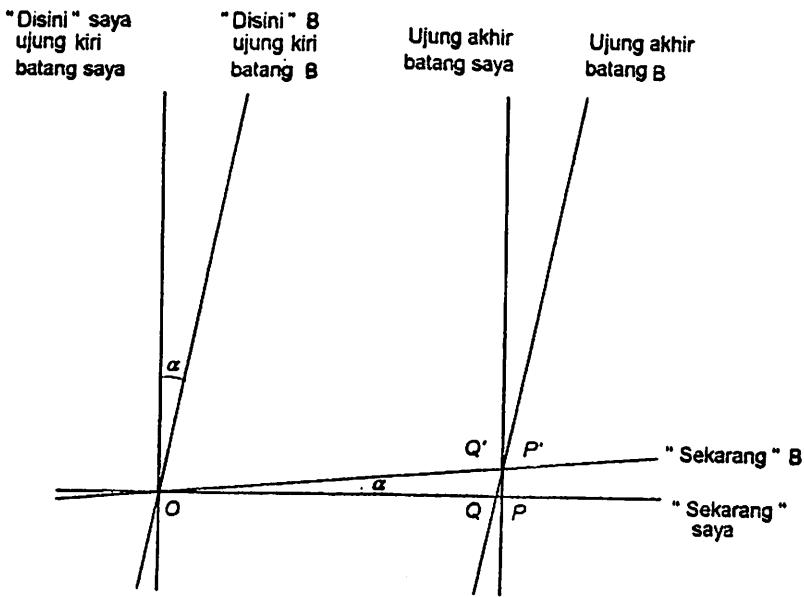
Dua kejadian seperti letusan Nova di atas yang dapat diamati secara bersamaan oleh  $B$ , bagi saya tidak akan terjadi secara bersamaan. Semua adalah kesamaan, semua kalimat dengan kata 'sebagai', misalnya: sejauh peristiwa berhubungan dengan kejadian, yang terjadi di tempat yang berbeda, hanya terdapat rasa atau kegunaan, apabila diberikan pula sistem acuan, di mana semua kejadian dapat digambarkan dalam kesamaannya.

Pengamatan  $B$  juga akan mengukur kecepatan cahaya pada segala arah sama dengan  $c$  (lihat percobaan Michelson !) dan pada penurunan ini tidak digunakan. Sebaliknya, dari kecepatan cahaya yang konstan ini dapat pula diketahui, bahwa ukuran panjang dan waktu yang digunakan oleh  $B$ , jika  $B$  saya gambarkan pada sistem saya, salah satunya dalam ukuran panjang yang sama ( $FEG$  adalah segitiga sama sisi !), adalah tidak sama dengan satuan yang saya gunakan di sistem saya.

### 15.2.2 Perbandingan Skala Panjang

Tanpa pembatasan umum, misalnya untuk anggapan berikut. Bahwa  $B$  dan saya bertemu di  $O$ , jam kami dibuat sama-sama nol dan kami sama-sama memiliki ujung paling kiri batang (misalnya batang sangat panjang). Kedua batang haruslah dapat berulang secara identik dan menggambarkan satuan panjang.

Dari sistem acuan  $B$  terhadap kita, yang belum diketahui hanya panjang satuan pada sumbu sistem  $B$ , yaitu posisi titik kejadian yang digambarkan dalam sekema saya: 'sebuah jam yang terdapat pada  $B$ , menunjukkan angka 1' dan 'sebuah jam yang terdapat di ujung paling kanan dari  $B$  dengan satuan skala referensi menunjukkan angka 0'.



Gambar 15.6: Panjang kontraksi. Dua pengamat masing-masing melihat skala, yang satu melihat skala lainnya lebih pendek.

Selanjutnya akan dibahas kedua titik kejadian ini. Ujung paling kanan dari batang  $B$  menunjukkan garis semesta  $P P'$ , yang melewati  $P$ , sebagai ('sebagainya' saya) jam saya yang menunjukkan angka  $O$  dan di  $P'$ , sebagai ('sebagainya'  $B$ ) jam  $B$  yang tadinya menunjukkan angka  $O$ .  $B$  dan saya mempunyai pendapat yang sangat berbeda tentang hal tersebut, di mana saya berada pada ujung paling kanan 'masa kini': saya katakan 'di  $P$ ', tetapi  $B$  mengatakan 'di  $P'$ , keduanya sama-sama benar, karena pengertian kesamaan kami berbeda.

Panjang normal saya menunjukkan arah yang sama seperti halnya  $B$  dan ujung paling kanan batang saya menggambarkan garis semesta  $QQ'$  yang memotong sumbu 'masa kini' keduanya yang juga memotong titik-titik  $Q$  dan  $Q'$

Karena sudah diperoleh hal yang mengejutkan, dalam hal ini tidak akan dianggap bahwa  $P = Q$ . Seandainya demikian, maka panjang

batang  $B$  persis akan sama dengan batang saya, sementara panjang batang saya bagia  $B$  akan lebih pendek dibandingkan dengan batangnya sendiri ( $Q'$  sebelah kiri dari  $P'$ ). Secara fisis kedua batang adalah identik. Seandainya dianggap bahwa  $P = Q$ , yaitu titik tengah, adalah sebagai acuan inersial untuk masing-masing sistem ( $B$  dan saya). Misalnya pemilihan sistem acuan ini dapat dianggap sebagai pemilihan terbaik untuk menjelaskan, bahwa sebuah batang dengan bentuk tertentu terlihat lebih panjang dan pemendekan yang terlihat pada sistem lain adalah pengaruh dari geraknya terhadap suatu 'sistem sebenarnya yang diam'.

Terdapat satu jalan untuk mengatasi pernyataan yang bertolak belakang terhadap prinsip relativitas: Situasi haruslah sedemikian, seperti ditunjukkan pada gbr. [15.6], masing-masing pengamat harus menemukan bahwa batang pengamat lainnya mengalami pemendekan sebesar faktor  $f$  dibandingkan kepunyaannya sendiri, sehingga haruslah

$$f = \frac{OP}{OQ} = \frac{OQ'}{OP'}, \quad (15.2)$$

dengan demikian juga

$$f^2 = \frac{OP \cdot OQ'}{OQ \cdot OP'} \quad (15.3)$$

Sekarang, seperti dapat dibaca secara langsung dari gbr. [15.6]:  $OQ'/OQ = \cos \alpha$  dan dari rumus sinus didapat.

$$\frac{OP}{OP'} = \frac{\sin(90^\circ - 2\alpha)}{\sin(90^\circ + \alpha)} = \frac{\cos 2\alpha}{\cos \alpha}$$

Dengan demikian dari pers[15.3] diperoleh

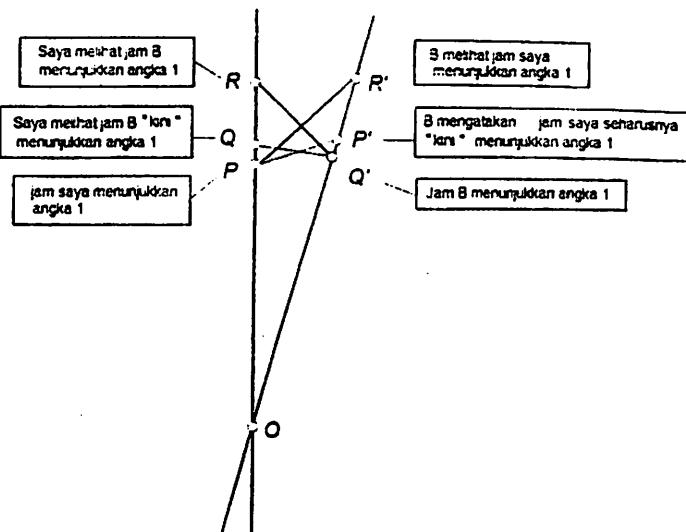
$$f = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (15.4)$$

Persamaan di atas adalah sama dengan rumus pemendekan Lorentz-Fitzgerald untuk batang yang bergerak (kontraksi Lorentz).

### 15.2.3 Perbandingan Skala Waktu (Jam)

*B* dan saya masing-masing mempunyai sebuah jam. Pada suatu pertemuan kami saling menunjukkan jam, masing-masing jam kami menunjukkan angka nol. Ketika kami saling menjauh satu sama lain, jam saya menunjukkan skala waktu angka 1, kemudian saya kirimkan kabar ke *B* melalui sinyal radio, *B* menyatakan keadaan jamnya juga sama. Gbr. [15.7] menunjukkan keadaan yang terjadi. Sesungguhnya untuk masing-masing jam terdapat tiga titik kejadian yang dapat dibedakan:

1. Jam menunjukkan angka 1.
2. Pengamat yang menjauhi menangkap sinyal radio, bahwa jam menunjukkan angka 1.



Gambar 15.7: Dilatasi waktu. Masing-masing pengamat mengamati jam pengamat lain berjalan lebih lambat dibanding jam masing-masing.

3. Perilaku yang menjauhi, menurut ramalan, bahwa ia tidak mengamati sama sekali situasi dan mengatakan: 'sekarang jam 8 saya menunjukkan angka 1 yang berbeda'

Apabila ia tidak menyatakan demikian, maka ia harus membuat rekonsstruksi titik kejadian melalui pendaraan ulang

Pandang kejadian  $O, P, Q, P', Q'$  (gbr. [15.7]), maka diperoleh argumenasi yang sama, seperti pada perbandingan skala panjang (gbr. [15.6]). Prinsip relativitas hanya benar jika setiap

$$OP = OQ'$$

$$OP = OQ'$$

dengan konsekuensi yang sama bahwa:

$$\frac{OP}{OQ} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{OQ}{OP} \quad (15.4a)$$

Hanya pengertiannya berbeda, yaitu: Setiap pengamat melihat jam pengamat lainnya yang berubah menunjukkan angka 1 seperti melihat jamnya sendiri, atau jam berjalan lebih dahulu. Peristiwa ini dianggap sebagai dilatasi waktu dalam sistem yang bergerak, seolah posisi justru sebaliknya dibanding dengan dilatasi panjang. Formulasi berikut mungkin akan membuat analogi ini lebih jelas:

Antara dua titik kejadian seorang pengamat mengukur 'jarak waktu' lebih pendek (sejauh memungkinkan) yang ia lalui secara langsung, yaitu untuk mereka yang keduanya berada 'di sini'.

Antara dua titik kejadian seorang pengamat yang mempunyai 'jarak waktu' lebih pendek, baginya waktu berlangsung bersamaan (karena ukuran panjang baginya lebih panjang).

Kedua jam secara fisis tentunya sama. Dari prinsip konstruksinya (mekanis, piezoelektrik, molekular optik) bukan lagi menjadi alasan. Terjadinya semua proses-proses fisis yang berperan pada sistem, diamati dari sistem lain yang bergerak sebaliknya, akan bergerak lebih lambat. Kejadian seperti ini dapat dibuktikan secara langsung dari berbagai hal yang terjadi di sekeliling kita: Dengan pertolongan efek

Doppler transversal misalnya waktu hidup partikel meson yang berasal dari sinar kosmik, dls.

Berapa periode  $T'$  cahaya atau sinyal radio yang diukur oleh  $B$  yang bagi saya periode tersebut adalah sama dengan  $T$ ? Gbr. [15.8a] menunjukkan sederetan 'kerucut cahaya': pada gambar ini ditunjukkan bahwa setiap garis semesta menggambarkan suatu puncak gelombang, garis-garis ini mengandung kejadian- titik: 'puncak gelombang nomor  $n$  datang pada posisi  $x$ '. Terlihat bahwa  $T'$  berbeda dari  $T$  berdasarkan dua alasan:

1. Garis semesta  $B$  bagi saya adalah miring. Berdasarkan rumus sinus didapat:

$$\begin{aligned} OQ &= OP \frac{\sin 45^\circ}{\sin (45^\circ - \alpha)} \\ &= OP \frac{1}{\cos \alpha - \sin \alpha} \end{aligned}$$

Untuk perbedaan waktu dihitung hanya jarak vertikal

$$OQ \cos \alpha = OP \frac{1}{1 - \tan \alpha} = OP \frac{1}{1 - v/c},$$

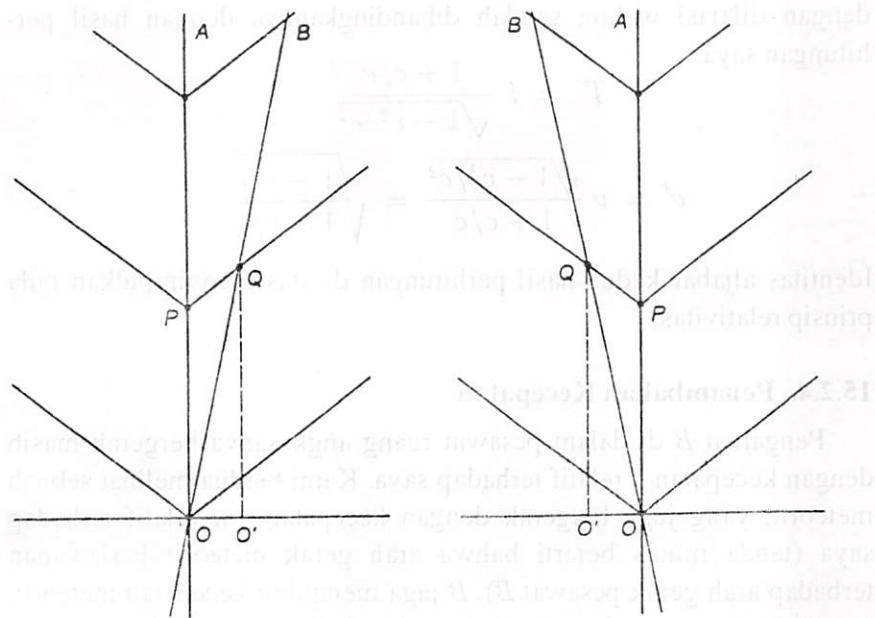
berarti bahwa

$$T' = \frac{T}{1 - v/c}$$

Persamaan ini tidak lain adalah persamaan efek Doppler normal (lihat pers. [4.64]) yang berlaku untuk  $v < c$ .

2. Satuan waktu pada sumbu  $B$  adalah lebih panjang dengan faktor  $1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ . Maka  $T'$  akan diperoleh dengan mengalihkan harga kebalikan faktor tersebut:

$$T' = T \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - v/c}.$$



Gambar 15.8: Efek Doppler untuk pengamatan yang bergerak (kiri, a) dan sumber yang bergerak (kanan, b). Hasil pergeseran frekuensi keduanya adalah sama untuk kedua perhitungan.

atau

$$\nu' = \nu \left( \frac{1 - v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) = \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}$$

Jika  $v$  tidak begitu besar dibanding kecepatan cahaya, maka

$$\nu' = \nu \left( 1 - \frac{v}{c} + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} - + \dots \right)$$

Inilah rumus yang saya buat untuk kejadian tersebut, sedangkan B menggambarkannya menurut gbr. [15.8b] dan menghasilkan perhitungan tanpa dilatasi waktu sebagai berikut:

$$T' = T \frac{\sin(135^\circ - \alpha)}{\sin 45^\circ} = T \left( 1 + \frac{v}{c} \right)$$

dengan dilatasi waktu, setelah dibandingkannya dengan hasil perhitungan saya

$$T' = T \frac{1 + v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$v' = v \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + v/c} = \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}$$

Identitas aljabar kedua hasil perhitungan di atas menyimpulkan pula prinsip relativitas.

#### 15.2.4. Penambahan Kecepatan

Pengamat  $B$  di dalam pesawat ruang angkasanya bergerak masih dengan kecepatan  $v$  relatif terhadap saya. Kami berdua melihat sebuah meteorit, yang juga bergerak dengan kecepatan  $-u$  relatif terhadap saya (tanda minus berarti bahwa arah gerak meteorit berlawanan terhadap arah gerak pesawat  $B$ ).  $B$  juga mengukur kecepatan meteorit, seperti biasanya, jarak meteorit terhadap  $B$  ditentukan pada suatu saat tertentu.

Dianggap bahwa meteorit,  $B$  dan saya telah pernah bertemu di suatu titik. Untuk mengetahui ramalan kecepatan meteorit oleh  $B$  hanya perlu diketahui, gambaran satuan jarak dan waktu pada sumbu  $B$  dan skema yang saya gambarkan, keduanya adalah sama: panjangnya dalam hal ini tidak punya peran sama sekali.

Perhatikan gbr. [15.9]. Pada titik  $R$  yang diberikan pada sumbu  $B$ ,  $B$  melihat meteorit berada pada jarak  $PR$  dan setelah ditentukan kecepatan meteorit adalah  $w$ , seperti biasa yaitu  $w = c P R/O R$  ( $c$  bergantung pada pemilihan satuan). Maka

$$w = c \frac{PR}{OR} = \frac{\sin(\alpha + \delta)}{\sin(90^\circ - \delta + \alpha)} \quad (\text{Rumus sinus})$$

$$= c \left( \frac{\sin(\alpha + \delta)}{\cos(\alpha - \delta)} \right) \quad [\sin(90^\circ - \delta + \alpha) = \cos \alpha]$$

$$= c \left( \frac{\sin \alpha \cos \delta + \sin \delta \cos \alpha}{\cos \alpha \cos \delta + \sin \delta \cos \alpha} \right) \quad \begin{pmatrix} \text{teorema} \\ \text{penambahan} \end{pmatrix} \quad (15.5)$$

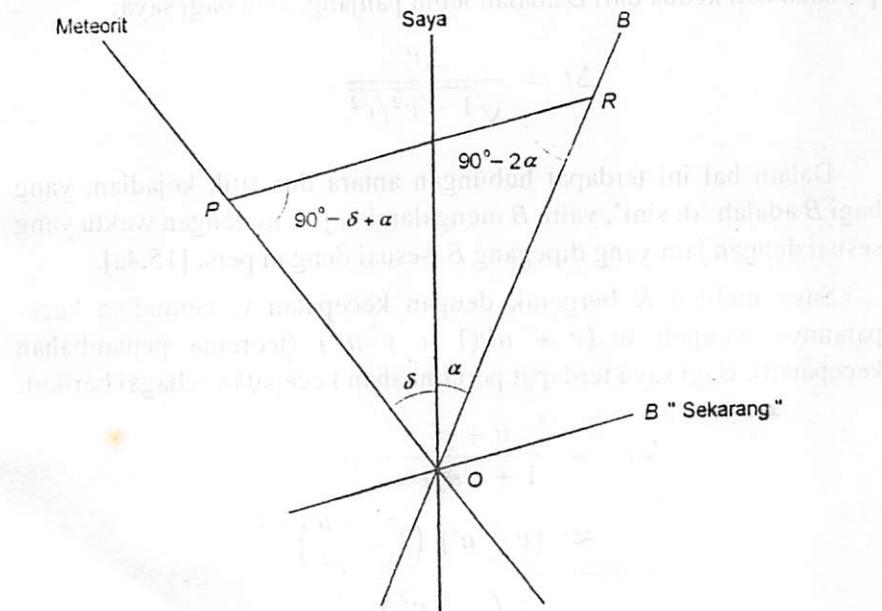
$$\begin{aligned}
 &= c \left( \frac{\tan \alpha + \tan \delta}{1 + \tan \alpha \tan \delta} \right) \quad (\cos \alpha \cos \delta \text{ disederhanakan}) \\
 &= -\frac{v + u}{1 + vu/c^2} \quad (\text{Definisi sudut } \alpha \text{ dan } \delta)
 \end{aligned}$$

$B$  tidak mengukur meteorit seperti yang diharapkan, jumlah kecepatan bukan  $-v$  dan  $-u$ , melainkan lebih kecil dengan faktor  $1/(1 + vu/c^2)$ .

Teorema penambahan ini dapat dibuktikan secara langsung melalui eksperimen, yaitu melalui percobaan yang lebih dahulu dilakukan oleh Fizeau.

Pengaruh tidak langsung yang muncul adalah bahwa kecepatan cahaya tidak dapat dicapai melalui 'penumpukan' (penambahan) sederhana kecepatan-kecepatan yang lebih kecil dari  $c$ .

Pengaruh selanjutnya adalah: Dari pers. [15.5] dengan  $u = 0$  diperoleh bahwa  $B$  mengukur kecepatan saya relatif terhadapnya



Gambar 15.9: Penambahan kecepatan.

adalah  $-v$ . Hal ini tentunya tidak mungkin jika dipandang kembali, bagaimana skala jarak dan waktu  $B$  berubah. Diperoleh kenyataan yang juga tidak dapat digunakan dimana pun.  $B$  mengukur kecepatan cahaya sama, seperti halnya kecepatan cahaya yang diperoleh berdasarkan pengukuran yang saya lakukan, yaitu  $c$ ; seperti halnya akan diperoleh berdasarkan pers. [15.5] jika dianggap  $u = c$ . Dalam pembahasan ini juga tidak digunakan walaupun disebutkan sebagai hasil percobaan Michelson.

### 15.2.5 Pengukuran Percepatan

$B$  pada saat tertentu melihat benda  $K$  yang mulai dipercepat. Pada saat  $t'$   $B$  mengukur kecepatan  $K$  sama dengan  $O$ , setelah waktu  $B$  bergeser menjadi  $\Delta t'$ , kecepatan  $K$  yang diamatinya menjadi  $u'$ , sehingga bagi  $B$  percepatan yang dialami  $K$  adalah  $a' = u'/\Delta t'$ . Hasil pengukuran yang diperoleh  $B$  jika dibandingkan dengan saya adalah berbeda. Karena bagi saya, dua titik kejadian, yaitu pengukuran pertama dan kedua dari  $B$  adalah lebih panjang, atau bagi saya:

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Dalam hal ini terdapat hubungan antara dua titik kejadian, yang bagi  $B$  adalah 'di sini', yaitu  $B$  mengalami kejadian dengan waktu yang sesuai dengan jam yang dipegang  $B$ , sesuai dengan pers. [15.4a].

Saya melihat  $K$  bergerak dengan kecepatan  $v$ , kemudian kecepatannya menjadi  $w$  ( $v + u'/(1 + v u'^2)$  (teorema penambahan kecepatan). Bagi saya terdapat pertambahan kecepatan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\Delta w &= \frac{u + v'}{1 + v u/c^2} - v \\ &\approx (v + u') \left(1 - \frac{v u}{c^2}\right)^{3/2} \\ &\approx u' \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\end{aligned}$$

Pernyataan relativistik untuk *momentum* dapat dinyatakan berdasarkan perubahan massa:

$$p = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (15.13)$$

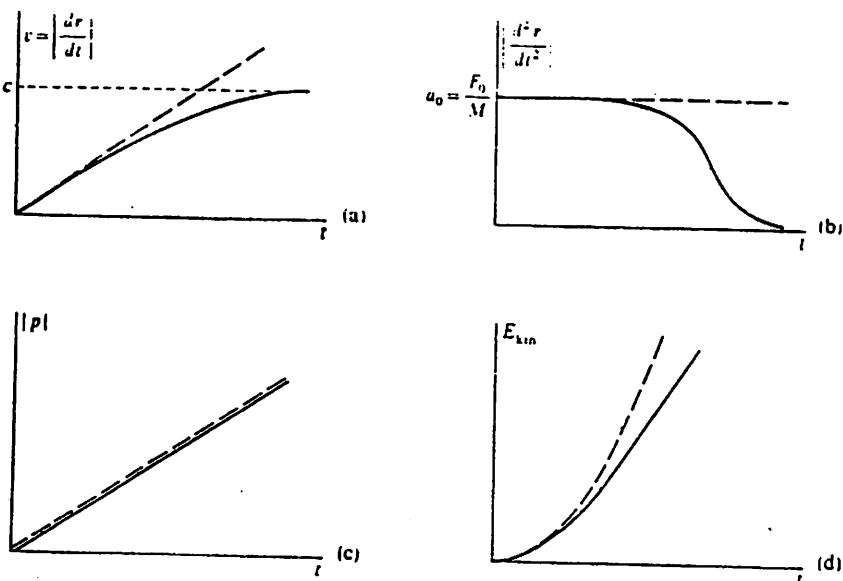
Pers. [15.12] dan [15.13] dapat disimpulkan menjadi rumusan energi yang dinyatakan dalam momentum (dan massa diam) sebagai berikut:

$$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + c^2 p^2}. \quad (15.14)$$

Pers. [15.14] ini umumnya disebut sebagai rumusan *hukum kekekalan energi relativistik*.

Penggunaan hukum kekekalan energi relativistik dalam jangkauan yang dapat diukur umumnya berguna dalam memecahkan problematik inti dan fisika partikel elementer, yaitu dalam mencari hubungan antara energi dan perubahan massa inti; salah satunya adalah membandingkan massa seluruh partikel yang terdapat di dalam inti dengan massa inti yang mengalami 'defek'. Dalam fisika partikel elementer terdapat perubahan istilah untuk massa, energi dan momentum, juga pernyataan atau rumusan-rumusan tumbukan dibanding dengan mekanika biasa. Pembuktian secara eksperimental dan penggunaan hukum kekekalan energi ini, sebagai salah satu inti terpenting dalam riset praktis, merupakan salah satu kesuksesan teori relativitas. Pemakaian rumusan-rumusan non-relativistik, khususnya dalam kedua bidang riset di atas, menimbulkan hasil yang salah.

Keberhasilan tentang ekuivalensi antara massa dan energi, kebalikan dari langkah-langkah penurunan yang diperoleh sebelumnya, adalah penuh resiko. Pembuktian lebih jauh tentang teori relativitas, selain melalui pembuktian eksperimen, untuk kasus-kasus pengamatan



Gambar 15.11: Perbandingan diagram gerak Newton (garis putus-putus) dan Einstein (relativistik, garis penuh) [dari G. Falk dan W. Ruppel].

invariansi yang akan dibahas dalam bab selanjutnya adalah jauh dari cukup.

Gbr. [15.11] menggambarkan diagram gerak di dalam medan gaya homogen berdasarkan Newton (garis putus-putus) dan mekanika relativistik Einstein (garis tebal) dari suatu sistem inersial. a) Pada teori Newton kecepatan tidak terbatas, sedangkan pada teori relativitas Einstein kecepatan tidak dapat melebihi  $c$ . b) Pada teori Newton percepatan adalah konstan, pada Einstein percepatan akan menuju nol, jika  $v = c$ . c) Pertambahan momentum untuk kedua teori adalah linier  $\lambda = F$ . Pada Newton momentum bertambah karena  $v$ , sedangkan Einstein menganggap pertambahan momentum tidak berasal dari  $v$ , karena kejemuhan  $v$  dapat dikompensasikan oleh pertambahan  $m$ . d) Energi kinetik pada Einstein hanya untuk  $v < c$ , berbentuk parabola untuk  $v = c$  dan pada  $E = pc$  menjadi berbentuk garis lurus. Diagram tidak berlaku untuk kasus di dalam medan gaya berat homogen (gaya adalah sebanding massa dan bertambah sebanding dengan massa), akan tetapi

Pernyataan relativistik untuk *momentum* dapat dinyatakan berdasarkan perubahan massa:

$$p = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (15.13)$$

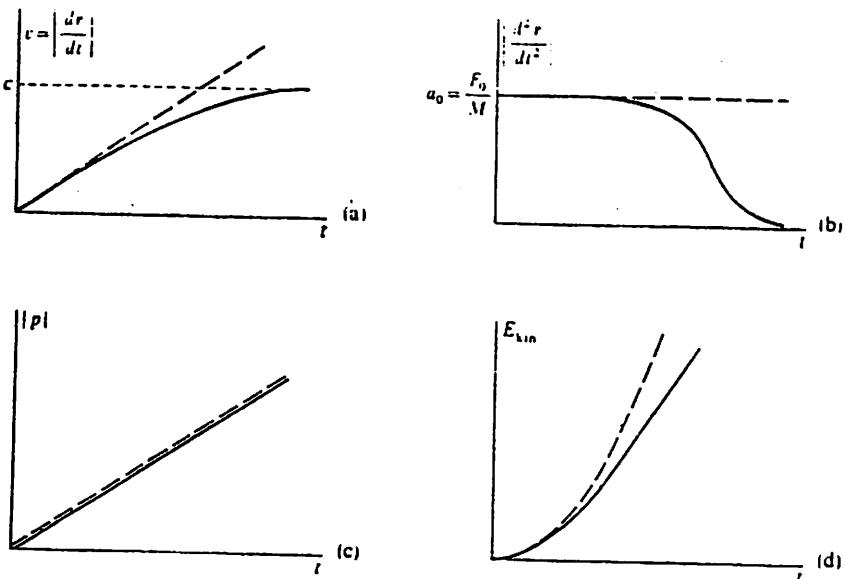
Pers. [15.12] dan [15.13] dapat disimpulkan menjadi rumusan energi yang dinyatakan dalam momentum (dan massa diam) sebagai berikut:

$$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + c^2 p^2}. \quad (15.14)$$

Pers. [15.14] ini umumnya disebut sebagai rumusan *hukum kekekalan energi relativistik*.

Penggunaan hukum kekekalan energi relativistik dalam jangkauan yang dapat diukur umumnya berguna dalam memecahkan problematik inti dan fisika partikel elementer, yaitu dalam mencari hubungan antara energi dan perubahan massa inti; salah satunya adalah membandingkan massa seluruh partikel yang terdapat di dalam inti dengan massa inti yang mengalami 'defek'. Dalam fisika partikel elementer terdapat perubahan istilah untuk massa, energi dan momentum, juga pernyataan atau rumusan-rumusan tumbukan dibanding dengan mekanika biasa. Pembuktian secara eksperimental dan penggunaan hukum kekekalan energi ini, sebagai salah satu inti terpenting dalam riset praktis, merupakan salah satu kesuksesan teori relativitas. Pemakaian rumusan-rumusan non-relativistik, khususnya dalam kedua bidang riset di atas, menimbulkan hasil yang salah.

Keberhasilan tentang ekuivalensi antara massa dan energi, kebalikan dari langkah-langkah penurunan yang diperoleh sebelumnya, adalah penuh resiko. Pembuktian lebih jauh tentang teori relativitas, selain melalui pembuktian eksperimen, untuk kasus-kasus pengamatan



Gambar 15.11: Perbandingan diagram gerak Newton (garis putus-putus) dan Einstein (relativistik, garis penuh) [dari G. Falk dan W. Ruppel].

invariansi yang akan dibahas dalam bab selanjutnya adalah jauh dari cukup.

Gbr. [15.11] menggambarkan diagram gerak di dalam medan gaya homogen berdasarkan Newton (garis putus-putus) dan mekanika relativistik Einstein (garis tebal) dari suatu sistem inersial. a) Pada teori Newton kecepatan tidak terbatas, sedangkan pada teori relativitas Einstein kecepatan tidak dapat melebihi  $c$ . b) Pada teori Newton percepatan adalah konstan, pada Einstein percepatan akan menuju nol, jika  $v = c$ . c) Pertambahan momentum untuk kedua teori adalah linier  $\lambda = F$ . Pada Newton momentum bertambah karena  $v$ , sedangkan Einstein menganggap pertambahan momentum tidak berasal dari  $v$ , karena kejemuhan  $v$  dapat dikompensasikan oleh pertambahan  $m$ . d) Energi kinetik pada Einstein hanya untuk  $v < c$ , berbentuk parabola untuk  $v = c$  dan pada  $E = pc$  menjadi berbentuk garis lurus. Diagram tidak berlaku untuk kasus di dalam medan gaya berat homogen (gaya adalah sebanding massa dan bertambah sebanding dengan massa), akan tetapi

berlaku misalnya untuk benda berada di dalam medan listrik homogen.

### 15.2.8 Peta Penerbangan Sebuah Pesawat Antar Bintang

Hal yang selalu didiskusikan adalah apakah manusia dapat mencapai bintang tetap atau sistem galaksi lainnya atau sebaliknya, apakah penduduk jagad raya yang mempunyai kemampuan teknologi tinggi dapat mencapai kita atau apakah hal tersebut telah terjadi. Dalam pembahasan ini akan dipersoalkan yang menjadi dasar fisis yang secara teknis dapat menjelaskan pertanyaan tersebut.

Sebuah roket berawak terbang dalam waktu yang cukup lama; cukup lama berarti terbang sepanjang tahun, tanpa mengalami percepatan yang terlalu besar melebihi percepatan gravitasi bumi dan tidak mengganggu kesehatan para awak pesawat karenanya (untuk penduduk planet lainnya percepatan 'optimal' ini dapat mempunyai harga yang berbeda dari percepatan gravitasi bumi). Anggap bahwa gerak mengalami percepatan konstan sebesar  $g$  dari 'sistem inersial sesaat' roket, yaitu sesaat ketika seorang astronot meninggalkan roketnya dan ia melihat roket mengalami percepatan  $g$  dan astronot tersebut dengan kepercayaan penuh dapat jatuh di sisi roket dengan percepatan sebesar  $g$ : untungnya tubuh astronot dihubungkan dengan seutas tali ke roket, sehingga dengan berat tubuhnya ia terseret seperti seharusnya; sehubungan dengan itu semua awak yang berada di dalam roket merasa berat tubuh mereka seperti layaknya 'di bumi'.

Dari bumi terlihat, seandainya efek relativistik tidak berpengaruh, maka roket akan dapat menyamai kecepatan cahaya setelah terbang selama 1 tahun ( $c/g = 3 \cdot 10^7$  det = 0,95 a). Dalam kenyataannya, percepatan  $a$  di sistem bumi, yaitu berbeda dengan 'sistem inersial sesaat', selalu tetap sama dengan  $g$ , sedangkan pada sistem inersial sesaat,  $g$  cenderung akan semakin kecil, apabila kecepatan roket  $v$  semakin mendekati kecepatan cahaya  $c$ . Dari pers. [15.6] diperoleh

$$a = \frac{dv}{dt} = g \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2} \quad (15.15)$$

Ketergantungan  $v(t)$  terhadap waktu dapat dicari dengan mengintegrasikan persamaan sebagai berikut.

$$\int_0^{v(t)} \frac{dv}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} = \int_0^t g dt = gt$$

Integran pada ruas kiri persamaan di atas diperoleh dengan mencoba-coba turunan rumus  $\frac{v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = gt$  atau

$$v = c \sqrt{\frac{(gt)^2}{1 + (gt/c)^2}} \quad (15.16)$$

Selanjutnya penulisan dapat disederhanakan lagi jika kecepatan dinyatakan dalam satuan  $c$ , waktu dalam *tahun* dan jarak dalam *tahun cahaya* serta variabel-variabel tanpa dimensi disingkat menjadi

$$V = \frac{v}{c}, \quad T = \frac{gt}{c}, \quad X = \frac{gx}{c^2} \quad (15.17)$$

Maka pers. [15.16] dapat ditulis kembali dalam bentuk

$$V = \sqrt{\frac{T^2}{1 + T^2}} \quad (15.18)$$

Bayangan tentang pendekatan harga  $V$  untuk waktu yang pendek dan amat panjang, masing-masing untuk gerak non-relativistik dan relativistik adalah

$$V \approx \begin{cases} T & \text{untuk } T \ll 1 \\ 1 - T^{-2} & \text{untuk } T \gg 1 \end{cases} \quad (15.19)$$

Jarak yang akan dicapai roket terhadap bumi dalam waktu  $T$  *tahun bumi* dapat dicari berdasarkan pers. [15.18], yaitu

$$\begin{aligned}
 X &= \int_0^T V dT = \int_0^T \left( \frac{T}{\sqrt{1+T^2}} \right) dT \\
 &= \sqrt{1+T^2} - 1 \approx \begin{cases} T^2/2 & \text{untuk } T \ll 1 \\ T - 1 & \text{untuk } T \gg 1 \end{cases}
 \end{aligned} \tag{15.20}$$

( $TdT/\sqrt{1+T^2}$  adalah turunan dari  $\sqrt{1+T^2}$ ). Untuk waktu yang pendek  $X$  bertambah seperti biasanya, menurut  $gt^2/2$ ; setelah berpuluh-puluh tahun (waktu yang sangat panjang)  $X$  akan mengalami penurunan yang mencapai orde tahun cahaya hingga  $X$  mencapai harga yang sama dengan jarak yang ditempuhnya dalam 1 tahun pertama.

„Untungnya” waktu  $r$  di dalam pesawat bergerak lamban dibandingkan dengan waktu di bumi: Jika seorang pengamat di bumi mengukur titik kejadian antara dua keadaan waktu yang sangat pendek di dalam roket (atau lebih jelas dua titik sesaat yang terdapat dalam sistem inersial roket), yaitu sebesar  $dT$ , maka awak di dalam roket hanya merasakan selama:

$$d\tau = dT \sqrt{1 - V^2} \tag{15.21}$$

Maka waktu yang berlaku di dalam roket sejak saat berangkat (dengan menggunakan pers. [15.18] untuk  $V(T)$  adalah

$$\begin{aligned}
 \tau &= \int_0^T dT \sqrt{1 - V^2} = \int_0^T \frac{dT}{\sqrt{1+T^2}} \\
 &= \operatorname{arcsinh} T \approx \begin{cases} T & \text{untuk } T \ll 1 \\ T \ln 2 & \text{untuk } T \gg 1 \end{cases}
 \end{aligned} \tag{15.22}$$

Pertama-tama waktu di dalam roket berjalan seperti waktu di bumi, setelah terbang sepanjang tahun waktu berjalan menjadi lebih lambat, yaitu sama dengan  $\ln 2T$ .

Sekarang dapat dicari kecepatan  $V$  dan jarak  $X$  roket terhadap bumi (dihitung terhadap bumi), dinyatakan dalam waktu tempuh roket  $T$  (gunakan pers. [15.20], [15.19], dan [15.22]):

$$\begin{aligned} X &= \cosh \tau - 1 \approx \begin{cases} \frac{1}{2} \tau^2 \\ \frac{1}{2} c \tau - 1 \end{cases} \\ V &= \tanh \tau - 1 \approx \begin{cases} \tau \\ 1 - 2e^{-2\tau} \end{cases} \end{aligned} \quad (15.23)$$

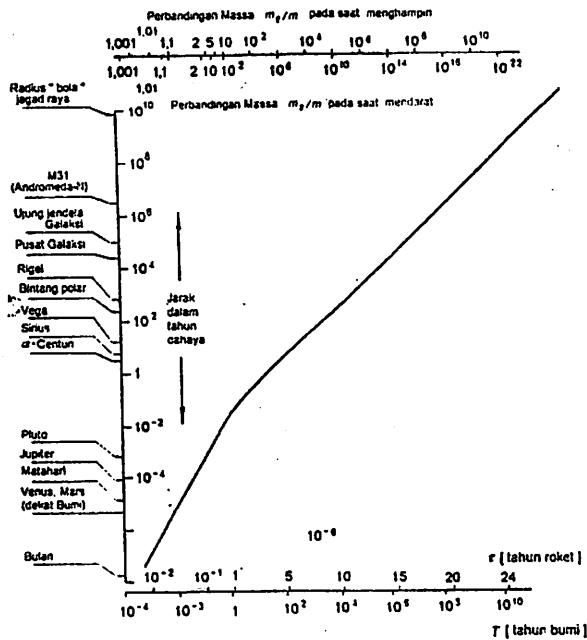
Roket harus mendarat di suatu planet tujuan, tetapi di tengah jalan roket mengalami perlambatan sebesar  $-g$ . Dari gbr. [15.12] dapat dibayangkan gambaran perjalanan roket tersebut; Anda harus mencoba memeriksa semua data yang terdapat di gambar tersebut. Apa yang menarik adalah 'perjalanan Mangelhaes' terakhir, yaitu mengarungi seluruh jagad raya statik Einstein (lihat §15.4.6) dan kembali lagi ke bumi, diperlukan waktu yang sama dengan umur manusia itu sendiri (47 tahun roket, sedangkan bumi untuk waktu selama itu akan menjadi tua  $10^{10}$  tahun). Perjalanan tersebut dapat dilakukan seandainya jagad raya adalah statik dan tidak mengembang secepat yang kita rasakan, sama dengan kecepatan cahaya.

### 15.2.9 Persoalan Roket Pendorong Foton

Sebuah roket bermassa  $M$  yang mengalami percepatan  $g$  setiap detiknya mengeluarkan massa bahan bakar sebanyak  $\mu$  dengan kecepatan  $w$ , maka

$$\mu w = Mg \quad (15.24)$$

(lihat § 1.5.9b). Persamaan ini berlaku untuk sistem roket dengan  $\omega < c$ ,  $\omega$  seharusnya mempunyai harga yang besar, agar roket dapat menghemat bahan bakar. Seandainya roket mempunyai kecepatan  $w = c$  dan mengeluarkan 'sisa pembakaran' foton di belakangnya. Massa roket adalah sama dengan massa pada kecepatan normal.



Gambar 15.12: Peta perjalanan roket soton. Waktu penerbangan di bumi dan di dalam roket untuk mencapai jarak tempuh yang diinginkan. Atas: penggunaan bahan bakar untuk mengarungi peta penerbangan tersebut.

Seandainya dalam kasus ekstrim seperti ini dianggap bahwa pers. [15.24] diragukan keberlakuan; kemudian berdasarkan pengamatan dibuat perubahan-perubahan berikut sehingga pers. [15.24] dapat berlaku: Untuk suatu foton dengan frekuensi  $\nu$  dan panjang gelombang  $\lambda$ , maka energi dan impulsnya masing-masing adalah  $E = h\nu$  dan  $p = h/\lambda$ , atau  $p = E/c = mc$ , sehingga berlaku pula hubungan  $p = mc$  yang dapat dihubungkan dengan pers. [15.24]. Dengan demikian, seperti halnya pada kasus non-relativistik (§ 1.5.9), kehilangan massa roket karena memancarkan foton dapat ditulis menjadi

$$\dot{M} = -\frac{dM}{dt'} = -M \frac{g}{w} = -M \frac{g}{c} \quad (15.25)$$

Pers. [15.25] merupakan persamaan diferensial fungsi  $e$  (eksponensial); massa roket berkurang terhadap waktu eigen sebagai berikut.

$$M = M_0 e^{gt'/c} = M_0 e^{-r} \quad (15.26)$$

Perbandingan beban awal dan yang digunakan dalam penerbangan roket ini juga dapat dilihat pada gbr. [15.12]. Untuk mengelilingi jagad raya Einstein diperlukan bahan bakar lebih kurang sama dengan massa seluruh bumi untuk menghasilkan 1 ton energi yang diperlukan.

Tentunya bahan bakar untuk roket ini harus dipilih sedemikian rupa yang dapat 'memancarkan energi foton keseluruhan'. Dalam hal ini harus dipikirkan sejumlah yang sama materi dan antimateri. Kemungkinan paling akhir harus dikembangkan bagaimana membuat antimateri dalam jumlah yang cukup besar dan membuatnya sedemikian rupa mengalami ionisasi lebih kurang mirip seperti 'botol magnetik'.

Ada pula yang berpendapat bahwa roket pada saat start harus menghemat bahan bakar, kemudian dengan suatu 'karung besar' roket dapat menangkap semua materi yang ada di ruang antar bintang untuk selanjutnya 'dipanaskan'. Atau barangkali terdapat suatu daerah yang penuh antimateri di jagad raya. Untuk membahas persoalan ini lebih lanjut, pandang 'jumlah panas' yang dapat dihasilkan oleh sebuah partikel bermassa  $m_0$ , yaitu sama dengan  $E = m_0 c^2$  dan apakah penangkapan sebuah materi atau antimateri nantinya akan cukup menghasilkan panas yang diperlukan. Batasan energetik demikian, paling tidak sama dengan energi kinetik partikel, kemudian energi ini dapat dinyatakan dalam sistem roket. Karena partikel berada dalam keadaan diam relatif terhadap bumi dan galaksi, maka kecepatannya di roket adalah  $v$ , sehingga energi kinetik partikel dapat dihitung menurut persamaan

$$\begin{aligned} E_{\text{kin}} &= (m - m_0) c^2 \\ &= m_0 c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right) \end{aligned}$$

Dengan pertolongan pers. [15.18] dan [15.20] persamaan di atas dapat pula ditulis dalam bentuk

$$E_{\text{kin}} = m_0 c^2 (\sqrt{1 + T^2} - 1) = m_0 c^2 X$$

Momentum yang dihasilkan sistem adalah persis sama dengan momentum pada proses penangkapan materi sebesar

$$m v = \frac{m_0}{\sqrt{1 + v^2/c^2}} = m_0 c (X + 1)$$

Momentum yang diperoleh pada proses pemancaran foton kira-kira sama dengan  $m_0 c$ . Apabila roket terbang selama beberapa tahun cahaya, maka persediaan energi akan lebih besar dari yang digunakan, hal ini berlaku sama apakah harus ditangkap materi atau antimateri. Akan tetapi, kondisi fenomena ini akan berubah jika seandainya partikel dipancarkan melalui prinsip bilik pembakaran.

### 15.3 Fisika Relativistik

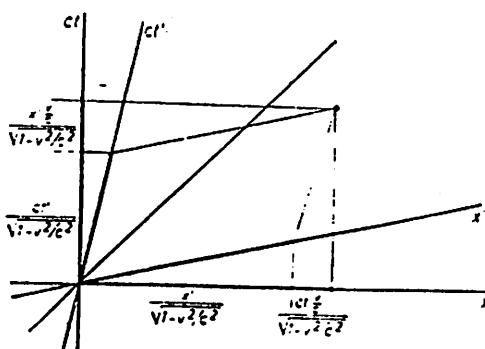
Revolusi relativistik tidak menjadikan semua khasanah pengetahuan fisika seperti adanya. Telah dibahas bagaimana pengaruhnya terhadap mekanika, bagaimana konsekuensi yang terlihat terhadap waktu. Sesungguhnya prinsip relativistik ini bermuara dari bagian fisika yang disebut elektrodinamik (hasil karya Einstein tentang teori relativistik berjudul: Elektrodinamika benda bergerak atau dalam bahasa aslinya Zur Elektrodynamik bewegter Koerpet). Pengertian kecepatan cahaya yang menjadi inti penyebab kesulitan dalam mekanika Newton, di dalam elektrodinamika menjadi tidak asing lagi. Hal yang agak mengherankan adalah, bahwa elektrodinamika tidak mengalami perubahan sama sekali. Maxwell memperoleh kecepatan cahaya berdasarkan rumusan yang dibuatnya, tanpa diketahuinya telah merumuskan elektrodinamika secara relativistik. Apa yang diperlukan dalam elektrodinamika kemudian adalah hanya diperlukan beberapa koreksi terhadap pengertian-pengertian yang ada padanya.

Dasar metode untuk semua yang dikembangkan dalam pembahasan ini adalah pengertian invarian Lorentz.

### 15.3.1 Transformasi Lorentz

Pandang kembali pembahasan pada § 15.2.2 dan 15.2.3 yang melukiskan susunan kejadian dalam koordinat dan waktu, membandingkan kejadian yang dialami seorang pengamat  $B$  yang bergerak dengan kecepatan  $v$  relatif terhadap kita satu sama lain. Dalam pembahasan yang lalu ditentukan bahwa sumbu dan posisi satuan titik pada  $B$  adalah tetap. Setiap posisi  $B$  mengakibatkan satuan posisi dan berlaku pada kita mengalami pergeseran ke kanan dengan faktor  $\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$  dan juga satuan waktu mengalami pergeseran ke 'atas' dengan faktor  $\frac{v^2/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$  (faktor ini diperoleh dengan membagi faktor satuan posisi terhadap  $c$ ). Setiap satuan yang berlaku pada sistem acuan  $B$  tidak hanya menggeser waktu yang berlaku di sistem kita ke 'atas' dengan faktor  $\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ , akan tetapi menggeser pula satuan posisi kita dengan faktor  $\sqrt{1 - v^2/c^2}$  ke kanan. Suatu titik kejadian yang terjadi pada  $B$  pada  $x'$  dan  $t'$ , pada sistem kita terjadi pada  $x$  dan  $t$ , yang keduanya dapat dituliskan dalam persamaan transformasi Lorentz sebagai berikut.

$$\begin{aligned} x &= \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ t &= \frac{vx'/c^2 + t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{aligned} \quad (15.27)$$

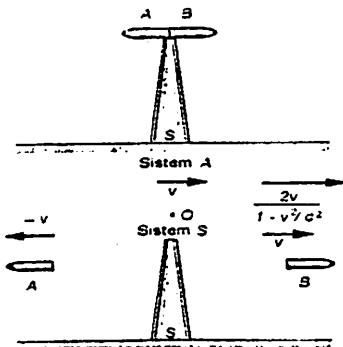


Gambar 15.13: Transformasi Lorentz.

(rumus binomial umum untuk  $u' < v \leq c$ ). Sehingga percepatan yang saya dapatkan adalah

$$\begin{aligned} a &= \frac{\Delta w}{\Delta t} = \frac{u'}{\Delta t'} \left( 1 - \frac{vu'}{c^2} \right) - v \quad (15.6) \\ &= u' \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{3/2} \end{aligned}$$

lebih kecil dari percepatan yang diukur  $B$ . Percepatan ini berlaku untuk arah gerak longitudinal (percepatan gerak longitudinal, percepatan pada arah gerak).



Gambar 15.10: Perubahan massa. Pengamat di roket  $A$  menemukan bahwa massa  $B$  lebih besar dibanding seandainya pengamat berada di  $S$ .

### 15.2.6 Massa yang Bergerak

Dari menara *start*  $S$  stasiun ruang angkasa diluncurkan sebuah roket yang terdiri atas dua bagian  $A$  dan  $B$ . Antara dua bagian tersebut terdapat alat perlengkapan yang tidak berhubungan dengan menara *start*, yang dapat menggerakkan kedua bagian roket tersebut. Setelah proses percepatan ditutup,  $A$  dan  $B$  yang mempunyai massa sama dan kecepatan yang sama, tetapi berlawanan arah  $\pm v$ , titik pusat massa roket terletak seperti sebelumnya yaitu di  $S$  (lihat gbr. [15.10]).

Bagaimana seorang awak, katakanlah di pesawat  $A$ , dapat menggambarkan peristiwa tersebut? Setelah aksi percepatan dihentikan dan

A kembali ke sistem inersialnya (demi teori yang telah kita bahas hingga di sini dapat digunakan), awak akan melihat stasiun bergerak dengan kecepatan  $v$ . Untuk awak di pesawat  $B$  tidak akan memperoleh kecepatan stasisun sebesar  $2v$ , melainkan berdasarkan teorema penjumlahan penambahan kecepatan untuk kecepatan yang kecil (dibanding kecepatan cahaya  $c$ ) adalah

$$w = \frac{2v}{1 + v^2/c^2} \quad (15.7)$$

Persamaan kecepatan ini diperolehnya dengan menggunakan pers. [15.5], jika awak mengetahui, bahwa di sistem  $S$  pesawatnya ( $B$ ) bergerak dengan kecepatan  $v$ , yaitu jika dilakukan pengukuran langsung.

Selain itu, tentunya  $A$  diketahui pula bahwa titik pusat massa  $A + B$  masih sama, yaitu terletak di  $S$ , karena hanya interaksi antara  $A$  dan  $B$  yang berperan saat kedua pesawat terpisahkan di  $S$  dan hal ini merupakan kenyataan objektif dari pengertian absolut yang juga berlaku bagi awak di  $A$  dan interaksi demikian, dalam kasus ini, tidak akan menggeser posisi titik pusat massa. Akan tetapi, titik pusat massa  $S$  yang dilihat oleh awak pesawat  $A$  bergerak lebih cepat, yaitu lebih dari setengah kali kecepatan  $B$ , sehingga pada setiap saat  $S$  terlihat lebih dekat posisinya ke  $B$  dibanding terhadap  $A$ . Hal ini hanya mungkin jika  $B$  sekarang tidak lagi mempunyai massa  $m$  seperti  $A$ , melainkan massanya lebih besar, yaitu  $m'$ . Berapa massa  $m'$  ini?

Kelakuan massa dalam gerak relativitas adalah kebalikan dari kelakuan jarak terhadap titik pusat massa  $S$ ; untuk waktu yang panjang setelah pesawat dipercepat (misalnya setelah waktu mencapai  $t$ ) perbandingan massa dapat ditulis dalam persamaan sebagai berikut:

$$\frac{m'}{m} = \frac{vt}{(w - v)t} = \frac{v}{\frac{2v}{1+v^2/c^2} - v} = \frac{c^2 + v^2}{c^2 - v^2} \quad (15.8)$$

$m'$  tentunya haruslah dinyatakan dalam kecepatannya, yaitu  $w$ , selain dinyatakan dalam  $v$ , yaitu kecepatan titik pusat massa,  $m'$  dalam  $w$  dapat dituliskan:

$$m' = \frac{m}{\sqrt{1 - w^2/c^2}} \quad (15.9)$$

Secara umum rumusan di atas memberikan arti sebagai berikut:

Sebuah massa yang bergerak dengan kecepatan  $v$  terhadap suatu sistem acuan, akan lebih besar dengan faktor  $1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$  (dalam sistem acuan yang bersangkutan) dibanding seandainya massa tersebut berada dalam keadaan diam.

Menara stasiun dalam pembahasan ini hanya berfungsi untuk membuat acuan titik pusat massa, sehingga persoalan dapat dibayangkan lebih jelas. Seandainya menara tersebut tidak ada, akan diperoleh rumusan yang sama, tetapi akan diperoleh penambahan massa dalam kecepatan realtif keduanya.

Hal ini menimbulkan satu lagi pernyataan baru yang sama pentingnya, yaitu

Bahwa suatu benda bermassa tidak akan dapat mencapai kecepatan cahaya, karena massanya dalam waktu singkat akan bertambah besar untuk dapat memperoleh percepatan selanjutnya hingga mencapai kecepatan cahaya. Foton yang bergerak dengan kecepatan cahaya, haruslah mempunyai *massa diam* 0. Pertambahan massa ini juga menjernihkan persoalan yang telah lama menjadi pertanyaan tentang adanya peningkatan 'ketegaran' suatu berkas elektron jika mengalami pertambahan percepatan dengan menaikkan tegangan yang penting artinya untuk peralatan pemercepat partikel.

### 15.2.7 Ekuivalensi Massa dan Energi

Dengan dipercepatnya massa roket, kenyataan terdapat penambahan energi dan momentum roket; kedua besaran ini dipandang karena keduanya berhubungan langsung dengan besaran massa. Apakah salah satu dari keduanya bertanggung jawab terhadap bertambah besarnya massa?

Pers. [15.9] dapat dikembangkan lebih jauh dalam deret binomial sebagai berikut:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = m_0 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

$$= m_0 + \frac{1}{2} m_0 \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} m_0 \frac{v^4}{c^4} + \dots, \quad (15.10)$$

dan segera terlihat bahwa suku kedua deret di atas, untuk kasus  $v \ll c$ , praktis hanya bergantung pada energi kinetik dan hanya berbeda dengan faktor  $c^{-2}$  terhadap energi kinetiknya. Dalam hal ini seolah dengan adanya percepatan, terdapat investasi energi untuk penambahan massa (karena fungsi  $c^2$  hanya digunakan dalam rumusan massa dan energi).

Seandainya demikian benar adanya, maka hukum kekekalan energi yang tidak lagi berlaku untuk massa diam dapat dirumuskan kembali dalam bentuk lebih umum dan dalam hukum kekekalan yang baru ini 'massa diam' berhubungan dengan 'energi diam'  $m_0 c^2$ . Tidak hanya energi, melainkan juga massa dapat juga dibicarakan dalam hukum kekekalan yang baru ini, akan tetapi dalam kasus ini tidak boleh hanya mengandung massa diam semata, melainkan harus terdapat pula 'massa kinetik'. Secara umum massa dan energi harus menyangkut dua aspek yang mengandung pengertian sama: Setiap energi  $E$  berhubungan sebagai berikut:

$$E = m c^2 \quad (15.11)$$

dengan massa dan sebaliknya.

*Energi kinetik*  $1/2 m v^2$  adalah hanya pendekatan pertama daripada pers. [15.11]; rumusan secara umum energi kinetik dapat diperoleh dari semua deret yang terdapat pada pers. [15.10], dikali dengan  $c^2$ , dikurangi dengan 'energi diam'  $m_0 c^2$ , yaitu

$$E_{\text{kin.}} = E - m_0 c^2$$

$$= m_0 c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) \quad (15.12)$$

*B* dapat menghitung setiap perubahan koordinat posisi dan waktu yang kita alami dengan persamaannya, hanya kecepatan relatif *B* terhadap kita harus diperhitungkan berlawanan arah, sehingga semua tanda pada pers. [15.27] di atas, yang mengandung kecepatan, akan mengalami perubahan tanda (atas ruas kanan dan bawah ruas kiri).

Rumus transformasi ini adalah mirip seperti persamaan transformasi koordinat posisi yang mengalami rotasi dengan sudut rotasi *a*, dan  $a = v/c$ , sehingga  $\cos a = 1/\sqrt{1+v^2/c^2}$  dan  $\sin a = (v/c)/\sqrt{1+v^2/c^2}$

$$\begin{aligned}x &= x' \cos \alpha + y' \sin \alpha \\y &= -x' \sin \alpha + y' \cos \alpha.\end{aligned}\quad (15.28)$$

Kedua koordinat  $(x, t)$  dan  $(x', t')$  satu sama lain tidaklah identik, karena  $(x', t')$  dalam pengertian yang berbeda mengalami rotasi. Secara matematis perbedaan ini dapat diatasi, dengan tidak memperlakukan  $ct$  seperti yang telah dibuat sebelumnya, yaitu sebagai koordinat, melainkan menggantikannya dengan  $ict$  ( $i = \sqrt{-1}$  adalah satuan imajiner). Dengan demikian, tanda yang terdapat di dalam tanda akar akan mengalami perubahan dengan sendirinya, sehingga pers. [15.27] dan [15.28] menjadi identik.

Apa yang dilakukan selanjutnya adalah hanya *trick* matematik yang membawa konsekuensi cukup luas. Rotasi suatu sistem koordinat tentunya tidak akan mengubah jarak (posisi). Posisi suatu titik  $(x, ict)$  di titik asal, misalnya di dalam semua sistem koordinat harga  $x^2 = ic^2 t^2$  mempunyai harga yang sama, hanya koordinat posisi dan waktu mempunyai 'porsi' yang berbeda di dalam ruang bagian setiap pengamat. Sama halnya juga berlaku  $x^2 + y^2 + z^2 - ic^2 t^2$  jika diambil sistem koordinat yang lain. Secara umum dapat dikatakan bahwa jarak adalah *invarian* terhadap suatu transformasi ke sistem koordinat lain yang mengalami gerak lurus beraturan terhadap sistem koordinat awal. 'Koordinat keempat' ( $ict$ ) dapat diperlakukan sama seperti vektor koordinat ruang lainnya: komponen vektor dapat berubah, akan tetapi jaraknya adalah tetap. Dengan demikian maka perbedaan ruang-waktu

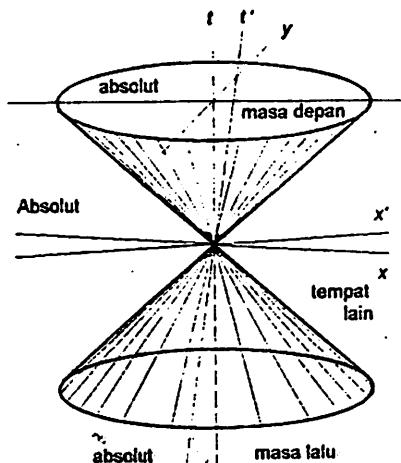
antara koordinat dari dua titik kejadian dapat digambarkan dalam *vektor keempat*. Untuk hal analog dapat dibentuk dalam ilustrasi vektor keempat.

Dasar dari pembentukan pengertian ini adalah tidak hanya untuk memudahkan, akan tetapi mencoba mengkonstruksikan sesuatu keadaan relatif yang terbatas dalam bentuk yang 'agak' absolut. Seperti diketahui, bahwa dengan menggunakan vektor keempat ini, semua perhitungan-perhitungan kuantitatif yang bersangkut paut dengannya akan mengalami penghematan, tidak perlu melakukan pengalihan-pengalihan satuan yang sering menguras tenaga dan waktu. Sebagai contoh adalah formalisme perhitungan vektor biasanya melalui prosesur yang berlebihan, 'hukum alam' seperti 'paralelogram gaya-gaya' atau 'superposisi yang saling tidak bergantung' dari berbagai arah beberapa benda yang bergerak, menurut cara Galilei membuat para mahasiswa di zamannya memerlukan waktu yang lebih panjang untuk menghitungnya, khususnya dalam membuat formulasi-formulasi. Kedua 'cara' di atas dan masih banyak lagi yang lainnya, menganggap gaya-gaya atau kecepatan sebagai vektor, adalah terlalu banyak memakan waktu. Terlebih-lebih lagi pada prosedur penyederhanaan gaya yang dituliskan sebagai skalar (komponen gaya), perkalian titik dan silang dari vektor-vektor dan diferensial vektor-vektor dalam analisa vektor adalah terlalu menguras tenaga dan waktu untuk melakukan penyelesaian perhitungannya secara kuantitatif. Semua *trick* untuk menyelesaikan perhitungan-perhitungan dengan mudah dalam teori relativitas adalah melalui bilangan imajiner *i*. Selanjutnya terdapat pula kelebihan lain, yaitu dua dari empat persamaan Maxwell tidak harus lagi dirumuskan dalam hukum alam, melainkan, dapat sekaligus ditulis dalam 'tensor antimetrik' dan seterusnya. Juga hukum gravitasi bersama persamaan-persamaan gerak benda yang terdapat di dalam medan gaya berat adalah 'mendekati trivial'. Dikatakan 'nontrivial' bahwa di dalam kenyataan hukum dan persamaan gerak tersebut mengandung pengertian yang relatif sederhana, ditambah lagi tidak saling bertentangan dan bahwa gaya-gaya kenyataannya

mempunyai kelakuan seperti vektor dan medan berkelakuan mirip tensor.

### 15.3.2 Struktur Absolut Alam Semesta

Pengamatan yang agak naif adalah proyeksi semua kejadian masa lampau dan masa yang akan datang dengan menggunakan sepotong kejadian masa kini. Potongan kejadian massa kini tidak mengandung pengertian absolut, karena setiap pengamat mempunyai pandangan yang berbeda, walaupun seandainya terdapat pengamat yang mempunyai sumbu 'di sini-kini' yang sesuai. Peristiwa yang terjadi saat ini dapat dikatakan berkembang dalam daerah yang lebar antara kedua 'kerucut cahaya'; pada setiap kejadian dalam 'peristiwa masa kini yang potensil' bisa saja terdapat seorang pengamat yang baginya 'masa kini' telah berlalu. Paling tidak semua pengamat setuju, bahwa kejadian tersebut terletak 'di tempat lain'. Daerah ini disebut juga sebagai 'absolut di tempat lain'. Kejadian yang



Gambar 15.14: 'Kerucut cahaya' membagi ruang waktu yang diamati pada suatu sumbu 'di sini'kini' tertentu, terbagi dalam 3 daerah: Di dalam kerucut ganda terdapat titik kejadian, yang tetap menghubungkan sumbu 'di sini-kini' dan waktu, selain berhubungan dengan sumbu 'di sini-kini' dan koordinat ruang.

termasuk di dalam 'kerucut cahaya' bagi kemungkinan pengamat adalah tidak berlangsung di 'masa kini', sebaliknya kejadian tersebut dapat berlangsung 'di sini': Peristiwa terletak dalam 'masa lalu absolut' atau 'masa depan absolut'.

Dalam hal kecepatan cahaya di vakum yang tidak terdapat satu objekpun dan juga tidak mengandung sinyal informasi yang dapat melampuiinya, tidak akan mengandung kejadian 'absolut di tempat lain' dari sumbu 'di sini-kini' yang mempengaruhinya, demikian pula sebaliknya. Hubungan kausal selalu berlangsung di dalam daerah 'kerucut cahaya', paling tidak dipermukaannya.

### 15.3.3 Elektrodinamika Relativistik

Postulat dasar teori relativitas, yaitu untuk semua pengamat yang berada di dalam sistem inersial akan mengamati gelombang cahaya di vakum dengan kecepatan yang sama di semua arah rambatannya, yaitu sama dengan  $c$  dan bahwa suatu gelombang bola di setiap sistem inersial tetap berbentuk gelombang bola, yang secara matematis sederhana merupakan pencerminan kembali. Persamaan umum gelombang, untuk suatu gelombang yang merambat pada arah  $x$  dari § 4.2.2 adalah

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

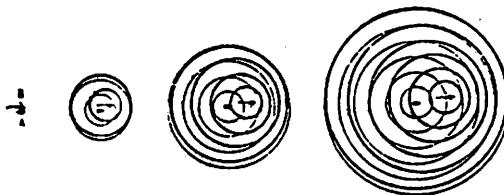
Suatu gelombang bola, seperti digambarkan dalam kerucut cahaya di dalam ruang, atau secara umum untuk setiap peristiwa gelombang di dalam ruang dapat ditulis sebagai berikut.

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

atau

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$$

Dalam teori relativitas bukan  $t$  yang digunakan sebagai koordinat keempat, melainkan  $ict$ . Keempat koordinat tersebut secara sederhana disimbolkan dengan  $x = x_1$ ,  $y = x_2$ ,  $z = x_3$ ,  $ict = x_4$ . Keempat koordinat tersebut diperlakukan secara sama dalam persamaan



Gambar 15.15: Pesawat yang bergerak ( $B$ ) dan diam ( $A$ ) saling mengirimkan gelombang sesaat setelah keduanya berdekatan. Dilihat oleh  $B$  gelombang yang dikirimkan  $A$  merambat ke segala arah dengan harga kecepatan berbeda. Demikian juga gelombang yang dikirimkan oleh  $B$ . Terlibat dari  $A$  masing-masing gelombang yang dikirimkan, baik oleh  $A$ , maupun oleh  $B$ , sama-sama mempunyai kecepatan yang sama pada semua arah. Berdasarkan efek Doppler, gelombang yang diamati  $A$  dan  $B$  hanya terdapat pergeseran titik-titik transisi dari gelombang yang datang. Pada gelombang suara berlaku hal yang sama jika tidak terdapat angin. Pada cabaya kedua pengamat pada posisi  $A$ .

gelombang sebagai berikut:

$$\sum_{i=1}^4 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} = 0 \quad (15.29)$$

Jika persamaan gelombang ditulis dengan menggunakan operator Laplace dalam koordinat empat dimensi, maka digunakan simbol:

$$\square \varphi = 0 \quad (15.29a)$$

Penyelesaian persamaan gelombang hanya mengalami perubahan bentuk, akan tetapi isinya tetap sama. Jika persamaan diubah dalam sistem koordinat acuan lain, maka dapat dibuktikan bahwa sistem koordinat tidak berpengaruh hasil perhitungan, hal ini sesuai dengan hasil eksperimen Michelson (pembuktian bahwa kecepatan cahaya  $c$  sama di setiap tempat).

Suatu medan magnet tidak mempunyai harga absolut. Medan ditimbulkan karena muatan yang bergerak, sehingga medan haruslah tidak dapat diamati oleh seorang pengamat yang bergerak persis seperti gerakan muatan yang menimbulkan medan magnet tersebut. Akan tetapi harus pula terdapat sesuatu yang absolut, yang menjadi dasar fenomena elektromagnetik, yang bagi semua pengamat tidak terpisahkan sebagai medan listrik dan magnet. Invarian yaitu tidak bergantung pada sistem koordinat acuan, seperti yang ditunjukkan oleh semua eksperimen, akan tetapi seandainya sesuatu itu, apakah dinyatakan dalam kerapatan muatan  $\rho$  ataupun kerapatan arus  $j = \rho v$ , maka sesuatu tersebut akan bergantung pada sistem koordinat. Kerapatan muatan sendiri juga tidak selalu invarian terhadap sistem koordinat, karena volume di dalam muatan terdistribusi akan mempunyai harga berbeda oleh setiap pengamat, yaitu karena adanya kontraksi Lorentz sehingga ukuran volume akan berbeda-beda bagian setiap pengamat. Harga volume terbesar atau kerapatan muatan terkecil yang diukur seorang pengamat relatif diam terhadap muatan adalah  $\rho_0 = de/dV$ . Seorang pengamat yang bergerak dengan kecepatan  $v$  yang berlawanan, mengukur volume sebesar  $dV' = dV \sqrt{1 - v^2/c^2}$ , sehingga

$$\rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (15.30)$$

Jika  $\rho$  tidak invarian, apakah ia dapat merupakan salah satu komponen dari keempat vektor? Jawabannya dapat diperoleh dari *persamaan kontinuitas* untuk muatan sebagai berikut.

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = -\dot{\rho}$$

atau

$$\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} + \frac{\partial j}{\partial t} = 0$$

Persamaan di atas dapat dianggap sebagai divergensi umum dari sebuah vektor

$$j_i = (j_x, j_y, j_z, ic\rho) \quad (15.31)$$

yang disebut sebagai kerapatan arus empat dimensi yang terdapat di dalam ruang empat dimensi ( $x, y, z, \text{ dan } ict$ ). Divergensi koordinat empat dimensi biasanya ditulis dengan huruf besar sebagai berikut.

$$\text{Div } j_i = 0 \quad (15.32)$$

Kerapatan arus empat dimensi dapat dinyatakan sebagai hasil kali  $\rho_0$  dan 'empat komponen vektor kecepatan'

$$j_i = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} (v_1, v_2, v_3, ic) \quad (15.33)$$

Dalam persamaan Maxwell, persisnya dalam dua dari empat persamaannya, muncul  $j$  dan  $\rho$ . Maka keduanya adalah benar merupakan komponen dari vektor dimensi empat, maka dua persamaan Maxwell lainnya harus pula mengandung komponen ruang dan waktu vektor dimensi empat. Kelihatannya  $D$  dan  $H$  juga merupakan komponen *sesuatu* yang dinyatakan dalam empat dimensi, yang secara matematis bukan merupakan vektor, karena paling tidak *sesuatu* tersebut mempunyai delapan komponen. Selain itu, untuk dua persamaan Maxwell lainnya ditemukan pula  $B$  dan  $E$ . Kedua medan tersebut akhirnya dapat dilebur ke dalam tensor antimetrik (dimensi empat), yang kedua dari dua besaran tersebut, yaitu dari tensor, kemudian diketahui sebagai 'rotasi empat dimensi' dari suatu vektor, yaitu potensial empat dimensi. Semua kesimpulan formal ini dapat diselesaikan dengan mudah tanpa operasi analisa vektor dan terlihat adanya suatu struktur simetri dari seluruh persamaan Maxwell,

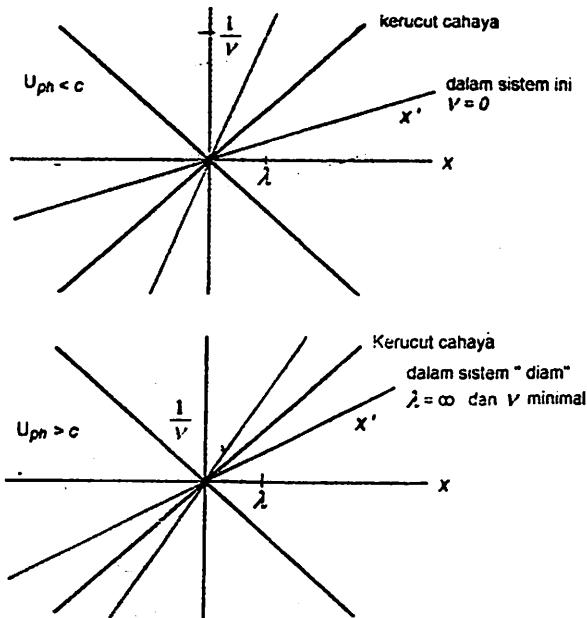
bersahaja, tetapi juga dapat digunakan sebagai perkakas hitung (lihat soal-soal 15.3).

Selanjutnya, padang beberapa bukti penyederhanaan perhitungan. Gaya elektrostatik  $eE$  yang bekerja pada sebuah muatan dan gaya Lorentz  $ev \times B$  pada pembahasan yang lalu selalu muncul sebagai dua persamaan yang berbeda. Secara relativistik keduanya merupakan satu kesatuan dengan komponen pada sumbu -  $x$   $F_x = e(Ex + vyB = - vzBy)$ , yaitu sebagai hasil kali skalar antara kecepatan empat dimensi dan kolom pertama dari tensor medan. Dengan demikian gaya elektrostatik dan Lorentz melebur menjadi satu kesatuan gaya empat dimensi, yang bagi seorang pengamat yang bergerak sesuai dengan kecepatan muatan hanya dapat 'melihat' gaya elektrostatik, akan tetapi apabila dilakukan perubahan terhadap sistem koordinat acuan, secara organik akan muncul gaya Lorentz.

#### 15.3.4 Gelombang Materi

Kesulitan fisika klasik untuk struktur yang amat kecil, khususnya atom, menyebabkan muncul idea dari Louis De Broglie pada tahun 1923, bahwa atom tersebut sangat mirip dengan fenomena optik: Peristiwa yang terjadi dalam ukuran dimensi yang besar, rambatan optik dapat digambarkan sebagai berkas dalam optika geometri, demikian pula rambatan partikel di dalam mekanika dapat dijelaskan melalui lintasan klasik. Akan tetapi, untuk peristiwa berdimensi sangat kecil gambaran tersebut gagal menjelaskannya, karena cahaya adalah gelombang yang menyebabkan timbulnya difraksi atau hamburan. Apakah kenyataannya partikel adalah gelombang materi dan atom merupakan noktah difraksi darinya? Pada penelitian tentang sifat-sifat apa yang harus sesuai untuk mencari penjelasan gelombang materi tersebut, sehingga penjelasan tersebut dapat menggambarkan partikel seutuhnya, De Broglie menampilkan petunjuk gemilang berdasarkan pengamatan relativistik.

Adalah jelas bahwa parameter dari gelombang yang dipostulasikan ini, yaitu frekuensi dan panjang gelombangnya, harus mempunyai



Gambar 15.16: Garis-garis semesta puncak dan lembar gelombang materi, yang lebih lambat (atas) dan cepat (bawah) dari kecepatan cahaya. Sistem koordinat gelombang 'yang membeku' (atas) dan seluruh 'gelombang' bergetar dengan fase yang sama (bawah) digambarkan pula.

hubungan yang erat dengan parameter-parameter gelombang yang menggambarkan partikel. Hubungan tersebut, khususnya untuk foton, telah diketahui dari relasi Planck-Einstein tentang hubungan energi partikel dan frekuensi gelombang, yaitu

$$E = h\nu \quad (15.34)$$

Relasi ini kemudian dipakai De Broglie untuk mencari hubungannya dengan partikel. Adanya hubungan kecepatan fase  $\mu f$  gelombang postulasi ini, memberikan jalan pemilihan harganya yang lebih kecil atau lebih besar dari  $c$  (kecepatan fase adalah besaran geometris murni, yang tidak dapat digunakan sebagai

kecepatan sinyal secara langsung, harganya dapat lebih besar dari  $c$  tanpa mengganggu postulasi ini yang berhubungan dengan kecepatan sinyal). Gbr. [15.16] mengilustrasikan gambaran ruang gelombang materi untuk kedua kasus:  $uf < c$  dan  $uf > c$ . Garis-garis halus menggambarkan pasangan  $x, /, t$  di mana terdapat puncak gelombang. Garis-garis ini untuk  $uf < c$  lebih 'keras', sedangkan untuk  $uf > c$  lebih lemah dari  $45^\circ$  terhadap sumbu- $x$ . Dalam kasus pertama selalu terdapat kecepatan  $u = uf < c$  dibanding dengan yang digambarkan, bagi seorang pengamat yang ikut bergerak dengan puncak gelombang. Maka pengamat ini gelombang mengalami 'pembekuan' waktu pada setiap tempat fase di tempat masing-masing tidak bergantung terhadap waktu; karenanya frekuensi  $v = 0$ . Sebaliknya pada  $uf > c$  terdapat suatu sistem koordinat acuan, bergerak dengan kecepatan  $v = c^2/uf$  terhadap yang digambarkan, padanya puncak gelombang bergerak horizontal, sehingga dalam waktu tertentu fase gelombang adalah sama di setiap tempat. Seandinya gelombang ini digambarkan dengan harga panjang gelombang dan kecepatan fase tak berhingga, apakah secara fisis hal tersebut mempunyai arti?

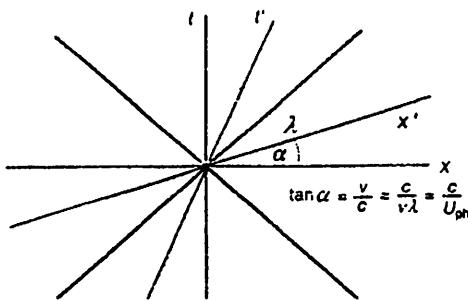
Sebuah partikel dengan massa dian  $m_0$  terdapat di dalam sistem koordinat diam dan mempunyai energi yang tidak nol, yaitu  $E = m_0c^2$ . Maka berdasarkan pers. [15.34], frekuensi minimalnya sama dengan  $v_0 = m^2/h$ . Dalam sistem koordinat lainnya harga energi dan frekuensi lebih besar dari harga di atas. Dengan demikian kasus untuk  $uf < c$  bagi partikel dengan massa diam adalah tidak diperlukan, karena baginya terdapat suatu sistem koordinat di mana  $E$  dan  $v$  mempunyai harga nol.

Selanjutnya, harus dibuat pengandaian *radikal*, yaitu untuk  $uf > c$ . Untuk gelombang seperti ini terdapat suatu sistem koordinat yang diharapkan, yaitu sistem di mana harga  $\lambda = \infty$ . Sistem yang diinginkan ini, padanya partikel diam, tidak akan ada sistem lainnya kecuali sistem tersebut. Di dalam sistem koordinat ini  $v$  mempunyai harga terkecil ( $v_0$ ), karena perbedaan waktu  $T$  antara dua puncak gelombang mencapai harga terbesarnya: Seorang pengamat lainnya mengukur periode yang mengalami 'pengkerutan' karena adanya dilatasi waktu  $T = T_0/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ , atau frekuensi  $v = v_0/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ . Dari pers. [15.34]

akan diperoleh justru energi relativistik partikel yang sesuai untuk sistem yang bergerak:

$$E = h\nu = \frac{h\nu_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (15.35)$$

Di dalam sistem koordinat yang bergerak dengan kecepatan  $v$  relatif terhadap sistem koordinat yang diam (gbr. [15.17]), sumbu -  $x$  terletak miring dengan sudut  $\arctan v/c$ . Garis ini memotong dua puncak gelombang yang terletak pada jarak ruang  $uf/v = c^2/vv$ . Jarak



Gambar 15.17: Transisi pada sistem, di mana gelombang merambat dengan fase yang sama di setiap tempat. Dari segitiga yang dibentuk, dapat diperoleh hukum dispersi untuk gelombang materi.

tersebut tidak lain merupakan panjang gelombang yang terlihat dari sistem koordinat yang bergerak:

$$u_f = \frac{c^2}{v}, \quad \lambda = \frac{c^2}{v\nu} = \frac{h}{m_0 v} \quad (15.36)$$

atau, karena  $m_0 v$  tidak lain adalah momenntum partikel yang diukur pada sistem bergerak ( $v < c$ ):

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (15.37)$$

Pers. [1537] adalah hubungan panjang gelombang De Broglie dan momentum partikel yang terkenal itu, yang juga berlaku sama seperti relasi Planck pers. [15.34] dan melalui berbagai eksperimen telah terbukti kegunaannya, khususnya untuk menjelaskan fenomena difraksi atau hamburan.

Dengan memperhatikan kembali kontraksi Lorentz yang dialami oleh panjang gelombang maka momentum pada ruas kanan pers. [15.37] harus dikalikan faktor  $1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ , sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut.

$$\lambda = \frac{h \sqrt{1 - v^2/c^2}}{p} \quad (15.38)$$

Keberhasilan sensasional De Broglie pada awalnya digunakan untuk menjelaskan kondisi kuantum Bohr, yaitu untuk pemilihan beberapa lintasan partikel yang penuh teka-teki yang kemudian dianggap sebagai keadaan elektron. Elektron sesungguhnya bukan partikel yang bergerak mengelilingi, melainkan dianggap sebagai gelombang. Suatu momentum partikel sebesar  $mv$  adalah sesuai dengan panjang gelombang  $\lambda = h/mv$ . Dengan mudah dapat dibayangkan, bahwa hanya gelombang yang mempunyai 'lintasan' sesuai dengan kelipatan bilangan bulat panjang gelombang tersebut adalah yang dibolehkan hanya dengan cara demikian akan terdapat sistem gelombang diam. Selain itu, gelombang akan mengalami interferensi saling menghilangkan. Untuk radian lintasan yang dibolehkan berlaku:

$$2\pi r = n\lambda = n \frac{h}{mv} \quad \text{atau} \quad mvr = nh \quad (15.39)$$

Persamaan ini tidak lain adalah syarat kuantum Bohr.

## 15.4 Gravitasi dan Kosmologi

### 15.4.1 Relativitas Umum

Tidak ada satu mediapun yang dapat menentukan apakah dan bagaimana kecepatan seseorang yang bergerak beraturan. Dari

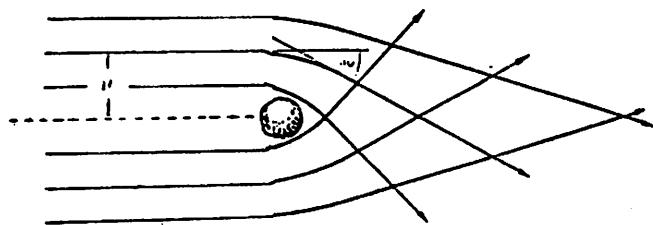
anggapan ini muncul teori relativitas khusus. Apakah seseorang bergerak tidak lurus beraturan, tidak dapat diramalkan lebih jauh, karena dengan gerak tidak lurus beraturan berarti munculnya gaya kelembaman. Akan tetapi gaya gravitasi juga berperan dengan mekanisme yang sama, karenanya kedua gaya tersebut, yaitu gaya kelembaman dan gravitasi, berpengaruh terhadap sifat benda (dalam hal ini massa benda). *Kelembaman* dan *berat* suatu massa adalah identik (atau persisnya saling proporsional satu sama lain), tidak dapat ditentukan. Hal ini harus dapat dibuktikan melalui eksperimen. Pembuktian sederhana terletak pada pengamatan, tanpa memandang adanya gaya gesek udara, semua benda akan bergerak sama cepatnya. Newton, Eoetvoes, Dicke, Braginski dan Rudenko mendapatkan pembuktian identitas yang selalu berhubungan dengan kenaikan ketelitian (hingga  $10^{-12}$ ).

Adanya identitas kelembaman dan berat suatu massa berhubungan dengan kehilangan gaya berat suatu roket yang jatuh bebas. Dengan perkataan sederhana dikatakan, bahwa kelembaman dengan adanya percepatan dan gravitasi saling kompensasi satu sama lain secara eksak. Akan tetapi, pernyataan di atas dapat pula diputarbalikan dan mengatakan: Gravitasi pada dasarnya adalah sama dengan gaya-gaya kelembaman dan saling dapat lenyap dengan 'transformasi', yaitu jika seseorang berada di dalam sistem koordinat tertentu (jatuh bebas), demikian pula bagaimana gaya-gaya lenyap karena mengalami 'transformasi' pada saat sebuah mobil mengalami penggereman, yaitu apabila pristiwa diamati dari sisi jalan di mana mobil direm.

Postulasi *ekuivalen* antara kelembaman dan medan gaya berat demikian kemudian 'menjelaskan' identitas dari 'pembawa' atau 'lembam' dan berat suatu mass, yang selain itu juga sebagai suatu 'keanehan'. Agar segalanya terjamin, bahwa semua mekanisme adalah identik, berlaku sama apakah seseorang yang berada di dalam roket yang sedang mengalami percepatan  $a$  'ke atas' (tanpa gaya berat) atau berada di roket yang diam di dalam medan gaya berat, yang mengalami percepatan  $-a$ . Dalam kedua kasus di atas mesin roket sama-sama mempunyai gaya 'angkat' yang sama, dalam kasus pertama

roket dipercepat, sedangkan kasus kedua roket diperlambat untuk menghindari jatuh bebas. Jika *prinsip ekuivalen* dipandang serius, maka haruslah muncul efek lain dari adanya percepatan, demikian pula dengan adanya medan gaya berat.

Suatu berkas cahaya yang diemisikan tegak lurus terhadap arah



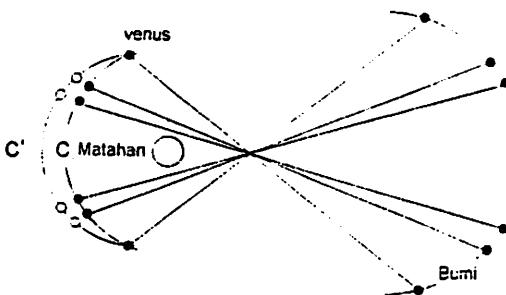
Gambar 15.18: Pembelokan cahaya di dalam medan gaya berat oleh suatu titik massa. Sudut pembelokan  $d\psi = 4GM/dc^2$  adalah dua kali lebih besar untuk sebuah massa yang bergerak dengan kecepatan  $c$ , dihitung berdasarkan Newton. Angka 2 muncul dari perubahan tambahan dari 'perjalanan' waktu (lihat gbr. [15.19]) [dari G. Falk dan W. Ruppel].

percepatan, tetapi terdapat di belakang roket yang dipercepat, tidak jatuh persis pada layar, jika dipandang dari sumbernya, melainkan lebih dangkal. Cahaya yang berada di dalam medan percepatan akan mengalami pelengkungan. Juga di dalam medan gaya berat. Efek ini amat kecil untuk dapat dibuktikan di dalam laboratorium. Cahaya atau sinyal radio yang melewati pinggir matahari menunjukkan adanya efek tersebut (lihat §15.4.2).

Di dalam kabin terdapat sebuah alat pengirim berkas cahaya  $S$  yang mengirimkannya ke atas untuk diterima penerima  $E$ . Pada jarak  $l$  antara  $E$  dan  $S$  berkas telah menjalani waktu  $t = l/c$  dengan kecepatan  $v = at = al/c^2$  yang dianggap relatif terhadap  $S$ .  $E$  mengukur frekuensi berkas cahaya yang diterimanya adalah bukan  $v_{\text{circ}}$ , melainkan frekuensi yang mengalami *pergeseran merah* efek Doppler, yaitu  $v = v_o(1 - v/c) = v_o(1 - al/c^2)$ . Jika medan gaya berat  $-a$  menimbulkan efek yang sama, maka dikatakan bahwa pengirim yang terletak pada daerah potensial gravitasi  $\Delta\delta = -al$  lebih rendah dibanding penerima,

mengalami getaran lebih lambat dengan faktor sebesar  $1 + \Delta\theta/c^2$ . Pergeseran merah ini untuk permukaan matahari memberikan sumbangan sebesar  $\Delta v/v = -2,5 \cdot 10^{-6}$ . Untuk *bintang katai putih* adalah lebih besar lagi. Dalam kedua kasus adalah sukar untuk memisahkan penyebab pelebaran dan pergeseran garis. Dengan menggunakan sinar  $\gamma$  yang sebagian mempunyai garis spektrum tajam Rebka dan Pond berhasil membuktikan secara langsung di dalam laboratorium adanya pembelokan cahaya karena medan gaya berat (lihat § 12.1.4).

Dari roket yang dipercepat sinyal cahaya memerlukan waktu lebih panjang untuk menempuh jarak dari *S* hingga *E* dibanding keadaan normal, karena adanya 'kelebihan' lintasan sebesar  $1/2 at^2 = 1/2a t^2/c^2$  yang harus ditempuh cahaya. Pada roket diam yang berada di dalam medan gaya berat, terdapat pula efek ini dan hal ini berhubungan dengan bahwa cahaya di dalam daerah yang mempunyai potensial gravitasi lebih rendah akan bergerak lebih lama. Penundaan ini berhubungan dengan perbedaan kecepatan cahaya rata-rata  $c$  terhadap kecepatan normalnya:  $\bar{c} = c(1 + 1/2\Delta\theta/c^2)$ ; patut diperhatikan pula bahwa  $\Delta\theta$  berharga negatif. Antara *S* dan *E* perbedaannya menjadi



Gambar 15.19: Refleksi sinyal gelombang radio oleh permukaan Venus memerlukan waktu tempuh yang lebih panjang dibanding waktu untuk menempuh jarak geometrisnya, yaitu jika sinyal melewati daerah di dekat matahari. Dalam hal ini pengaruhnya bukan hanya pada getaran atom sebagai yang berperan terhadap berjalananya waktu di bumi, akan tetapi juga mempengaruhi perjalanan sinar. Dari hasil percobaan diperoleh bahwa jarak Venus seolah menjadi beberapa km lebih jauh dibanding jarak geometris sebenarnya ('kurva' C) [Shapiro 1968, dari G. Falk dan W. Ruppel].

dua kali lebih besar:  $c' = c(1 + \Delta\theta/c^2)$ . Refleksi radar pasif dan aktif oleh permukaan Venus dari pengirim sinyal radio membuktikan hal tersebut. Jika suatu sinyal harus melewati daerah di dekat matahari, maka waktu tempuhnya menjadi  $2 \cdot 10^{-2}$  det. (untuk pergi dan kembali) lebih panjang dari jarak geometrisnya.

$$\begin{aligned}
 c' &= c \left( 1 - \frac{GM}{rc^2} \right) : \\
 t &= \int \frac{dr}{dc'} \approx \frac{2d}{c} + \frac{2GM}{c} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} \\
 &= \frac{2d}{c} + \frac{4GM}{c} \cdot \ln \left( \frac{r_e}{r_s} \right)
 \end{aligned}$$

$r_e$  = jari-jari lintasan bumi = jari-jari lintasan dari relais.  $r$  = jarak relais bumi.

Melalui percobaan-percobaan prinsip ekuivalen dipastikan kebenarannya: Prinsip ekuivalen mengandung pengertian tidak terdapatnya kemungkinan untuk membedakan antara suatu percepatan dan suatu medan gaya berat (homogen). Kenyataan ini secara formal berhubungan dengan kesamaan perlakuan terhadap semua sistem acuan, sebagai teori relativitas umum. Secara fisis prinsip ekuivalen ini mengandung arti yang lebih jauh lagi, yaitu pengertian gravitasi.

#### 15.4.2 Teori Gravitasi Einstein

Suatu medan gaya berat homogen berdasarkan prinsip ekuivalen dapat 'lenyap' karena transformasi, sebagai contoh adalah: Suatu benda yang jatuh bebas padanya terdapat sistem inersial. Medan gaya berat real selau inhomogen, sehingga sifat inersial hanya berlaku secara lokal (di sekitar titik pusat berat suatu sistem yang jatuh bebas). Percepatan sistem jatuh bebas adalah sama di semua tempat, sebaliknya percepatan gaya berat tidak. Perbedaan keduanya disebut sebagai gaya pasang-surut, yang dalam pendekatan pertama adalah sebanding dengan jarak terhadap titik berat. Sebuah apel yang

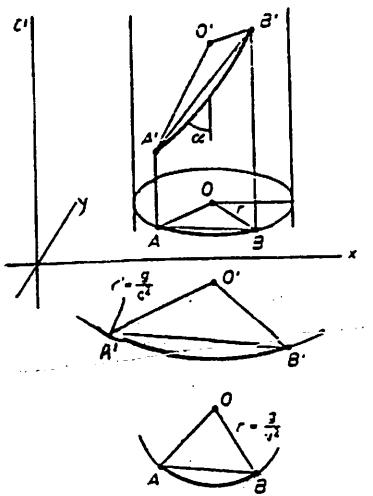
dijatuhkan dari sebuah roket di daratan Eropa akan 'melayang', sebaliknya apel New Zealand jatuh dengan percepatan  $2g$  (lihat soal-soal 1.8.5, 1.8.6).

Ide dari Einstein yang bertitik tolak dari gravitasi adalah mencoba mencari efek ini, yang tidak mencoba mentransformasikannya melalui perubahan sistem acuan, di mana tidak dapat diamati di suatu tempat, akan tetapi di tempat lain adalah tetap. Suatu sistem acuan adalah suatu peta dunia di mana semua kejadian dapat digambarkan padanya. Segala sesuatunya yang terdapat di atas peta tersebut tidak akan bebas dari 'perubahan', misalkan tidak pula segala sesuatu yang terdapat di permukaan bumi. *Proyeksi mercator* hanya memberikan keliling ekuator kembali. Sebuah pesawat udara yang melintasi rute kutub akan membentuk lintasan melengkung, dengan sendirinya jika pesawat tidak mengubah haluannya dan tidak ada gaya lain yang ditambahkan padanya, atau dengan perkataan lain jika pesat tetap membentuk lintasan lingkaran yang besar. Seseorang yang tetap berada di permukaan bumi akan mengamati hal ini dengan perubahan arah pesawat terbang disebabkan oleh adanya gaya yang berhubungan dengan hal tersebut.

Lintasan bebas gaya dari pesawat udara (dilihat dari gaya koriolis), lingkaran yang besar atau *garis geodesi* lintasan, adalah garis hubung terpendek antara start dan tujuan. Lintasan ini tidak bergantung pada kecepatan terbang. Pada gravitasi keadaannya agak berbeda: Bentuk lintasannya sangat ditentukan oleh  $v$ . Maka untuk kasus gravitasi harus diperhatikan lintasan yang terbentuk di ruang, garis semesta benda. Garis semesta bumi adalah suatu garis panjang terbatas berbentuk seperti guratan pada sekrup: Selama bumi 'terbang' dalam 1 tahun pada arah  $t$ , bumi 'membandul' hanya selama 1000 detik cahaya, yaitu lebih kurang  $3 \cdot 10^{-5}$  tahun cahaya. Untuk benda yang bergerak lebih lambat, maka garis semestinya juga lebih pendek dan lengkungannya lebih besar.

Selanjutnya, pada persoalan ini secara kuantitatif, yaitu membuktikannya, bahwa melengkungnya ruang-waktu dalam hal adanya pengaruh gravitasi, bahwa juga kurva lintasan di dalam medan ini

tidak bergantung pada massa benda, yang ikut serta di dalamnya dan bahwa semakin besar lengkungan, maka semakin lambat benda bergerak. Lengkungan lintasan ruang-waktu atau garis semesta, ditentukan oleh kelengkungan ruang-waktu itu sendiri dan mempunyai harga konstanta  $k = g/c^2$  (sebenar-benarnya konstan; arti dari  $g$  sendiri akan lebih dimengerti kemudian). Pandang suatu benda yang bergerak dengan kecepatan  $v$  di dalam sistem acuan. Garis semesta benda meningkat di dalam diagram  $t, x$  membentuk sudut  $\alpha$  dengan tanda  $\alpha = v/c$  dan dalam waktu bersamaan melengkung pula pada arah sumbu  $-y$ , membentuk sebagian garis berbentuk sekrup, dengan sumbunya tidak harus terletak pada sumbu- $t$  ( $x = y = z = O$ ). Lengkungan garis berbentuk sekrup ini haruslah sama dengan  $g/c^2$ . Untuk lintasan *ruang*, yaitu proyeksi garis semesta pada bidang  $x - y$  akan terlihat lengkungan lebih besar. Kelengkungan adalah perubahan sudut arah dibagi dengan panjang lengkungan (busur) dari kurva:  $k = d\theta/ds$ . Perubahan sudut arah untuk garis berbentuk sekrup adalah dengan faktor  $\sin \alpha = \sqrt{v^2 +}$



Gambar 15.20: Kelengkungan *ruang-waktu* membuat penampang lintang 3 dimensinya dapat terlihat sebagai gaya.  $A'$  dan  $B'$  adalah suatu segmen dari lintasan terpendek lintasan spiral) di dalam ruang-waktu dengan kelengkungan sama dengan  $g/c^2$ . Proyeksi kelengkungan di dalam ruang bergantung pada ketajaman spiral, bahwa sebagai hasil diperoleh percepatan sentripetal gerak melingkar beraturan.

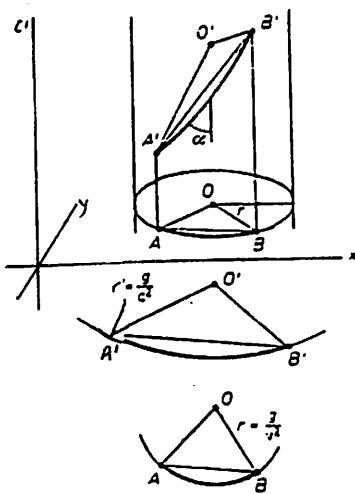
dijatuhkan dari sebuah roket di daratan Eropa akan 'melayang', sebaliknya apel New Zealand jatuh dengan percepatan  $2g$  (lihat soal-soal 1.8.5, 1.8.6).

Ide dari Einstein yang bertitik tolak dari gravitasi adalah mencoba mencari efek ini, yang tidak mencoba mentransformasikannya melalui perubahan sistem acuan, di mana tidak dapat diamati di suatu tempat, akan tetapi di tempat lain adalah tetap. Suatu sistem acuan adalah suatu peta dunia di mana semua kejadian dapat digambarkan padanya. Segala sesuatunya yang terdapat di atas peta tersebut tidak akan bebas dari 'perubahan', misalkan tidak pula segala sesuatu yang terdapat di permukaan bumi. *Proyeksi mercator* hanya memberikan keliling ekuator kembali. Sebuah pesawat udara yang melintasi rute kutub akan membentuk lintasan melengkung, dengan sendirinya jika pesawat tidak mengubah haluannya dan tidak ada gaya lain yang ditambahkan padanya, atau dengan perkataan lain jika pesat tetap membentuk lintasan lingkaran yang besar. Seseorang yang tetap berada di permukaan bumi akan mengamati hal ini dengan perubahan arah pesawat terbang disebabkan oleh adanya gaya yang berhubungan dengan hal tersebut.

Lintasan bebas gaya dari pesawat udara (dilihat dari gaya koriolis), lingkaran yang besar atau *garis geodesi* lintasan, adalah garis hubung terpendek antara start dan tujuan. Lintasan ini tidak bergantung pada kecepatan terbang. Pada gravitasi keadaannya agak berbeda: Bentuk lintasannya sangat ditentukan oleh  $v$ . Maka untuk kasus gravitasi harus diperhatikan lintasan yang terbentuk di ruang, garis semesta benda. Garis semesta bumi adalah suatu garis panjang terbatas berbentuk seperti guratan pada sekrup: Selama bumi 'terbang' dalam 1 tahun pada arah  $t$ , bumi 'membandul' hanya selama 1000 detik cahaya, yaitu lebih kurang  $3 \cdot 10^{-5}$  tahun cahaya. Untuk benda yang bergerak lebih lambat, maka garis semestinya juga lebih pendek dan lengkungannya lebih besar.

Selanjutnya, pada persoalan ini secara kuantitatif, yaitu membuktikannya, bahwa melengkungnya ruang-waktu dalam hal adanya pengaruh gravitasi, bahwa juga kurva lintasan di dalam medan ini

tidak bergantung pada massa benda, yang ikut serta di dalamnya dan bahwa semakin besar lengkungan, maka semakin lambat benda bergerak. Lengkungan lintasan ruang-waktu atau garis semesta, ditentukan oleh kelengkungan ruang-waktu itu sendiri dan mempunyai harga konstanta  $k = g/c^2$  (sebenar-benarnya konstan; arti dari  $g$  sendiri akan lebih dimengerti kemudian). Pandang suatu benda yang bergerak dengan kecepatan  $v$  di dalam sistem acuan. Garis semesta benda meningkat di dalam diagram  $t, x$  membentuk sudut  $\alpha$  dengan tanda  $\alpha = v/c$  dan dalam waktu bersamaan melengkung pula pada arah sumbu  $-y$ , membentuk sebagian garis berbentuk sekrup, dengan sumbunya tidak harus terletak pada sumbu- $t$  ( $x = y = z = 0$ ). Lengkungan garis berbentuk sekrup ini haruslah sama dengan  $g/c^2$ . Untuk lintasan *ruang*, yaitu proyeksi garis semesta pada bidang  $x - y$  akan terlihat lengkungan lebih besar. Kelengkungan adalah perubahan sudut arah dibagi dengan panjang lengkungan (busur) dari kurva:  $k = d\theta/ds$ . Perubahan sudut arah untuk garis berbentuk sekrup adalah dengan faktor  $\sin \alpha = \sqrt{v^2 +}$

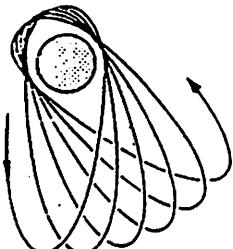


Gambar 15.20: Kelengkungan *ruang-waktu* membuat penampang lintang 3 dimensinya dapat terlihat sebagai gaya.  $A'$  dan  $B'$  adalah suatu segmen dari lintasan terpendek (lintasan spiral) di dalam ruang-waktu dengan kelengkungan sama dengan  $g/c^2$ . Proyeksi kelengkungan di dalam ruang bergantung pada ketajaman spiral, bahwa sebagai hasil diperoleh percepatan sentripetal gerak melingkar beraturan.

$c^2$  lebih kecil dibanding dengan 'diretissima' dari proyeksinya pada bidang  $x$  -  $y$  sendiri (untuk mengecilkan kemiringan efektif, pemain ski selalu menanjak miring untuk mempertahankannya). Selain itu, distribusi perubahan sudut pada garis sekrup adalah sama dengan faktor  $\sin a$  lebih panjang dari busur (gbr. [15.20]). Kelengkungan sebenarnya dari ruang-waktu adalah  $k_r = k(v^2 + c^2)/v^2 = (1 + v^2/c^2)g/v^2$ . Untuk  $v < c$  didapat  $k_r = g/v^2$ , jari-jari lintasan menjadi  $R = 1/k_r = v^2/g$ , yaitu tidak lain benda mengalami percepatan tegak lurus  $g$  (percepatan sentrifugal =  $g$ ). Dan massa benda tidak ada alasan untuk turut serta mempengaruhi percepatan.

Gambaran medan percepatan sebagai lengkungan ruang-waktu, seperti yang diilustrasikan pada gambar, secara relativistik otomatis invariannya, dalam hal ini percepatan sebagai sifat dari ruang-waktu sendiri. Sistem acuan sembarang, yaitu kemiringan atau kenaikan  $v/c$  dari garis semesta, dalam hal ini benar-benar sebagai bukti, juga mengapa kemiringan sembarang adalah penting sebagai syarat kelengkungan lintasan.

Pada  $v \approx c$  terdapat deviasi dari gambaran Newton: Garis semesta suatu berkas cahaya ( $v = c$ ) mengalami lengkungan ruang dengan  $k_r = 2g/c^2$ , sementara berdasarkan Newton suatu benda dengan kecepatan  $v = c$  hanya mempunyai kelengkungan lintasan sebesar  $g/c^2$ . Angka 2



Gambar 15.21: Dari Einstein elips Kepler di dalam medan gaya berat suatu massa tidak persis tertutup, karena jalannya waktu di daerah periferi dan di dekat massa adalah berbeda. Maka terdapat suatu lintasan rosete. Seandainya terdapat keadaan selain itu, maka suatu benda sentral yang mengalami pendataran atau suatu bintang yang masih mempunyai planet lainnya adalah akan mirip [dari G. Falk dan W. Ruppel].

yang muncul pada teori gravitasi Einstein dapat dibuktikan melalui berkas cahaya yang mendekati sisi permukaan matahari yang mengalami pembelokan. Berdasarkan pengukuran seksama dapat dibuktikan munculnya angka 2 tersebut. Berapa jauh pembelokan berkas cahaya menurut Einstein dari refleksi atmosfer matahari dengan gradien kerapatan yang dapat ditebak, akan lebih jelas dari soal 9.4.6. Pada saat sekarang ini orang telah dapat menggunakan gelombang radio dari *kuasar*, tanpa menunggu adanya gerhana matahari. *Interferometer gelombang radio* terdiri dari dua penerima yang masing-masing diletakkan pada jarak hingga mencapai diameter bumi dan mempunyai resolusi teoritis tertinggi (untuk gelombang cm dan dm) dibanding dengan resolusi teleskop Palomar, walaupun secara mendasar masih terdapat kesulitan dari panjang interferometri basis dalam praktiknya.

Umumnya lengkungan lintasan lebih besar dengan faktor  $1 + v^2/c^2$  dibanding Newton. Lintasan yang menurut Newton dan Kepler yang kembali ke titik asalnya, menurut Einstein tidak akan dapat kembali secara eksak, selain jika lintasannya berbentuk lingkaran. Suatu lintasan elips haruslah berpresesi membentuk lintasan *rosette* di sekitar titik pusatnya dan bagian periferinya haruslah mengalami *pergeseran*. Pada lintasan sesaat (panjang busur  $= 2\pi R = 2\pi k_r$ ) terdapat rotasi tambahan sebesar  $2\pi v^2/c^2$  (*bagian terbesar dari lengkungan*  $g/c^2$ , akan diperoleh pembelokan elips itu sendiri). Untuk bumi dengan  $v^2/c^2 = 10^-7$  diperoleh untuk seratus tahun (kira-kira 100 kali putaran mengelilingi matahari) suatu putaran sebesar  $6 \cdot 10^{-6} = 1.2$ . untuk Merkurius dengan  $v^2/c^2 = 2,5 \cdot 10^{-8}$  dalam seratus tahun (416 kali mengelilingi matahari) dengan putaran  $7 \cdot 10^{-6} = 14''$ . Dengan perhitungan lebih eksak harus ditambahkan faktor 3; untuk bumi adalah  $3,8''$  seratus tahun dan untuk Merkurius  $43''$  seratus tahun.

Terdapat alasan lain mengapa gerak presesi terjadi. Setiap massa yang bukan simetri bola, yaitu setiap distribusi massa dengan momen kuadrupol, menurut Newton planetnya juga membentuk lintasan berbentuk *rosette*. Deviasi dari simetri bola juga berlaku untuk planet lainnya. Pengaruh ini dapat dihitung secara persis, akan tetapi

mempunyai hasil yang berbeda sedikit dibanding dengan hasil kecepatan presesi pengamatan. Matahari, karena rotasi terhadap dirinya sendiri, mengalami 'pendataran' (berubah bentuk tidak lagi simetri bola melainkan paraboloida). 'Pendataran' ini dan pengaruhnya pada lintasan planet-planetnya tidak dapat dihitung secara eksak (karena matahari tidak berrotasi secara tegar) akan tetapi dapat diukur secara eksak (karena ketidaktentuan definisi ukuran sisi permukaan matahari). Dari sumbangan ini bergantung pada, apakah sumbangan kesalahan dari  $43''/\text{seratus tahun}$  untuk Merkurius berdasarkan teori Newton yang diperlukan beberapa modifikasi (campuran antara teori tensor dan skalar dari Dicke-Brans-Jordan).

Gambaran yang telah dibahas menunjukkan, bagaimana pengaruh kelengkungan ruang waktu secara dinamis, akan tetapi tidak berbicara mengapa timbul kelengkungan ruang-waktu tersebut; misalnya mengapa kelengkungan sebanding dengan jarak  $r^{-2}$  dari massa yang ditimbulkannya. Hal ini digambarkan secara gamblang, akan tetapi tidak dapat dimengerti secara kuantitatif. Gambaran yang agak menolong untuk menjelaskan mengapa terjadi kelengkungan demikian adalah dengan pengertian *permukaan minimal*, yaitu suatu permukaan, seperti terbentuknya permukaan gelembung sabun yang bebas mengembang atau pembentukan permukaan cairan yang bebas gaya. Permukaan minimal (lihat kembali §3.2 dan soal 3.2.5) mempunyai kelengkungan rata-rata  $1/R_1 + 1/R_2 = 0$ , yaitu harus selalu merupakan permukaan kritis (kelengkungan pada satu arah positif, sedangkan pada arah lainnya negatif). Analog dengan permukaan kosong Einstein yang mempunyai 'kelengkungan utama' sama dengan nol (dalam kedua kasus di atas tidak berarti bahwa kelengkungan 'melenyap'). Seandainya ruang pada umumnya kosong, maka di semua tempat di dalamnya tidak akan terdapat gaya, mirip seperti permukaan zat cair tanpa gaya. Suatu gangguan (singularitas), misalnya suatu massa berbentuk simetri bola, berpengaruh di dalam ruang mirip seperti setangkai jerami yang terendam di dalam zat cair, berbentuk trompet mencuat ke luar atau menysup ke dalam, bergantung pada kemampuan dapat basah dari jerami tersebut. Lengkungan rata-rata tetap sama

dengan nol, berarti bahwa lengkungan negatif berada pada bidang  $x - z$  yang berada di dekat jerami haruslah lebih besar agar dapat mengkompensasi lengkungan positif yang beda pada bidang  $x - y$ . Lengkungan  $x - z$  akan menurun sebanding dengan  $1/r$ , dengan  $r$  jarak terhadap gangguan. Hal ini dapat dibandingkan dengan kasus gravitasi, bahwa ketergantungan dimensionalnya menurun sebanding dengan  $1/r^2$ .

Di dalam medan gaya berat yang sangat kuat dapat dibayangkan, bahwa jari-jari lengkungan  $R = c^2/g = c^2r^2/GM$  lebih kecil dibanding dengan jarak  $r$  dari massa yang mengakibatkan gravitasi. Maka ruang haruslah melengkung kembali, karena harus terdapat penyelesaiannya. Akan diperoleh kondisi untuk *black hole* atau 'lubang hitam' yaitu:

$GM/r = c^2$  (lihat §15.4.3) dengan jari-jari 'tameng hitamnya',<sup>3</sup> sebesar  $\rho = GMc^2$ . Ruang yang sebenar-benarnya kosong atau hampa tidak mempunyai kelengkungan (tidak hanya 'lengkungan utama' yang lenyap). Setiap massa memaksanya membentuk lengkungan tertentu. Pada jarak yang sangat besar dapat dihitung kelengkungan ruang rata-rata dengan mengetahui kerapatan massa jagad raya  $\rho$ . Untuk menghitung kerapatan massa jagad raya harus pula dihitung kerapatan energi/ $c^2$ , misalkan kerapatan energi kinetik atau kerapatan energi medan elektromagnetik, akan tetapi tidak perlu menghitung kerapatan energi gravitasi yang telah dinyatakan dalam kelengkungan ruang.

### 15.4.3 Gelombang Gravitasi

Perbedaan lain antara teori gravitasi Newton dan Einstein terletak pada keberadaan *gelombang gravitasi*. (jangan tertukar dengan istilah 'gelombang berat') Teori Newton dinyatakan dalam persamaan Poisson sebagai  $\nabla^2 = -4\pi p$ , yang menyatakan berapa besar potensial yang timbul karena adanya kerapatan massa  $p$ . Untuk membuat gambaran statik ini menjadi relativistik secara invarian, operator Laplace  $\Delta^2$  harus ditambahkan komponen waktu  $-\partial^2/ck^2\partial t^2$  dan suku ruas kanannya harus pula mengalami modifikasi. Maka sebagai hasil diperoleh persamaan potensial  $\Phi$  empat dimensi, yaitu  $\Phi = \nabla\phi -$

<sup>3</sup>Tameng hitam yang dimaksud adalah sisi luar lubang hitam

$\partial^2\Phi/c^2\partial t^2$ . Persamaan ini tidak lain merupakan persamaan gelombang yang mempunyai kecepatan rambat  $c$ .

Sebagaimana sebuah muatan yang dipercepat, selain menimbulkan medan statik, akan timbul pula gelombang, demikian pula dengan massa, karena pertukarannya terdapat gelombang gravitasi. Karena massa dianggap selalu positif, maka tidak terdapat analogi dengan pancaran dipol Hertz. Pancaran atau radiasi gravitasi paling tidak karena pancaran kuadrupol. Suatu massa yang mengalami 'pelenyapan' akan mengemisikan pancaran monopol. Meskipun terjadi tabrakan radial suatu lubang hitam akan tetapi bukan berasal dari kejadian tersebut, karena medan tetaplah akan ada. Suatu lubang hitam yang tidak mengalami rotasi tidak sekali-kali menimbulkan pancaran kuadrupol.

Setiap massa yang tidak simetri bola mempunyai kuadrupol  $Q$  dan menimbulkan potensial kuadrupol sebagai berikut.

$$\varphi = -G \left[ \frac{M}{r} + \frac{Q}{r^3} \left( \frac{3}{2} \cos^2 \varphi - \frac{1}{2} + \dots \right) \right] \quad (15.40).$$

Deret pada ruas kanan persamaan di atas dibuat dengan membuat deret fungsi simetri bola. Untuk dua massa  $M$  yang sama, yang satu bergerak melingkar pada jarak  $2d$ , akan memberikan  $Q = 2Md^2$  (lihat soal 15.4.13). Momen kuadrupol ini (yaitu berbentuk tensor) akan mengalami perubahan arah dalam gerak melingkar dengan frekuensi  $\omega = \sqrt{GM/4d^3}$ . Daya yang terdapat di dalam gelombang yang dipancarkan oleh sebuah dipol yang bergetar adalah  $\rho \approx \rho^2 \omega^4 / \epsilon_0 c^3$ . Daya suatu pancaran kuadrupol akan diperoleh secara analog, yaitu  $\rho \approx GQ^2 \omega^6 / c^5$  (konstanta kopling listrik  $\approx 1/\epsilon_0$  [lihat § 7.7.7] digantikan dengan konstanta gravitasi  $G$ ; bertambahnya pangkat untuk suku  $w/c$  adalah karena bukan dipol, melainkan kuadrupol). Untuk *bintang ganda* harga daya diperoleh hingga mencapai  $\rho \approx G^4 M^5 / c^5 d^5$ . Daya ini untuk bintang ganda yang massif dan relatif dekat satu sama lain adalah kecil ( $10^{12}$  hingga  $10^{17}$  W). *Bintang-bintang neutron* yang satu sama lain berada saling mendekat berjarak hingga beberapa diameternya,

sebaliknya akan memancarkan energi massanya secara gravitif dan akhirnya dapat dipastikan terjadi tabrakan satu sama lain. Akan tetapi, secara astronomi kejadian seperti itu tidak mungkin terjadi. Sebagai sumber pancaran gravitasi yang sangat intensif lubang hitam yang tidak simetri bola selalu dipertanyakan selama ini yang dihubungkan dengan terjadinya tumbukan bintang-bintang. Tumbukan ini mempunyai konstanta waktu  $\tau \approx 10^4$  hingga  $10^5$  det. (yaitu waktu yang dibutuhkan untuk bergerak dengan kecepatan cahaya di tameng hitam).  $\tau^{-1}$  menggantikan peran  $\omega$  pada ramalan yang akan dibicarakan nantinya.

Untuk *menerima* radiasi atau pancaran gelombang biasanya digunakan penggetar yang sangat sensitif dan akan mengalami getaran sebagai tanggapan adanya pancaran gelombang. Peralatan ini akan memberikan tanggapan jika kurva resonansinya terletak setinggi mungkin dan mempunyai kesesuaian yang baik. Peralatan ini haruslah dapat meredam "getaran dalam". Jika penggetar keseluruhannya dapat berayun ke sana kemari, tidak ada gunanya. Kesesuaian yang baik untuk penggetar adalah: panjang getaran  $l \approx \lambda$  dari gelombang. Di samping itu penggetar ini hanya menerima  $\tau^2/\lambda^2$  bagian dari daya yang dipancarkan gelombang.

Gelombang gravitasi mengeksitasi secara elastik getaran eigen setiap materi. Getaran eigen demikian mempunyai frekuensi  $v_o \approx l/c_s$  ( $c_s$  adalah kecepatan suara). Selanjutnya kondisi  $v_o \approx v$  dan  $l \approx \lambda$  pada dasarnya tidak terpenuhi, karena  $c_s \ll c \approx v \approx \lambda$ . Faktor dissipasi pada resonansi sendiri adalah kira-kira  $c_s^2/c^2$ . Dengan faktor dissipasi  $c_s^2/c^2 \approx 10^{-5}$ , seperti yang terdapat pada kebanyakan logam, maka akan diperoleh  $l \approx 1$  m jika mengalami resonansi dengan sumber berdiameter 100 km. Dengan penerima berbentuk selinder Al dan lempengan yang dapat mengalami deformasi dan bersifat piezolistrik dengan ketelitian yang sangat kasar sejak tahun 1968 Weber mencoba melacak pancaran gelombang gravitasi. Selinder adalah sebagai peralatan inti dari penerima ini, dapat menangkap gelombang yang jatuh secara aksial padanya dan sekaligus mempunyai karakteristik sebagai penyebarluas (antena). Weber mencoba menghilangkan adanya

gangguan *trivial* akibat guncangan lokal atau gempa bumi hanya dengan meletakkan penerima lain pada jarak yang jauh (Baltimore-Chicago) sebagai koinsiden terhadap waktu. Dengan bumi yang mengalami rotasi teleskop gravitasinya memberikan kesan dapat menangkap kejadian sebenarnya jika teleskop dihadapkan ke pusat galaksi. Kejadian-kejadian demikian berlangsung dalam waktu yang singkat, terpancar dengan intensitas  $1 \text{ W/cm}^2$  hanya selama  $10^{-3}$  det. (1 mdet.) dan rata-rata terjadi sekali dalam 1 menit. Dengan jarak sumber kira-kira  $10^4$  tahun cahaya  $\approx 10^{22} \text{ cm}$  akan diperoleh daya total sebesar  $10^{44} \text{ W}$ , yaitu didapat energi kira-kira sebesar  $10^{41} \text{ J}$ . Pusat galaksi haruslah memberikan pancaran gravitasi lebih banyak lagi dibanding melalui pancaran gelombang elektromagnetik, yaitu kira-kira setara dengan beberapa massa matahari. Didiskusikan juga kemungkinan, bahwa pusat gravitasi hanya sebagai *lensa gravitasi* yang hanya menfokuskan pancaran gelombang gravitasi ke arah kita, yang tidak berasal darinya sendiri, melainkan mungkin berasal dari ledakan asal pada saat awal terjadinya alam semesta. Oleh karena itu sukar diperoleh penjelasan yang pasti tentang intensitas yang diamati tersebut. Karenanya timbul suatu pertanyaan bahwa "asap termis" penerima Weber (getaran elastik dengan energi termis  $kT$ / derajat kebebasan) mendekati harga daya yang ditangkap oleh penerima (lihat soal 15.4.14, juga teori asap Nyquist soal 7.2.3). Pada saat ini dikembangkan penerima yang lebih sensitif (kristal tunggal batu *Safir* yang massanya hingga beberapa kg) yang dapat mengatasi keadaan terhadap deviasi termis (didinginkan dengan He cair).

#### 15.4.4 Lubang Hitam

Pada dasarnya istilah lubang hitam (*black hole*) telah dikenal sejak lebih 200 tahun yang lalu. Pendapat ini pertama kali dikemukakan oleh Laplace yang mengatakan bahwa sebuah bintang yang sangat massif sehingga cahaya sekalipun tidak dapat terhindar darinya, yaitu lubang hitam (lihat soal 15.4.7). Jika cahaya terdapat di dalam medan percepatan gaya berat maka syarat kecepatan hamburan cahaya adalah

$$\frac{GM}{R} = \frac{1}{2} c^2 \quad (15.41)$$

Teori relativitas khusus memberikan batasan sebagai berikut. Bahwa karena cahaya tidak dapat menghindar dari lubang hitam, maka tidak satu pengaruh pun yang berasal dari bintang tersebut dapat terbaca di seluruh tempat lainnya di jagad raya yang tersisa. Teori relativitas umum membatasi: Selain dari gravitasinya. Juga diskusi pada § 15.4.1 menunjukkan bahwa potensial gaya berat di ujung bintang ini akan "merusak" semua gambaran ruang yang ada: Di tempat ini semua jam yang ada bagi seorang pengamat yang berada di luar dari sistem akan berjalan tak berhingga lamanya dan apa yang dapat dibayangkan bahwa foton yang berasal dari luar bintang ini akan mempunyai pergeseran merah maksimum, yaitu datang dengan frekuensi nol, jarak-jarak yang diamati dari luar sistem akan mengkerut menjadi nol. Massa bintang akan terikat kuat pada satu titik singularitas dipandang dari dunia kita (ambruk gravitasi=gravitasi collapse).

Sifat-sifat khusus dari materi bintang hingga kini tidak dipersoalkan. Massanya tidak berpengaruh, karena semua materi yang terdapat di dalam medan gaya berat demikian akan lumat menjadi bubur yang tidak diketahui bentuknya. Tidak satu pun yang bersifat materi, juga *nukleoncore* atau quark dapat bertahan dalam tekanan demikian kuatnya. *Tekanan gaya berat* yang terdapat di lubang hitam adalah  $p = GMp/R = pc^2$  (lihat soal 15.4.19 dan 15.4.15). Seandainya terdapat materi di dalam lingkungan demikian, maka kecepatan gelombang suara di dalamnya menjadi  $c_s = \sqrt{p/p} > c$ . Materi demikian dapat mengantarkan suara segera kecepatan melebihi kecepatan cahaya, sehingga seluruh struktur fisika tidak berlaku.

Sebuah *bitang panas* membentuk kembali ambruk gravitasi (*gravitation collapse*), karena tekanan panasnya (dalam beberapa kasus ikut serta pula tekanan radiasi). Sebuah bintang dengan seluruh simpanan (reserve) termonuklirnya habis terbakar (lihat § 17.3.3, bintang katai putih) hanya dapat mempertahankan ketegaran materinya melalui tekanan Fermi. Tekanan Fermi adalah tekanan kuantum dari

partikel-partikel yang satu sama lain saling mendekat secara berlebihan. Tekanan ini akan rusak jika massa bintang yang bersangkutan lebih dari 1,9 massa matahari (*batas* Chandrasekhar: transisi relativistik gas yang mengalami degenerasi, bintang neutron). Nukleon-nukleon dapat bertahan lebih baik. Dengan tercapainya massa yang amat besar, materi bintang mencapai  $p \approx 10^{14}$  g/cm<sup>3</sup> akan terdapat tekanan yang menyebabkan ambruk gravitasi. Dari pers [15.41] diperoleh massa kritis

$$M = \left( \frac{3}{4} \pi \right)^{3/2} c^3 G^{-3/2} \rho^{-1/2}$$

yaitu  $M \approx 10^{34}$  g. kira-kira sama dengan tiga kali massa matahari. Bintang yang demikian massif dipastikan keberadaannya dan jika bintang ini cukup tua, di mana semua bahan bakar inti yang ada padanya telah digunakan habis, maka bintang ini tidak lain akan mengalami tabrakan dengan lubang hitam.

Sebuah bintang karena pergeseran Doppler-nya yang periodik sebagai partner sebuah sistem ganda, dengan diketahui periode dan pergeserannya dapat diramalkan jari-jari lintasan bintang tersebut, sehingga massa partnernya juga dapat dihitung. Jika massa tersebut lebih besar dari harga kritis dan dari partnernya, baik secara optis maupun spektroskopis tidak terlihat secara langsung, diramalkan bintang tersebut diperkirakan sebagai lubang hitam. Untuk itu terdapat beberapa kriteria penentuan suatu lubang hitam: Sebuah lubang hitam menelan semua materi yang datang pada daerah jangkauannya. Sementara pada akhirnya materi yang datang dari "dunia" kita dan masuk ke dalam daerah jangkau lubang hitam akan bergerak dengan kecepatan cahaya, materi juga akan menumbuk sinar Roentgen dan 8,7. Sinar Roentgen astronomi tidak dapat menembus atmosfir untuk sampai ke permukaan bumi, karena diabsopsi oleh atmosfir. Satelit Uhuru yang dibangun pada tahun 1970, dilengkapi dengan peralatan teleskop sinar Roentgen dapat mengamati sejumlah besar bintang ganda dengan sifat-sifatnya yang khusus dan diperkirakan sebagai sumber sinar Roentgen astronomi yang sangat intensif. Salah satu bintang ganda tersebut adalah Cygnus X-1 yang dipastikan dapat

diamati sebagai bintang biru yang mengelilingi lubang hitam yang lama ke lamaan akan tertelan.

Pada masa sekarang ini dipastikan bahwa alam semesta dapat mengalami pemampatan (kompresi) hanya melalui tekanan gravitasi hingga menjadi lubang hitam, yaitu apabila massanya melebihi  $10^{34}$ . Jika ledakan asal yang maha dahsyat (big-bang, lihat § 15.4.7) cukup turbulen, massa lebih kecil yang berasal dari luar dapat pula mengalami pemampatan yang sangat kuat. Lubang hitam mini ini mempunyai massa tidak lebih kecil dari  $10^{16}$  g, karena menurut mekanika kuantum, jika massanya lebih kecil dari harga tersebut akan terjadi pancaran radiasi, sehingga seluruhnya akan menjadi lubang hitam: Suatu ledakan bom hidrogen yang kita anggap sudah dahsyat, adalah hanya ledakan amat sangat kecil dibandingkan dengan big-bang footnote big-bang adalah ledakan asal yang pernah terjadi sebelum alam semesta terbentuk. Ada beberapa kejadian yang masih menjadi teka-teki hingga saat ini, misalnya meteorit yang jatuh di Tunguska dan ditemukan pada tahun 1906 sebagai akibat keadaan transisi terbentuknya lubang hitam mini yang di rasakan di bumi, akan tetapi ramalan tersebut masih spekulatif.

#### 15.4.5 Model Kosmologi

Sejumlah bidang riset modern yang berkembang hingga saat ini merupakan kembangan dari pengetahuan nonrelativistik. Sebuah massa yang amat besar, yang pada awalnya terkemas secara kompak, mengalami ledakan. *Splitter* (galaksi) berterbangan dengan kecepatan beragam, yang tercepat misalnya bergerak dengan kecepatan  $v_o$ . Tumbukan sesama splitter untuk pembahasan pemula ini tidak akan dipersoalkan. Semua kecepatan tetap radial. Di dalam sistem acuan setiap splitter semua materi lainnya akan berterbangan pula secara radial, yaitu semakin cepat jika materi berada pada jarak yang semakin jauh. Hal ini secara sederhana dapat dilihat melalui: Misalkan  $t$  adalah waktu ledakan. Dari pusat ledakan awal splitter bergerak dengan kecepatan  $r_o$  dan jarak  $r_o = r_o t$ . Sebuah splitter lain dengan kecepatan  $r$  dan  $r = rt$  mempunyai jarak relatif terhadap splitter pertama  $d = r -$

$r_o = (r - r_o)t$  dan kecepatan relativ  $v \approx r - r_o$ . Perbandingan  $v/d$  adalah  $t^{-1}$  adalah kebalikan waktu "ledakan awal".

Pada tahun 1929 Hubble mengamati secara persis hal ini: Spektrum galaksi yang berada pada jarak lebih jauh menunjukkan adanya pergeseran merah, yang sebanding terhadap (diukur secara terpisah) jarak. Pergeseran merah diartikan sebagai efek Doppler karena adanya kecepatan radian  $v$ , maka konstanta Hubble didapat sebagai berikut.

$$H = \frac{v}{a} = 75 \pm 25 \text{ km det}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$$

$$= \frac{1}{1,3 \cdot 10^{10} \text{ tahun}} \quad (15.42)$$

Mpc=Megaparsec; 1 pc=3,26 tahun cahaya adalah jarak dari jari-jari bumi terlihat dari sudut penglihatan 1".

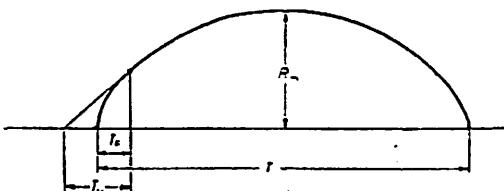
Model sederhana ini mempunyai banyak kelemahan, sehingga gravitasi tidak dapat dipantau. Jika pada saat awal terjadinya jagad raya adalah benar bahwa semua materi terkumpul di satu titik, maka pada saat itu haruslah  $v_o \approx \infty$ , sehingga splitter dapat terlepas dari gravitasi yang maha dahsyat tersebut. Pandangan relativistik yang akan dibahas secara ringkas di sini menolak bahwa  $v > c$ . Selanjutnya ada gangguan dalam model yang telah dibahas di atas, yaitu alam semesta tidak homogen. Karenanya jagad raya terjadi tidak langsung seluruhnya seperti yang disebutkan oleh "postulasi kosmologi", melainkan hanya sebatas bola yang terisi materi, sedangkan di luar darinya tidak ada. Teori relativitas juga menyelesaikan persoalan tersebut. Banyak peneliti "tersandung" pada inhomogenitas waktu: Alam semesta tidak harus terjadi secara bersamaan, seperti yang diharapkan "postulasi kosmologi lanjutan", melainkan pada saat  $t \approx 0$  keadaannya berbeda, pada saat  $t \approx 0$  terjadi keadaan paling ekstrim, sedangkan pada saat sebelum  $t \approx 0$  praktis tidak satu manusia pun tahu. Terdapat teori yang menentang adanya singularitas waktu tersebut (*steady state cosmology*).

Pandang sebuah galaksi yang berada di ujung awan ledakan asal, yaitu berada pada jarak  $R$  dari pusat ledakan. Seluruh massa  $M$  lainnya

yang berbentuk simetri bola akan menariknya, atau dengan perkataan lain mempercepat galaksi dengan perbebatan  $R = -GM/R^2$ . Keadaan ini persis analog yang terjadi pada sebuah roket (§ 1.5.9c):. Kekekalan energi berbunyi:

$$\eta = \frac{1}{2} \dot{R}^2 - \frac{GM}{R} \quad (15.43)$$

$\eta$  adalah energi total/kg. Pada  $\eta > 0$  galaksi, jika diperlambat pula, akan bergerak hingga ke tempat tak terhingga. Untuk  $\eta < 0$  terjadi ekspansi maksimum, yaitu suatu rekonstraksi dengan  $R(t)$  membentuk sikloida. Regangan maksimum adalah sesuai  $R^{\text{maks}} \approx GM/\eta$ , lama waktu tempuh lintasannya adalah  $T = \sqrt{GM|\eta|^{3/2}}$ . Batas antara model ekspansi sepanjang masa dan sikloida terletak pada konstanta Hubble  $H_{\text{kr}} = R/R = 2GM/R^3$ , dengan kerapatan materi jagad raya  $\rho_{\text{kr}} = 3H/\Delta G$ . Kecepatan awal haruslah berharga tak berhingga, berasal dari ledakan asal materi yang terkonsentrasi di satu titik yang



Gambar 15.22: Jari-jari alam semesta yang bergantung waktu berdasarkan model tanpa tumbuhan kosmologi dengan energi total negatif. Kurva lintasan yang berbentuk sikloida haruslah berulang-ulang secara siklik. Dari pengukuran pergeseran merah diperoleh waktu yang sangat besar  $T_H$  (waktu Hubble), yaitu dianggap sebagai waktu terjadinya ledakan asal ( $T_F =$ waktu Friedmann).

sangat kecil. Di samping itu puncak sikloida haruslah di sembarang tempat.

Pada model alam semesta ini (juga pada  $\eta > 0$ ) harga konstanta Hubble hasil pengukuran tidak lagi sebanding dengan kebalikan waktu sejak terjadinya ledakan asal. Pengamatan pada daerah yang berdekatan dengan bumi hanya memberikan sumbangan potongan kecil kurva sikloida dan ekstrapolasi liniernya memberikan tangen pada titik masa kini. Kemiringan tangen ini adalah kecepatan *masa kini*  $R(t)$  dari ujung jagad raya dan menghasilkan harga "konstanta"

Hubble lokal sebesar  $(H(t) \approx R(t)/R(t)) \approx 1/T_H$ . ( $T_H$  adalah waktu Hubble), yang pada gbr. [15.22] lebih besar dari waktu Friedmann  $T_H$

Pengamatan hingga galaksi yang sangat jauh dari sistem tata surya kita menghasilkan bentuk kurva  $R(t)$  yang lebih lengkap. Suatu galaksi yang berjarak  $d$  akan dapat diamati seolah ia telah berada pada waktu  $d/c$ , yaitu masih mempunyai harga kecepatan dan pergeseran merah yang besar. Hubungan antara pergeseran merah  $z \approx \Delta\lambda/\lambda$  dan  $d$  tidak lagi linier, melainkan menjadi *superlinier*. Kuasar (sumber gelombang radio kuasi stellar yang mempunyai harga pergeseran merah hingga  $z \approx 3,56$ ) menunjukkan sifat-sifat ini secara eksak. Sayangnya pengamatan untuk galaksi-galaksi yang sangat jauh tidak lepas dari hipotesa kesalahan pengukuran. Misalnya Cepheiden telah lama tidak lagi diamati; pada pengukuran harus dilakukan perbandingan kontras terangnya pola gambar dari objek serupa yang berhubungan dengan distribusi kerapatan objek yang diamati.

Hingga di sini telah dilakukan pembahasan galaksi yang sangat jauh, terletak di ujung jagad raya. Suatu galaksi yang berada pada jarak  $r$  terhadap pusat jagad raya terdapat gravitasi yang hanya dalam lingkup bola alam semesta. Maka  $R$  pada rumus-rumus yang telah dinyatakan di atas dapat diganti dengan  $r$ . Karenanya bentuk jagad raya tetap simetri bola, jika jagad suatu saat raya telah terisi penuh materi, maka untuk saat-saat lain atau dalam stadium selanjutnya jagad raya tetap homogen.

Jika skala  $x$  dan  $y$  telah ditentukan, sikloida dengan parameter selanjutnya, misalnya jari-jari lingkaran yang bergerak membentuk sikloida akan diketahui. Model jagad raya yang isotrop, bebas rotasi dapat digambarkan melalui 3 parameter sebagai berikut.

1.  $H_0$ , harga masa kini konstanta Hubble; memberikan skala waktu.
2.  $R_0$ , jari-jari jagad raya masa kini; memberikan gambaran tentang skala jarak.
3. Parameter *deakselerasi*  $q_0 = RR/R^2 = GM/R_0^3 H_0^2 \approx 4\pi G p_0/3GH_0^3$  memberikan gambaran bentuk sikloida (pada  $q_0 > 1/2$  dan

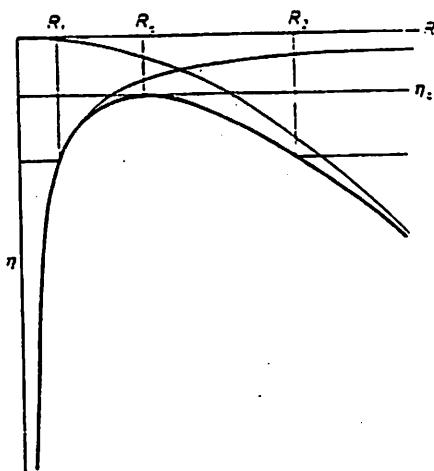
$\eta < 0$  atau penyelesaian keadaan ekspansi ( $q_0 > 1/2$  dan  $\eta > 0$ ). Harga batas adalah pada  $q_0 = 1/2 \approx 0$  berhubungan dengan jagad raya yang kehilangan kerapatan materi dan deakselerasi gravitasi. Pada keadaan  $q_0 = 0$  sendiri semua harga  $R$  adalah mungkin: untuk keadaan lainnya harga  $R$  pada saat awal harus tak berhingga (lihat gbr. [15.22]).

Penentuan parameter di atas hingga saat ini merupakan salah satu inti problematik kosmologi pengamatan. Konstanta Hubble yang diperoleh dengan pengembangan pengamatan indera jauh yang lebih baik berharga "selalu semakin kecil". Harga yang diperoleh berdasarkan pengamatan pada tahun 1975 adalah  $1/3 \cdot 10^{10}$  tahun kelihatannya tetap "stasioner". Harga tersebut dapat dianggap tidak berubah berdasarkan pengukuran besaran-besaran yang diperlukan dengan metode yang berbeda dan pada umur objek yang berbeda (bumi, meteorit, bintang-bintang, galaksi dan lain-lain). Waktu Friedmann diperoleh paling tidak berharga  $8 \cdot 10^9$  tahun. Patut diketahui bahwa pengamatan yang dibuat hingga saat ini belum begitu jauh mencapai daerah kurva sikloida yang diharapkan, apabila hal tersebut dapat dilakukan, maka perbedaan harga konstanta waktu Hubble dan Friedmann akan jauh berbeda. Penentuan parameter  $q_0$  yang paling sukar dibandingkan dengan parameter lainnya, apakah  $q_0$  lebih besar atau lebih kecil dari  $1/2$ , atau apakah jagad raya selamanya mengalami ekspansi, atau sedang kembali untuk membentuk "bola api asal, belum ada kepastian.

#### 15.4.6 Gaya Kosmolgi

Einstein sendiri mengetahui bahwa persamaan-persamaan medan yang diturunkannya tidak mempunyai penyelesaian statik. Ia mencari suatu pengembangan, yang secara matematik tetap konsisten dan menjadikan alam semesta stabil, dan menemukan bahwa harus ditambahkan suku tambahan berupa "gaya kosmologi" yang sebanding dengan jarak. Persamaan gerak dari model nonrelativistik dikembangkan hingga mempunyai bentuk:  $R \approx -GM/R^2 + \Delta R/3$  dan hukum kekekalan energi  $1/2R - GM/R - \Delta^2 R/6 = \eta$ .

Potensial kombinasi dari tumbukan gravitasi dan kosmologi membentuk suatu "gunung" dengan



Gambar 15.23: Kurva potensial jagad raya dengan kemungkinan tumbukan kosmologi. Pada kurva ini pengembangan alam semesta digambarkan sesuai dengan gerak suatu benda yang mempunyai energi awal spesifik  $\eta$ . Pada  $\eta > \eta_c$  terjadi pengembangan tanpa batas, pada  $\eta < \eta_c$  mempunyai sifat siklik dan pada  $\eta \approx \eta_c$  terdapat kemungkinan kesetimbangan labil di titik kulminasi kurva.

tinggi titik kulminasi permukaannya:  $\eta_c \approx -1,1(GM)^{3/2}\Delta^{1/3}$  pada jari-jari  $R_c \approx (3GM/\Delta)^{1/3}$  (Gbr. [15.23]). Sesungguhnya terdapat 3 macam penyelesaian kualitatif persamaan medan gravitasi yang berbeda:

1.  $\eta > \eta_c$ : Jagad raya "mencapai" puncak "gunung" kurva potensial, berarti pula mengembang tak terbatas yaitu dari ledakan asal ( $R \approx 0$ ). Di puncak kurva harga  $R(t)$  dapat berbentuk hampir garis lurus beberapa saat, karena baik gaya gravitasi maupun gaya  $\Delta$  masing-masing relatif lemah. Dalam daerah ini harga jari-jari jagad raya memenuhi  $R \approx GM/\eta$  hingga kira-kira sama dengan  $R_c$ . Khususnya pada  $\eta \approx \eta_c$  garis lurus ini akan menjadi horizontal: Jagad raya dalam waktu yang lama berada dalam keadaan transisi antara mengembang atau rekontraksi.

2.  $\eta = \eta_c$ : Dari harga awal  $R$  (dan  $R$ ) apa yang terjadi kemudian. Pada  $R < R_c$  ( $R \approx 0$ ) jagad raya mengalami ekspansi hingga mencapai  $R_c$ , akan tetapi akan tercapai dalam tempo yang tak berhingga lama (karena  $R \approx 0$ ). Sejarah alam semesta bermula dengan terjadinya *big bang* atau ledakan asal. Pada  $R = R_c$  (dengan diikuti  $R \approx 0$ ), jagad raya berada dalam kesetimbangan labil pada puncak kurva potensial (kosmos statik Einstein). Untuk  $R > R_c$  (dan  $R \approx 0$ ) terjadi ekspansi tanpa batas: dalam waktu yang telah berlalu terdapat keadaan di mana  $R \approx R_c$  (kosmos Lemaire-Eddington). Proses-proses pada keadaan  $R = R_c$  secara prinsip dapat berjalan sebaliknya (kontraksi pada  $R \approx 0$  dari  $R \approx R_c$  menuju ke masa depan yang sangat jauh, untuk  $R \approx \infty$  menuju ke masa lampau yang sangat jauh), akan tetapi efek Hubble ( $R > 0$ ) menghadang keadaan ini untuk keadaan jagad raya kita ini.

3.  $\eta < \eta_c$  dan  $R < R_c$ : Alam semesta terletak dalam keadaan meniti puncak (keadaan sebelum, hampir mencapai puncak):  $R(t)$  membentuk sikloida yang bagian puncaknya, karena adanya gaya  $A$  dapat mengalami modifikasi. Jagad raya mengembang hingga mencapai  $R_1 = GM/\eta$  dan kemudian kembali mencuat.

4.  $\eta < \eta_c$  dan  $R > R_c$ : Jagad raya tetap terdapat sebelum mencapai puncak potensial. Penyelesaiannya berbentuk cosinus hiperbolik ( $\cosh$ ) untuk soal 1.4.10. Alam semesta mengalami ekspansi tanpa batas, akan tetapi di masa lampau tidak pernah terjadi ledakan asal, melainkan telah terdapat harga  $R$  yang datang tak berhingga dengan harga rata-rata  $R_2 \approx \sqrt{6\eta/A}$  mengalami penurunan dan kembali meningkat sejak harga jari-jarinya  $R$ .

A dapat berharga negatif (tarik menarik kosmologi). Dalam hal ini setiap keadaan ekspansi tak berbatas tertutup kemungkinannya. Pada harga  $R$  yang besar, di mana gravitasi tidak lagi berperan penting, akan terdapat keadaan vibrasi.

Model jagad raya macam apa yang harus dibuat, hingga saat ini belum dapat ditentukan. Keberatan suku kosmologi  $A$  berdasarkan segi estetika kemudian masih dipertanyakan, karena alasan fisis suku ini tidak "terlihat" sama sekali.

Suatu gaya persis dengan gaya yang sebanding jarak akan didapat jika material berbentuk bola adalah tegar, yaitu jika seluruh bagian material tersebut mempunyai  $w$  yang sama. Idea ini secara dinamis umumnya sukar direalisir dan melukai kaidah simetri yang sudah biasa tercermin di alam semesta. Hal yang mempunyai arti fisis umumnya dapat diandaikan adanya "sumber" di ruang karena adanya "fluktuasi kuantum" di vakum, mirip seperti yang diadaikan pada kuantum elektrodinamik. Belum diketahui dengan baik kebenaran idea ini dan apakah  $A$  umumnya mempunyai harga tidak nol atau mempunyai tanda negatif atau positif.

Patut disadari bahwa hasil sederhana yang digambarkan di atas akan menjadi lebih kompleks jika dijelaskan melalui teori relativitas khusus dan umum. Dalam perhitungan akan muncul, jika jari-jari kelengkungan jagad raya  $R(t)$  diketahui, yaitu jarak terjauh yang paling mungkin, maka akan diperoleh pilihan yang persis sama dengan model yang dikembangkan dalam kosmologi nonrelativistik. Akan tetapi, karena  $R$  adalah jarak terjauh yang paling mungkin, akan timbul pertanyaan, apa yang terjadi disebalik hal tersebut. Inhomogenitas antara "di dalam terdapat sesuatu-di luar tidak: akan tersingkirkan. Selain itu semua kecepatan lainnya akan lenyap pula karena  $R \approx c$ .

$R$  adalah jarak terjauh yang paling mungkin, karena ruang melengkung. Kelengkungan ruang dapat berharga positif, nol atau negatif. Bergantung pada harga rata-rata kerapatan energi, yang akhirnya bergantung pula pada kerapatan massa diam yang terdapat di dalam ruang. Faktor ketergantungan tersebut tidak lain yang kita kenal sebagai  $\eta$  dan harga besaran ini adalah sama di seluruh jagad raya, tidak hanya di ujung jagad raya seperti dinyatakan pada pers. [15.43]. Di ujung alam semesta terdapat sejumlah besar galaksi yang jika diamati dari sisi kita, energi dalam galaksi-galaksi tersebut terpancar seluruhnya karena gerakannya: Foton-foton yang datang dari galaksi-galaksi tersebut bagi kita mengalami pergeseran merah dan bahwa frekuensi dan dengan demikian energinya akan menuju nol. Sehubungan dengan itu, berlaku pula untuk setiap materi. Di sana kerapatan energi dinyatakan dalam  $\eta$ . Untuk  $r < R$  terdapat sebagian

besar energi diam dan harga  $\eta$  yang terdapat di sana adalah terbatas kecil yang di semua tempat mempunyai kerapatan energi yang sama, seperti yang diharapkan oleh postulasi kosmologi.

Energi atau kerapatan massa berdasarkan teori gravitasi Einstein mempunyai syarat terdapat di dalam ruang melengkung. Ruang tersebut positif seperti dalam kasus permukaan bola dua dimensi, jika  $\eta > 0$  (sferis atau ruang Einstein). Kelengkungan berharga nol jika  $\eta = 0$  (bidang datar atau ruang euklid), negatif seperti pada permukaan balik untuk  $\eta < 0$  (ruang hiperbolik atau ruang Lobatchevskibolyai). Ruang sferis atau bola ( $\eta > 0$ ) pada akhirnya menuju ke lubang hitam yang maha besar dengan  $R$  adalah jari-jarinya. Tipe ruang seperti ini muncul, seperti telah diketahui sebelumnya, adalah model jagad raya yang dikembangkan karena pengembangan ruang yang tak berbatas berasal dari ledakan asal. Secara kualitatif berlaku pula hal yang sama untuk "ruang" berbentuk bidang dan juga untuk ruang hiperbolik jika  $\eta > \eta_c$ . Hanya untuk  $\eta < \eta_c$  terdapat penyelesaian sikloida dan cosinus hiperbolik.

Model-model yang dikemukakan di sini telah dibahas oleh Friedmann (1924) secara tuntas. Gott dkk. mencoba menemukan model yang mana dari semua model yang dikembangkan sesuai dengan kenyataan yang ada di jagad raya kita.

#### 15.4.7 Ledakan Asal atau Steady State ?

Pada mulanya orang tidak percaya bahwa bintang-bintang dapat membentuk unsur-unsur termonuklir berat. Karena pada keadaan temperatur ekstrim dan perbandingan kerapatan sekalipun unsur-unsur yang terbentuk paling hanya menjadi besi. Di samping itu jelas, misalnya Uranium tidak terdapat sejak alam semesta tercipta, melainkan tidak lebih lama dari  $10^{10}$  tahun yang lalu. Untuk pembentukan unsur-unsur berat harus dipostulasikan, bahwa kejadian yang pernah ada adalah melebihi keadaan ekstrim yang terdapat di dalam bintang-bintang tersebut dan di samping itu kejadian tersebut berlangsung tidak lebih lama dari  $10^{10}$  tahun yang lalu. Efek Hubble

sebagai ekstrapolasi balik yang menganggap keadaan awal mempunyai kerapatan yang amat sangat besar kelihatannya dapat menjelaskan dengan baik kedua peristiwa di atas. Gamov, Lemaitre dkk. mengembangkan teori asal dari unsur-unsur dengan anggapan adanya penangkapan neutron sehingga dapat menjelaskan distribusi nuklida-nuklida yang sering terdapat di ruang angkasa dengan baik. Masih sebelum saat terjadinya pembentukan inti pada awalnya partikel elementer harus dibentuk terlebih dahulu. Teori ini berhasil mendukung bahwa terdapatnya kerapatan radiasi isotrop pada saat sekarang ini, yang kompresinya pada ekstrapolasi balik diperoleh harga temperatur yang sangat tinggi (lihat soal § 5.5.13), yaitu sekira  $10^9$  K pada saat terjadinya inti unsur-unsur dan  $10^{13}$  K pada saat terbentuknya berbagai hadron ( $kT \approx mc^2$ ).

Pada tahun 1965 Penzia dan Wilson berhasil menemukan pancaran gelombang radio sesuai dengan distribusi energi Planck, yaitu sama dengan 2,7 K dan diketahui pula munculnya pancaran tersebut adalah isotrop, sama di seluruh tempat. Penemuan ini sesuai dengan perkiraan Gamov tentang pengenceran materi pada saat awal terbentuknya jagad raya. Di samping itu penemuan ini juga menjatuhkan teori awal pembentukan berbagai unsur yang dijelaskan sebagai berikut: Seandainya inti berat yang terdapat di dalam bola api juga tidak stabil, akan terbentuk pula inti helium berat, yang ternyata dikemudian hari tidak terbukti kemungkinan pembentukannya. Selain itu justru di bintang dingin ditemukan spektrum *Teknetium* dengan isotopnya mempunyai waktu paruh hanya  $2,6 \cdot 10^6$  tahun. Pembentukan inti berat pada dasarnya adalah terbentuk melalui proses normal di dalam bintang dingin. Karenanya dapat diperkirakan waktu paruh supernova terjadi selama 55 hari berhubungan dengan isotop *Kalifornium*  $^{234}\text{Cf}$ . Dilihat dari fenomena di atas, pada saat sekarang ini tidak berhubungan dengan terjadinya ledakan asal.

Dari situasi demikian (sebelum ditemukannya pancaran gelombang radio 2,7 K) Hoyle, Bondi dan Gold mengemukakan suatu teori bahwa singularitas yang menghindari terjadinya ledakan asal adalah memenuhi postulasi lanjut kosmologi (waktu juga dianggap homogen).

Karena alam semesta terlihat mengembang harus pula dianggap bahwa kerapatan materi rata-rata alam semesta adalah konstan yang timbul sebagai akibat hukum alam yang baru, yaitu selalu terbentuk materi dari sesuatu yang tidak ada. Harga kerapatan yang paling mungkin adalah  $\rho_0 \approx 10^{-29} \text{ g/cm}^3$  yang juga seuai dengan jari-jari jagad raya  $R = c/H$   $1,3 \cdot 10^{10}$  tahun cahaya (lihat pers. [15.42]). Terdapat kehilangan materi dengan laju  $\rho_0 R^2 c$  di bawah horison peristiwa yang terletak pada jarak  $R$ . Maka haruslah terdapat materi baru sebagai pengganti sebanyak  $p_0 c/R = p_0 H \approx 10^{-47} \text{ g cm}^{-3} \text{ det}^{-1}$ . Di seluruh atmosfir bumi kira-kira sama dengan terbentuknya 1 neutron/det., yang dengan pembuktian langsung membuat teori ini tidak terbukti.

Alasan penting yang bertentangan terhadap homogenitas waktu di alam semesta berhubungan dengan distribusi *kuasar*. *Sumber gelombang radio kuasi stellar* ini pada mulanya tidak dapat ditemukan sumbernya dengan cara teleskopik, kemudian sebagian dapat diidentifikasi sebagai objek optik yang mempunyai pergeseran merah  $z = \Delta\lambda/\lambda$  yang luar biasa besar ( $\Delta\lambda/\lambda$  berharga hingga 3,56!) dan selain intensitas gelombang radionya yang tinggi, juga menunjukkan spektrum di luar UV. Sejak ditemukannya gelombang ini, bahwa secara optis dapat pula diidentifikasi objek dengan  $z = \Delta\lambda/\lambda$  yang besar, maka harga  $z$  ini dapat digunakan sebagai petunjuk adanya kuasar, apakah objek tersebut dapat mengemisi gelombang radio dengan kuat atau tidak. Pada galaksi biasa sebaliknya hanya ditemukan dengan harga  $z$  hingga 0,4.  $z$  secara kosmologi memberikan arti, yaitu menurut pengertian efek Hubble, bahwa kuasar terjauh haruslah terdapat pada jarak 10 kali jarak galaksi terdekat yang masih dapat terlihat. Keduanya mempunyai pola terang yang mirip (19 kali lebih besar) dan untuk kuasar mempunyai pola terang 100 kali dari galaksi. Dari kesimpulan ini terdapat keanehan, bahwa pola terang berbagai kuasar hanya mempunyai deviasi periode beberapa hari. Hal ini dapat dipikirkan, jika diameter kuasar tidak melebihi beberapa 'hari cahaya', karena bagian suatu pemancar yang demikian besar pada prinsipnya emisinya tidak terkoordinasi sedemikian, secara sederhana karenanya karena kejadian bersamaan dari berbagai bagian tersebut tidak

*terdefinisi*: 'sembarang tempat absolut' adalah sangat lebar. Pola terang dari 100 galaksi yang terdapat di dalam ruang demikian kecil (tidak lebih besar dari ruang sistem matahari kita) seolah tidak terbayangkan, hingga orang menemukan peristiwa yang terjadi di dalam inti galaksi normal (galaksi Seyfert), yang diketahui, akan tetapi bagaimana mekanisme fisis yang terjadi masih belum dapat dijelaskan.

Untuk menentukan apakah terjadi ledakan asal atau *steady state* penting untuk mengetahui distribusi ruang dari kuasar, yaitu kenyataan, bahwa hampir seluruh kuasar terdapat pada jarak yang sangat jauh. Di dalam volume yang sama mengandung demikian banyak kuasar, semakin jauh letaknya dari kita. Penjelasan yang paling memuaskan yang dapat dibuat hingga saat ini adalah bahwa kuasar, seperti halnya peristiwa pertukaran energi suatu sistem yang kecil, tidak mengagetkan jika cepat 'terbakar' dan bahwa kuasar-kuasar ini terdapat di dekat awal terjadinya jagad raya ini. Sesungguhnya semua kuasar telah habis terbakar, dana apa yang kita lihat dari kejauhan adalah hanya karena cahayanya telah bergerak lebih dari  $10^9$  tahun. Model *steady state* tidak memunculkan sesuatu yang dapat menyala.

15.1.1. Sejak pengukuran secara astronomis ditemukan sejak 1000 tahun masehi) panjang waktu 1 tahun dapat diketahui mempunyai perbedaan tertinggi sebesar 10 menit. Setelah kronometer presisi ditemukan (lebih kurang 100 tahun lalu), perbedaan waktu tersebut dapat dicapai hingga 0,1 detik. Tidak ditemukan petunjuk bahwa sejak terbentuknya kambrium (awal jagad raya; kurang lebih  $5 - 10^8$  tahun yang lalu) perbedaan waktu mencapai lebih dari 30%.

Ramalan apa yang memberikan perbedaan waktu terkecil? Apa yang terjadi jika jari-jari dan kecepatan lintasan orbit bumi mengalami perubahan? Jika terdapat pembentukan kembali medium antarplanet, bagaimana pengaruh gaya penggeraman maksimum yang bekerja terhadap bumi? Berapa besar kerapatan maksimumnya, khususnya jika ether hipotetis benar-benar terdapat? Ramalan selanjutnya yang berhubungan dengan adanya ether tersebut adalah bahwa panas yang muncul akibat adanya gesekan dengan medium seharusnya tidak

lebih besar dari panas radiasi matahari di bumi (konstanta radiasi matahari lihat soal 11.2.2). Akibat meteorologis apa yang dapat muncul selain itu? Jika seandainya sumber gelombang elastik ether mengalami getaran, sifat elastis apa yang dipunyai ether? Ingatlah bahwa getaran gelombang cahaya adalah transversal! Berikan ramalan untuk besaran elastik yang dipostulasikan dan bandingkan dengan besaran elastik bahan biasa.

15.1.2. Dua perenang terbaik bertanding untuk memecahkan rekord dunia. Salah satu perenang (*A*) berenang mengarungi sungai pada arah vertikal dan kembali ke tempat semula; perenang lainnya (*B*) berenang mengikuti arus sungai dan kembali ke tempat semula. Dengan sudut berapa *A* harus tetap berenang, agar ia dapat sampai persis di titik yang tepat di seberang? Perenang yang mana yang akan sampai di titik tujuan lebih dahulu dan berapa lama? Dianggap bahwa kecepatan arus di semua tempat di sungai adalah sama.

15.1.3. Percobaan Michelson. Cahaya monokromatik yang berasal dari sumber *L* dipisahkan menjadi dua berkas sinar oleh cermin berbentuk setengah bola (*p*) secara koheren dengan intensitas yang sama; setelah melewati jarak *l*, melalui cermin *A'B'* dan *A''B''*, masing-masing berkas akan dipantulkan dan disatukan kembali di titik *p* di titik terakhir sinar-sinar tersebut akan mengalami interferensi (lihat gbr. [10.16]).

Pandang suatu berkas ideal dengan penampang lintang berbentuk titik. Bagaimana bentuk pola interferensi jika:

- a) lengan lintasan cahaya persis sama panjang.
- b) jika keduanya berbeda persis setengah panjang gelombang?

Apa fungsi plat kompensator *P'*? Berapa seharusnya panjang lengan agar dengan bergeraknya laboratorium dan bumi terhadap ether hipotesis misalnya dengan kecepatan lintasan orbit bumi mempunyai perbedaan waktu sama dengan setengah periode? Apakah secara mekanis dimungkinkan untuk dua lengan sepanjang ini dapat dibandingkan dengan  $\lambda/2$ ? Bagaimana perubahan pola interferensi jika peralatan diputar  $90^\circ$ , sehingga peran kedua lengan bertukar? Apa

artinya menurut Anda jika tidak terdapat perubahan pola interferensi? Dapatkah dibuat pengukuran sesaat bahwa bumi relatif diam terhadap ether? Apabila benar, efek apa yang akan diperoleh setelah 6 bulan kemudian? Jika kembali tidak diperoleh apa-apa, apa yang dapat Anda jelaskan? Dengan faktor berapa lengan harus diubah terhadap 'angin ether' untuk mengkompensasikan perbedaan waktu tempuh?

#### 15.1.4. Bagaimana bentuk grafik perjalanan:

1. untuk kendaraan di garis lintasannya
2. untuk kapal laut di permukaan laut,
3. untuk pesawat terbang (dengan memandang dimensi ketinggian).

Bagaimana bentuk grafik perjalanan untuk masing-masing kasus di atas jika diamati dari

- (a) pesawat terbang dalam keadaan diam,
- (b) pesawat dengan kecepatan konstan,
- (c) terjadinya tabrakan,
- (d) bagaimana kecepatan dan percepatan dapat diketahui dari grafik tersebut?

Peran apa yang berperan untuk kasus kapal laut untuk pertanyaan a) hingga d), bagaimana dengan proyeksi peta perjalanan dengan pemilihan laut tertentu?

15.1.5. Sebagai jalan keluar dari dilemma Michelson Ritz menyaran-kan, cahaya selalu *merambat relatif terhadap sumbernya* pada semua arah dengan kecepatan  $c$ . Apakah hal ini juga dapat dijelaskan menurut percobaan Michelson? De Sitter membuat argumentasi sebagai berikut: Terdapat bintang ganda, yang masing-masing saling mengelilingi satu sama lain dan mempunyai periode beberapa jam. Orang mengukur kecepatan radial periodiknya relatif terhadap bumi dapat diukur berdasarkan efek Doppler (spektroskopi bintang ganda). Seandainya Ritz benar, apakah spektrum-spektrum bintang ganda mempunyai bentuk tidak beraturan? Atau bagaimana menurut Anda?

15.1.6. Dalam ceramah tentang teori relativitas dari Eddington di Edinburgh, seorang pendengar bertanya: 'Sir Arthur' Anda kelihatannya

letih, dan saya mengerti akan hal itu, karena sepanjang hari Anda harus melakukan perjalanan panjang kemari. Apa yang tidak saya mengerti adalah apa yang Anda katakan, bahwa adalah sama saja apakah Anda datang mendekati kami atau kami datang mendekati Anda. Khususnya untuk kasus kedua, bukankah tidak ada alasan bahwa Anda lelah? Apa yang dapat Anda katakan tentang percakapan di atas?

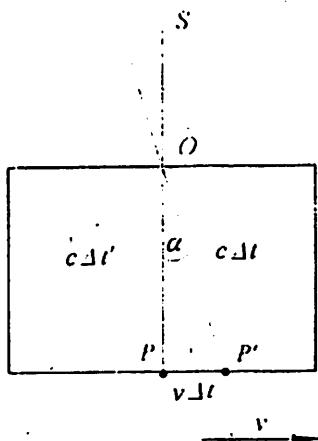
15.1.7. Orang berpendapat bahwa bintang-bintang pada akhirnya haruslah diam, karena selama bintang-bintang, ia selalu akan memancarkan cahaya, atau dengan perkataan lain, kerapatan energinya adalah lebih besar dibanding dengan sekitarnya, yang menyebabkan akan terjadinya gaya penggeraman tambahan akibat tekanan radiasi. Apakah pendapat ini benar? Apakah terdapat faktor akustik yang serupa?

15.1.8. Dua muatan berlawanan dipisahkan oleh jarak  $d$  sehingga muatan dalam keadaan setimbang, karena gaya tarik menarik Coulomb dapat dikompensasikan oleh gaya total menolak. Berapa besar gaya dan medan yang bergerak dengan kecepatan  $v$  tegak lurus terhadap garis hubung kedua muatan. Bagaimana kelakuan gaya tambahan terhadap gaya Coulomb? Apakah jarak kecepatan akan tetap sama? Berapa besar faktor perubahannya, jika dianggap bahwa perbedaan ini tetap kecil? Bagaimana kelakuan bidang kristal NaCl yang terletak tegak lurus terhadap  $v$ ? Bagaimana dengan reaksi permukaan tetanggannya?

### Soal-Soal § 15.2

15.2.1. Laporan pada tahun 1971: 'Jam cepat menunjukkan waktu terlalu cepat! - dua ilmuwan Amerika...meletakkan dua jam atom di dalam sebuah pesawat jumbo jet di deretan tempat duduk keempat. Dua jam atom dengan tipe sama menunjukkan ketepatannya, dibandingkan dengan jam yang terdapat di Naval Observatory di Washington... pada penerbangan pesawat ke arah selatan, jam atom cepat menunjukkan waktu lebih cepat satu per seratus milyard detik... tidak mudah untuk dimengerti hasil penerbangan pesawat ke arah barat.. Jam pembanding di bumi sekarang menunjukkan lebih cepat satu per tiga ratus milyard detik..."

Apa yang dapat Anda katakan dengan laporan di atas? Sebaiknya pisahkan antara ramalan fisis murni dan teknik ketelitian pengukuran. Apakah secara fisis murni memang terdapat perbedaan waktu? Apakah besarnya perbedaan waktu menurut laporan di atas dalam orde yang benar (Anda segera mengetahui adanya kesalahan dalam laporan tersebut: darimana asal kesalahan tersebut?). Apakah Anda percaya



Gambar 15.24: Gedanken experiment untuk transformasi Lienard.

adanya perbedaan waktu antara penerbangan ke arah selatan dan barat? Berikanlah penjelasan dengan menggunakan sistem acuan dengan pengamat tidak ikut dalam gerak rotasi bumi. Anda bahkan dapat meramalkan kecepatan pesawat terbang sekaligus. Apakah hasilnya dapat diterima secara logis? Pada perlakuan konsekuensi mustilah diperoleh hasil yang sama jika sistem acuan diambil untuk pengamat yang ikut serta dengan gerak rotasi bumi. Apa yang harus diperhatikannya?

Apakah kesalahan dari jam pembanding sesuai dengan ketelitian yang sesuai secara teknis (berdasarkan korektur kesalahan dari penulis laporan)? bagaimana cara menguji kesalahan tersebut? Seandainya situasi di satelit memungkinkan (satelit bumi, satelit eksentris matahari). Bagaimana membandingkannya?

15.2.2. Pada saat sekarang ini, sebuah roket dengan kecepatan  $v$  (misalnya  $v = c/2$ ) melewati kita, seseorang memotret roket dari celah  $O$  dan melihat cahaya bintang  $S$  persis di titik  $p$  yang terletak di sebuah dinding. Peristiwa ini akan digambarkan melalui berkas cahaya, yang selama berkas bergerak melintasi jarak  $OP$ , titik  $p$  bergerak terus mendekati titik  $P'$  yang terletak pada sudut  $a$  terhadap  $OP$  (berapa besar  $a$ ?). Misalnya waktu antara dua titik kejadian "katup kamera terbuka" dan 'cahaya mencapai  $p$ ' bagi kita adalah  $\Delta t$ , sedangkan bagi para astronot adalah  $\Delta t'$ . Bagi keduanya kecepatan cahaya adalah sama. Untuk itu dibuat gambar. Khususnya apakah gambar dengan simbol panjang benar adanya?

Hubungan apa yang terdapat antara  $\Delta t$  dan  $\Delta t'$ ? Apakah pada astronot dan kita akan melihat bintang pada arah yang sama? apakah efek ini tidak muncul untuk bumi yang bergerak? Berapa besarnya? Di mana sebenarnya bintang terletak? Gambarkan skema sedemikian, sehingga kita dapat melihat bintang berada pada arah 'tegak lurus' dan cari kunci persoalan yang ada! Apakah secara kuantitatif bintang terletak sama seperti sebelumnya? Jika tidak mengapa?

15.2.3. Hipotesa 'vitalistik' mengasumsikan: Semua peristiwa fisis yang terjadi di sistem  $S'$  yang bergerak dengan kecepatan konstan terhadap sistem  $S$ , berdasarkan dilatasi waktu menurut Einstein akan lebih lambat, sebaliknya semua proses biologis dan psikis sebaliknya. Kembangkan suatu metode yang mengandung sistem inersial relatif satu terhadap lainnya, khusus jika salah satu berada dalam keadaan absolut diam. Apa yang didapat dari metode ini? Anda mengamati seorang astronot bergerak dengan  $v = 0,99 c$ . Gambarkan hari-hari yang dilaluinya. Bagaimana astronot menggambarkan hari-hari yang dilaluinya? (semua dengan asumsi 'vitalistik').

15.2.4. Berikut adalah kenyataan empiris dari myon (8,25 meson) yang terdapat pada radiasi kosmik:

1. Sebuah myon diam mempunyai massa 207 massa elektron dan waktu hidup  $2,2 \cdot 10^{-6}$  det.
2. Di permukaan bumi rata-rata dideteksi adanya 5 myon untuk setiap  $1 \text{ cm}^2$  setiap detiknya. Energi rata-ratanya adalah 1 GeV.

3. Myon-myon ini terbentuk pada ketinggian 12-15 km di atas permukaan bumi (melalui peluruhan pion yang berasal dari tumbukan inti dari inti primer kosmik).

Diskusikan 'sejarah' sejumlah myon yang terbentuk pada ketinggian  $h$  dan mempunyai waktu hidup  $\tau$ ! Berapa bagian myon yang akan sampai di permukaan bumi (maksimum)? Dengan dasar fakta pada angka 1, 2, dan 3: Berapa besar kerapatan fluks myon pada ketinggian 13 km?

Berapa besar fluks kerapatan energi paling tidak yang terdapat dalam, peristiwa ini (di samping myon terbentuk pula elektron)?

Bandingkan fluks kerapatan energi ini dengan kerapatan radiasi matahari secara termis maupun optis (konstanta matahari  $2 \text{ cal/cm}^2 \text{ menit}$ )!

Di mana akhirnya energi dari radiasi kosmik ini akan diabsorpsi, di mana pula sinar matahari?

Pandang penggunaan energi di permukaan bumi dan atmosfir (lihat soal-soal pada § 5.4: Temperatur di permukaan bumi dan atmosfir, distribusi  $\tau$  dan pengaruh lapisan atmosfir!). Jika pengaruh-pengaruh ini menyebabkan terjadinya hal yang bertentangan (paradoks) dengan kenyataannya, di mana letak penyelesaiannya?

Fermi menjawab: dilatasi di dalam waktu! Mengapa?

Jika seluruhnya telah Anda diskusikan, cari suatu pembuktian eksperimental dan ukurlah kerapatan fluks myon, juga pada ketinggian seperti di atas! Anda akan menemukan myon dengan dua energi:

Ketinggian [km] 0.4 [GeV] 1.5 [GeV]

0	5	0.2
4	11	1.6
13	25	10.0

Apakah ketergantungan terhadap ketinggian mempunyai pengaruh yang sama? Jika tidak, bagaimana dapat dijelaskan perbedaannya?

Apakah hipotesa yang terdapat di atas dapat Anda buktikan kebenarannya?

5. Penurunan kerapatan fluks myon di dalam air adalah sebagai berikut: setelah melewati lapisan dengan ketebalan 50 m masih terdapat fluks sebesar 1/100 dibanding fluks awal. Absorpsi partikel cepat semacam itu hanya kerapatan, bukan macam atau keadaan dari bahan pengabsorpsi (absorber) yang berperan penting.

Lakukan koreksi dari data pengamatan di atas dengan membubuhkan adanya absorpsi myon di atmosfir!

15.2.5. *Efek Doppler transversal.* Ion  $\text{He}^+$  mengalami percepatan di dalam kuat medan berbeda (potensial pemercepat adalah  $V$ ) dan dieksitasi untuk menimbulkan cahaya. *Emisi* diamati terjadi *persis* tegak lurus terhadap arah berkas ion. Diperoleh seri spektrum emisi (seri Pickering) sebagai berikut:

$V$ [MV]	$\lambda$ [nm]			
0	656,0	541,2	485,9	433,9
1	656,2	541,3	486,1	434,0
3	656,6	541,6	486,3	434,2
10	657,8	543,7	487,2	435,1
30	661,4	545,6	489,8	437,5

Gambar dan jelaskan prosedur percobaan! Kesulitan apa yang terdapat dalam pengukuran ini? Perhatikan dengan seksama kata-kata 'persis tegak lurus'!

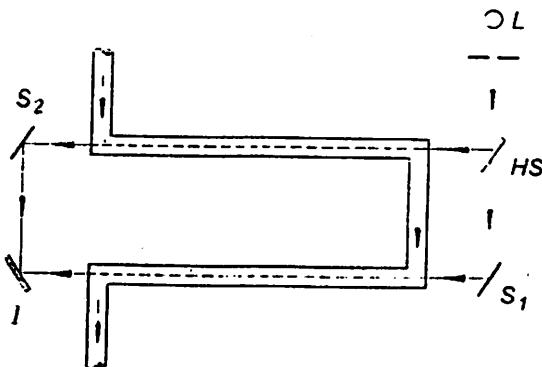
Jelaskan tabel kolom pertama tabel di atas!

Apa arti angka-angka yang terdapat pada kolom tabel tersebut (berilah penjelasan kuantitatif)? Data mana yang terdapat pada tabel menurut Anda merupakan kesalahan pengukuran atau protokoler?

Berilah arti angka-angka tersebut secara kuantitatif! Apakah Anda menggunakan angka tersebut untuk perhitungan statistik?

Berapa frekuensi spektrum bagi seorang pengamat yang berada pada arah berkas? Apa yang terjadi jika berkas cahaya masuk ke dalam kolimator?

15.2.6. Dari sebuah roket raksasa  $R_1$  yang bergerak relatif terhadap bumi dengan kecepatan  $v = c/2$ , diluncurkan sebuah roket kecil  $R_2$  yang selanjutnya bergerak dengan kecepatan  $c/2$  relatif terhadap  $R_1$ .  $R_2$  melepaskan sebuah roket yang lebih kecil  $R_3$ , kemudian  $R_3$  bergerak relatif terhadap  $R_2$  dengan kecepatan  $c/2$ , dan seterusnya selama hal ini dapat direalisir secara teknis. Semua kecepatan terletak pada arah yang sama. Carilah kecepatan masing-masing roket relatif terhadap bumi! Apakah mungkin dibuat roket yang dapat mencapai lebih kecepatan cahaya? Berapa tingkat dapat direalisir pembuatan roket demikian?



Gambar 15.25: Percobaan Fizeau untuk mengukur kecepatan cahaya di dalam cairan bergerak.

15.2.7. Percobaan Fizeau. Cahaya berasal dari sumber monokromatis  $L$  dipisahkan menjadi dua oleh cermin yang dapat ditembus setengah bagian  $HS$ . Dua berkas cahaya tersebut dilewatkan pada pipa yang panjangnya  $l$  dan di dalam pipa terdapat cairan (indeks bias  $n$ ) yang mengalir dengan kecepatan  $v$  dengan arah sesuai yang diberikan oleh tanda panah. Berkas cahaya kemudian disatukan kembali pada layar interferensi  $I$ , di mana beda fase kedua berkas dapat ditentukan.

Pengukuran dilakukan demikian, yaitu dengan mengubah-ubah kecepatan aliran  $v$  dari 0 hingga  $v_1$ , sehingga diperoleh perbedaan fase berkas cahaya sebesar  $\lambda/2$ .

Bagaimana menentukan beda fase kedua berkas?

Diskusikan rincian percobaan dengan lebih teliti!

Darimana asal perbedaan fase berkas cahaya tersebut?

Hasil percobaan untuk berbagai cairan, untuk panjang pipa  $l = 3$  m adalah sebagai berikut.

Cairan	Indeks bias $n$	Kecepatan $\lambda/2$ [m/det]
Air	1,33	15,9
Etanol	1,36	14,8
Benzol	1,50	10,2
$H_2SO_4$	1,63	74,

Hal selanjutnya ketergantungan ini tidak berarti lagi. Apa saja? Cari rumusan kecepatan cahaya (kecepatan fase) untuk medium di atas! Bagaimana rumusan tersebut dapat diinterpretasikan? Cari secara relativistik! Dapatkah Anda membuat penjelasan klasik tentang hal ini? Dapatkah seseorang yang percaya akan adanya ether membuktikan, bahwa kecepatan tersebut dipengaruhi oleh cairan? Benarkah itu? Apakah ketelitian pengukuran dapat dipertanggungjawabkan untuk menentukan, misalnya, untuk membedakan  $\Delta c = 1/(1 - n^2)$  dan  $\Delta c = (a + nb)v$  ( $\Delta c$ : deviasi kecepatan fase di dalam cairan diam dan bergerak)?

15.2.8. Pada § 15.2.5 dibahas transformasi suatu percepatan  $a$  dari satu sistem ke sistem koordinat lain, dengan kecepatan relatif  $v$  searah dengan  $a$ . Turunkan suatu transformasi untuk  $a$   $v$ !

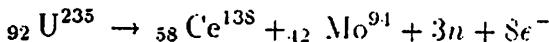
15.2.9. Di dalam sebuah siklotron terdapat sebuah muatan dengan kecepatan sudut  $w = Ze B/m$  ( $m$ : massa;  $Ze$ : muatan;  $B$ : medan magnet; lihat § 13.3.3). Percepatan partikel disebabkan oleh medan listrik

bolak-balik dengan frekuensi yang tetap di dalam ruang antara pengacu partikel berbentuk 'D'. Dengan cara demikian diketahui bahwa proton hanya dapat dipercepat hingga energi maksimumnya mencapai 400 MeV, tidak dapat lebih dari itu. Mengapa?

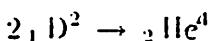
15.2.10. Bagaimana jawaban Anda tentang pepatah kuno: 'timbangan mana yang berlebih, tumbukan kayu atau asap dan abu yang berasal dari kayu tersebut', dalam pandang teori relativitas? Di dalam 'asap' tentunya terdapat  $\text{CO}_2$  dan  $\text{H}_2\text{O}$ . Bagaimana segi praktis- kuantitatifnya?

15.2.11. Energi bahan bakar mana di antara pernyataan berikut:

a) Pada reaksi penguraian karakteristik:



b) pada peristiwa fusi:



c) pada reaksi proton-antiproton  $p + \bar{p} \rightarrow 2\gamma$

yang akan dihasilkan terbesar? Massa partikel-partikel di atas adalah:

$e^+$	0,00055	$\text{He}^4$	4,00387
$n$	1,00899	$\text{Mo}^{94}$	93,93
$p, \bar{p}$	1,00815	$\text{Ce}^{138}$	137,95
$D$	2,01474	$\text{U}^{235}$	235,1

Hitunglah dalam satuan energi yang terpakai! Untuk keperluan apa penggunaan energi tersebut?

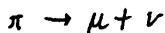
15.2.12. Tentukan kehilangan massa matahari karena radiasinya! Berapa lama matahari dapat memancarkan cahayanya dengan kekuatan penyinaran seperti sekarang ini, jika dianggap bahwa reaksi yang terjadi di matahari dapat disamakan dengan reaksi fusi? Berapa bagian He yang terdapat di matahari dalam umurnya yang sudah mencapai  $10^{10}$  tahun ini? (konstanta matahari  $2 \text{ cal/cm}^2 \text{ menit}$ ).

15.2.13. Turunkan hubungan energi total relativitas  $E$  dan momentum  $p$  sehingga diperoleh rumusan sebagai berikut.

$$E = (m^2 c^4 + p^2)^{1/2}$$

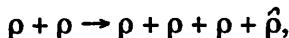
Sampai seberapa jauh rumusan di atas mengandung hubungan non-relativistik sebagai kasus khusus? Bagaimana hubungan ekstrim relativitas dan di atas energi berapa akan berlaku?

15.2.14. Pion bermuatan mengalami peluruhan (dengan waktu hidup  $\tau = 2,6 \cdot 10^{-8}$  det.) menjadi sebuah myon dan neutron:



Massa diam pion adalah  $273 m_e$ , untuk myon  $207 m_e$  dan neutron adalah  $m_n = 0$ . Berapa besar energi kinetik yang dihasilkan dari peluruhan pion diam ini? Bagaimana distribusi energi kinetik pada kedua partikel hasil peluruhan? Bagaimana dengan momentum partikel-partikel tersebut? Bagaimana jika seandainya dipandang secara non-relativistik? Bagaimana perubahan yang terjadi seandainya pion meluruh sambil bergerak?

15.2.15. Pada peristiwa tumbukan sebuah proton dengan proton diam, menurut persamaan reaksi:



akan timbul pasangan proton  $p$  dan antiproton  $\bar{p}$ . Reaksi tidak terjadi pada energi 1,8 GeV (mengapa diharapkan harus terjadi reaksi demikian pada energi ini?), melainkan pada energi 5,56 GeV. Bagaimana dapat dijelaskan hal tersebut?

15.2.16. Dari Einstein sendiri berasal 'percobaan dalam pikiran' atau *gedanken experiment* (dibutuhkan waktu yang sama dengan lamanya membuka baju) untuk membuktikan ekuivalensi massa-energi:

Di kedua ujung sebuah pesawat ruang angka berbentuk pipa, diletakkan masing-masing sebuah sumber laser. Laser  $L$  dieksitasi oleh cahaya yang barasal dari laser  $L'$  dengan energi  $E$ , laser  $L'$  mengabsorpsi dan mengeksitasi dirinya sendiri.

1. Pertanyaan: Peristiwa emisi dan absorpsi berlangsung dalam waktu  $\Delta t$ , sedangkan berkas cahaya memerlukan waktu selama  $l/c$  ( $l$ : panjang pesawat). Misalnya  $\Delta T = l/c$ . Berapa besar gaya yang timbul akibat tekanan radiasi pada peristiwa emis dan absorpsi dan pada arah mana? Berapa besar momentum yang ditransfer? Apakah menyebabkan pesawat ruang angka bergerak?

Selanjutnya misalnya dibuat penyebarluas, agar kedua laser dapat saling cukup memperlambat (mengapa?), sehingga laser pengeksitasi (sekarang  $L'$ ) kembali ke "depan". Dengan demikian semuanya berjalan seperti semua kembali.

2. Pertanyaan: Apakah pesawat akan mengalami pergeseran? Jika benar: apakah tidak berlawanan dengan kekekalan titik massa. Jika tidak: pada peristiwa emisi dan absorpsi terdapat suatu pergeseran, dengan menukar laser haruslah terdapat pergeseran yang saling mengkompensasi satu sama lain. Bagaimana hal ini dapat terjadi jika kedua laser mempunyai massa yang sama? Atau apakah keduanya tidak mengalami hal demikian?

15.2.17. Apakah cahaya benar-benar merambat dengan kecepatannya? Apakah proton juga mempunyai massa diam? Energi dan momentum sebuah proton dapat diperoleh berdasarkan relasi Planck dan De Broglie, juga memenuhi hukum kekekalan energi relativitas. Proton dapat dikategorikan sebagai grup gelombang. Jika demikian, bagaimana ketergantungan kecepatan sebuah proton dengan frekuensinya, jika ia mempunyai massa diam  $m_0$ ? Dalam "fotometri bintang ganda" dalam urutan waktu muncul suatu pasangan yang saling susul-menyusul. Bagaimana hal tersebut terlihat dari pengamat di bumi, jika seandainya proton mempunyai "warna" dan kecepatan yang berbeda? Sistem demikian, secara pendekatan, diketahui berada pada jarak hingga 1000 tahun cahaya, adanya gerhana dapat ditentukan

hingga ketelitian mencapai 1 milidetik. Berapa besar massa diam maksimum sebuah proton?

#### 15.2.18

- Andi: Sekarang saya dapat melihat pesawat Anda. Paling tidak bergerak mendekati saya sekitar 0,5 menurut Einstein.
- Bob: Benar. Persisnya dengan kecepatan  $c/2$ ! Apa yang Anda miliki?
- Andi: Tidak hanya pakaian ruang angkasa. Di sini masih ada udara untuk 5 menit.
- Bob: Sekarang saya temukan kamu di radar. Kami akan buat celah di sisi, terbanglah ke depan, persis paralel terhadap dinding pesawat. Kami akan terbang menghampirimu dari sisi. Waktu temu telah diperhitungkan secara eksak!
- Andi: Apakah komputer Anda juga mengatakan, bahwa ukuran badan saya masih normal?
- Bob: tentu saja! Dinding cukup ringan dan kamu juga ! Ingatlah ! jangan bergerak dengan was-was, jangan berpegangan kalau tidak mau terjadi apa-apa ! Berapa tinggi Anda ?
- Andi: 2 m, dengan helm.
- Bob: Tinggi celah juga 2 m.
- Andi: Oke, tapi kalau saya sudah di dalam pesawatmu!
- Bob: Pesawat cukup panjang, semuanya kosong. Kami berusaha untuk memberhentikanmu!
- Andi: Tunggu ! Celah yang kamu buat tentunya mengalami kontraksi Lorentz ! Aku tidak akan bisa melewatinya !
- Bob: Omong kosong ! Kamu juga mengalami kontraksi hingga 1,73 m ! Kita masih punya mainan. Tinggalkan saja Einstein tua!
- Andi: Oke deh ! Siapa yang mengetahui dengan pasti apa yang mengalami kontraksi ! Apa yang dikatakannya terserah ! Tapi aku tidak ! (Ada-ada saja dia; tetapi jika aku bisa lewat, tentu karena aku mengalami kontraksi; jika tidak, celah itu akan mengan-

tarkanku ke lubang kubur). Hingga di sini teori relativitas diam seribu bahasa.

Bagaimana kelanjutan cerita di atas?

**15.2.19.** Tachyon adalah partikel hipotetis, yang dapat bergerak lebih cepat dari cahaya di vakum. Jika sebuah tachyon harus memiliki energi dan momentum real positif, bagaimana dapat ditentukan massa diamnya (energi relativistik dan kekekalan energi)? Di dalam materi tachyon selalu mengeluarkan sinar Tserenkov, apakah dalam hal ini tachyon bergerak dengan  $v > c$ ? *Diskusikan bagaimana kelakuan partikel ini dalam keadaan kehilangan energi. Berapa kecepatan fase gelombang De Broglie dari tachyon?*

### Soal-Soal § 15.3

**15.3.1.** Jika suatu besaran di dalam suatu koordinat acuan dinyatakan dalam vektor dimensi empat  $a$ , misalnya  $(x, y, z, ict)$ , maka vektor  $a'$  yang berada dalam sistem koordinat lain yang bergerak dengan kecepatan  $v$  dinyatakan dalam  $a' = L a$ , dengan  $L$  adalah matriks transformasi Lorentz. (Perkalian matriks  $A$ . vektor  $b$  menghasilkan vektor dengan komponen  $i$ - nya ditulis sebagai berikut:  $gma_{ik}b_k$ ). *Bagaimana komponen  $L$  dapat ditulis, khususnya untuk  $v$  paralel terhadap sumbu  $x$ ? Tunjukkan bahwa vektor baris  $L$  mempunyai harga sama dengan 1 dan saling tegak lurus satu sama lain. Apakah berlaku hal yang sama untuk vektor kolom? Bagaimana bentuk matriks invers  $L^{-1}$ , yang didefinisikan sebagai  $LL^{-1} = U$  ( $U$  adalah matriks satuan yang didefinisikan sebagai  $Ua = a$ ). Hubungan apa yang terdapat dalam matrik transformasi  $L^*$  (diperoleh melalui pencerminan pada diagonal utama)? Kaidah transformasi apa, yang dinyatakan dengan penggunaan  $L$  beberapa kali, untuk meramalkan tensor  $T$ ? Suatu tensor yang bekerja pada vektor lain menurut kaidah:  $b = a T$ .*

**15.3.2.** Tuliskan persamaan Makwell dalam bentuk relativistik! Berapa konvensi yang diperlukan untuk itu adalah: a) Indeks dalam bahasa latin 1 hingga 3, suatu huruf Yunani dari 1 hingga 4;

- b) Untuk indeks yang muncul ganda, secara otomatis ditambahkan.  
 c) koordinat yang relevan diturunkan - seperti untuk kecepatan dan kerapatan muatan, sehingga vektor potensial (lihat soal 7.7.9) dan potensial skalar  $\phi$  dapat ditulis dalam vektor dimensi empat  $A_v$  (faktor  $ic$  disubstitusikan sedemikian, sesuai dengan dimensi seharusnya dan semua yang diperoleh adalah benar). Kemudian bentuk tensor medan  $T_{\mu\nu} = \nabla \times A_v = A_{\mu\nu} - A_{v,\mu}$ . Apakah analog dengan tensor dalam ruang tiga dimensi? Apa arti komponen-komponen  $T_{\mu,v}$ ? Dua persamaan Maxwell ditulis dalam  $T_{\mu,v}$ , sesuai dengan definisi  $T_{\mu,v}$ , sesungguhnya adalah trivial. Tensor lain, yaitu tensor induksi  $W_{\mu,v}$  menyatakan dua tensor lainnya. Tensor ini menghubungkan dua persamaan Maxwell lainnya. Bagaimana bentuknya sekarang? Bagaimana bentuk persamaan tersebut jika dinyatakan dalam  $A_v$ , khususnya untuk vakum? Apakah secara relativistik invarian?

15.3.3 Di dalam laboratorium terdapat medan magnet statik dan tidak ada medan listrik. Sesuatu, misalnya sebuah elektron, bergerak dengan kecepatan  $v$  melewati laboratorium. Bagaimana medan yang bekerja padanya? Haruskah gaya Lorentz dipostulasikan atau perlukah terdapat medan listrik? Suku tambahan apa yang harus dibubuhkan pada persamaan gaya Lorentz karena dinyatakan secara relativistik?

15.3.4 Sebuah kondensator plat yang diberi muatan digantungkan sedemikian rupa, sehingga kondensator dapat dirotasikan pada salah satu sumbu paralelnya, seandainya pada kondensator terdapat momen putar. Thouton dan Nobel telah melakukan percobaan pada tahun 1903 untuk mengukur keadaan gerak bumi relatif terhadap "ether". Jika bumi dan kondensator mempunyai kecepatan  $v$ , pada setiap plat kondensator akan mengalir arus listrik, dengan medan magnet  $B$  masing-masing plat mengerjakan gaya Lorentz  $F$  pada plat lainnya. Sederhanakan persoalan di atas dengan memandang adanya dipol dari muatan  $Q^+Q^-$ . Carilah besar dan arah  $B$  dan  $F$ ! Dalam hal ini akan timbul momen dipol, berapa besarnya? Kenyataannya kondensator tidak mengalami rotasi. Mengapa? Apakah hal ini dapat digunakan untuk pembuktian teori relativitas?

15.3.5 Pada sebuah bola homogen yang diberi muatan, akan timbul medan  $E$  simetri bola padanya. Apakah hal ini tetap benar dalam sistem inersial  $S'$ , di mana bola bergerak cepat (di vakum)? Jika tidak apa yang harus mengalami perubahan? Apakah bola tidak lagi dimuati secara homogen? Apakah arah medan tidak lagi tegak lurus terhadap permukaannya?

15.3.6. Suatu real kereta api, misalnya di Utara-Selatan Canada dimagnetisasi melalui medan magnet bumi pada arah vertikal. Untuk memperbesar efek ini, dapat pula dibuat suatu medan magnet permanen (medan buatan) pada arah vertikal. Dapatkan suatu lokomotif yang berada di antara sumber medan magnet dan berjalan di atas rel tersebut, menderita tegangan? Berapa besar tegangan tersebut? Bagaimana keadaannya jika bukan lokomotif yang bergerak, melainkan rel yang bergerak? Jika Anda ingin mempermudah persoalan, jangan gunakan hasil yang diperoleh pada pertanyaan pertama dan bayangkan bahwa medan  $B$  yang terdapat pada rel yang bergerak adalah tetap konstan (terdapat magnetisasi homogen). Dari persamaan Maxwell, bagaimana timbulnya medan  $E$  untuk  $B = 0$ ? Perhatikan pula adanya elektron konduksi pada rel yang bergerak dan tunjukkan bahwa real mengalami polarisasi pada arah melintang! Padanya terdapat generator unipolar (secara teknis bukan sistem yang bergerak translasi, melainkan magnet timbul karena rotasi). Dapatkan dikatakan bahwa generator tersebut dapat dihubungkan dengan efek relativistik murni?

15.3.7. Di dalam sistem koordinat acuan  $a$  direntangkan sebuah kawat, padanya dialiri arus listrik, tanpa kawat harus mengandung muatan. Berapa besar medan yang terdapat di dalam sistem  $A$ ? Seorang pengamat  $b$  bergerak paralel terhadap kawat. Apakah bagi pengamat tersebut hanya bekerja medan magnet? Darimana asal medan listrik? Dapatkan dikatakan, bahwa kawat bagi  $B$  bermuatan? Apakah terdapat penjelasan rinci untuk itu? Bayangkan bahwa elektron-elektron yang terdapat di dalam kawat bergerak melewati ion-ionnya dan gambarkan garis semesta dari kedua macam partikel tersebut. Tunjukkan secara

kuantitatif, berapa besar kerapatan muatan, medan listrik dan medan magnet yang ada?

**15.3.8.** Jika Anda tidak dapat menyelesaikan soal 7.7.3, sekarang selesaikanlah !

### Soal-Soal § 15.4

**15.4.1.** Astronot Max dan Moritz yang menikmati keadaan tanpa gaya berat, menemukan bahwa ia merasakan tidak ada perubahan sama sekali, Max berpendapat hal tersebut karena roket mengalami percepatan. Sementara Moritz juga merasakan seperti terdapat gaya berat. Diskusi beralih pada mesin penggerak roket, peristiwa di luar dan di dalam kabin pesawat luar angkasa, ketelitian pengukuran pada arah melintang dan sepanjang pesawat, kecepatan rambatan cahaya dan seterusnya.

**15.4.2.** Seringkali dan selalu dilakukan pencarian bukti tentang absuditas dan hal yang bertolak belakang dari teori relativitas. Salah satu "paradoks" yang serius tentang ini adalah sebagai berikut: Dari dua bersaudara kembar, Max tetap berada di bumi, sementara Moritz menjadi seorang astronot dan melanglang buana menelusuri luar angkasa, misalnya dengan kecepatan  $v = 0,3 c$  menuju ke  $\alpha$  Centauri (berjarak 4,3 tahun cahaya) dan kembali kira-kira 30 tahun perjalanan cahaya. Moritz karena adanya dilatasi waktu hanya mengalami penuaan 28,5 tahun. Sedangkan Max mengalami penuaan 30 tahun. Pernyataan ini disampaikan Max pada suatu kesempatan. Sedangkan Moritz akan mengatakan, bahwa Max sesungguhnya sepanjang waktu bergerak dengan kecepatan  $v = 0,3 v$  dan seharusnya tetap muda. Dalam hal ini dapat terjadi dilatasi waktu, sehingga kenyataannya kedua bersaudara tersebut tetap sama tua, atau salah satu darinya lebih muda, dan dialah yang mengalami "gerak sebenarnya" yaitu berlawanan dengan prinsip relativitas. Bagaimana mencari penyelesaian dilema ini?

**15.4.3.** Di pusat sebuah lempeng yang dirotasikan dengan kecepatan sudut  $\omega$  duduk seseorang. Karena ia dilahirkan di sana, ia percaya,

bahwa lempeng tersebut berada dalam keadaan diam dan mempertahankan pendapatnya menentang seorang pilot helikopter yang lewat di atasnya, yang tidak ikut mengalami rotasi dengannya. Gambarkan diskusi yang terjadi: adanya rotasi pada gaya, potensial, jam, sumber cahaya dan skala yang diletakkan pada tempat berbeda-beda semakin ke ujung lempengan.

**15.4.4.** Hitunglah diferensial geometris lengkungan suatu garis yang terdapat pada sekrup dan proyeksi garis tersebut pada bidang datar yang tegak lurus terhadap sumbu sektup. Apakah diskusi pada soal 15.4.2 terbukti kebenarannya?

**15.4.5.** Lengkungan lintasan cahaya dapat pula dijelaskan dengan gradien indeks bias  $n$ . Bagaimana ketergantungan  $n$  terhadap jarak, untuk menginterpretasikan lengkungan lintasan cahaya di dalam medan gaya berat homogen, di dalam gaya sentrifugal, medan simetri bola yang diakibatkan oleh sebuah massa? Mengapa massa berbentuk bola mengakibatkan adanya pengaruh lensa untuk cahaya dan radiasi gravitasi?

**15.4.6.** Dapatkan pergeseran merah dari radiasi kuasar dikatakan berhubungan dengan pengaruh medan gaya beratnya sendiri (kuasar adalah hampir menyerupai lubang hitam)? Ramalkan harga-harga penting dari potensial gravitasi dan jari-jari untuk berbagai massa yang mungkin. Jika kuasar teramat sebagai bintang berukuran ke 19 dan emisi di permukaannya kira-kira sama rapat dengan emisi radiasi matahari, berapa jauh jarak kuasar tersebut?

**15.4.7.** "Seandainya terdapat sebuah bintang dengan kerapatan sama dengan bumi, tetapi jari-jarinya 250 kali lebih besar dibanding dengan matahari, maka karena gaya tariknya, radiasi cahaya yang dipancarkannya tidak akan sampai terlihat di bumi. Dengan dasar ini terdapat kemungkinan, bahwa benda-benda yang jauh lebih besar, terdapat di jagad raya tidak teramat oleh kita". (Piere Simons De Laplace, Exposition di Sisteme du Monde, 1796). Apakah benar yang diucapkannya? Bagaimana Laplace menggambarkan cahaya? Apakah tulisannya juga berjuklak pada penjelasan Fresnel dan Young?

Bagaimana kombinasi dari massa, kerapatan, jari-jari yang memenuhi kondisi Laplace? (khususnya  $p$  = kerapatan inti,  $M$  = massa matahari,  $R$  = jarak elementer  $\approx 10^{-13}$  cm,  $R \approx 10^{10}$  tahun cahaya).

**15.4.8.** Mengapa malam gelap gulita? Olber pada tahun 1826 menunjukkan: Jika dunia besar tak berhingga dan seluruhnya diciptakan sedemikian, seperti di sini (maksudnya homogen), maka langit malam mustinya akan sama terangnya seperti "lempengan" matahari. Bagaimana ia dapat menyimpulkan demikian? Tunjukkan pula bahwa temperatur, bahkan potensial di semua tempat menjadi sangat besar tak berhingga. Ramalan apa yang dapat Anda peroleh? (lihat soal 15.4.9 dan 15.4.10).

**15.4.9.** Tunjukkan bahwa melalui urut-urutan hirarkis besaran sistem divergensi Olbers ( $T = \infty$ ,  $\varphi = \infty$ ) dapat dihindari: Sejumlah bintang membentuk galaksi, sejumlah galaksi membentuk metagalaksi dan seterusnya. Bagaimana jumlah sistem terpenuhi untuk menjadi sistem yang terdiri dari sistem-sistem tersebut, sehingga harga  $T$  dan  $\varphi$  menjadi berhingga?

**15.4.10.** Apakah materi pengabsorpsi yang terdapat di ruang antar bintang berfungsi sebagai penyelesai paradoks Olbers (kerapatan radiasi tak berhingga untuk jagad raya homogen tak berhingga)?

**5.4.11.** Apakah lubang hitam tidak berwarna hitam atau berwarna sangat hitam seperti benda hitam? Kelihatannya, di dalam lubang hitam sendiri terjadi proses pembentukan dan penghilangan partikel-partikel virtual yang terdapat di dalamnya. Partikel-partikel tersebut dapat "terlindungi" dalam kondisi relasi ketidakpastian hingga mencapai ujung lubang hitam, melalui horizon peristiwanya, ke luar dari lubang hitam dan "merealisir" dirinya (hal ini kelihatannya bertentangan dengan pendapat adanya interaksi pertukaran). Akan tetapi, merupakan cara paling sederhana untuk menggambarkan pemikiran tentang ini). Partikel apa dan dengan momentum energi berapa yang dapat keluar dari kungkungan lubang hitam? Mengapa Hawking dapat mengatakan bahwa lubang hitam dengan massa  $M$  meradiasi seperti halnya benda hitam dengan temperatur  $10^{-7} M/MK$ ?

Nyatakan besaran ini dalam konstanta fisika sebenarnya! Berapa besar daya pancaran radiasi dari suatu lubang hitam demikian? Berapa pengurangan massa yang dapat terjadi pada peristiwa radiasi tersebut? Berapa lama sebuah lubang hitam dapat hidup? Apa yang akan terjadi sesaat sebelum waktu hidupnya habis? Berapa besar (jari-jari dan massa) lubang hitam mini yang justru memancarkan radiasinya?

**15.4.12.** Einstein tidak pernah menerima indeterminismus yang terdapat di dalam teori kuantum dan kebanyakan para ahli fisika teori juga membenarkannya. Ia telah mencoba dengan berbagai usaha untuk mengatakan bahwa relasi ketidakpastian merupakan kebohongan besar. Pada kongres Solvay, tahun 1930, ia menyampaikan suatu pemikiran eksperimen pikiran (gedanken experiment) sebagai berikut: Misalnya di dalam sebuah kotak yang mengalami pencerminan ideal, terdapat energi radiasi yang terkurung. Pada dinding kotak diletakkan sebuah celah tertutup untuk kamera fotografi, yang dapat terbuka dalam waktu singkat, tetapi pada jam 12.00 dan akan masuk cahaya sedikit. Selama waktu terbuka dan tertutupnya celah akan terdapat deviasi jumlah energi, waktu opname + mekanis pembuka celah memberikan ketelitian waktu sembarang dan energi yang mengalami peristiwa lewat celah tidak akan mempunyai harga terbatas melalui relasi  $\Delta E \Delta T \propto h$ . Bohr memerlukan semalam suntuk untuk menangkis hambatan ini. Apakah Anda juga memerlukan waktu selama itu, jika Anda ketahui, bahwa Einstein menelan senjatanya sendiri, yaitu pembuktian bahwa salah satu efek dari Einstein sendiri telah membawa persoalan ini menjadi tuntas.

**15.4.13.** Dua benda bermassa sama  $M$  saling mengelilingi satu sama lain pada jarak  $d$ . Berapa harga momen kuadrupole  $Q$  pada pers [15.40] harus disubstitusikan, agar dapat diperoleh potensial sistem yang benar untuk pendekatan pertama? Apa yang Anda perlukan hanya memandang sebuah titik yang sangat jauh pada sumbu putar ( $\vartheta = 0$ ). Karena penderetan umum yang berlaku pada pers [15.40] untuk potensial (di tengah) simetri bola ditulis dalam fungsi bola dan cukup

hanya memandang sebuah titik. Anda juga dapat memilih sebuah titik yang berada di bidang yang tegak lurus terhadap sumbu rotasi; yaitu titik yang berada di dalam benda. Akan tetapi patut pula diperhatikan bahwa "hantel" (adalah dua bola yang dihubung oleh sebuah garis, biasanya untuk latihan para binaragawan) mengalami rotasi. Berapa besar momen kuadrupol yang dapat dicapai bintang ganda? Apakah daya pancaran radiasi pada bintang ganda yang berjarak lebih jauh atau lebih dekat satu sama lain? Berapa besar daya pancaran tersebut seharusnya?

**15.4.14.** Ramalkan daya pancaran radiasi selinder aluminium Weber yang berada di dalam medan gravitasi dari sumber gravitasi kuat yang berada jauh darinya. Bagaimana ketergantungan daya radiasi tersebut terhadap panjang antena/panjang gelombang? Bandingkan dengan daya yang berasal dari sinyal gangguan termis, yaitu berasal dari modus suatu getaran. Bagaimana ketergantungan daya sinyal ini terhadap temperatur dan daerah frekuensi yang diperbolehkan? Apa yang dapat dibuat untuk meningkatkan sensitivitas penangkapnya?

**15.4.15.** Buktikan: Jika massa dan jari-jari sebuah benda memenuhi ukuran lubang hitam, maka kecepatan suara di dalamnya adalah mendekati harga kecepatan cahaya.

**15.4.16.** Pada tanggal 30 Juni 1908, pukul 7,17, langit cerah, dari kereta api Transsiberia yang berangkat dari kota Kansk di Barat laut terlihat sebuah objek bergerak di angkasa, bercahaya terang seperti matahari. Kejadian itu dapat dibuktikan dengan beberapa kenyataan akibatnya (pohon-pohonan seluas 40 km terbakar hangus, dengan lingkar luas persis berbentuk lingkaran dan lain sebagainya.) yang ditemukan sekitar 600 km di dekat Podkamenaja Tunguska. Ramalkan energi total yang terdapat pada peristiwa itu berdasarkan angka-angka di atas! Apakah energi tersebut berasal dari sumber pembangkit energi biasa, seperti berasal dari pemisahan materi, fusi, partikel-antipartikel ... Berapa besar massa materi tersebut dapat diramalkan? Pada ketinggian berapa paling tidak anti-meteorit seukuran ini dapat menangkap udara sekelilingnya agar dapat pecah berkeping-keping? Jika sebelumnya mengalami penguapan, apakah hal tersebut dapat

terjadi pada harga ketinggian menurut ramalan di atas? Untuk hipotesa sebuah lubang hitam mini yang menabrak bumi: Berapa besar kanal yang terbentuk karena lubang hitam bermassa  $M$ , kecepatan  $v$  menghisap materi ke dalamnya? Berapa besar  $M$  yang dapat diramalkan, untuk dapat menjelaskan pembebasan energi di atmosfir? Apa yang akan terjadi di dalam bumi dengan terangkatnya materi? Hipotesa *klasik* (*Whipple dkk.*): kepala komet sebagai "bola salju berbentuk segitiga", mengandung debu dan batu es  $H_2O$ ,  $NH_3$  dan  $CH_4$  yang terbakar. Berapa massa komet? Apakah kandungan kimia yang terdapat di dalamnya memegang peran penting? Hipotesa mana yang Anda setujui?

## Bab 16

### Mekanika Kuantum

#### 16.1 Perkakas Matematik

Ada berbagai cara untuk belajar teori mekanika kuantum: Pertama, secara "historis", yaitu dengan pendekatan dan penyimpangan-penyimpangan teori klasik, sehingga teori-teori klasik yang telah dipelajari sebelumnya dapat ditinggalkan. Kedua, secara "empiris", melalui sederetan "empiri cruci", misalnya bagaimana kelakuan elektron dan atom dan bagaimana merubah gambaran klasik dari keduanya. Ketiga, adalah melalui "Hamiltonian", yaitu formalisme tingkat tinggi yang biasa digunakan untuk merumuskan gambaran gerak suatu sistem dalam mekanika klasik yang mengalami modifikasi. Keempat, adalah secara "optis", yaitu melalui pengembangan konsep dualisme partikel-gelombang; dalam hal ini materi dianggap mempunyai sifat gelombang. Terakhir adalah melalui "aksiomatis". Dari semua cara yang disebutkan di atas cara "aksiomatis" adalah cara teringkas untuk mencapai satu tahapan di mana pelajaran mekanika kuantum dapat dimulai, paling tidak dapat dimengerti guna menyelesaikan beberapa problematik dasar secara kuantitatif. Akan tetapi dengan cara ini tentu saja akan dijumpai "bahasa-bahasa" abstraks yang masih asing. Hal terpenting untuk mempertebal pengertian adalah mengetahui beberapa istilah matematis yang diperlukan. Beberapa pengertian istilah yang dimaksud akan diberikan secara singkat di sini. Patut pula Anda ketahui bahwa semua yang diberikan di sini tentunya hanya terbatas untuk mengerti persoalan

dasar mekanika kuantum. Untuk mendalami mekanika kuantum lebih baik tentunya dapat dipelajari dari buku-buku pelajaran mekanika kuantum yang lebih baik.

### 16.1.1 Vektor dan Fungsi-fungsí

Sesuatu pengetahuan yang "membosankan" dari David Hilbert adalah anggapan bahwa fungsi mempunyai sifat sama dengan vektor. Akan tetapi secara logis keduanya memang dapat saling dihubungkan, karena keduanya memenuhi aksioma yang sama dan dari keduanya dapat diturunkan semua sifat-sifat ruang vektor. Fungsi juga membentuk ruang, yaitu ruang Hilbert.

Pembahasan ini akan dibatasi pada beberapa gambaran singkat, dimulai dengan kenyataan yang telah diketahui, yaitu melalui pembahasan beberapa istilah atau pengertian sebagai berikut:

- Suatu vektor  $a$  berdimensi  $n$  didefinisikan melalui simbol setiap bilangan bulat sebagai indeks  $i$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Bilangan bulat  $i$  merepresentasikan komponen vektor  $a_i$ .
- Dua vektor  $a$  dan  $b$  dapat saling ditambahkan menjadi satu vektor baru  $c$  yaitu dengan menambahkan setiap komponen  $a_i$  dan  $b_i$  menjadi satu komponen vektor baru  $c_i$ .
- Dua vektor  $a$  dan  $b$  dapat dikalikan menjadi *skalar* yaitu dengan mengalikan setiap komponen  $a_i$  dan  $b_i$ ; jumlah semua produk perkalian ini adalah produk skalar (perkalian skalar):
  - Suatu fungsi  $f$  didefinisikan melalui suatu argumen  $x$  ( $-\infty < x < \infty$ ) sedemikian sehingga mempunyai harga tertentu yang menggambarkan fungsi  $f$  yang bersangkutan.
  - Dua fungsi  $f$  dan  $g$  dapat saling ditambahkan menjadi satu fungsi yang baru  $h$  dengan menambahkan setiap harga fungsi  $f(x)$  dan  $g(x)$ ; jumlah keduanya merupakan harga fungsi baru;  $h(x)$ .

Dua fungsi  $f(x)$  dan  $g(x)$  dapat saling dikalikan yaitu dengan cara mengalikan setiap argumen untuk masing-masing harga fungsi;

integral semua produk ini adalah produk skalar

$$f \cdot g = \int f(x) \cdot g(x) dx. \quad (16.1)$$

Batas integral bergantung pada besaran fisis yang digunakan.

Sebagai panjang atau normalisasi sebuah vektor atau fungsi adalah sama dengan akar dari produk skalar yang mendefinisikan vektor atau fungsi yang bersangkutan. Jika fungsi mengandung bilangan kompleks (fungsi kompleks) maka fungsi haruslah, seperti biasanya dalam operasi bilangan kompleks, dikalikan dengan konyugat kompleksnya  $f^*$ :

$$|a| = \sqrt{a \cdot a}, \quad |f| = \sqrt{f^* \cdot f} \quad (16.2)$$

Sudut  $\vartheta$  antara dua vektor atau fungsi dapat dituliskan sebagai perbandingan antara produk skalar dan panjang masing-masing vektor atau fungsi sebagai berikut.

$$\cos \varphi = \frac{a \cdot b}{|a||b|} \quad \cos \varphi = \frac{f^* \cdot g}{|f||g|} \quad (16.3)$$

Dua vektor atau fungsi akan saling tegak lurus satu sama lain jika produk skalaranya sama dengan nol

$$a \perp b \iff a \cdot b = 0, \quad f \perp g \iff f^* \cdot g = 0 \quad (16.4)$$

Dua vektor atau fungsi akan saling paralel satu sama lain jika salah satunya merupakan kelipatan skalar dari yang lainnya

$$a \parallel b \iff a = cb, \quad f \parallel g \iff f = cg. \quad (16.5)$$

Dengan hati-hati dapat pula dikatakan bahwa: Suatu fungsi mempunyai kelakuan seperti vektor yang mempunyai komponen sangat banyak. Dengan demikian, maka dua fungsi dapat mempunyai banyak kemungkinan, tidak saling paralel, dibanding dengan dua vektor, khususnya suatu fungsi yang mempunyai banyak arah dan masing-masing dapat saling ortogonal.

### 16.1.2 Matriks dan Operator

Suatu matriks kuadratik dinyatakan melalui skema kuadratik bilangan-bilangan, misalnya untuk  $n = 3$

$$M = m_{ik} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Operasi matriks terpenting adalah multiplikasi atau perkalian dengan vektor  $a$ . Sebagai hasilnya muncul sebuah vektor baru  $b = Ma = m_{ik} a_k$  dan dapat dimengerti sebagai vektor  $b_i$  dengan komponen-komponen

$$b_i = \sum_{k=1}^n m_{ik} a_k :$$

komponen ke  $i$  adalah produk skalar dari kolom ke  $i$  dari matriks dengan vektor  $a$ .

Dengan perkataan lain: matriks  $M$  dari setiap vektor  $a$  membuat suatu vektor lain  $b = Ma$ . Atau lebih tegas lagi dapat dikatakan

Sebuah matriks tidak lain merupakan fungsi vektor: seperti halnya untuk setiap  $x$  dari sebuah fungsi  $f$  membentuk susunan harga-harga yang lain dari  $f(x)$ , maka matriks untuk setiap vektor  $a$  akan membentuk susunan sebuah vektor lain yaitu  $b = M a$ . Linier dalam hubungan ini berarti bahwa secara umum berlaku

$$M(a + b) = Ma + Mb$$

Sebuah *operator* di dalam daerah fungsi adalah sama, seperti halnya matriks di dalam daerah vektor. Sebuah operator  $A$  yang dikerjakan pada fungsi  $f$  akan membentuk suatu fungsi  $g = Af$ , atau dengan tegas dapat pula dikatakan bahwa sebuah *operator linier* adalah suatu fungsi vektor linier, karena ia membentuk susunan suatu fungsi lain  $g = Af$  dari setiap fungsi  $f$ :

$$A(f_1 + f_2) = Af_1 + Af_2 \quad (16.6)$$

Contoh operator:

Penambahan dengan konstannta :  $A f = f + a$

Perkalian dengan konstanta :  $A f = af$

Perkalian dengan  $x$  :  $Af = xf$

Turunan terhadap  $x$  :  $Af = \frac{d}{dx}f$

Integrasi dengan 'inti'  $I(x,x')$  :  $Af = \int I(x,x')dx' = g(x)$

### 16.1.3 Fungsi dan harga-eigen

Sebuah operator yang dikerjakan pada suatu fungsi, seperti halnya matriks dikerjakan pada vektor-vektor, umumnya menyebabkan dua hal: Operator membatasi (mengubah panjang fungsi) dan merotasikan (mengubah arah fungsi). Untuk rotasi berdimensi banyak terdapat pula banyak kemungkinan. Khususnya rotasi sangat penting untuk kasus di mana fungsi adalah tetap, atau dengan perkataan lain  $Af$  adalah *parallel terhadap f sendiri*

$$A f = a f \quad (16.7)$$

Fungsi yang apabila dikerjakan operator padanya tidak mengalami rotasi disebut sebagai *fungsi eigenya* dan harga yang muncul atau turut serta pada fungsi tersebut disebut *hanya eigen*.

Jika satu harga eigen dipunyai oleh sejumlah fungsi eigen atau dengan perkataan lain sejumlah fungsi eigen mempunyai harga eigen yang sama, maka harga eigen dan fungsi eigen disebut mengalami *degenerasi*.

Persoalan harga eigen juga sering digunakan dalam sejumlah penggunaannya di luar mekanika kuantum. Salah satu yang mungkin telah dikenal dengan baik adalah transformasi sumbu prinsipal untuk potongan kerucut:  $r - Ar$  adalah persamaan potongan kerucut

(permukaan orde dua); harga eigen dari  $A$  adalah kebalikan panjang sumbu prinsipal dan fungsi eigen memberikan arah dari sumbu prinsipal ini. Pemikiran yang serupa juga selalu muncul, walau pun lebih kompleks, yaitu dalam persoalan *getaran eigen*, demikian pula dalam persoalan-persoalan *kimia* dan *kinetika elektronik*, *analisa stabilitas* berbagai sistem, dalam *sibernetik* dan *teknik kendali* hingga ke persoalan-persoalan proses *stochastik* dan rantai Markov.

Mekanika kuantum umumnya hanya memerlukan *operator hermitian* linier atau *operator konyugasi diri*, yaitu operator-operator untuk dua fungsi  $f$  dan  $g$  selalu memenuhi hubungan sebagai berikut.

$$A^* \cdot g^* = f^* \cdot A g \quad (16.8)$$

Dalam hal ini fungsi dan operator dapat berbentuk kompleks. Sebagai contoh di bawah ini ditunjukkan bahwa operator  $\partial/\partial x$  adalah tidak hermitian, melainkan  $i\partial/\partial x$ . Untuk membuktikan hal ini umumnya harus digunakan dua fungsi  $f(x)$  dan  $g(x)$  dan kemudian diperlukan dengan menggunakan transformasi Fourier dalam bentuk penjumlahan atau integral dengan menggunakan fungsi  $e^{ikx}$ . Selanjutnya, hanya diperhatikan persamaan yang dibentuk (operator adalah linier). Konyugasi kompleks dari  $e^{ikx}$  adalah  $e^{-ikx}$ . Untuk operator  $A = \partial/\partial x$ , maka ruas kiri pers. [16.8] menjadi.

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} e^{-ikx} e^{ikx} dx = -ik \int_{x_1}^{x_2} dx = -ik(x_2 - x_1),$$

ruas kanan pers. [16.8] menjadi

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} e^{ikx} dx = ik(x_2 - x_1)$$

Hasil perhitungan di atas untuk masing-masing ruas menghasilkan tanda yang berbeda. Perbedaan ini akan lenyap jika digunakan operator  $A = i\partial/\partial x$ , yang jika sebagai konyugasi kompleksnya akan berubah tanda dengan sendirinya.

Suatu fungsi dan harga eigen operator hermitian khususnya memudahkan perhitungan. Misalnya terdapat dua fungsi eigen dari operator hermitian, jika fungsi-fungsi eigen tersebut mempunyai harga eigen yang berbeda, keduanya adalah saling ortogonal. Operator-operator hermitian, walaupun dikerjakan pada fungsi-fungsi kompleks dan operator sendiri berbentuk bilangan kompleks, akan selalu menghasilkan harga eigen real. Berikut adalah pembuktian ramalan di atas:

Misalnya  $f_1$  dan  $f_2$  adalah fungsi eigen dari operator  $A$ , sehingga  $A f_1 = a_1 f_1$ ,  $A f_2 = a_2 f_2$ , dengan  $a_1 \neq a_2$ . Maka  $A^* f_1^* \cdot f_2 = a_1 f_1^* \cdot f_2$ .

Karena  $A$  adalah hermitian, maka  $A$  dapat pula dikerjakan pada  $f_2$  seperti:  $f_1^* \cdot A f_2$ . Dari kedua perhitungan dapat dibuktikan akah menghasilkan bahwa  $a_1 \neq a_2$ ;  $a_1$  dan  $a_2$  akan mempunyai harga yang sama hanya jika  $f_1^* \cdot f_2 = 0$ , atau dengan perkataan lain  $f_1$  dan  $f_2$  adalah saling ortogonal atau saling tegak lurus.

Fungsi eigen operator hermitian biasa selain bersifat ortogonal juga mempunyai sifat 'berkelakuan baik' (*well behave*) atau 'sempurna': Dari fungsi-fungsi eigen tersebut dapat dikembangkan sembarang fungsi lain, seperti halnya mengembangkan fungsi ortogonal  $\sin nx$  dan  $\cos nx$  dengan menggunakan deret Fourier. Dengan representasi umum menggunakan deret Fourier semua pendekatan dalam berbagai bidang fisika umumnya, khususnya dalam mekanika kuantum dapat diatasi.

## 16.2 Dasar-dasar Mekanika Kuantum

### 16.2.1 Aksioma-aksioma

Sayangnya aksioma dalam mekanika kuantum tidak selalu dapat dibuktikan dengan baik seperti halnya aksioma Newton dalam mekanika dan terletak jauh dari pengalaman seperti halnya aksioma Maxwell dalam elektrodinamika. Semua aksioma-aksioma mekanika kuantum praktis harus dipelajari guna menerapkannya dalam penggunaan.

Semua aksioma ini umumnya menyatakan atau merepresentasikan sesuatu yang baru, yang harus dapat dibuktikan secara eksperimen, bahwa berdasarkan aksioma-aksioma ini selanjutnya harus dapat diturunkan semua besaran fisis yang tanpa syarat harus mempunyai harga tertentu (sesuai dengan realitas eksperimen). Walaupun jika suatu sistem fisis ditentukan atau telah diketahui sebelumnya, akan tetapi hasil eksperimen bahkan sering menunjukkan angka-angka yang tidak persis sama. Misalnya sebagai sistem adalah inti  $^{226}\text{Ra}$ , telah diketahui sebelumnya. Akan dilakukan pengukuran setelah 1 det apakah sistem ini masih ada atau telah mengalami perubahan sama sekali. Keduanya dapat terjadi. Walaupun sistem telah diketahui sebelumnya sebagai  $^{226}\text{Ra}$ . Tidak ada yang mengetahui apakah sistem ini langsung mengalami peluruhan secara serta merta atau setelah beberapa saat kemudian. Kenyataan ini dapat diartikan dengan cara yang berbeda: Apakah besaran-besaran penting untuk ramalan (misalnya: posisi dan momentum dari nukleon-nukleon yang terdapat di inti dls.) tidak terukur mewakili kenyataan yang ada pada sistem, melainkan hanya modifikasi dari Fisika klasik; atau besaran-besaran tersebut dapat dijelaskan. Akan tetapi masing-masing tingkat ketepatan (presisi) harganya secara prinsip tidak dapat diketahui atau sama sekali tidak ada. Interpretasi mana yang harus dipilih dari keduanya, atau apakah mekanika kuantum hanya dilihat sebagai sistem istilah-istilah yang dikembangkan sebagai *renaissance dari determinisme*, sedikit banyaknya hanya merupakan ukuran pendapat.

Empat aksioma penting yang harus diingat adalah

1. Keadaan suatu sistem fisis dinyatakan dalam fungsi keadaan  $\psi$ .
2. Setiap besaran fisis berhubungan dengan suatu operator hermitian linier.
3. Keadaan suatu sistem, padanya besaran fisis  $a$  mempunyai harga tertentu, harus dinyatakan melalui fungsi eigen operator yang bersangkutan; harga besaran tersebut,  $a$ , adalah harga eigen fungsi yang bersangkutan.
4. Jika fungsi keadaan  $\psi$  suatu sistem merupakan superposisi dari beberapa keadaan lainnya  $f_k$ , yaitu jika  $\psi = \sum c_k f_k$ , maka dapat

dianggap seolah semua keadaan terdapat secara bersamaan. Bagian dari keadaan-keadaan  $f_k$  yang mengandung besaran-besaran terukur sumbangannya tidak menjadi ukuran bagi  $\psi$ , melainkan bagi  $\psi^* \cdot \psi$ .

Ambil suatu kesimpulan penting dan amati suatu besaran  $a$  yang disusun oleh operator  $A$ . Misalnya sistem tidak berada dalam keadaan eigen  $A$ . Maka  $a$  tidak mempunyai harga tertentu, melainkan dari hasil pengukuran dapat dihasilkan setiap harga eigen  $A$ . Pengukuran untuk kasus di atas berarti 'memenuhi persyaratan' dan  $a$  harus mempunyai harga tertentu. Hal yang dibicarakan di sini adalah suatu 'pengukuran yang baik', yaitu 'pengukuran' dari keadaan-keadaan eigen campuran yang dinyatakan dalam  $\psi$  terhadap operator  $A$  sehingga akan menghasilkan atau terdapat sesuatu. Tidak ada suatu pengukuran yang mempengaruhi sistem, jika terdapat pengaruhnya, maka pengukuran dikatakan *jelek*.

Akan dibentuk fungsi keadaan  $\psi$  dari fungsi eigen ternormalisasi  $f_k$  dan operator  $A$ :  $\psi = \sum c_k f_k$ . Semua operator yang baik mempunyai sistem fungsi eigen sempurna dan pembentukan serupa demikian adalah selalu mungkin sebagai fungsi eigen dari operator hermitian  $A$ ,  $f_k$  adalah ortogonal sehingga  $\psi^* \cdot \psi = \sum c_k^* c_k f_k = \sum c_k^* c_k$ .

Pada pengukuran  $a$  berdasarkan aksioma ke 4, sistem mempunyai probabilitas sebesar  $c_k^* c_k$  untuk keadaan  $f_k$ , berarti ditentukan oleh harga  $a_k$ . Dengan melakukan pengukuran  $N$  kali akan diperoleh  $c_1^* c_1 N$  kali harga  $a_1$ ,  $c_2^* c_2 N$  kali harga  $a_2$ , dst. Harga rata-rata semua hasil pengukuran adalah

$$\bar{a} = \sum c_k^* c_k a_k \quad (16.9)$$

Sesungguhnya akan diperoleh hasil yang serupa jika dituliskan

$$\bar{a} = \psi^* \cdot A \psi, \quad (16.9a)$$

karena

$$A \psi = \sum A c_k f_k$$

dan

$$\psi^* \cdot A \psi = \sum_{i,k} c_i^* f_i^* \cdot c_k a_k f_k = \sum_k c_k^* c_k a_k$$

karena  $f_k$  adalah ortogonal.

Selanjutnya yang masih harus diketahui adalah bagaimana bentuk operator untuk masing-masing besaran fisis. Dalam hal ini tidak diturunkan berdasarkan pengertian sebenarnya, melainkan hanya melalui analogi: Operator sebenarnya adalah operator yang pada 'batas klasik' merepresentasikan pula sifat-sifat klasik. Analogi ini adalah yang paling jelas, jika secara mekanika klasik suatu keadaan dinyatakan dalam bentuk persamaan Hamilton atau Lagrange yang dalam buku ini, karena abstraksinya yang terlalu jauh tidak diberikan. Diperoleh bahwa:

*Operator koordinat posisi  $x$  suatu partikel sesuai dengan perkalian dengan variabel  $x$ :*

$$x \psi = x \psi \quad (16.10)$$

*Komponen operator momentum  $p_x$  suatu partikel sesuai dengan turunan terhadap partikel terhadap  $x$ :*

$$p_x \psi = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \psi \quad (16.11)$$

Bagaimana bentuk keadaan suatu partikel dengan komponen momentum  $p_x$  mempunyai harga tertentu? Fungsi keadaan  $\psi$  partikel haruslah merupakan fungsi eigen dari operator yang bersangkutan:

$$p_x \psi = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \psi = p_x \psi$$

Hanya turunan fungsi  $\psi$  yang sebanding dengan fungsinya sendiri; dengan demikian maka keadaan yang mempunyai harga momentum tertentu dapat dinyatakan sebagai:

$$\psi = \psi_0 e^{ip_x x / \hbar} \quad (15.12)$$

Bagian real dari persamaan di atas adalah gelombang harmonik:

$$\sigma_c \cos \left( \frac{p_x}{\hbar} x \right) = \psi_o \cos \left( \frac{2\pi x}{\lambda} \right) \quad (16.12a)$$

dengan panjang gelombang  $\lambda = h/p$ , sesuai seperti yang diramalkan De Broglie. Hanya gelombang harmonik  $\psi$  mempunyai momentum tertentu. Dengan mengenalkan besaran lain  $k = 2\pi/\lambda$ , fungsi eigen momentum dapat ditulis menjadi :

$$\psi = \psi_o e^{ikx} \quad (16.12b)$$

Pertanyaan yang lebih sulit adalah dalam keadaan-keadaan mana saja partikel mempunyai posisi tertentu, misalnya pada  $x = a$ . Dalam hal ini  $\psi$  haruslah merupakan fungsi eigen dari operator posisi

$$x \psi = x \psi = a \psi, \quad (16.13)$$

berarti perkalian dengan variabel  $x$  harus menghasilkan harga  $a$ . Beberapa percobaan perhitungan menunjukkan bahwa fungsi  $\psi(x)$  harus sama dengan nol di setiap tempat, selain untuk  $x = a$ ; apabila harganya untuk sembarang tempat tidak sama dengan nol, maka pers. [16.13] akan 'tertanggu'. Fungsi yang di semua tempat berharga nol, kecuali pada  $x = a$  mempunyai harga tak berhingga, disebut sebagai fungsi  $\delta$ . Fungsi ini dapat dibayangkan seperti fungsi Gauss yang membentuk 'gunung', yang semakin sempit akan tetapi secara bersamaan semakin tinggi.

Jika  $\psi(x)$  adalah fungsi  $\delta$ , maka  $x$  tidak mempunyai harga tertentu; dengan perkataan lain partikel dapat ditemukan di semua tempat. Berdasarkan aksioma ke 4 posisi yang paling mungkin dari partikel diberikan sebagai berikut:

$$\bar{x} = \psi^* \cdot x \psi = \int_{-\infty}^{+\infty} x \psi^2(x) dx \quad (16.14)$$

Pers. [16.14] tidak lain sama dengan harga rata-rata dari besaran  $x$  dan darinya hanya akan diperoleh distribusi probabilitas  $P(x)$  sebagai berikut:

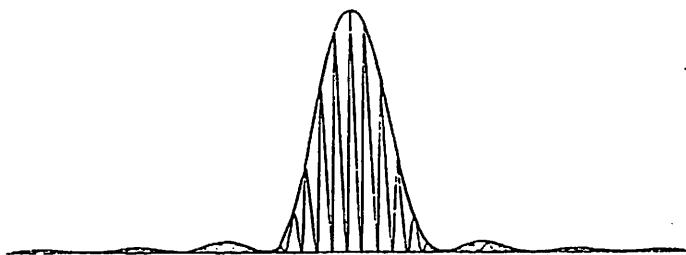
$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x P(x) dx,$$

dengan menganggap bahwa  $P(x)$  benar-benar ternormalisasi, atau dengan perkataan lain

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(x) dx = 1$$

Dengan demikian

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^2 dx$$



Gambar 16.1: Tumpang tindih gelombang-gelombang yang terdapat di dalam daerah panjang gelombang yang sempit menimbulkan suatu gelombang yang mempunyai posisi tidak begitu tajam (tertentu).

dapat diartikan sebagai probabilitas mendapatkan partikel pada interval posisi  $(x, x+dx)$ .

### 16.2.2 Relasi Ketidakpastian

Adalah jelas bahwa fungsi eigen momentum (gelombang harmonik) tidak dapat disamakan dengan fungsi eigen posisi atau tempat (fungsi  $\delta$ ). Tidak ada suatu keadaan pun di mana sebuah partikel dalam

waktu bersamaan mempunyai harga momentum  $p_x$  dan posisi  $x$  tertentu. Dengan mudah dapat pula ditunjukkan bahwa pada suatu keadaan yang mempunyai harga momentum tertentu, akan mempunyai harga posisi tidak tentu, demikian pula sebaliknya: harga suatu besaran yang diharapkan berdasarkan aksioma ke 4, secara matematis, dalam hal ini tidak memberikan arti fisis apa pun.

Agar harga posisi yang diharapkan umumnya didapat, fungsi  $\psi$  harus terkonsentrasi di dalam suatu daerah di ruang (atau sejumlah daerah di dalam ruang). Agar harga momentum yang diharapkan dapat diperoleh, maka momentum haruslah dapat diterima sebagai karakter gelombang. Adakalanya terdapat penyelesaian kompromis yang terlihat seperti pola interferensi, misalnya terdapat di dalam celah suatu pola (lihat gbr. [16.1]). 'Paket gelombang' seperti itu berdasarkan transformasi Fourier dapat dibentuk menjadi gelombang datar seperti dinyatakan pada pers. [16.12], akan tetapi dengan harga  $p$  dan panjang gelombang  $\lambda$  yang berada. Momentum ini haruslah memenuhi daerah selebar  $\Delta p$  yang mungkin secara rapat dan dalam hal ini hanya diperhatikan, bahwa semua gelombang ini pada  $x = a$  mempunyai harga maksimum. Sedangkan pada posisi lain selain dari  $x = a$  fase gelombang tidak lagi akan bersesuaian, sejauh dapat digunakan sebanyak mungkin harga  $p$  yang berbeda dengan menggunakan sebanyak mungkin harga  $p$  berbeda akan diperoleh fungsi yang berulang-ulang secara periodik, lihat § 4.1.6). Dengan menggambarkan fungsi dapat dilihat dengan jelas, bahwa maksimum utama dari pola interferensi gelombang yang saling tumpang tindih ini justru mempunyai lebar sebesar  $\Delta x$ , yang berhubungan dengan panjang gelombang yang digunakan

$$\Delta x \approx \frac{\lambda^2}{\Delta \lambda} \quad (16.15)$$

Berdasarkan relasi De Broglie berarti bahwa

$$\Delta x \approx \frac{h}{\Delta p} \quad (16.15a)$$

Hubungan di atas disebut sebagai *relasi ketidakpastian Heisenberg*

Akan dibahas perhitungan untuk kasus bahwa posisi yang diharapkan suatu partikel adalah pada  $x = 0$ , dengan harga rata-rata momentum  $p_x$  dan daerah berlakunya momentum untuk keadaan tumpang tindih adalah  $(p_x - \Delta p/2, p_x + \Delta p/2)$ . Semua bagian gelombang haruslah mempunyai amplitudo yang serupa atau dengan perkataan lain: belum diketahui berapa harga momentum yang terpenuhi untuk seluruh daerah momentum yang ada, akan tetapi harga tersebut berada dalam interval yang diketahui dan semuanya dianggap mempunyai kemungkinan yang sama. Kemudian diberikan fungsi keadaan yang merupakan penjumlahan atau integral dari seluruh bagian gelombang yang ada

$$\begin{aligned}\psi(x) &\sim \int_{p_x - \Delta p/2}^{p_x + \Delta p/2} e^{ixp/\hbar} dp \\ &= \frac{\hbar}{ix} e^{ixp_x/\hbar} (e^{ix\Delta p/\hbar} - e^{-ix\Delta p/\hbar}) \\ &= \frac{2\hbar}{x} \sin\left(\frac{x\Delta p}{2\hbar}\right) e^{ixp_x/\hbar}\end{aligned}$$

Persamaan di atas adalah fungsi gelombang datar dengan amplitudo mengalami modulasi dengan faktor  $\sin z/z$  dengan  $z = x\Delta p/2\hbar$ .

Bentuk fungsi ini adalah persis seperti digambarkan pada gbr. [16.1]. Maksimum utamanya terletak antara  $z = -\frac{\pi}{2}$  dan  $z = +\frac{\pi}{2}$  dan mempunyai lebar sebesar :

$$\Delta z = \pi \quad \text{berarti} \quad \Delta x = \frac{\hbar}{\Delta p},$$

yang tidak lain sama dengan relasi ketidakpastian sendiri.

Dalam bahasa operator relasi ketidakpastian dirumuskan bahwa: operator posisi dan momentum tidak dapat saling dipertukarkan satu sama lain, apabila keduanya saling dipertukarkan, misalnya pertama dikerjakan operator posisi pada fungsi keadaan, kemudian momentum dan sebaliknya, maka akan diperoleh hasil perhitungan yang berbeda, demikian pula jika dilakukan hal sebaliknya.

$$\begin{aligned}
 p_x x f &= \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} (x f) \\
 &= \frac{\hbar}{i} \left( f + x \frac{\partial f}{\partial x} \right),
 \end{aligned}$$

$$x p_x f = x \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} f = \frac{\hbar}{i} x \frac{\partial f}{\partial x}$$

Perbedaan kedua pernyataan di atas menjadi :

$$(p_x x - x p_x) f = \frac{\hbar}{i} f$$

yang menunjukkan bahwa setiap fungsi dari fungsi eigen dari operator  $p_x x - x p_x$  mempunyai harga eigen  $\hbar/i$ . Persamaan operator tidak bergantung pada pemilihan fungsi  $f$  dan dapat dituliskan sebagai berikut:

$$p_x x - x p_x = \frac{\hbar}{i} \quad (16.16)$$

Pers. [16.16] disebut sebagai *relasi pertukaran operator*. Tentunya terdapat tiga relasi  $p$  dan  $x$  untuk masing-masing koordinat  $x$ ,  $y$ , dan  $z$  dan satu relasi energi dan waktu. Relasi keempat ini membentuk gambaran abstrak tentang gambaran ketidakpastian yang menyatakan:

Adalah tidak mungkin momentum dan posisi suatu partikel, juga waktu dan energi suatu peristiwa atau proses umumnya merupakan pasangan 'besaran konygasi' yang dapat ditentukan secara bersamaan. Pada pengukuran kedua besaran,  $\Delta p$ ,  $\Delta x$  atau  $\Delta t$ ,  $\Delta E$  dan perkalian keduanya akan menghasilkan produk yang tidak lebih kecil dari suatu harga konstanta  $h\hbar$ .

### 16.2.3 Operator Energi (Operator Hamiltonian)

Bagaimana bentuk operator sesungguhnya adalah sesuai dengan suatu besaran fisis tertentu, tidak dapat diturunkan secara pasti. Paling tidak untuk beberapa besaran dasar harus dicari hubungannya. Sebagai contoh untuk proses pembentukan model tersebut patut pula dipikirkan, apa yang dimaksud dengan operator 'turunan terhadap waktu',

yang disimbolkan dengan singkat sebagai  $A = \varphi/\varphi t$ . Penggunaan operator ini pada suatu fungsi bergantung posisi dan waktu  $f(r, t)$ , berarti pula penggunaan pada *medan skalar* bergantung pada waktu, memberikan apa yang biasa disebut dengan  $f(r, t)$

$$A f = \frac{\partial}{\partial t} f = \dot{f}$$

Jika suatu fungsi yang merupakan fungsi eigen operator ini, yaitu jika harus berlaku  $Af = af$ , maka fungsi haruslah merupakan penyelesaian (solusi) persamaan diferensial

$$f = af$$

Suku yang bergantung pada waktu dari fungsi ini haruslah berbentuk eksponensial sebagai berikut:

$$f(r, t) = \varphi(r) e^{at},$$

dengan sukuk posisi  $\varphi(r)$  adalah masih berharga sembarang. Dari awal distribusi ruang sembarang fungsi seperti ini akan meningkat secara eksponensial di semua tempat (jika harga eigen  $a$  positif) atau menurun (jika  $a$  berharga negatif). Harga  $a$  positif menyebabkan harga besaran di setiap tempat tak berhingga besar, secara fisis fungsi seperti ini tidak diperlukan, karena tidak memberikan arti fisis yang relevan. Untuk harga  $a$  negatif menyebabkan harga fungsi di setiap tempat kecil, menuju nol. Fungsi ini berlaku untuk harga eigen  $a$  real. Secara prinsip harga eigen dapat pula berbentuk bilangan kompleks, karena belum diketahui apakah operator hermitian atau tidak.

$A$  adalah hermitian jika berlaku untuk setiap pasangan fungsi sempurna  $f \cdot g$

$$f^* \cdot A g = A^* f^* \cdot g$$

atau lebih jelas lagi

$$\int f^* \frac{\partial}{\partial t} g \, dt = \int \frac{\partial}{\partial t} f^* g \, dt$$

Tidak terlihat dengan jelas mengapa harus berlaku untuk pasangan fungsi  $f$  dan  $g$ . Lainnya jika operator ditambahkan dengan faktor  $i$  atau umumnya dengan faktor  $ib$ , dengan  $b$  merupakan konstanta real:  $B i\varphi/\varphi t$ . Maka berlaku kondisi  $f^* \cdot B g = B^* f^* \cdot g$  atau  $\sum B g B^* f^* \cdot g = 0$  sebagai berikut:

$$\begin{aligned} & \int f^* ib \dot{g} dt - \int -ib \dot{f}^* g dt = \\ & ib \int (f^* \dot{g} + \dot{f}^* g) dt \\ & = ib \frac{\partial}{\partial t} \left( \int f^* g dt \right) = 0 \end{aligned}$$

Persamaan di atas selalu benar, karena  $\int f^* g dt$  adalah sebagai integral tertentu yang tidak lagi bergantung terhadap waktu.

Operator  $B = ib\varphi/\varphi t$  adalah selalu hermitian. Fungsi eigennya adalah  $f(r, t) = \varphi(r) e^{i\omega t}$ , berarti sebagai medan skalar terdistribusi secara sembarang di ruang, yang bergetar secara harmonik di semua tempat dengan frekuensi  $\omega$

$$\begin{aligned} B f &= ib \frac{\partial}{\partial t} \varphi(r) e^{-i\omega t} \\ &= \omega b \varphi(r) e^{-i\omega t} = \omega b f \end{aligned}$$

Harga eigen  $b'$  bergantung pada frekuensi sudut getaran ini:  $b' = b\omega$ . Getaran ini menjadikan fungsi  $f$  dapat lebih mudah dimengerti, akan tetapi bukan merupakan besaran fisis yang langsung dapat terukur, misalnya probabilitas mendapatkan partikel di suatu tempat  $f^* \cdot f$ . Dengan operasi  $f^* \cdot f$  fungsi eksponensial  $e$  akan lenyap, karena konyugat kompleks dari pangkat eksponensial berubah tandanya

$$f^* f = \varphi^2(r).$$

Karenanya keadaan energi operator  $B$  tidak berubah terhadap waktu, dengan perkataan lain operator adalah stasioner.

Sekarang perhatikan suatu keadaan  $\psi$  yang bukan merupakan keadaan energi dari  $B$ .  $B$  sebagai operator "penting" mempunyai

sistem fungsi eigen "berkelakuan baik" atau "sempurna" (pembuktian akan hal ini adalah sama dengan pembuktian Fourier pada §4.1.6), yang berarti bahwa setiap fungsi penting, termasuk  $f$ , dapat dikembangkan melalui harga eigen  $B$  sendiri, yang merupakan kombinasi liniernya. Operator  $B$ , jika tanpa kondisi lain yang ditambahkan padanya, mempunyai harga eigen real yang sama dengan  $b' = b\omega$ . Pada sistem nyata spektrum eigen kebanyakan adalah sesuai. Dalam kasus ini penjumlahan dari fungsi eigen ke  $i$  dibuat sesuai dengan indeks  $i$  yang dinyatakan dalam integral yang digantikan dengan fungsi indeks  $a$  - sebagai berikut:

$$u(r, t) = \int a(r, \omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

Peryataan di atas tidak lain merupakan deret Fourier dari fungsi  $\psi$ .  $a(\omega, r)$  adalah hasil transformasi atau fungsi amplitudo atau spektrumnya.

Pandang khususnya suatu keadaan yang terdiri atas dua fungsi, masing-masing mempunyai harga eigen  $c\omega_1$  dan  $c\omega_2$ , yaitu

$$u = a_1(r) e^{-i\omega_1 t} + a_2(r) e^{-i\omega_2 t}$$

Hal yang menjadi perhatian adalah apakah keadaan seperti ini juga mempunyai sifat, bahwa distribusi ruangnya  $\psi^* \psi$  bergantung pada waktu atau tidak, apakah berarti pula bahwa keadaan ini stasioner?

$$\begin{aligned} \psi^* \psi &= (a_1 e^{i\omega_1 t} + a_2 e^{i\omega_2 t})(a_1 e^{-i\omega_1 t} + a_2 e^{-i\omega_2 t}) \\ &= a_1^2 + a_2^2 + a_1 a_2 \cos(\omega_1 - \omega_2) t \end{aligned}$$

Kelihatannya tidak: karena  $\psi^* \psi$  bergantung pada waktu dan distribusi tempat mengalami getaran secara harmonik dengan frekuensi  $\omega_1 - \omega_2$ .

Dalam pembahasan di atas telah dibuat model matematika untuk suatu sistem, dengan menganggap terhadap dua macam keadaan:

1. Keadaan-keadaan stasioner yang tidak mengalami perubahan, sebagai fungsi eigen dari  $B$ , padanya terdapat suatu harga  $b$  tertentu, yang juga dikarakteristikkan oleh frekuensi sudut  $\omega_l$  juga seandainya tidak muncul getaran karenanya; dan

2. Keadaan yang tidak stasioner, khususnya yang mengandung dua fungsi eigen, yang bergetar dengan frekuensi sudut  $\omega_1 - \omega_2$ .

Sistem yang demikian ini adalah persis seperti atom. Apa yang telah ditemukan di atas adalah gambaran langsung dari postulasi Bohr dan prinsip kombinasi Ritz. Terdapat keadaan-keadaan atom yang padanya (tanpa dibuat melalui deret Fourier), khususnya energi, tidak mengalami perubahan. Akan tetapi terdapat pula keadaan-keadaan atom yang sepanjang waktu memancarkan cahaya dan pada sistem seperti ini kelihatannya distribusi elektron mengalami getaran dengan frekuensi yang bersangkutan. Frekuensi yang mungkin adalah perbedaan dari bilangan pada term-term Ritz yang amat kecil:  $\omega_{ik} = \omega_i - \omega_k$ .

Frekuensi term-term ini, misalnya yang diperoleh dari hasil percobaan Franck-Hertz, sebagai energi keadaan-keadaan stasioner seperti:

$$E_i = \hbar\omega_i$$

Operator  $B = -i\partial/\partial t$  dapat disebut sebagai *operator frekuensi*. Dengan demikian, maka operator energi, tanpa melalui pembuktian lebih lanjut, dapat dituliskan sebagai berikut:

$$H = -\hbar i \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t}$$

Keadaan-keadaan eigennya mempunyai harga energi tertentu dan konstan terhadap ruang atau dengan perkataan lain harga energi terdistribusi secara konstan di dalam ruang. Semua keadaan-keadaan lainnya bergetar dengan frekuensi  $\omega = \omega_i - \omega_k$ , atau dengan frekuensi campuran dari frekuensi-frekuensi yang ada dan karena sistem ini memancarkan energi terus menerus, maka cepat atau lambat keadaan sistem akan berubah menjadi stasioner kembali, yaitu pada tingkat enregi yang lebih rendah.

Patut pula diketahui bahwa model yang dikembangkan di sini sesungguhnya bukan sesuatu yang baru. Setiap model, juga sesuatu yang terselesaikan menjadi bola atau pegas, merupakan "isomorfi" dari kenyataan, yang sebenarnya tidak terdiri dari bola atau pegas, atau dengan perkataan lain terdapat kesesuaian hubungan struktural antara

elemen-elemen tertentu dari model dan elemen-elemen kenyataan yang bersesuaian. Maka model dikembangkan bermula dari isomorfisme struktural demikian. Kesesuaian antara elemen-elemen, seperti yang dibahas di atas, juga ditentukan secara sembarang, mirip seperti pernyataan: "Bola-bola biru adalah inti, bola-bola merah tidak lain elektron". Hal yang tidak lazim dalam model mekanika kuantum hanya, bahwa sejak awal harus dikerjakan dengan berbagai elemen-elemen matematika murni. Kesuksesan mekanika kuantum menunjukkan, bahwa elemen-elemen matematika lebih "mengandung kekayaan" dan lebih "sesuai" digunakan dibanding dengan model bola atau pegas.

#### 16.2.4 Persamaan Schroedinger

Dalam §16.2.1 selalu dibicarakan satu komponen momentum, yang sebenarnya ada tiga komponen. Operator momentum yang bersangkutan dengan tiga komponen koordinat adalah

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial z}$$

yang dapat diringkas dalam vektor sebagai berikut

$$p = \frac{\hbar}{i} \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \frac{\hbar}{i} \nabla \quad (16.17)$$

Operator lengkap dari vektor momentum untuk sebuah partikel tidak lain adalah gradien ( $\nabla$ ) dikalikan dengan  $\hbar/i$ . Operator energi kinetik dapat dibentuk secara analog seperti pada mekanika klasik, yaitu  $E_{kin} = p^2/2m$ , dengan menggantikan momentum  $p$  dengan operator momentum:

$$\begin{aligned} E_{kin} &= \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \end{aligned} \quad (16.18)$$

Operator energi kinetik, kecuali faktor  $\hbar^2/2m$  tidak lain adalah operator Laplace.

Operator posisi (tempat) secara sederhana merupakan perkalian dengan koordinat tertentu, atau dengan koordinat umum  $r$ . Setiap besaran fisis yang hanya sebagai fungsi koordinat mempunyai operator pula yang pengaruhnya secara sederhana sebagai perkalian dengan koordinat yang bersangkutan. Misalnya, energi potensial  $U(r)$  dari *medan konservatif*. Hukum kekekalan energi yang menyatakan energi total sistem terdiri atas energi kinetik dan potensial dapat diterjemahkan ke dalam operator sebagai berikut:

$$H = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(r) \quad (16.19)$$

Selain itu, operator energi menurut §16.2.3 dapat pula ditulis dalam bentuk

$$H = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} \quad (16.20)$$

Suatu fungsi keadaan yang bersangkutpaut dengan harga energi tertentu, yang terdapat di dalam ruang, akan mengalami getaran harmonik di setiap titik di ruang, yaitu sebagai gelombang diam. Untuk merepresentasikan secara lengkap fungsi gelombang ini harus pula diberikan distribusi amplitudonya di dalam ruang

$$\psi(r, t) = \varphi(r) e^{i\omega t} \quad (16.21)$$

Untuk ini operator energi seperti diberikan pada pers. [16.20] tidak mengandung ramalan tentang fungsi gelombang ini, sebaliknya operator energi yang diturunkan dari pernyataan hukum kekekalan energi (pers. [16.20]) yang dituliskan kembali dalam bentuk

$$\begin{aligned} E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} &= -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(r) \\ &= H = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} \end{aligned} \quad (16.22)$$

dapat memberikan interpretasi yang diinginkan. Jika persamaan operator dituliskan demikian, berarti bahwa kedua ruas mengandung

pengertian yang sama, atau dengan perkataan lain jika kedua ruas dikerjakan pada fungsi serupa, keduanya harus memberikan hasil perhitungan yang sama dan berarti pula bahwa fungsi yang digunakan, dalam hal ini misalnya  $\psi(r, t)$  haruslah merupakan penyelesaian persamaan operator tersebut; contoh

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(r, t) + U(r) \psi(r, t) = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} \psi(r, t) \quad (16.23)$$

Pers. [16.23] adalah *persamaan Schroedinger bergantung pada waktu*.

Khususnya untuk keadaan yang mempunyai harga energi tertentu, atau *keadaan stasioner*, dapat diketahui secara langsung dari pers. [16.21], bahwa ruas kanan persamaan ini dapat dituliskan menjadi  $H$   $\psi(r, t) = E\psi(r)e^{i\omega t}$ . Suku getaran yang mengandung waktu  $e^{i\omega t}$  akan muncul pada kedua ruas, sehingga dapat dieliminasi dengan mudah. Dengan demikian, maka fungsi  $\psi(r)$  tidak lain merupakan penyelesaian *persamaan Schroedinger tidak bergantung pada waktu* atau ditulis sebagai

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \varphi(r) + U(r) \varphi(r) = E \varphi(r) \quad (16.24)$$

Operator pada ruas kiri disebut pula sebagai operator Hamiltonian ( $H$ ). Keadaan stasioner adalah merupakan fungsi eigen dari operator Hamiltonian. Pada persamaan ini tidak lagi muncul fungsi yang bergantung pada waktu. Berikutnya fungsi  $\psi$  akan mengalami perubahan, tanpa memandang faktor  $e^{i\omega t}$  tidak lagi mengandung waktu. Alasan ini merupakan *dasar* mengapa keadaan disebut sebagai *keadaan stasioner*. *Setiap* keadaan dan *hanya* satu keadaan yang tidak berubah terhadap waktu, mempunyai energi tertentu. Keadaan-keadaan dari berbagai atom dan molekul, yang tidak mengabsorpsi ataupun mengemisikan cahaya, yaitu keadaan yang tidak mempunyai kesempatan mengalami perubahan terhadap waktu, dapat dijelaskan melalui persamaan Schroedinger tidak bergantung pada waktu. Persamaan ini mempunyai arti penting dalam mekanika kuantum.

### 16.3 Partikel di dalam Sumur Potensial

#### 16.3.1 Keadaan Stasioner

Di sini akan dibahas kelakuan sebuah partikel yang terdapat di dalam medan gaya.

Jika partikel tidak mengalami gaya, maka energi potensial  $U = U_0$  yang bekerja padanya dapat dianggap konstan, sehingga persamaan Schroedinger disederhanakan menjadi:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \varphi = (E - U_0) \varphi \quad (16.25)$$

Penyelesaian persamaan ini, untuk kasus satu dimensi, adalah... .

$$\varphi = \varphi_0 e^{\pm \frac{i}{\hbar} \sqrt{2m(E-U_0)} x} = \varphi_0 e^{\pm ikx} \quad (16.26)$$

Jika dibandingkan dengan pers. [16.12], pers. [16.26] adalah keadaan yang mempunyai momentum tertentu  $p = \sqrt{(E - U_0)}$ . Perhitungan ini sangat memuaskan, karena di satu pihak sebuah partikel yang berada di dalam ruang bebas medan tidak mengalami perubahan momentum atau meomentumnya tetap, dilain pihak keadaan ini juga sesuai dengan ramalan mekanika klasik yang mengatakan bahwa sebuah partikel yang terdapat di dalam medan potensial akan mempunyai energi kinetik sebesar  $E - U_0$ . Fungsi  $\varphi$  pada pers. [16.26] menggambarkan sebuah gelombang datar dengan amplitudo tidak bergantung posisi atau tempat. Dalam waktu yang panjang, partikel seperti ini akan selalu mempunyai probabilitas yang sama di setiap tempat di dalam ruang. Oleh karena itu tidak ada gunanya membahas lebih lanjut posisi partikel, karena secara matematis harga posisi yang diharapkan (*harga ekspektasi posisi*) tidak akan diperoleh sama sekali.

Selanjutnya pandang sebuah partikel berada di dalam ruang yang dibatasi oleh dua sisi; anggap bahwa di kedua sisi ruang terdapat medan gaya yang sangat besar. Dengan perkataan lain; di sisi ruang ini terdapat harga potensial yang mendekati tak berhingga. Untuk membuat lebih pasti bahwa partikel tidak akan melampaui daerah

batas ruang, sebagian dinding potensial dianggap sangat tinggi tak berhingga. Kondisi ruang seperti di atas mempunyai arti bahwa potensial atau medan gaya tidak hanya mempengaruhi partikel yang berada di dalamnya, tetapi juga di luar daerah di mana partikel berada. Untuk memudahkan perhitungan anggap bahwa hanya sebagian "sumur" potensial ini terdapat potensial konstan; untuk memudahkan penurunan anggap bahwa  $U = 0$ . Maka di dalam sumur berlaku persis seperti yang telah dibahas dalam contoh sebelumnya,

$$\varphi = \varphi_0 e^{\pm \frac{i}{\hbar} \sqrt{2mE}x} \quad (16.27)$$

Kedua tanda yang terdapat di dalam suku eksponensial menghasilkan penyelesaian saling tidak bergantung pada satu sama lain atau penyelesaian umum pers. [16.27] dapat ditulis menjadi

$$\varphi = A e^{ikx} + B e^{-ikx} \quad (16.28)$$

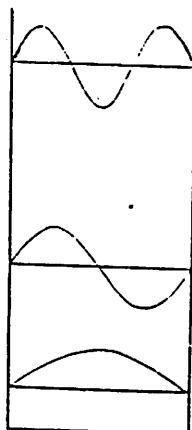
atau dengan penulisan berbeda

$$\begin{aligned} \varphi &= A' \cos kx + B' \sin kx \\ &\quad \cdot \left( A' = \frac{A + B}{2}, B' = \frac{A - B}{2} \right) \end{aligned} \quad (16.29)$$

Penyelesaian ini hanya berlaku di dalam daerah sumur potensial. Apa yang terjadi jika partikel berada di luar dari sumur potensial ini? Biasanya selalu dianggap bahwa di luar sumur  $\varphi = 0$ , karena partikel tidak dapat menembus atau tidak terdapat di luar sumur potensial ini. Analogi dengan anggapan klasik demikian justru menjadi pertanyaan di dalam mekanika kuantum. Hasil perhitungan mekanika kuantum misalnya: efek kanal (lihat § 16.3.2), justru kadang-kadang menjadi paradoks. Jalan satu-satunya sebagai konsekuensi yang harus ditempuh tentang keberadaan  $\varphi$  di luar sumur potensial ini hanya terletak pada harga batas tinggi sumur potensial dari berhingga menjadi tak berhingga. Dalam batasan demikian maka di luar sumur diperoleh harga  $\varphi = 0$ .

Dari syarat batas dapat ditunjukkan pula, bahwa  $\varphi$  haruslah merupakan fungsi posisi yang *tetap* (adanya kasus-kasus pengecualian

nantinya akan mudah dimengerti). Apabila tidak, bagaimana keadaan  $\varphi$  di sembarang tempat, katakanlah pada  $x = 0$ , apakah  $\varphi$  akan "melolpat" (diskontinu)? Seandainya demikian maka untuk  $x = 0$  turunan  $a\varphi/ar$  akan mempunyai harga tak berhingga (fungsi  $\delta$ ) dan  $a^2\varphi/ax^2$  bahkan mempunyai dua harga tak berhingga berbeda tanda ( $-\infty$  dan  $+\infty$ ). Seandainya demikian persamaan Schroedinger akan terpenuhi jika  $U(x)$  mempunyai bentuk "patologis", walaupun yang saling berlawanan. Di dalam semua kasus "normal", walaupun



Gambar 16.2: Harga energi dan fungsi eigen sebuah partikel di dalam kotak potensial.

potensial sekali waktu melonjak menjadi  $\infty$ , seperti halnya di sisi sumur potensial ini,  $\varphi$  selalu tetap.

Jika di satu pihak di luar sumur potensial  $\varphi = 0$  dan dilain pihak  $\varphi$  tetap, maka di dalam sumur pun, yaitu di dinding sumur potensial, harga  $\varphi = 0$ , Kelakuan  $\varphi$  demikian persis seperti seutas tali yang pada kedua ujungnya tidak dapat bergetar, karena di kedua sisi dalam keadaan terikat. Syarat batas fungsi ini adalah persis seperti yang berlaku pada tali, hanya dapat bergetar berulang-ulang secara *diskrit*, yaitu jika bilangan bulat dari setengah gelombangnya sama dengan setengah panjang tali dan hal ini juga berlaku untuk partikel yang berada di dalam sumur potensial, terdapat kemungkinan keadaan yang

diskrit. Syarat untuk keadaan eigen ini adalah identik dengan syarat getaran eigen pada tali, yaitu jika dianggap bahwa  $2\pi/k = \lambda$ , dengan  $\lambda$  sebagai panjang gelombang

$$a = n \frac{\lambda}{2} = n \frac{\hbar}{2p} = \frac{nh}{\sqrt{2mE}} \quad n = 1, 2, \dots \quad (16.30)$$

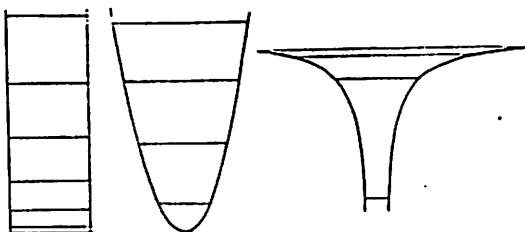
Hubungan antara  $E$  dan  $\lambda$ , juga  $p$ , menghasilkan harga energi yang dibolehkan

$$E_n = \frac{n^2 \hbar^2}{8ma^2} \quad (16.31)$$

Semua harga energi di luar pers. [16.31], karena syarat batas yang berlaku, bukan merupakan harga energi keadaan stasioner. Keadaan dengan energi terendah adalah

$$E_1 = \frac{\hbar^2}{8ma^2} \quad (16.32)$$

adalah keadaan berbentuk mirip sebuah busur fungsi sinus. Hal penting adalah *keadaan dasar* (keadaan energi terendah) ini secara energetik tidak berada di dasar sumur potensial, melainkan berada pada harga sama dengan  $\hbar^2/8ma^2$  yang selanjutnya dinamakan sebagai *energi titik nol*. "Jarak" energi ini juga berlaku untuk sumur potensial, walaupun berbentuk agak kompleks, tetapi harga tersebut adalah mendekati; a adalah karakteristik untuk ukuran sumur. Umumnya terdapat simpul dari bentuk gelombang pada setengah ukuran lebar sumur ( $a/2$ ), sehingga energi titik nol harus dikalikan dengan faktor 4; keadaan ini diartikan sebagai keadaan yang lain, karena berada 4 kali lebih tinggi dibanding energi keadaan dasar (energi titik nol). Pengaruh rumusan di atas memberikan arti yang besar dalam fisika.



Gambar 16.3: Harga eigen energi untuk potensial kotak, parabol dan Coulomb.

Rumusan ini memberikan arti misalnya untuk menjelaskan mengapa di dalam atom tidak terdapat elektron atau paling tidak pertikel yang mempunyai massa kecil seperti elektron. Seandainya elektron terdapat di dalam inti, maka energi keadaan dasarnya akan terlalu tinggi, sehingga dapat halangan potensial yang dibayangkan di atas dengan mudah "dilolosinya", sehingga ia dapat terikat di inti. Di samping itu ikatan kimia misalnya sering berhubungan dengan energi titik nol ini: Penggabungan sumur potensial dari atom-atom yang berikatan meyebabkan penurunan keadaan energi elektron; penurunan keadaan energi elektron ini sebagian disebabkan untuk mengkompensasikan adanya gaya tolak menolak Coulomb antara sesama elektron (berasal dari atom berbeda), sehingga sebagai hasil akhir menjadi energi ikat antar atom (lihat § 16.4.7).

Sumur potensial suatu atom mempunyai ukuran kira-kira 1 Å dan berdasarkan ukuran ini, dari pers. [16.32] akan diperoleh harga energi elektron sekitar 10 eV.

### 16.3.2 Efek Kanal

Sebuah partikel mekanika kuantum mempunyai kelakuan unik, yaitu jika partikel ditempatkan di dalam sumur potensial:

1. Partikel hanya mempunyai energi tertentu (sebuah "partikel klasik" dapat mempunyai energi sembarang mulai dari alas sumur

potensial dst.). Harga-harga energi tersebut akan semakin jauh terpisah satu sama lain jika sumur potensial semakin sempit.

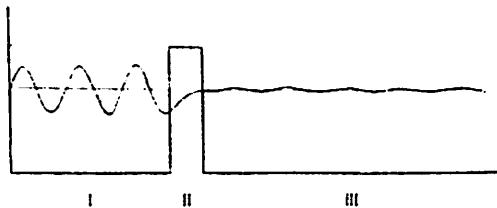
2. Khususnya harga energi terendah tidak terletak di lantai sumur potensial, melainkan pada suatu harga tertentu, yaitu pada energi titik nol. Harga energi terendah ini lebih kurang sebesar  $E_0 = \hbar^2/8ma^2$ .

Selain itu terdapat kenyataan penting, yaitu

3. Partikel tidak membiarkan dirinya terus "terkurung" di dalam sumur potensial (selain jika sumur mempunyai kedalaman tak berhingga atau dinding sumur tebal tak berhingga yang pada kenyataan kedua hal ini tidak ada).

Selanjutnya bayangkan sebuah sumur potensial berdinding sangat tinggi dibandingkan dengan energi yang dipunyai partikel, khususnya energi titik nolnya; selain kondisi seperti ini partikel klasik tidak akan terjebak di dalam sumur. Perhatikan potensial berikut

Sebuah sumur dengan lebar  $a$  dibatasi oleh dua dinding; dinding sisi kirinya mempunyai ketinggian tak berhingga, sedangkan dinding kanan mempunyai ketinggian  $U$  dan lebar  $d$ . Di sebalik dinding kanan



Gambar 16.4: Efek kanal. Fungsi gelombang sebuah partikel dalam daerah: I) kotak potensial, II) di dalam dinding dan III) di luar ruang.

terdapat pula sumur potensial lagi yang alasnya sama tinggi dengan sumur sebelumnya. Dalam kondisi potensial demikian partikel klasik yang mempunyai energi  $E, U$  tidak akan dapat melewati dinding.

Perlakuan mekanika kuantum harus bermuara pada persamaan Schroedinger. Untuk kasus ini digunakan persamaan Schroedinger bergantung pada watu, karena akan dicari penyelesaian persamaan

gelombang partikel harus mengalami "pelemahan" oleh karena partikel dianggap bergerak ke kanan dalam sumur potensial. Akan tetapi, penyelesaian terpenting adalah berasal dari penyelesaian persamaan Schroedinger tidak bergantung pada waktu (stasioner), jika dapat dilakukan interpretasi persamaan dengan benar.

Penyelesaian stasioner pers. [16.24] dapat ditulis menjadi tiga bagian, sesuai dengan daerah-daerah potensial yang berbeda (lihat gbr. [16.4]). Penyelesaiannya persis seperti yang dinyatakan pada pers. [16.26], yaitu

$$\varphi_I = \alpha e^{\pm ikx}, \quad \varphi_{II} = \beta e^{lx} + \gamma e^{-lx},$$

$$\varphi_{III} = \beta e^{\pm ikx}, \quad (16.33)$$

$$k = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE} \quad l = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(E-U)}$$

Di dalam daerah ke II (di dalam dinding) harga  $E - U$  adalah negatif, menyebabkan harga  $k$  imajiner, sehingga penyelesaian untuk daerah ini merupakan fungsi  $e$  yang mengalami pelemahan.

Selanjutnya, akan dicari apakah  $\varphi_{III}$  dapat berharga nol atau tidak, walaupun harga  $\varphi \neq 0$ . Seandainya demikian maka partikel benar-benar terjebak di dalam daerah I. Dengan dasar stasioner hal ini tidak mungkin terjadi: Harga  $\varphi_{III}$  terkecil yang dapat dicapai sesuai dengan hal, bahwa di dalam daerah II hanya terdapat fungsi eksponensial yang mengalami pelemahan:

$$\varphi = \varphi e^{-lx}.$$

Syarat akhir menghendaki perbandingan amplitudo fungsi gelombang pada daerah I dan III sebagai berikut

$$\frac{\varphi_I}{\varphi_{III}} = e^{-ld}$$

atau jika dinyatakan dalam probabilitas memperoleh partikel pada daerah I dan III

$$D = \frac{\varphi_I^2}{\varphi_{III}^2} = e^{-2ld} = e^{-\frac{2d}{\hbar} \sqrt{2m(E-U)}}$$

$D$  mempunyai arti sekaligus sebagai probalitas partikel untuk menembus dinding. Atau lebih tepat lagi (sebenarnya tidak tepat karena diterjemahkan langsung dari pernyataan klasik): Setiap kali jika partikel mencoba menembus dinding kanan (daerah II), maka probabilitas partikel dapat menembus dinding adalah sebesar  $D$ ; sedangkan probabilitas partikel yang mengalami refleksi adalah sama dengan  $1 - D$ .

Berapa seringnya partikel menembus dinding kanan? Penjelasan yang jelas tentang hal ini berasal dari gambaran klasik: Energi kinetik pada keadaan terendah partikel adalah  $E_{kim} = h^2/8ma^2$ , yaitu sesuai dengan kecepatan  $v = \sqrt{2E_{kim}/m} = h/2ma$ . Sumur yang lebarnya  $a$  dapat dilewati partikel dalam waktu  $r = 2ma^2/h$ . Kebalikan dari waktu ini merupakan tingkat keseringan partikel dalam satu satuan waktu menembus dinding

$$\nu_o = \frac{h}{2ma^2} \quad (16.34)$$

yang kira-kira sama seperti pada perhitungan biasa,  $v = E/h$  dari keadaan energi yang dinyatakan pada pers. [16.21]. Jika terdapat  $N$  partikel di dalam sumur potensial, maka jumlah partikel yang dapat menembus dinding dalam interval waktu  $dt$  dapat dinyatakan sebagai

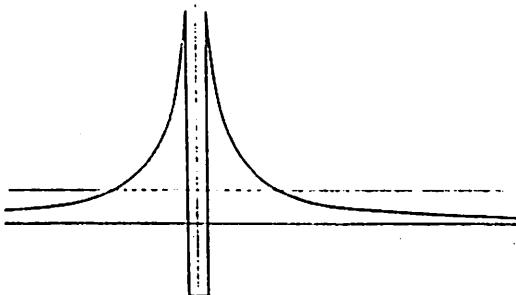
$$\begin{aligned} dN &= -\nu_o D N dt \\ &= -\frac{h}{2ma^2} e^{-\frac{2d}{h} \sqrt{2m(E-U)}} N dt \end{aligned} \quad (16.35)$$

Sumur potensial atomik mempunyai ukuran dalam beberapa Å dan ketinggian dinding beberapa eV. Untuk elektron ( $m = 0,9 \cdot 10^{-27}$  g untuk  $a = d = 1$  Å dan  $U - E = 1$  eV. menjadikan suku eksponensial pers. [16.35] berharga 1, sedangkan  $\nu_o$  kira-kira  $10^{16} \text{ det}^{-1}$ . Jika ketebalan dinding semakin tipis dan ketinggian dinding potensial semakin besar, maka suku eksponensial akan mengalami penurunan lebih cepat. Proton dan partikel-partikel berat lainnya mempunyai harga  $\nu_o$  dan tentu juga  $D$  yang jauh lebih kecil. Partikel-partikel ini hanya dapat menembus dinding yang lebih tipis dengan ketinggian yang sedikit lebih besar (dari hukum Coulomb diketahui bahwa

potensial dan jarak atau ukuran potensial saling berhubungan, akan tetapi jarak berperan lebih besar pada  $D$  dibanding ketinggian).

Melalui efek kanal ini fenomena peluruhan  $\alpha$  dan proses kebalikannya, yaitu inti yang relatif mudah ditembus oleh partikel bermuatan, dapat lebih mudah dimengerti, demikian pula proses-proses fusi inti (§ 13.2.3 dan §13.1.8); dalam daerah atomik dan molekuler efek kanal dapat digunakan untuk menjelaskan terlepasnya elektron dari molekul, seperti terlihat terlepasnya elektron dari benda padat karena adanya medan listrik (emisi medan, lihat §8.1.3, khususnya mikroskop emisi medan) dan beberapa efek penting dari konduktivitas listrik zat padat (dioda kanal dst.). Efek-efek seperti di atas, seandainya tanpa efek kanal akan memerlukan energi atau medan listrik yang lebih besar untuk menimbulkannya.

Selain itu secara klasik ditunjukkan, bahwa partikel yang



Gambar 16.5: Penembusan kanal untuk potensial Coulomb (dinding potensial Coulomb) dari dalam suatu inti (contoh: peluruhan  $\alpha$ ) atau partikel berasal dari luar inti, menembus ke dalamnya (contoh: reaksi termis inti).

mempunyai energi  $E > U$  akan dapat melompati dinding potensial tanpa gangguan apa pun; sedangkan dalam mekanika kuantum terdapat kemungkinan bahwa partikel tersebut akan direfleksikan oleh dinding. Rupanya partikel mempunyai lintasan yang jauh lebih rendah tidak seperti bayangan yang ada.

Jika potensial digambarkan tidak berbentuk sebuah kotak, melainkan berbentuk sembarang, maka akan lebih mudah dibuat

"trick" perhitungan untuk menyelesaikan persamaan Schroedinger: Yaitu dengan menggantikan suku eksponensial  $kx$  pada pers. [??]

dengan

$$k(x) = \hbar^{-1} \sqrt{2m(U - E)}$$

$$\int k(x) dx,$$

sehingga harga  $D$  dapat dituliskan kembali menjadi:

$$D = c e^{-\frac{2}{\hbar} \int_0^d \sqrt{2m(U-E)} dx} \quad (16.36)$$

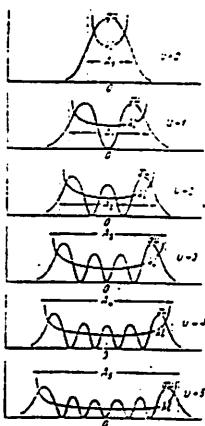
Integrasi dilakukan dengan mengambil batas sesuai dengan lebar "kanal", di mana energi  $E$  "lenyap" pada ketinggian dinding hingga kembali seperti sediakala. Secara umum dapat dituliskan dalam bentuk:

$$D = e^{-\frac{\alpha}{\hbar} \sqrt{2m(U_{max} - E)} l} \quad (16.37)$$

dengan faktor  $\alpha$  mempunyai harga dekat 1; untuk bentuk dinding (dinding yang ditembus partikel) segi empat faktor  $\alpha = 2$ , sedangkan jika dinding berbentuk segitiga  $\alpha = 4/3$ , untuk "dinding" Coulomb (lihat gbr. [16.5])  $\alpha < 4/3$

### 16.3.3 Aturan Simpul

Sebuah partikel yang terdapat di dalam potensial berbentuk sembarang dapat digambarkan sebagai gelombang diam, dengan amplitudo gelombang di dekat sisi kebanyakan berharga sama dengan nol. Di dalam sumur potensial  $\psi$  dapat mempunyai titik nol atau *simpul*. Dalam potensial berbentuk kotak diketahui keadaan partikel (gelombang) pada keadaan energi terendah tidak mempunyai simpul, kemudian untuk harga energi selanjutnya baru terdapat 1 simpul dst. Kesimpulan ini umumnya benar dan dapat digunakan untuk berbagai bentuk potensial; hal ini tentunya memudahkan jika diketahui pula bahwa adanya hubungan antara energi  $E$  secara langsung dengan lengkungan kurva  $\psi$  pada persamaan Schroedinger, yang biasanya diberikan melalui  $\partial^2\psi/\partial x^2$ . Luas permukaan yang diberikan oleh



Gambar 16.6: Probabilitas menemukan partikel secara klasik dan mekanika kuantum dari osilator harmonik, digambarkan untuk enam keadaan energi terdalamnya (secara klasik semua keadaan antara dua keadaan yang tergambar adalah mungkin; secara mekanika kuantum fungsi  $\psi$  tidak mungkin berharga nol [hanya mendekati nol] di daerah sisi). Partikel dalam mekanika kuantum dapat melampaui amplitudo yang digambarkan secara klasik  $A_1$ , yaitu apabila partikel melewati kanal. Pada keadaan- keadaan terendah (atas) distribusi probabilitas partikel secara klasik dan kuantum adalah sangat berbeda, akan tetapi pada keadaan yang lebih tinggi keduanya adalah mirip dan dapat dirumuskan dalam prinsip korespondensi [dari CL Schaefer dan W. Finkelnberg].

$\psi^2(x)$  atau normalisasi, haruslah memberikan lengkungan yang lebih dalam untuk setiap potongan fungsi  $\psi$ , jika semakin banyak terdapat potongan tersebut (lihat gbr. [16.2]). Hal ini dapat ditunjukkan secara umum (sebagai contoh khusus tentang ini adalah persoalan harga batas Sturm-Liouville):

Jika semua tingkat-tingkat energi keadaan partikel yang tidak mengalami degenerasi disimbolkan dengan nomor, bermula dari tingkat energi terendah melalui bilangan kuantum  $n = 1, 2, \dots$ , maka keadaan dengan nomor kuantum  $n$  akan mempunyai simpul persis sama dengan  $n-1$  (simpul yang terdapat di dua ujung, awal dan akhir tidak dihitung, lihat gbr. [16.6]).

## 16.4 Atom dan Molekul

### 16.4.1 Atom Hidrogen

Mekanika kuantum dalam beberapa dasawarsa ini telah dapat menjelaskan berbagai fenomena atom dan molekul dengan baik dan menyebabkan pula kimia misalnya juga merujuk padanya. Akan tetapi mekanika kuantum penuh dengan perhitungan-perhitungan yang rumit sehingga untuk memudahkan penjelasan seringkali orang hanya cukup mengambil gambaran lama yang telah ada; paling tidak sebagian gambaran tersebut tetap dapat terbaca dengan menggunakan "cahaya" mekanika kuantum.

Satu-satunya sistem atom yang dapat diselesaikan dengan "sem-purna" tanpa pendekatan, adalah atom hidrogen atau lebih umum suatu sistem yang mengandung satu elektron berada di dalam medan potensial partikel bermuatan positif, atau disebut pula sebagai sistem mirip atom hidrogen. Perhitungan-perhitungan yang dibuat untuk semua sistem lainnya selain atom hidrogen, berhasil diselesaikan melalui pendekatan-pendekatan jitu.

Potensial sebuah titik muatan positif  $Ze$  (misalnya: muatan inti) merupakan "corong jebakan" bagi elektron yang memaksa elektron berada di bawah pengaruhnya.

(16.38)

Elektron yang berada di bagian paling bawah "corong jebakan" ini dapat dibayangkan seolah elektron berada di dalam kotak sempit dan mempunyai keadaan energi yang terpisah jauh dari keadaan energi lainnya; elektron terletak paling datar di bawah  $E = 0$ ; sedangkan "jarak" keadaan-keadaan energi yang lebih tinggi adalah lebih dekat satu sama lain. Gambaran kenyataan ini rupa-rupanya sesuai dengan ramalan Bohr sebelumnya tentang tingkat-tingkat energi elektron yang terdapat di dalam atom (lihat gbr. [16.3]).

Harga-harga energi (harga eigen) dan fungsi eigen yang terdistribusi pada keadaan-keadaan energi dari operator energi Hamiltonian atau dengan perkataan lain penyelesaian persamaan Schroedinger tidak

bergantung pada waktu (keadaan stasioner!) dapat ditulis dengan menggunakan potensial seperti dinyatakan pers. [16.38] sebagai berikut:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \varphi - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \varphi = E \varphi \quad (16.39)$$

Penyelesaian  $\varphi$  adalah bagian yang menggambarkan ruang dari fungsi  $\psi$ ; sedangkan bagian yang mengandung waktu menurut pers. [16.21] adalah  $e^{iwr}$ , dengan frekuensi  $w = E/\hbar$  yang dapat dicari dari harga eigen  $E$  yang akan dicari dari pers. [16.39].

Seperi halnya gambaran bunyi Chladni pada plat yang mengalami regangan, mengandung sejumlah pola getaran bunyi yang mengisi seluruh ruang, pola yang digambarkan oleh pers. [16.39] juga mengandung "pola bunyi" diam dengan distribusi frekuensi dan amplitudo yang mengisi ruang berbeda-beda. Setiap "pola bunyi" diam ini menggambarkan keadaan stasioner elektron.

Gambaran lebih rinci dari keadaan-keadaan elektron ini dapat diketahui dengan jelas melalui simpul, yaitu bidang di mana amplitudonya sama dengan nol (pada plat Chladni bidang analog dengan garis). Dari aturan simpul telah ditunjukkan bahwa energi keadaan bertambah sesuai dengan jumlah simpul. Jumlah permukaan simpul  $n$  disebut sebagai *bilangan kuantum utama*. Seperti biasanya, keadaan energi terendah (keadaan yang tidak mengandung simpul) mempunyai  $n = 1$ .

Bagaimana bentuk sebenarnya keadaan energi terendah ini? Elektron yang berada dalam keadaan terendah dapat dibayangkan berada sangat dekat dengan inti ( $r = 0$ ) dan mempunyai energi potensial minimal. Berdasarkan relasi ketidakpastian fungsi  $\psi$  tidak akan berada persis pada  $r = 0$ ; sebagai pendekatan kompromis keadaan elektron yang bersangkutan dicoba melalui fungsi sebagai berikut:

$$\varphi = A e^{-r/a} \quad (16.40)$$

Fungsi ini adalah simetri bola, demikian pula seperti potensial pada pers. [16.38]. Dengan demikian operator  $\nabla$  juga harus dituliskan dalam bentuk koordinat bola seperti:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r}$$

Substitusikan pers. [16.40] ke [16.39], diperoleh

$$-\frac{\hbar^2}{2m} a^{-2} \varphi + \frac{\hbar^2}{2m r a} \frac{2}{r} \varphi - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \varphi = E \varphi$$

Persamaan di atas berlaku untuk semua  $r$  jika

$$a = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{Zmc^2}, \quad E = -\frac{\hbar^2}{2ma^2}.$$

sehingga dengan membuat verifikasi pers. [16.40] diperoleh harga eigen  $E$  sebagai berikut:

$$E = -\frac{Z^2 e^4 m}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} \quad (16.41)$$

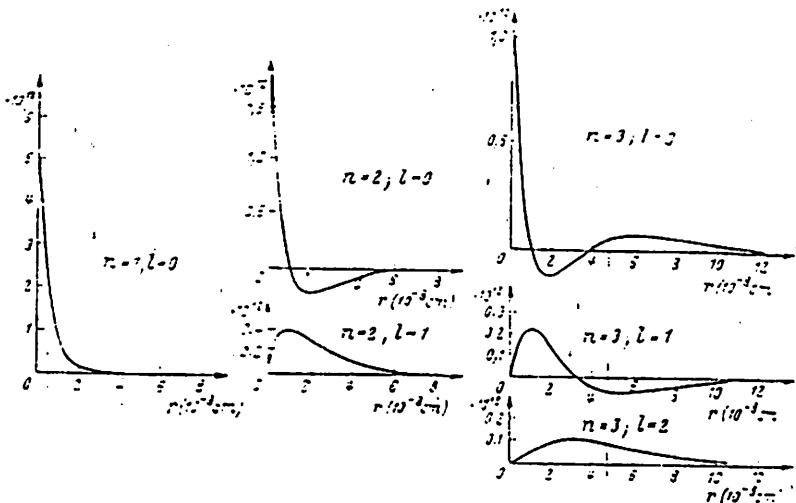
Persamaan ini adalah persis sama dengan harga energi yang diramalkan oleh Bohr pada pers. [12.21] dan  $a$  juga adalah persis sama dengan jari-jari lintasan (orbit) pertama Bohr. Dalam pengertian mekanika kuantum  $a$  tidak lagi diartikan sebagai jari-jari tunggal elektron, melainkan sebagai jarak rata-rata elektron terhadap inti dengan probabilitas elektron dapat berada sedikit melebihi atau kurang dari jarak rata-rata tersebut.

Dengan hasil perhitungan ini memberikan kepercayaan pada hasil perhitungan energi menurut Bohr dan jika digabungkan dengan bilangan kuantum utama  $n$  maka harga energi keadaan-keadaan elektron pada pers. [16.41] secara umum dapat dituliskan kembali menjadi

$$E = -\frac{Z^2 e^4 m}{32\pi^2 n^2 \hbar^2 \epsilon_0^2} \quad (16.42)$$

persis sama dengan energi elektron yang dihitung oleh Bohr, akan tetapi sekaligus menyangsikan distribusi elektron di dalam ruang yang diramalkan oleh model atom Bohr.

Keadaan-keadaan energi yang lebih tinggi mustilah mempunyai simpul di mana fungsi  $\psi$  berharga nol. Jika fungsi ini simetri bola, maka simpul juga simetri bola, yang tentunya pada satu kesempatan mempunyai kemungkinan untuk terkonsentrasi di dekat inti. Akan tetapi tidak semua keadaan mempunyai distribusi amplitudo simetri bola. Pada keadaan-keadaan demikian simpul dapat berbentuk bidang atau bidang kerucut. Simpul berbentuk bidang kerucut selalu muncul berpasangan. Jumlah simpul yang tidak simetri bola misalnya disimbolkan sebagai  $l;l$  disebut sebagai *bilangan kuantum tambahan*



Gambar 16.7: Fungsi  $v$  dari elektron yang terdapat di dalam medan Coulomb (atom H). Untuk keadaan  $s$  ( $l = 0$ ) diperoleh distribusi total melalui rotasi terhadap sumbu  $y$  dan dikuadratkan; pada  $l = 0$  fungsi masih akan mengalami modulasi dengan fungsi  $e^{iQl}$ . Skala ordinat adalah tidak selalu sama. Garis tipis yang tegak lurus pada sumbu  $r$  memberikan jari-jari Bohr yang bersangkutan [dikutip dari Herzberg oleh W. Finkelnburg].

atau *bilangan kuantum momentum orbital*. Bilangan kuantum ini secara spektroskopis telah dikenal, dan  $l$  dengan mudah dinyatakan dalam huruf sebagai berikut:

<i>l</i>	0	1	2	3
----------	---	---	---	---

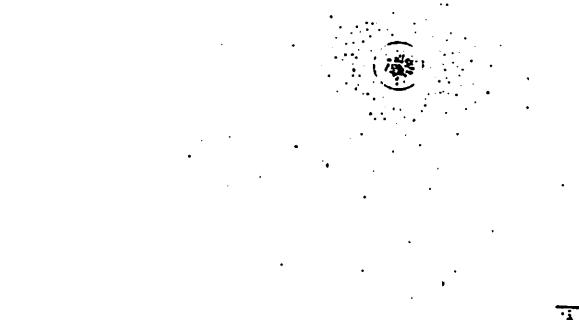
Simbol	<i>s</i>	<i>p</i>	<i>d</i>	<i>f</i>
--------	----------	----------	----------	----------

Dengan demikian, diperoleh gambaran  $n$  lebih jelas. Suatu keadaan  $3p$  misalnya mempunyai  $n = 3$ ,  $l = 1$ , berarti keadaan mempunyai satu simpul simetri bola dan satu simpul tidak simetri bola yang pasti adalah bidang datar, bukan kerucut karena kerucut harus muncul sepasang. Dengan demikian fungsi  $\psi$  haruslah terdistribusi (lihat gbr. [16.12]) menurut: Fungsi  $\psi$  terpecah menjadi dua bagian, masing-masing dipisahkan oleh simpul bidang datar, dengan masing-masing fungsi yang berada di dekat bidang simpul lebih bundar dibanding bagian lainnya.

Keadaan  $ns$  mempunyai  $n - 1$  simpul kerucut, keadaan  $np$  mempunyai  $n-2$  simpul kerucut dan satu bidang datar. Dari keadaan  $nd$  ke atas pasangan simpul kerucut dapat muncul sebagai bidang datar. Dalam hal ini jelas karena  $l$  berharga lebih kecil atau sama dengan  $n-1$  (jumlah simpul simetri bola tidak dapat berharga negatif). Untuk simpul bidang dan kerucut terdapat berbagai kemungkinan orientasi, khususnya jika di dalam ruang terdapat pengaruh medan luar atau partikel "asing". Umumnya simpul bidang dan kerucut mempunyai 3 kemungkinan posisi, sesuai dengan 3 sumbu koordinat atau bidang. Maka keadaan  $p$  akan terdapat 3 elektron yang masing-masing orientasi digambarkan sesuai dengan  $p_x$ ,  $p_y$ ,  $p_z$ . Analog terdapat 5 elektron untuk keadaan  $d$ , walaupun sukar dilihat dengan jelas, untuk keadaan  $f$  terdapat 7 elektron dst. (lihat gbr. [16.15]).

Dalam sistem atom yang mirip atom hidrogen harga energi hanya bergantung pada jumlah simpul, yaitu dari harga  $n$  (lihat pers. [16.42]), akan tetapi tidak bergantung pada  $l$ : Keadaan yang mempunyai  $n$  sama, tetapi dengan  $l$  berbeda secara energetik mengalami *degenerasi*. Akan tetapi lain halnya untuk atom berelektron banyak (lihat

Gambar 16.9: Fungsi gelombang 1s ( $\psi_{1s}$ ) suatu atom mirip atom hidrogen.



Gambar 16.8: Fungsi gelombang 2s ( $\psi_{2s}$ ) suatu atom mirip atom hidrogen.

pembahasan berikut). Terpecahnya energi *splitting* amat kecil (*struktur energi halus*) juga terjadi pada term energi atom hidrogen, yaitu karena kontribusi *spin*. Keadaan-keadaan dengan  $l$  berbeda akan mempunyai momentum putar (orbital) berbeda dan bersama-sama dengan momentum spin menyebabkan atom mengalami interaksi magnetik, yang tentunya bergantung pada orientasi kedua momentum

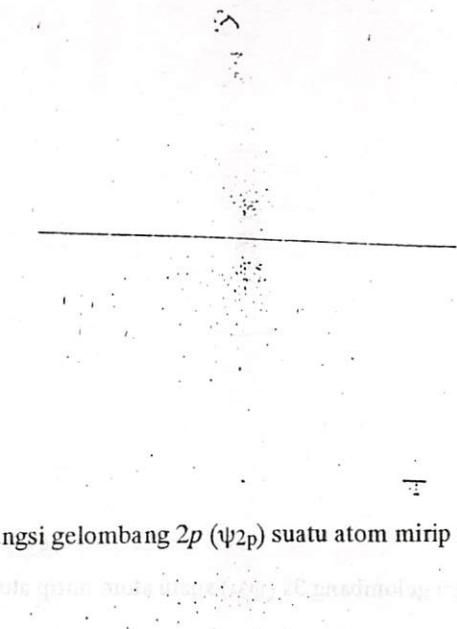


Gambar 16.10: Fungsi gelombang  $3s$  ( $\psi_{3s}$ ) suatu atom mirip atom hidrogen.

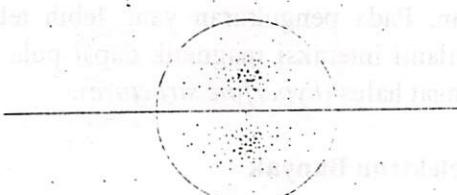
yang bersangkutan. Pada pengukuran yang lebih teliti pada sistem atom yang mengalami interaksi magnetik dapat pula diamati adanya struktur energi sangat halus (*hyperfine structure*).

#### 16.4.2 Atom Berelektron Banyak

Medan yang bekerja pada sebuah elektron suatu atom bukan mirip atom hidrogen tidak lagi dapat dijelaskan berdasarkan pers. [16.38]; karena medan demikian umumnya akan mengalami perubahan, yaitu berubah dari sifat simetri bolanya. Khususnya karena adanya pengaruh tolak menolak dari elektron lain, sehingga ikatan elektron terhadap inti tidak lagi kuat seandainya tanpa elektron "pengganggu". Persoalan ini dapat dijelaskan dengan adanya "efek pelindung" dari medan inti, khususnya bagi elektron yang berada pada orbit terdalam. Karenanya kontribusi muatan terhadap energi total hanya dipengaruhi

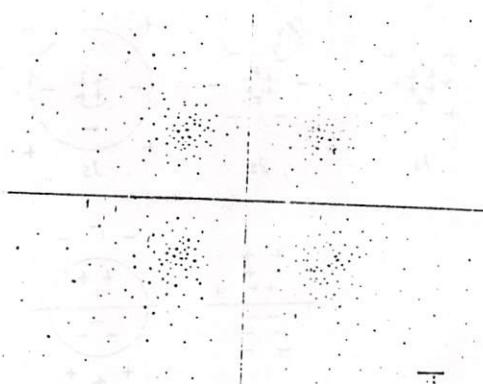


Gambar 16.11: Fungsi gelombang  $2p$  ( $\psi_{2p}$ ) suatu atom mirip atom hidrogen



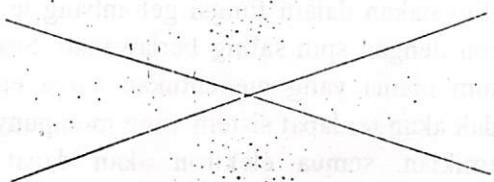
Gambar 16.12: Fungsi gelombang  $3p$  ( $\psi_{3p}$ ) suatu atom mirip atom hidrogen.

*muatan efektif  $Z_{ef}$ .* Kuat atau lemahnya kontribusi "efek pelindung" ini bergantung pada konfigurasi ruang kedua elektron yang saling berinteraksi. Semakin dekat fungsi  $\psi$  elektron berada di dekat inti, maka kemampuan elektron untuk melawan melalui efek pelindung

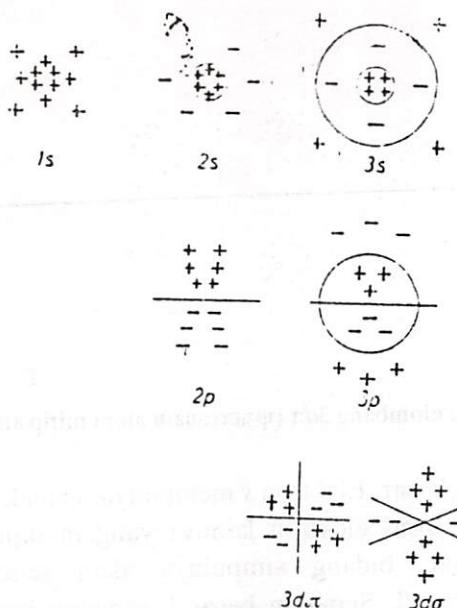


Gambar 16.13: Fungsi gelombang  $3d\pi$  ( $\psi_{3d\pi}$ ) suatu atom mirip atom hidrogen.

ini menjadi semakin besar. Elektron  $s$  mempunyai  $\psi$  maksimum pada  $r = 0$ , sebaliknya elektron- elektron lainnya yang mempunyai harga  $l$  yang semakin besar, bidang simpulnya akan semakin banyak berpotongan pada  $r = 0$ . Semakin besar  $l$ , semakin besar pula efek pelindung dan semakin kecil muatan efektif, dan hal ini mempunyai arti semakin lemah gaya tarik menariknya elektron dan inti, sehingga menyebabkan semakin besar energi totalnya (karena potensial tarik menarik dianggap berharga negatif). Kadaan-kadaan dengan  $l$  berbeda untuk atom berelektron banyak tidak lagi mengalami *degenerasi*: Secara keseluruhan keadaan energi yang diberikan sesuai dengan  $n$  akan terpecah menjadi beberapa tingkat energi, masing-masing untuk setiap harga  $l$ .



Gambar 16.14: Fungsi gelombang  $3d\infty$  ( $\psi_{3d\infty}$ ) suatu atom mirip atom Hidrogen.



Gambar 16.15: Simpul. Tanda dan simetri fungsi gelombang suatu atom mirip atom hidrogen.

### 16.4.3 Sistem Berkala

Dengan diperolehnya penjelasan menurut mekanika kuantum, maka sistem periodik atau sistem berkala unsur-unsur dapat lebih dimengerti. Di dalam sebuah atom bernomor atom  $N$  terdapat  $N$  elektron yang menduduki masing-masing keadaannya, apabila atom tidak mengalami eksitasi. Berdasarkan prinsip Pauli masing-masing keadaan yang dinyatakan dalam fungsi gelombang  $\psi$  dapat diduduki oleh dua elektron dengan spin saling berlawanan. Seandainya hanya bilangan kuantum utama yang menentukan harga energi suatu keadaan, maka tidak akan terdapat sistem yang mempunyai periodisitas: Seandainya demikian, semua elektron akan dapat berpindah ke keadaan mana saja di dalam kulit  $n$ . Tentunya semua sifat-sifat atom yang kita kenal akan berubah secara drastis, seandainya suatu kulit diisi oleh semua elektron. Masing-masing kulit diisi oleh elektron sebagai berikut:  $2; 2 + 6 = 8; 2 + 6 + 10 = 18; 2 + 6 + 10 + 14 = 32$  dst.

dan umumnya masing-masing kulit ( $n = 1, 2, \dots$ ) hanya dapat diisi sebanyak  $2n^2$  elektron.

Kenyataan keadaan-keadaan yang terdapat di dalam setiap kulit  $n$  akan terisi elektron sesuai dengan pertambahan energinya atau pertambahan bilangan kuantum orbital  $l$ . Dua elektron yang mempunyai harga  $l$  yang sama akan menyusun keadaan sedemikian, di mana awan  $\psi$  kedua elektron saling terpisah jauh satu sama lain, karena keduanya mengalami gaya tolak menolak dan efek pelindung; seandainya tidak terjadi demikian maka gaya tolak menolak dan efek pelindung keduanya akan terlalu besar untuk menjaga sistem tetap stabil (aturan Hund). Di kulit  $p$ , tiga elektron pertama masing-masing akan berada pada keadaan  $p_x$ ,  $p_y$  dan  $p_z$  (tentunya tidak harus berurutan, karena pemberian simbol koordinat dapat dilakukan secara sembarang). Satu elektron berikutnya haruslah menempati keadaan yang telah terisi. Dengan cara demikian sifat-sifat kimia atau Fisika-kimia atom disusun, yang pada kenyataannya hanya konfigurasi elektron terluar yang memberikan peran penting dalam sifat kimia atom yang bersangkutan (sebaliknya sifat konfigurasi elektron "dalam" tidak memberikan sifat periodik sesuai dengan nomor atomnya, misalnya frekuensi sinar Roentgen, melainkan sangat berbeda, lihat § 12.5.5).

Selanjutnya diharapkan pula bahwa keadaan-keadaan elektron mengisi susunan dalam urutan sebagai berikut:  $1s, 2s, 2p, 3s, 3p, 3d, 4s, 4p, 4d, 4f$  dst. Di dalam kenyataannya kulit  $4s$  akan diisi oleh elektron terlebih dahulu sebelum mengisi kulit  $3d$ ,  $5s$  diisi sebelum elektron mengisi  $4d$  (pada grup unsur-unsur tambahan) dan elektron  $4f$  bahkan mengisi dua periode sekaligus (unsur tanah jarang), demikian pula elektron kulit  $5f$  pada unsur uranium dan transuranium. Pemahaman lebih rinci tentang sifat-sifat proses kimia dan fisika-kimia dijelaskan melalui pengetahuan rinci tentang fungsi  $\psi$  untuk masing-masing keadaan, seperti halnya peran muatan efektif.

#### 16.4.4 Muatan Efektif

Muatan efektif berperan menentukan posisi keadaan energi dan garis-garis spektral atom, khususnya energi ionisasi dan berbagai

sifat-sifat atom lain yang berhubungan dengannya, seperti karakter sifat logam dan bukan logam (ditentukan biasanya dari mudah atau sukaranya mengalami ionisasi). Besarnya interaksi antara masing-masing tipe elektron yang menyebabkan adanya efek pelindung dan muatan efektif adalah sukar ditentukan secara eksak. Akan tetapi beberapa aturan berikut dapat memberikan gambaran yang baik tentang muatan efektif:

1. Pengaruh efek pelindung dari elektron-elektron "dalam" (elektron-elektron yang terdapat di kulit paling dalam) pada elektron yang terletak lebih luar adalah dapat saling ditambahkan:

2. Untuk kombinasi elektron yang berbeda berlaku efek pelindung  $s$  berikut yang dinyatakan dalam muatan inti:

- (a)  $s = 1,000$  untuk pengaruh dari satu elektron pada elektron lainnya, sedangkan untuk  $s = 2$  dan lainnya tidak lagi memberikan simpul simetri bola; dan juga berlaku untuk pengaruh dari satu elektron  $p$  atau  $d$  pada elektron  $p$  atau  $d$  yang terdapat pada kulit dan mempunyai orientasi yang sama;
- (b)  $s = 0,70$  untuk pengaruh dari satu elektron  $p$  atau  $d$  masing-masing pada elektron  $p$  dan  $d$  yang terdapat di dalam kulit yang sama, akan tetapi mempunyai orientasi berbeda;
- (c)  $s = 0,65$  untuk pengaruh dari satu elektron  $s$  pada elektron  $s$  dan  $d$  yang terdapat di dalam kulit yang sama;
- (d)  $s = 0,90$  untuk semua kasus lainnya.

Dari gbr. [16.8] hingga [16.14] paling tidak dapat dibayangkan dengan jelas bagaimana munculnya angka-angka di atas.

Sebagai contoh akan diberikan bagaimana energi ionisasi dari atom O dapat ditentukan. Untuk suatu keadaan dengan nomor kuantum utama  $n$  dan muatan efektif  $Z_{\text{ef}}$  energi ionisasi keadaan tersebut adalah sesuai seperti diberikan pada pers. [16.41] sebagai berikut:

$$E_{\text{ion}} = -\frac{Z_{\text{ef}}^2 e^4 m}{32\pi^2 \varepsilon_0^2 h^2}$$

Atom oksigen mempunyai konfigurasi elektron  $1s^2 2s^2 2p^4$ . Energi ionisasi untuk elektron di kulit  $p$  yang tidak terisi penuh diberikan

sebagai 8 dikurang dengan adanya efek pelindung dari 7 elektron lainnya. Untuk kasus ini 4 elektron (dari  $1s^2$  dan  $2s^2$ ) memenuhi kondisi d), dua elektron  $2p$  memenuhi kondisi b) dan satu elektron yang seharusnya pula mempunyai orientasi yang sama dapat memenuhi kondisi a):

$$Z_{\text{ef}} = 8 - 4 \cdot 0,9 - 2 \cdot 0,7 - 1 = 2,00$$

dengan demikian maka energi ionisasi menjadi

$$E_{\text{ion}} = -\frac{2^2 e^4 m}{32\pi^2 \epsilon_0^2 h^2} = 13,596 \text{ eV}$$

Hasil pengukuran energi ionisasi oksigen memberikan harga sebesar 13,614 eV. Sedangkan perhitungan energi ionisasi untuk atom-atom lainnya tidak selalu memberikan harga yang baik.

#### 16.4.5 Bagaimana Atom Memancarkan Cahaya?

Pada pembahasan ini akan dicoba menjawab pertanyaan yang melumpuhkan model atom Rutherford dan dengan model atom Bohr dapat diselesaikan, yaitu: Mengapa atom yang berada pada keadaan stasioner tidak memancarkan cahaya atau energinya?

Jika fungsi gelombang  $\psi$  sebuah elektron atau  $\psi^2$  dianggap sebagai distribusi muatan yang terdapat di dalam ruang, maka kerapatan muatan dapat dituliskan sebagai:  $e \psi^2$ , sehingga akan diperoleh distribusi momen dipol yang terdapat di ruang sebagai berikut:

$$p = e \int r |\psi|^2 dV = e r \psi^* \cdot \psi \quad (16.43)$$

Dalam persamaan di atas suku  $e^{i\omega t}$  yang seharusnya muncul pada fungsi  $\psi$  tidak diabaikan begitu saja. Karena suku ini mengandung pangkat eksponensial, maka pada kongkat kompleks  $\psi^*$  bentuknya berubah menjadi  $e^{-i\omega t}$ , sehingga jika dikalikan dengan  $\psi$  suku ini hilang dengan sendirinya. Momen dipol elektron dalam keadaan stasioner adalah *statis* dan dalam mekanika kuantum momen dipol ini tidak bergetar, sehingga tidak ada alasan untuk mengatakan bahwa elektron pada keadaan stasioner dapat memancarkan (mengemisi) energinya.

Akan tetapi, terdapat pula keadaan-keadaan yang direpresentasikan sebagai keadaan campuran dari dua keadaan stasioner. Keadaan seperti ini merupakan penggabungan dari keadaan yang lebih "kaya" dan keadaan lebih „miskin" energi (campuran dari dua keadaan berenergi sama, yaitu dua keadaan terdegenerasi, akan menghasilkan keadaan stasioner kembali; lihat § 16.6.4). Keadaan campuran muncul karena elektron mengalami eksitasi, yaitu penambahan energi. Misalnya keadaan campuran tersebut terdiri atas keadaan  $\psi_1$  dan  $\psi_2$  (misalnya bahwa  $\psi_2$  mempunyai energi lebih tinggi dari  $\psi_1$ ), maka keadaan campuran dapat ditulis sebagai

$$\psi = a \psi_1 + b \psi_2 \quad (16.44)$$

Jika dilakukan perhitungan momen dipole keadaan campuran ini, maka akan muncul persamaan

$$M_{ik} = \mathbf{r} \psi_i^* \cdot \psi_k \quad (16.45)$$

yang disebut sebagai elemen matriks momen dipol. Dengan pertolongan matriks momen dipol  $M_{ik}$ , dapat dihitung momen dipol keadaan campuran sebagai berikut:

$$p = \epsilon [a^2 M_{11} + b^2 M_{22} + 2ab M_{12} \cdot \sin(\omega_2 - \omega_1)t] \quad (16.46)$$

Suku pertama dan kedua pada ruas kanan tidak mengalami vibrasi, sedangkan suku ketiga mengalami getaran dengan frekuensi modulasi  $\omega = \omega_2 - \omega_1$ , yang kemudian berdasarkan postulasi Bohr dapat dihubungkan dengan energi  $E_1$  dan  $E_2$  dari masing-masing keadaan stasioner

$$\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{E_2 - E_1}{\hbar} \quad (16.47)$$

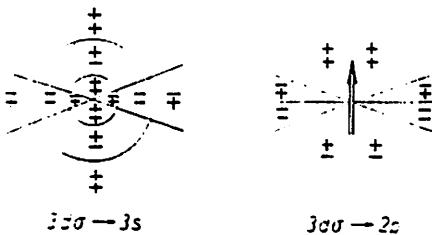
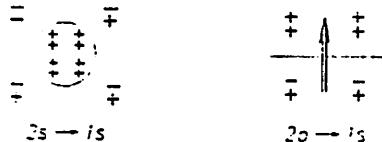
(bandingkan dengan pers. [16.21]. Dalam hal ini masih pula bergantung apakah elemen matriks  $M_{12}$  berharga nol atau tidak. Selain itu, hal yang perlu diketahui adalah bahwa timbulnya keadaan

campuran seperti ini tidak selalu terjadi secara sembarang, melainkan hanya jika masing-masing keadaan mempunyai selisih bilangan kuantum  $l$

$$\Delta l = \pm 1. \quad (16.48)$$

Syarat ini merupakan pokok dari *aturan transisi* yang telah ditemukan secara empiris oleh para ahli spektroskopi, lama sebelum mekanika kuantum dapat menjelaskan hal ini. Gbr. [16.16] hanya memberikan contoh untuk kegunaan pengamatan simetri dalam persoalan ini. Pengamatan simetri telah dikembangkan orang secara teoritis dengan menggunakan *teori grup*, khususnya penting bagi mekanika kimia kuantum.

Suatu momen dippol yang mengalami vibrasi adalah mirip seperti osilator Hertz (§7.7.7); semua yang dianggap oleh Hertz juga berlaku dalam mekanika kuantum, pembuktianya dapat dilakukan dengan



Gambar 16.16: Kombinasi fungsi gelombang untuk beberapa proses transisi antara keadaan stasioner. Kiri: transisi tanpa momen dipol (tidak terjadi emisi). Kanan: transisi dengan momen dipol (terjadi emisi).

teori DiraC elektron dan teori mekanika kuantum. Kehilangan energi per satuan waktu berdasarkan pers. [7.76] adalah

$$N = \frac{2}{3} \frac{e^2}{\varepsilon_0^2 c^3} a^2 b^2 M_{12}^2 \omega^4 \quad (16.49)$$

Kehilangan energi yang bersangkutan adalah berasal dari energi keadaan yang lebih tinggi dari pers. [16.44], dan berarti pula bahwa harga  $b$  harus menurun terhadap waktu, hingga mencapai harga nol dan elektron kembali ke keadaan energi terendah  $\psi_1$ . Perbedaan energi antara keadaan 1 dan 2 adalah  $E_2 - E_1 = \hbar\omega$  akan digunakan sebagai laju transisi energi  $N$  dalam waktu

$$\tau = \frac{\hbar\omega}{N} \approx \frac{\varepsilon_0^2 c^3}{e^2 M_{12}^2 \omega^3} \quad (16.50)$$

Untuk harga frekuensi suatu atom antara  $\omega \approx 10^{15}$  hingga  $10^{16}$  det $^{-1}$ . akan menghasilkan "waktu terjadinya transisi" sekitar  $10^{-8}$  det ( $M_{12} \approx 1 \text{ \AA}$ ) dan harga ini persis sama seperti diramalkan secara klasik sebelumnya (lihat §12.2.2). Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa semua hasil perhitungan yang lalu tentang lebar garis alamiah, panjang kojerensi spektrum yang dipancarkan dalam proses transisi ini tetap berlaku.

#### 16.4.6 Keadaan Hibrid

Dalam memberlakukan keadaan eigen suatu sistem tidak boleh dilupakan beberapa formalisme yang secara matematis mudah dilakukan sebagai berikut

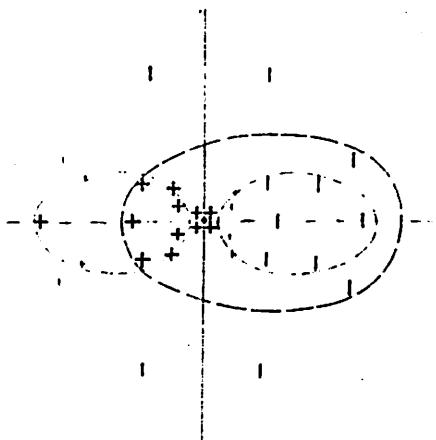
Jika dua keadaan  $\psi_1$  dan  $\psi_2$  mengalami degenerasi karena suatu operatur  $\mathbf{A}$ , yaitu kedua keadaan mempunyai energi yang sama, maka kombinasi linier keduanya adalah

$$\psi = c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2 \quad (16.51)$$

dengan  $c_1$  dan  $c_2$  adalah koefisien sembarang dari fungsi eigen yang mempunyai harga eigen yang sama. Jika fungsi yang terdapat pada pers. [16.51] dengan operator  $\mathbf{A}$ , harus pula diingat linieritas operator yang bersangkutan.  $c_1$  dan  $c_2$  dapat dicari melalui normalisasi fungsi gelombang

$$c_1^2 + c_2^2 = 1$$

Keadaan-keadaan yang mempunyai harga-harga eigen *berbeda* jika



Gambar 16.17: Fungsi hibrid 2s - 2p.

dituliskan dalam kombinasi linier tidak akan menghasilkan keadaan yang sama. Sebagai contoh misalnya tiga keadaan *p* dari atom H, maka harus diperhatikan bahwa padanya terdapat tiga fungsi eigen basis ortonormal dan dari masing-masing keadaan tersebut akan terdapat pula sejumlah keadaan lain yang merupakan kombinasi tripel dari fungsi eigen ortonormal yang tetap berada pada arah yang bersangkutan, yang diharuskan oleh keadaan yang ada (misalnya adanya medan tambahan atau partner ikat yang berdekatan). Keadaan *2s* dan *2p* dapat pula saling berkombinasi atau disebut mengalami *hibridisasi*; pada atom hidrogen energi keadaan ini mengalami degenerasi, sehingga kombinasi keduanya akan menghasilkan keadaan stasioner kembali dan tidak perlu dipersoalkan lagi apakah keadaan hibrid ini akan mengemisi energi atau tidak (lihat keterangan di atas). Pada keadaan hibridisasi *sp*  $\psi$  akan mengalami penguatan, yaitu jika masing-masing fungsi *s* dan *p* mempunyai tanda yang sama, dan jika sebaliknya, *s* dan *p* mempunyai tanda berbeda,  $\psi$  mengalami pelemahan (lihat gbr. [16.17]). Pada keadaan ini terdapat suatu bagian yang mengembung di satu sisi antara fungsi *p* berbentuk hantel (dua

bola yang dihubungkan oleh satu batang) dan  $s$  berbentuk bola. Konfigurasi elektron seperti ini, yang dihadapannya terdapat partner, untuk ikatan kimia tentunya mempunyai keuntungan tersendiri. Walaupun keadaan hibrid untuk atom berelektron banyak tidak menghasilkan keadaan stasioner, karena terdiri dari dua keadaan yang tidak mengalami degenerasi, akan tetapi dengan dasar inilah kemudian dapat dijelaskan keadaan-keadaan molekul dari dua atom yang bersangkutan. Hal ini dapat pula dibayangkan bahwa keadaan-keadaan atom yang mempunyai medan kompleks intinya dan inti partner ikatnya walau bagaimanapun tidak akan menemukan keadaan stasioner atau pun keadaan energi terdegenerasi. Setiap pendekatan yang dibuat untuk menjelaskan kelakukan khusus ini adalah dapat dibenarkan.

#### 16.4.7 Kimia Kuantum

Sifat listrik suatu ikatan kimia *heteropolar (ionogen)* dapat dimengerti dengan baik jika dipandang kembali *afinitas* elektron suatu atom netral. Energi yang dinamakan  $E_A$  diperoleh jika terdapat penggabungan satu elektron. Harga  $E_A$  khususnya besar untuk atom-atom yang mempunyai konfigurasi mendekati konfigurasi gas mulia (khususnya unsur-unsur halogen dan chalkogen); besarnya harga  $E_A$  ini adalah karena jangkauan pengaruh muatan inti yang sangat kuat pada elektron "sisa" yang tidak termasuk konfigurasi gas mulia. Berdasarkan aturan *bilangan pelindung* yang telah dikemukakan di atas, misalnya diperoleh muatan inti efektif yang mempengaruhi satu elektron, seandainya satu elektron ini diikat di dalam atom Cl netral adalah

$$Z_{\text{ef}} = 17 - 5 \cdot 1,00 - 8 \cdot 0,9 - 1 \cdot 0,7 = 2,00$$

Maka afinitas elektron dapat diramalkan sebagai

$$E_A = \frac{Z_{\text{ef}}^2}{n^2} E_{\text{II}} = 6,05 \text{ eV}$$

Dalam kasus ini umumnya harga muatan inti efektif yang menentukan pembentukan ion negatif mempunyai harga lebih kecil 1 dari harga

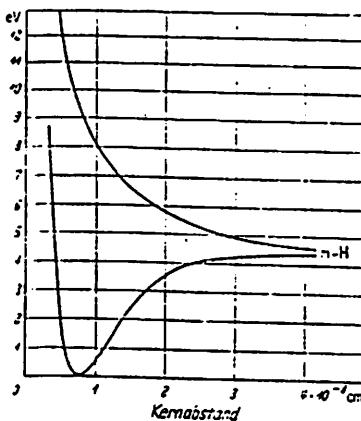
muatan atomnya. Sebagai ciri atom bukan logam, biasanya mempunyai harga  $E_A$  lebih besar dibanding dengan harga energi ionisasi (adalah sebagai energi untuk memisahkan sebuah elektron) untuk unsur logam. Dalam ikatan Na dan Cl misalnya, terjadi pelepasan satu elektron dari Na dan kemudian menangkap satu elektron dari Cl. Dalam ikatan ini diperoleh kelebihan energi sebesar

$$E_{A,Cl} - E_{I,Na} = 6,05 - 5,12 = 0,93 \text{ eV}$$

Kedua ion yang bersangkutan ( $\text{Na}^+$  dan  $\text{Cl}^-$ ) saling mengikat satu sama lain berkat adanya interaksi Coulomb (ikatan ionik) selama tidak terdapat di dalam medium yang mempunyai koefisien dielektrisitas yang besar (medium polar); apabila  $\text{NaCl}$  terdapat di dalam medium ini maka medan Coulomb akan mengalami pelemahan, diikuti semakin lemah ikatan yang cenderung mudah terpecah.

Sebaliknya, untuk ikatan *homoeopolar*, yaitu ikatan antar atom yang sama, tanpa mekanika kuantum tidak akan dimengerti keberadaannya. Teori mekanika kuantum untuk ikatan homoeopolar secara rinci adalah amat kompleks. hal terpenting adalah melalui kenyataan yang telah umum diketahui, bahwa satu elektron yang berada di dalam dua sumur potensial secara energetik lebih menguntungkan untuk dipengaruhi dibandingkan jika hanya terdapat satu elektron dalam satu sumur potensial. Hal ini mudah dimengerti karena di dalam dua sumur terdapat lebih banyak tempat dan berdasarkan relasi ketidakpastian dimungkinkan terdapatnya keadaan energi lebih rendah. Salah satu penggunaan pemikiran ini adalah sebagai berikut:

Jika dua atom H didekatkan satu sama lain, maka kedua proton dianggap mempengaruhi kedua elektron seolah seperti berada di dalam sebuah sumur potensial dan lebar sumur adalah sama dengan lebar sumur potensial masing-masing proton. Pada jarak yang cukup besar kedua elektron mempunyai kesempatan kecil untuk menggunakan



Gambar 16.18: Energi potensial dari interaksi antara atom H. Pada keadaan spin yang berlawanan, elektron-elektron menggunakan keadaan melebarnya sumur potensial dengan baik: terjadi keadaan terikat (kurva bagian bawah). Pada keadaan spin elektron saling paralel salah satu elektron yang berada pada keadaan lebih tinggi dapat bergerak ke sana ke mari: kurva bagian atas [dikutip dari Heitler dan London, dari W. Finkelnburg].

sumur potensial yang melebar ini (dalam hal ini dikatakan bahwa integral tumpang tindihnya adalah masih terlalu kecil). Jika kedua proton saling mendekat sedemikian di mana lebar potensial masih lebar (lebih lebar dibanding sumur potensial satu inti H), tetapi masih terdapat energi tolak menolak inti yang cukup besar. Pada suatu jarak rata-rata akan terdapat kondisi optimum: penurunan keadaan elektron karena pelebaran sumur potensial adalah lebih besar dari energi tolak menolak inti-inti dan elektron-elektron, yaitu sama justru mempunyai harga sama dengan energi ikatnya.

Akan tetapi keadaan yang menurun ini dapat digunakan sebaik-baiknya oleh kedua elektron, jika spin keduanya saling berlawanan arah. Keadaan seperti ini dimungkinkan jika kedua elektron berada dalam keadaan yang sama atau dalam "bahasa kimia" disebut mempunyai "orbital" yang sama dan keduanya, di dalam sumur potensial

yang sama, membentuk keadaan energi terendah. Berdasarkan prinsip Pauli suatu keadaan akan dapat ditempati oleh dua elektron, jika masing-masing elektron mempunyai spin antiparalel (berlawanan arah). Dari dua elektron yang mempunyai spin paralel (sama arah) salah satu elektron yang mempunyai energi lebih tinggi akan ke luar dari keadaan semula. Adanya kehilangan energi karena keluarnya elektron tersebut adalah diambil dari energi ikatnya, sehingga membuat ikatan tidak mungkin lagi dapat dipertahankan.

Orde besar energi ikat sesungguhnya sangat dipengaruhi penurunan keadaan kedua elektron, karena sumbangannya negatif akibat adanya interaksi tolak menolak Coulomb karena jarak adalah relatif kecil. Jika lebar salah satu sumur potensial dalam kasus ini dilipatgandakan dari  $d$  menjadi  $2d$ , yaitu hanya pada satu arah di dalam ruang, maka energi keadaan terendah seperti dinyatakan oleh pers. [16.32] akan menurun dari  $h^2/8md^2$  hanya menjadi  $h^2/32md^2$  (dalam kasus ini tentunya sumur potensial tidak berbentuk kotak, akan tetapi bentuk sumur potensial tidak begitu berpengaruh penting jika hanya diamati orde atau ukuran kasar harga energi ikat). Demikianlah, penurunan harga energi untuk kedua elektron ini dapat diramalkan. Ramalan lebih rinci dari harga energi ikat jika seandainya  $d = 0,5 \text{ \AA}$  adalah

$$\frac{3}{16} \frac{h^2}{md^2} \approx \frac{10^{-51}}{10^{-27}10^{-16}} \approx 10^{-11} \text{ erg}$$

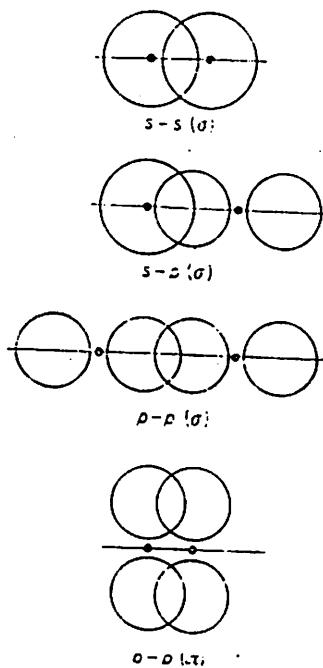
$$\approx 6 \text{ eV} \approx 140 \text{ kcal/Mol}$$

sedangkan harga empiris dari hasil pengukuran eksperimen untuk  $\text{H}_2$  adalah 90 kcal/Mol, dapat dikatakan cukup mendekati.

"Ikatan pasangan elektron" yang terkenal di dalam buku-buku Kimia adalah pasangan yang membentuk orbital bersama di dalam medan kedua inti, yang mempunyai spin antiparalel. Elektron-elektron bespin paralel akan membentuk pasangan elektron ikatan yang lebih lunak, keadaan yang terdapat dalam sumur potensial yang melebar ini mengalami penurunan, tetapi dapat pula terikat pada jarak yang cukup

lebar; seandainya keadaan ini tidak terjadi, maka tidak akan terdapat ion  $H_2^+$ .

Dua elektron dari dua atom yang saling berikatan mempunyai kecenderungan yang semakin besar untuk berada pada orbital yang sama, jika sebelumnya telah terdapat keadaan tumpang tindih yang semakin besarnya dari fungsi elektron yang bersangkutan. pada masing-masing atom, berarti sebelum terjadinya pergeseran orbital telah terdapat kondisi yang dibawanya ke dalam ikatan. Pergeseran ini terjadi dalam bentuk penguatan dari tumpang tindih. Gbr. [16.19] menunjukkan beberapa ciri ikatan penting. Untuk molekul diatomik dibedakan antara orbital

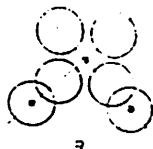


Gambar 16.19: Ciri ikatan dalam molekul.

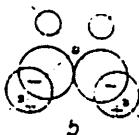
$\alpha$  *bounding*, yaitu orbital yang mengandung fungsi gelombang  $\psi$  yang dihasilkan mempunyai simetri rotasi dan  $\pi$  *bounding* yaitu orbital yang mempunyai momentum putar lebih tinggi. Momentum putar terhadap sumbu rotasi untuk orbital  $\alpha$  adalah sama dengan nol, sedangkan untuk ikatan orbital  $\alpha$  adalah 1 dst. Keberhasilan penjelasan tentang kemampuan rotasi dari ikatan  $\alpha$  maupun  $\pi$  terletak pada model yang dikembangkan.

Sebagai contoh akan dipandang molekul  $\text{H}_2\text{O}$ . Atom O mempunyai konfigurasi elektron  $1s^2 2s^2 2p^4$ . Walaupun elektron menempati keadaan  $p$  yang berbeda, akan tetapi terdapat 2 elektron  $p$  yang berada dalam keadaan yang sama, yaitu tentunya dengan spin antiparalel. Elektron-elektron yang mempunyai spin antiparalel demikian tidak akan memberikan kontribusi pada ikatan, karena elektron-elektron ini tidak akan berikatan dengan elektron asing membentuk ikatan *bounding* dan *antibounding*. Karenanya atom O mempunyai valensi 2 dan dapat mengikat dua atom H yang masing-masing terletak tegak lurus terhadap orbital  $\alpha$  (lihat gbr. [16.20]. Pergeseran, khususnya pada awan elektron 1s dari atom H menyebabkan tertariknya sebagian proton. Hal ini kadang-kadang juga dijelaskan sebagai berikut: bahwa ikatan antara O yang lebih elektronegatif dan H elektronpositif akan menyebabkan terbentuknya ikatan heteropolar. Umumnya kedua atom H mempunyai muatan efektif parsial hanya beberapa bagian dari muatan elementer. Tolak menolak antara dua muatan parsial ini menyebabkan terbentuknya sudut antara ikatan OH sebesar  $105^\circ$ . Sedangkan muatan parsial negatif yang mengalami kompensasi karenanya adalah akan terlokalisir di dekat atom O. Demikianlah dapat dijelaskan mengapa molekul  $\text{H}_2\text{O}$  mempunyai momen dipol yang kemudian membawa kemajuan lebih jauh dalam Fisika, Kimia, dan Biologi.

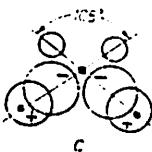
Atom C sesuai dengan konfigurasi elektronnya  $1s^2 2s^2 2p^2$  hanya dapat mempunyai valensi dua. Dengan kondisifurasi demikian, bahwa kemungkinan suatu ikatan, yaitu kemungkinan terbentuknya orbital yang baru di dalam medan dua inti selain medan akibat satu inti, elektron harus menduduki keadaan yang lebih "dalam"



a



b



c

Gambar 16.20: a-c. Molekul air: a) ikatan  $s - p$  antara O dan H; b) Pergeseran fungsi gelombang elektron yang turut serta dalam ikatan; c) Pemekaran "sudut valensi" (sudut yang dibentuk oleh ikatan) karena adanya tolak menolak muatan parsial H.

Juga pada atom tunggalnya, C yang bervalensi 4 dapat dimengerti melalui pertolongan pembentukan hibridisasi dari keadaan-keadaannya. Keadaan hibrid  $sp$  dengan satu sisi "bentuk kurva yang menggembung" untuk suatu ikatan lebih baik ketimbang keadaan  $p$  (lihat gbr. [16.17]). Kelebihan struktur keadaan hibrid ini rupa-rupanya berhasil mengatasi kekurangannya, tumbuh berkembang, bahwa keadaan  $s$  secara energetik terletak lebih dalam dibanding dengan keadaan  $sp$  hibrid sendiri. Selain konfigurasi elektron-elektron terluarnya membentuk  $2s^2 2p^2$ , di dalam sebuah atom C dapat terjadi pembentukan 4 keadaan hibrid  $sp$ , yaitu jika pasangan ikat yang bersesuaian memungkinkan terbentuknya keadaan hibrid tersebut. Empat keadaan-keadaan hibrid yang menguntungkan, yang masing-masing terdiri atas tiga elektron orbital  $p$  dan satu elektron orbital  $s$ , akan tetapi masing-masing keadaan hibrid terbentuk oleh koefisien-koefisien kombinasi yang berbeda (lihat pers. [16.51]):

keadaan ini disebut sebagai 4 keadaan hibrid  $sp^3$ . Keempat keadaan hibrid ini selanjutnya akan membentuk, atau dengan perkataan lain terarahkan pada empat sudut sebuah tetrahedral, yaitu seandainya hanya terdapat kurva menggembung satu sisi; dalam keadaan demikian cacat karena adanya unsur-unsur *ligan* yang cenderung mengganggu satu sama lain akan menjadi minimum, sehingga energi ikat menjadi maksimum.

Telah dibahas gambaran kualitatif berdasarkan kebutuhan, dengan mengambil dua contoh pendekatan terpenting dan dengan pendekatan ini dapat dijelaskan persoalan-persoalan kompleks dari Kimia kuantum. Kedua pendekatan ini biasanya disebut sebagai metode AO (istilah dalam bahasa Inggris, yaitu singkatan dari *atomic orbital*, khususnya metode Lcao *linear combination of atomic orbitals*), *dikemukakan oleh Heitler dan London*; pendekatan ini dimulai dari orbital atom-atom terisolir, kemudian memodifikasinya menjadi keadaan-keadaan molekul (*cara paling sederhana melalui kombinasi linier keadaan-keadaan hibrid dari atom-atom yang bersangkutan.*); dan metode MO (*molecular orbitals*), pertama kali diperkenalkan oleh Hund dan Mulliken; dari pembahasan di depan dicari keadaan-keadaan elektron di dalam medan bersama dari inti atom atau bagian atom yang masih mengandung orbital berisi penuh yang membentuk molekul. Apabila ramalan tentang molekul dengan menggunakan kedua metode di atas meleset, maka hal tersebut adalah karena keterbatasan pendekatan dari keduanya.

### Soal-Soal § 16.1

**16.1.1.** Berapa besar sudut antara fungsi  $\sin nx$ ,  $\sin mx$ ,  $\cos nx$ ,  $\cos mx$  satu sama lain ( $n, n$  adalah bilangan bulat, masing-masing untuk kasus  $n = m$  dan  $n \neq m$ ), jika daerah integrasi dinyatakan dalam sudut  $(0, 2\pi)$ ? Apakah representasi dengan  $e^{ix}$  dapat membantu perhitungan? Jika daerah integrasi diperlebar menjadi  $(-\infty, +\infty)$ , apakah salah satu dari pernyataan di atas dapat ditinggalkan ?

**16.1.2.** Peran apa yang dimainkan oleh ortogonalitas suatu sistem fungsi dalam penurunan deret Fourier pada integral periodik atau

integral Fourier untuk suatu peristiwa sembarang? Bagaimana bentuk koefisien atau amplitudo jadinya, jika sistem fungsi tidak ortogonal?

**16.1.3** Buktikan bahwa operator Hermitian mempunyai harga eigen real?

**16.1.4.** Sebuah operator linier  $A$  mempunyai fungsi eigen sem- purna  $f_k$ , berarti bahwa setiap fungsi  $\psi$  dapat ditulis dalam deret  $f_k$ :  $\psi = \sum c_k f_k$ . Apakah vektor  $c_k$  dapat merepresentasikan fungsi  $\psi$  dengan baik, seperti seharusnya?

**16.1.5** Operator apa saja yang terdapat pada § 16.1.2 adalah Hermitian? Dan operator apa saja yang linier? Khususnya: bagaimana fungsi  $K(x, x')$  seharusnya agar operator Hermitian? Cari pula fungsi dan harga eigen untuk masing-masing operator!

**16.1.6.** Para ahli matematika mengartikan istilah vektor ruang adalah sebagai berikut: Suatu vektor metrik  $R$  adalah suatu ukuran dari elemen-elemen, yang disebut sebagai vektor dan untuk semuanya berlaku operator yang didefinisikan sebagai berikut: 1. Penambahan dua vektor menghasilkan sebuah vektor lain; 2. Perkalian sebuah vektor dan bilangan (atau kompleks) akan menghasilkan vektor lain; 3. perkalian skalar pada dua vektor menghasilkan suatu bilangan, penjumlahan dan perkalian ini, seperti biasanya bersifat komutatif, asosiatif dan distributif. Tunjukkan bahwa ukuran dari kuadrad suatu fungsi yang dapat diintegrasikan akan membentuk sebuah vektor ruang (biasanya disebut sebagai ruang Hilbert), jika operator yang digunakan seperti dijelaskan pada § 16.1.1. Dimensi dari  $R$  adalah sebanyak jumlah vektor-vektor  $a_1, \dots, a_n$  yang paling tidak diperlukan untuk dapat menyatakan vektor  $b$  dari  $R$  dalam bentuk  $b = c_k a_k$ . Berapa dimensi ruang Hilbert?

**16.1.7** Diketahui suatu deret terdiri atas  $x_1, \dots, x_n$  yang satu sama lain saling bergantung pada sistem persamaan diferensial  $x_i = \sum a_{ik} x_k$ . Apakah reaksi kimia suatu sistem selalu mengambil bentuk serupa ini? Besaran mana saja yang merupakan variabel dan konstanta? Cobalah berikan tanda untuk koefisien  $a_{ik}$  secara umum. Dapatkah Anda

temukan penggunaan lain sistem persamaan di atas selain di bidang kimia ? Anggap  $x_i$  sebagai vektor  $x$  dan  $a_{ik}$  sebagai matriks  $A$ . Bagaimana bentuk sistem persamaan di atas jadinya ? Selesaikanlah sistem persamaan tersebut menurut *trick* sebagai berikut: Rotasikan sistem koordinat untuk  $x$  dan  $A$  sehingga  $A$  hanya mempunyai elemen diagonal, sedangkan elemen lainnya sama dengan nol. Tunjukkan bahwa rotasi tersebut berhubungan dengan perkalian  $x$  dengan suatu vektor lain  $S$  yang mengandung vektor ortogonal sebagai elemennya. Dimana  $A$  diperlukan ? Tunjukkan pula bahwa matriks  $S$  yang diperoleh dari hasil rotasi, merupakan matriks baris yang mengandung vektor fungsi eigen dari matriks  $A$  dan elemen diagonal yang muncul merupakan harga eigen dari  $A$  pula ! Mengapa dengan cara ini persoalan dianggap dapat terselesaikan ?

**16.1.8** Buktiakan kebenaran dengan menggunakan metode „klasik“ maupun modern untuk menentukan vektor eigen maupun harga eigen dari matriks  $A$  !

1. Dicari penyelesaian persamaan "sekular"  $\|A - \lambda U\| = 0$ . Simbol  $\| \cdot \|$  melambangkan determinan dari matriks yang ada.  $U$  adalah matriks satuan. Harga  $\lambda$  yang diperoleh merupakan harga-harga eigen dari matriks  $A$ . Berapa jumlah fungsi maupun harga eigen tersebut ? Apa gunanya perhitungan ini secara praktis ?

2. Misalnya sebuah vektor  $x_0$  dan gunakan matriks  $A$  padanya. Hasilnya dinormalisasi dengan  $\lambda_1$  dan dinamakan sebagai  $x_1$ . Kemudian ulangi perkalian vektor dan matriks hingga diperoleh harga  $x_1$  yang tidak berubah lagi. Maka  $\lambda_1$  dalam hal ini disebut sebagai harga eigen dan vektor  $x_1$  adalah fungsi eigennya.

**16.1.9.** Operator  $A$  merupakan kepunyaan besaran fisis  $a$ . Apa sebutan operator *deviasi* dari  $a$ , yaitu operator yang mempunyai harga rata-rata (dalam suatu fungsi keadaan tertentu) adalah sama dengan deviasi  $\Delta a$  sendiri ? Apakah operator tersebut dinamakan juga operator  $\delta A$  ?

**16.1.10.** Misalnya  $A$  dan  $B$  sebagai operator Hermitian. Komulator minusnya disebut sebagai  $C/i$ , atau dengan perkataan lain  $C = i(AB - BA)$ . Bagaimana bentuk relasi pertukaran yang berlaku untuk operator

deviasi dari  $a$  dan  $b$ , atau  $\delta A$  dan  $\Delta B$  ? Buktikanlah bahwa  $(\Delta A)^2 = (\Delta B)^2 = \frac{1}{4} C^2$  ! Di mana saja pernyataan ini dapat digunakan ?

Petunjuk: buatlah operator  $D = A + i\alpha B$ , dengan  $\alpha$  adalah bilangan real sembarang. Periksalah pernyataan untuk  $F(\alpha) = D^* \psi^* D \psi$ . Dapat diramalkan tanda dari  $F(\alpha)$  tanpa bergantung dari  $\psi$  dan  $\alpha$  ? Kondisi apa yang akan diperoleh untuk koefisien dari  $\alpha$  dalam pernyataan  $F(\alpha)$ ? Perhatikan harga minimum dari  $f(\alpha)$ . Dalam menurunkan rumusan perhatikan pula sifat Hermitian, kompleksitas dan dapat saling dipertukarkan.

### Soal-Soal § 16.2

**16.2.1** Dalam aksioma mana yang terdapat pada § 16.2.1 dengan jelas dinyatakan bahwa semua sistem fisis mempunyai sifat gelombang ? Pikirkanlah: Pada peristiwa interferensi amplitudo gelombang yang mengambil bagian ditambahkan satu sama lain; diketahui pula bahwa energi sebanding dengan amplitudo kuadrat. Di samping itu suatu peristiwa gelombang dapat dibayangkan terdiri atas partikel, jika seandainya perlakuan diperkirakan lebih sederhana. Apakah terdapat perbedaan antara gelombang  $\psi$  dan gelombang lainnya ?

**16.2.2** Tunjukkan bahwa: Jika besaran  $a$  dan  $b$  secara bersamaan, yaitu berada dalam keadaan yang sama, mempunyai harga "tajam", maka operator yang merepresentasikan besaran-besaran ini,  $A$  dan  $B$  haruslah dapat saling dipertukarkan, atau dengan perkataan lain selalu berlaku:  $AB = BA$  !

**16.2.3.** Tunjukkanlah berlaku pertukaran antara operator komponen-komponen momentum  $p_x, p_y, p_z$  dengan momentum totalnya ! Apakah hasil tersebut secara fisis mempunyai arti penting ?

**16.2.4** Bentuk operator momentum angular. Komponen  $x$  momen-tum angular ini, yaitu  $L_x$ , dalam rotasi sudut sebesar  $\varphi$  terhadap sumbu  $x$  persis sama seperti kelakuan operator komponen momentum linier pada sumbu  $x$   $p_x$  terhadap koordinat  $x$ . Berikan pula pernyataan lengkap untuk momentum angular total  $L$  dan semua komponennya).

Apakah rumusan momentum angular ini dapat dibuat berangkat dari pengertian klasik bahwa  $L = r \times p$ ? Bagaimana dengan fungsi dan harga eigen operator  $L_x$ ? Apa perbedaannya dengan operator momentum linier? Apa arti fungsi eigennya? Apakah  $L_x$  Hermitian? Apakah masing-masing komponen  $L$  satu sama lain dan juga dengan  $L$  sendiri dapat saling dipertukarkan?

**16.2.5.** Suatu sistem dapat mengalami rotasi secara bebas terhadap suatu sumbu, berarti bahwa tidak ada gaya luar yang melawan gerak rotasi tersebut. Carilah contoh serupa itu yang menarik secara fisis! Bagaimana sistem "rotator ruang yang tetap" ini dapat diperlakukan secara mekanika kuantum? Operator apa yang mempunyai fungsi eigen merupakan fungsi eigennya? Berapa besar momentum angular dan energi rotasi untuk keadaan stasioner siste ini?

**16.2.6.** Hampir sama pentingnya dengan besaran  $a$  adalah harga deviasinya terhadap harga rata-rata besaran ini (deviasi standard, deviasi rata-rata). Bagaimana deviasi dapat dinyatakan dalam operator  $A$ ? Bagaimana suatu keadaan yang mempunyai harga  $a$  yang "tajam"?

**16.2.7** Harga rata-rata suatu besaran  $a$  dapat berubah terhadap waktu, juga apabila operator  $A$  tidak mengandung waktu secara eksplisit. Maka ketergantungan terhadap waktu tentunya hanya berasal dari fungsi keadaan sendiri. Dapatkah Anda memberikan sebuah operator, dari operator ini, dengan cara biasa, akan diperoleh  $a$ ? Cobalah dengan operator  $A$   $H$  dan  $H A$ . Bagaimana perubahan harga rata-rata untuk  $x$  dan  $p_x$ ?

**16.2.8.** Buatlah operator Hamilton  $H$  dari sebuah partikel yang berada di dalam medan magnet. Petunjuk: Medan melalui "transfor- masi dapat dieleminasi", yaitu dengan cara merotasikan sistem koordinat acuan dengan frekuensi Larmor. Dengan demikian akan diperoleh hubungan antara operator medan dan momentum angular. Dalam pernyataan biasa  $H$  dibentuk dari operator momentum. Sebaiknya untuk mencari operator  $H$  dapat dicari terlebih dahulu operator potensial vektor (lihat soal 7.7.9). Gunakan relasi formal antara besaran-besaran tersebut. Peran apa pernyataan operator  $H$  dalam menjelaskan superkonduktor (lihat soal 14.7.2)?

**16.2.9.** Di dalam bilik Wilson terdapat sebuah tetesan dan darinya diketahui adanya jejak partikel, yang tidak lebih besar ukurannya dari  $1 \mu\text{m}$ . Apakah dalam hal ini secara praktis dapat dijelaskan menurut fisika klasik atau apakah harga momentumnya dapat diketahui dengan jelas (bagaimana jika terjadi kasus sebaliknya)? Hal ini tidak dihubungkan dengan proses tumbukan yang dipengaruhi oleh ionisasi, melainkan yang dipersoalkan hanya, lintasan" yang dapat ditandai dari tetesan.

**16.2.10.** Apakah relasi ketidakpastian benar-benar tidak berlaku untuk kasus makroskopik? Tidak ada seorang pun yang dapat berhasil menegakkan sebuah batang berujung sangat tajam di atas sebuah alas tegar, tanpa alat bantu sedemikian, sehingga posisi batang terhadap alas adalah demikian tegak lurus dan batang berada tetap berdiri dengan puncak yang tajam dalam kesimbangan, tidak jatuh. Apakah hal ini terletak karena ketidaktepatan pembuatannya atau ketidakpastian? Berapa lama waktu, misalnya maksimum, yang dibutuhkan batang, berdasarkan ketidakpastian mekanika kuantum, demikian sehingga sudut dan momentum nagularnya berada dalam keadaan miring dengan sudut  $1^\circ$  terhadap arah tegak lurus dapat dipertahankan?

### Soal-Soal § 16.3

**16.3.1** Bagaimana kelakuan sebuah partikel bermassa  $m$  di dalam suatu potensial parabolik  $U = 1/2 Dx^2$ ? Tentukan kemungkinan keadaan stasioner yang ada, yaitu fungsi dan harga eigen dari operator Hamilton! Persamaan Schroedinger menjadi lebih sederhana jika digunakan relasi  $1/2 \hbar\omega = 1/2 \sqrt{m}$  dan sebagai satuan amplitudo  $x$  yang digunakan pada osilator harmonik dengan energi ini. Suku yang mana saja dari persamaan Schroedinger yang akan tetap ada untuk harga  $x$  yang cukup besar? Tunjukkan pula bahwa bentuk kurva asimtotik dari penyelesaian persamaan ini dapat ditulis dalam fungsi Gauss! Fungsi Gauss ini masih dikalikan dengan suatu polinomial  $x$ , yaitu fungsi polinomial hermit  $H(x)$ . Bagaimana bentuk persamaan

diferensial ini? Sekarang muncul sesuatu yang menentukan: Untuk  $x \rightarrow \infty$   $\psi$  haruslah sama dengan nol! Mengapa? Dalam deret  $H(x)$  tak berhingga bahkan suku yang mengandung  $x$  berpangkat tinggi dapat mengkompensasikan fungsi Gauss. Deret dari fungsi  $H(x)$  harus *dipotong*. Apa syarat yang harus dipenuhi untuk itu?

Tentukan polinomial hermit pertama (order pertama) Bandingkan dengan kelakuan klasik: partikel klasik atau kuantum yang mana sering muncul (masing-masing untuk energi rendah dan tinggi)?

**16.3.2** Teori peluruhan partikel  $\alpha$ : Di "kawah Fujiyama" suatu inti terdapat sebuah partikel  $\alpha$ , menduduki tingkat energi ke nol. Pada inti apa sebenarnya partikel tersebut terdapat (lihat soal 13.1.9)? Bagaimana partikel akan sampai di puncak? Bagaimana ketergantungan probabilitas keluarnya terhadap energi? Apakah potensial dapat didekati sebagai potensial kotak atau segitiga? Petunjuk untuk perlakuan potensial sebenarnya:

$$\int_{x_0}^1 \sqrt{x^{-1} - 1} dx \approx \int_0^1 \sqrt{x^{-1} - 1} dx - \int_0^{x_0} \sqrt{x^{-1} - 1} dx.$$

pada integral pertama misalnya disubstitusikan  $x = \sin^2 \alpha$ ; bagaimana penyelesaian

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 \alpha d\alpha \quad \text{dan} \quad \int_0^{\pi/2} \cos^2 \alpha d\alpha ?$$

Apakah data yang terdapat pada gbr. [13.26] benar? Parameter apa yang harus ditambahkan padanya? Mengapa misalnya tidak terdapat partikel  $\alpha$  berenergi 20 MeV? 114/60 Nd yang dikenal sebagai inti pemancar  $\alpha$  paling ringan mempunyai energi  $E = 115$  MeV dan mempunyai waktu paruh  $r_{1/2} \approx 10^{15}$  tahun. Apakah hal tersebut benar? Apakah inti ini juga terdapat pada kurva gbr. [13.26]?

**16.3.3** Di dalam sebuah logam terdapat medan listrik yang amat tinggi. Bagaimana bentuk potensial elektron yang terdapat sangat rapat di permukaannya? Bagaimana elektron akan "melompat" ke luar? Berikan ramalan tentang terjadinya arus emisi medan! Gambarkan struktur pita untuk dioda semikonduktor yang mempunyai daerah terlarang sangat tipis, dan padanya diberikan medan listrik yang sangat

kuat. Bagaimana elektron akan "melompat" dari pita valensi ke pita emisi?

**16.3.4.** Sebuah partikel terdapat di dalam potensial empat persegi yang hanya bergantung pada  $x$ , dan potensial mempunyai dinding  $U$  berhingga. Potensial di setiap tempat luar kotak adalah sama dengan harga  $U$  ini. Bagaimana dengan fungsi dan harga eigen jika  $U = \infty$  pada  $E = U$ ? Apa yang terjadi untuk  $E > U$ ? Penyelesaian sebagian dari tiga daerah seluruhnya dapat dicari secara langsung. Akan tetapi akan diperoleh koefisien yang tetap tidak dapat diketahui. Reduksi jumlah ini. Apa yang akan terjadi pada partikel jika potensial tak berhingga? Tetap akan diperoleh kondisi "penghubung" untuk  $\psi$  dan  $\psi'$  pada daerah batas! Mengapa keduanya harus kontinu di daerah batas? Mengapa misalnya tidak berlaku untuk  $\psi''$ ? Selanjutnya perhatikan pula: Suatu sistem persamaan linier homogen akan mempunyai penyelesaian yang tidak sama dengan nol, apabila harga determinannya sama dengan nol! Persamaan transendental ini dapat diselesaikan secara grafis.

**16.3.5.** (Hanya untuk seorang yang mahir menyelesaikan determinan): Sebuah partikel terdapat di dalam potensial yang hanya bergantung pada  $x$ , yaitu potensial yang dibentuk oleh dua "lubang" dengan dasar yang sama dan dipisahkan masing-masing dengan dinding berbentuk segi empat. Untuk daerah lainnya, selain itu potensial sangat tinggi tak berhingga. Tentukan keadaan stasioner dan juga energinya, khususnya untuk susunan sistem simetri!

**16.3.6.** Fungsi keadaan stasioner berbentuk "bidang" untuk kasus tanpa medan luar adalah sebanding dengan  $e^{i(kr - \omega t)}$  tunjukkan bahwa fungsi simetri bola yang berhubungan adalah sama dengan  $r^{-1} e^{i(kr - \omega t)}$ . Bandingkan dengan gelombang bola dan datar, misalnya untuk cahaya. Apa yang berubah untuk energi yang terdapat pada soal 16.3.5, jika absis  $x$  diubah menjadi  $r$  (misalnya di dinding  $r = 0$ ).

**16.3.7.** Pada §16.3.2 efek kanal (tunnel effect) diturunkan dengan cara "mencuci". Sesungguhnya kasus ini berhubungan dengan persamaan Schrödinger bergantung pada waktu. Perhatikan potensial pada soal 16.3.5 dan periksalah kembali, bagaimana suatu keadaan di-

kembangkan, di mana partikel berada di tempat paling dasar. Bagaimana perbedaan untuk kasus gelombang simetris bola dan bidang? Bagaimana dapat terjadi keadaan "mengambang" atau "modulasi" dalam bentuk sembarang?

### Soal-Soal § 16.4

**16.4.1** Sebuah sistem mempunyai dua "keadaan batas" dan antara dua keadaan ini sistem dengan probabilitas tertentu dapat melompat dari suatu keadaan ke keadaan lainnya. Carilah contoh keadaan seperti ini! Kadang-kadang situasi seperti ini, walaupun tidak selalu, dapat digambarkan melalui dua sumur potensial ruang yang terpisah. Keadaan sebenarnya  $\psi$  dari sistem dapat dibentuk dari keadaan basis  $f_i$ ,  $i = 1, 2$ , "sistem dalam keadaan  $i$ ". Keadaan  $\psi$  ini secara umum bergantung pada waktu. Apa artinya koefisien deret? Apakah  $f_1$  dan  $f_2$  merupakan fungsi eigen dari operator  $H$ ? Bagaimana bentuk persamaan Schroedinger yang bergantung pada waktu dari sistem ini? Gunakan persamaan dalam bentuk matriks (biasanya dilakukan *tirick* sebagai berikut: multiplikasi skalar dengan  $f_i$ ). Arti fisis apa yang terdapat pada elemen matriks  $H$ ? Apa yang dapat diramalkan jika keadaan 1 dan 2 simetris? Jika Anda ingin, dapat digunakan soal 16.1.8. Mengapa muncul frekuensi, bagaimana bentuk dan apa artinya? Bagaimana keadaan stasioner sistem? Perhatikan khususnya "energi resonansi". Bagaimana bentuk keadaan non-stasioner?

**16.4.2.** Perhitungan perturbasi (gangguan) dalam mekanika kuantum. Diketahui potensial  $U(r)$  sedemikian, sehingga persamaan Schroedinger tidak dapat diselesaikan secara eksak, akan tetapi bentuk potensial ini tidak begitu jauh berbeda dengan potensial  $U_o(r)$ , di mana dapat dicari penyelesaiannya, yaitu sebagai berikut:  $U = U_o + U_1$ . Fungsi eigen  $f_k$  dan energi (harga eigen)  $E_k$  merupakan solusi eksak dari operator Haminton  $H$  juga tidak jauh berbeda dengan fungsi dan harga eigen operator  $H_o \neq f_k + f_{ik}$ .  $E_k = E_{ok} + E_{1k}$ . Tentukan suku tambahan yang dikembangkan dari fok dan (sebagai pendekatan pertama) semua produk yang dihasilkan oleh besaran tambahan dapat diadabaikan. Akan Anda dapatkan suatu sistem persamaan linier homogen untuk

koefisien deret  $f_k$  dan  $f_i$ , yang hanya diketahui dengan menyelesaikan, jika determinan sistem persamaan ini sama dengan nol. Juga tanpa latihan diterminan yang cukup dengan cepat dapat Anda lihat, bagaimana bentuk suku pendekatan pertama Dapatkah dikatakan bahwa  $E_k$  merupakan harga rata-rata dari energi gangguan terhadap fungsi keadaan tanpa gangguan  $f_k$ ?

**16.4.3.** Sebuah sistem mempunyai sederatan keadaan stasioner, jika tidak dipengaruhi oleh apa pun. Kemudian berikan pada sistem suatu medan listrik bolak-balik, misalnya cahaya. Dalam kondisi bagaimana medan ini akan berpengaruh terhadap operator Hamilton dari sistem? Apakah harga eigen sesaat dan rata-rata terhadap waktu mengalami perubahan? Apakah sistem yang mengalami gangguan kecil dapat dihitung dengan menggunakan metode perturbasi? Cari persamaan Schroedinger bergantung pada waktu dari sistem ini! Berapa probabilitas transisi yang muncul? Apakah terdapat efek resonansi? Dapatkah Anda kembangkan pelebaran garis (spektrum) secara mekanika kuantum?

**16.4.4** Bagaimana konfigurasi ruang dan berapa besar momen dipol molekul  $\text{NH}_3$ ? Ramalkan posisi term rotasi dan elektron. Diketahui adanya absorpsi tertinggi pada frekuensi 24 Ghz. Apakah frekuensi ini berhubungan rotasi atau transisi elektron? Jika getaran atom N terjadi melalui bidang yang dibentuk oleh tiga atom H lainnya dapatkah digunakan jawaban pada soal 16.4.1? Parameter apa saja yang harus diperhatikan? Bagaimana pengaruh medan listrik terhadap energi "batas dua keadaan"? Apakah batas dua keadaan ini tetap simetris satu sama lain dengan adanya medan? Apakah pengandaian, bahwasannya probabilitas transisi adalah tidak bergantung pada medan cukup bijaksana? Misalnya dapat dibuat berkas yang hanya mengandung molekul dengan atom N hanya berarah ke atas? Apakah dari sistem ini dapat dibuat maser  $\text{NH}_3$ ? Bagaimana kerja jam  $\text{NH}_3$ ?

**16.4.5** Probabilitas transisi yang terdapat pada soal 16.4.3 dan 16.4.4 dibiarkan belum terjawab. Misalnya dua sumur potensial dipisahkan oleh sebuah dinding yang berada di antara keduanya. Bagaimana

ketergantungan probabilitas transisi terhadap jarak antara kedua sumur potensial (kasus bidang datar dan simetri bola: jarang digunakan istilah untuk bidang datar dan simetri bola). Cari penggunaan fisis: Ikatan kimia? Gaya inti? Gaya Coulomb? Untuk gaya ini harus Anda gunakan relasi energi total dan momentum. Mengapa? Apa yang diperoleh?

**16.4.6** Molekul-molekul  $S_2$ ,  $H_2O$  dan  $H_2Se$  semuanya telah diketahui dengan baik. *Sudut valensi* masing-masing molekul adalah  $105^\circ$ ,  $93^\circ$ ,  $90^\circ$ . Jelaskan!

**16.4.7** suatu sistem misalnya disimbolkan oleh operator  $H$  yang dipunyainya. Bagaimana penyimbolan sempurna? Keadaan mana yang mungkin mempunyai energi terkecil? Keadaan sebaliknya, tidak hanya terdapat keadaan stasioner (jawabnya adalah jelas), melainkan juga terdapat pula keadaan non-stasioner. Ukuran energi apa yang digunakan untuk menyatakan energi? Misalnya suatu sistem terdiri dari dua subsistem dengan operator  $H$ , fungsi eigen dan harga eigen masing-masing diketahui. Bagaimana bentuk operator  $H$  total sistem, selama subsistem saling berjauhan? Seandainya kedua subsistem berada dalam keadaan kontak, maka masing-masing subsistem akan saling memperngaruhi satu sama lain. Apa yang dapat dikatakan dari operator  $H$ , fungsi eigen (khususnya keadaan dasar) dan harga eigen dari sistem total? Apakah Anda mentahui istilah resonansi, stabilisasi resonansi, energi resonansi? Carilah contoh-contoh untuk ini!

#### **16.4.8.**

- Fisikawan A: Saya akan mengukur secara langsung momen spin masing-masing elektron bebas, yaitu dari medan magnetnya. Saya memerlukan uang sebanyak 1 milyard rupiah untuk membeli sebuah magnetometer presisi.
- Tetapi jika elektron bergerak, ia akan menyebabkan adanya medan magnet. Tentunya medan magnet ini akan menutupi medan magnet yang akan kamu berikan untuk mencari momen spin.
- Fisikawan A: Aku hanya mengukur elektron diam.
- Fisikawan B: Dan relasi ketidakpastian? Jika momentum secara eksak sama dengan nol, kau tidak akan pernah mengetahuinya

dimana elektron berada, atau berapa jaraknya terhadap medan magnet yang kau berikan!

- **Fisikawan A:** Aku bekerja dalam konfigurasi kompromis, di mana medan translasi kecil dibanding dengan medan spin dan secara bersamaan, ketidakpastian tempat kecil dibanding dengan jarak magnetometer.

Apakah Anda menyokong A dengan uang Anda?

- 16.4.9** Ramalkan energi keadaan dasar  $E$  suatu atom atau ion yang mengandung dua elektron berdasarkan relasi ketidakpastian. Bagian energi apa saja yang dikandung  $E$ ? Misalnya elektron pertama dibatasi berada dalam daerah berjari-jari  $r_1$ , sedangkan elektron kedua pada daerah berjari-jari  $r_2$ . Nyatakan  $E$  dalam  $r_1$  dan  $r_2$  dari ?! Di mana letak minum? Harga hasil pengukuran untuk  $H^{-1}$ ;  $He$ ;  $Li^+$ ;  $Be^{++}$ ;  $B^{+++}$ ;  $C^{++++}$  masing-masing adalah 1,05; 5,81; 14,5; 27,3; 44,1; 64,8, dinyatakan dalam satuan empat kali konstanta Rydberg - 13,65 eV.

## **Bab 17**

### **Fisika Statistik**

Pembahasan yang akan dikemukakan di sini kelihatannya tidak berhubungan dengan fisika, molekul, panas ds. Dengan bekal pengetahuan ini nantinya, seluruh termodinamika dan fisika statistik dapat lebih mudah dimengerti; penggunaan statistik dibutuhkan juga dalam bidang teori informasi, genetika molekuler dan bidang-bidang lainnya. Kemungkinan kegunaan luas beberapa istilah yang akan dibahas di sini harus dibayar dengan taruhan-taruhan pengkayaan abstraksi.

#### **17.1 Statistik Ensambel**

##### **17.1.1 Probabilitas**

Sekelompok kera mempunyai sebuah karung besar berisi sejumlah besar huruf yang harus dibentuk menjadi kalimat; setiap kera cukup senang setelah mengambil satu huruf tanpa harus melihat huruf apa. Selain huruf, di dalam karung terdapat pula pemisah huruf (tanda spasi). Apakah kera-kera tersebut dapat membentuk kalimat seperti yang terdapat di dalam monolog (Hamlet: "To Be Or Not To Be")?

Dalam hal ini harus dicari kemungkinan atau probabilitas munculnya urutan huruf yang benar secara sembarang. Dalam contoh di atas terdapat 18 karakter (huruf dan tanda spasi). Untuk mendefinisikan dengan jelas persoalan ini, harus dilakukan dua hal:

1. Sebagai contoh misalnya seluruh karakter yang ada dan dipilih oleh kera, baik secara fisik maupun hanya dalam pikiran, harus dibagi menjadi kolom-kolom, tiap kolom mengandung masing-masing mengandung 18 karakter kemudian cari beberapa sering munculnya kalimat yang diharapkan dari sekian banyak kolom, atau boleh juga dicari beberapa lama waktu diperlukan atau berapa cepat kalimat itu dapat dibentuk jika diketahui jumlah kera yang mencoba menyusunnya. Persoalan ini sebenarnya dapat pula didefinisikan dengan cara yang lain.

2. Harus pula diketahui berapa kerap terdapatnya karakter yang sama di dalam karung. Jika di dalam karung terdapat  $M$  karakter dan mengandung karakter nomor 1 (misalnya huruf A) sebanyak  $M_1$  kali, karakter nomor 2 (misalnya huruf B)  $M_2$  kali dst.; jika karung dikocok dengan baik, sehingga karakter tidak akan menempel satu sama lainnya, atau juga karakter huruf G dan O misalnya tidak saling terkait satu sama lain, maka probabilitas untuk mendapatkan karakter ke  $i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) berikutnya adalah

$$p_i = \frac{M_i}{M} \quad (17.1)$$

Selain itu, jika terdapat banyak karakter, tidak akan mempengaruhi keadaan, misalnya lenyapnya karakter karena probabilitas suatu karakter akan diperoleh tidak bergantung pada macam kalimat yang telah diketahui sebelumnya.

Probabilitas seekor kera pertama kali dapat mengambil huruf T adalah  $p_T$  atau dengan memberi simbol numerasi karakter yaitu  $p_{20}$ . Probabilitas kera dapat mengambil huruf kedua (berlaku sama karakter apa yang diambil pertama) O adalah  $p_O = p_{15}$ . Bahwa kera dapat menyusun kedua huruf sehingga menjadi kata TO mempunyai probabilitas  $p_T p_O$  (probabilitas dari sesuatu yang saling tidak bergantung satu sama lain adalah sama dengan perkalian probabilitas masing-masing). Probabilitas terbentuknya kalimat yang diinginkan menjadi:

$$\begin{aligned}
 P_{\text{TO BE OR NOT TO BE}} &= p_{\text{O}}^2 p_{\text{E}}^2 p_{\text{N}}^2 p_{\text{O}}^4 p_{\text{E}}^4 p_{\text{N}}^4 p_{\text{O}}^3 p_{\text{E}}^3 p_{\text{N}}^3 \\
 &= p_{\text{O}}^2 p_{\text{E}}^2 p_{\text{N}}^2 p_{\text{O}}^4 p_{\text{E}}^4 p_{\text{N}}^4 p_{\text{O}}^3 p_{\text{E}}^3 p_{\text{N}}^3
 \end{aligned}$$

Maka akan diperoleh distribusi masing-masing karakter (huruf dan tanda spasi) sebagai berikut:

$$p_{\text{O}} = 0,20; \quad p_{\text{E}} = 0,15$$

$$p_{\text{N}} = p_{\text{O}} = p_{\text{E}} = p_{\text{N}} = 0,05; \quad p_{\text{B}} = 0,02$$

Dengan demikian probabilitas untuk memperoleh kalimat To Be Or Not To Be adalah

$$P_{\text{susunan}}(\text{TO BE OR NOT TO BE}) = p_{\text{O}}^2 p_{\text{E}}^2 p_{\text{N}}^2 p_{\text{O}}^4 p_{\text{E}}^4 p_{\text{N}}^4 p_{\text{O}}^3 p_{\text{E}}^3 p_{\text{N}}^3$$

Demikian pula kekerapan munculnya urutan karakter seperti:

Rebenboot Otto

atau

O Torent Topt Boe

atau

Ebbt Erotonot

dan berbagai ungkapan yang tidak mempunyai arti lainnya dengan permutasi dari 13 huruf yang ada Bbeenoooortt yang dikombinasi dengan 5 karakter spasi.

Kolom lain yang juga terdiri atas 18 karakter lainnya mempunyai probabilitas yang berbeda pula. Kekerapan ke 18 karakter mengandung karakter kosong (tanda spasi), mempunyai probabilitas.

$$P_{\text{susunan}}(\square) = p_{\square}^{18} = 2,3 \cdot 10^{-13}$$

Probabilitas suatu susunan tertentu, seperti To Be Or Not To Be, yang terdiri dari  $n_1$  karakter pertama (A),  $n_2$  karakter kedua (B) dst., dengan beberapa  $n_i$  dapat berharga nol adalah mempunyai probabilitas:

$$P_{\text{susunan}}(n_1, n_2, \dots) = p_1^{n_1} p_2^{n_2} p_3^{n_3} \dots = \prod_{i=1}^{27} p_i^{n_i}$$

### 17.1.2 Probabilitas dan Komposisi

Apakah sebagian besar kera hanya dapat menyusun 18 karakter kosong atau EEEEEEEEEEEEEE (probabilitas  $1,5 \cdot 10^{-15}$ ) selain dapat menyusun aneka ragam karakter campuran? Untuk hal ini tidak diperlukan lagi menyusun susunan seperti TO BE OR NOT BE, karena telah tercakup dalam *komposisi* atau *bentuk bruto*  $\text{BE}_2\text{NO}_4\text{RT}_3$  5. Beberapa susunan yang mewujudkan komposisi ini sebelumnya telahpun dihitung (lihat § 17.1.1). Berapa jumlahnya secara umum?

Untuk memperolehnya cara komposisi susunan karakter tersebut dapat dilakukan permutasi dari 18 karakter, sehingga diperoleh

$$18! \approx 6,4 \cdot 10^{15}$$

cara (terdapat  $N!$  permutasi dari  $N$  elemen). Akan tetapi tidak semua permutasi ini mempunyai susunan yang benar-benar berbeda. Akan tetapi, akan diperoleh pula permutasi yang berbeda seandainya dua karakter B diperlakukan secara berbeda, misalnya sebagai B' dan B'', sehingga akan susunan kalimat menjadi TO B'E OR NOT TO B"E dan TO B"E OR NOT TO B'E. Seandainya tiga karakter T dibedakan satu sama lainnya, akan diperoleh probabilitas sebesar  $3! = 6$  kasus, yang pada "kenyatannya" adalah identik. Dengan memperlakukan semua karakter secara berbeda (dua karakter B, dua E, empat O, tiga T dan lima N) maka TO BE OR NOT TO BE akan terpecah menjadi:

$$2!2!4!3!5! = 69120 \text{ kasus.}$$

Semua kasus ini dapat diperoleh melalui permutasi  $18!$ , kenyataannya dihitung hanya sekali. Demikian pula halnya untuk kasus O EBBT EROTONOT terdapat jumlah cara yang sama. Dengan demikian jumlah susunan berbeda sebenarnya dapat dihitung, yang dibentuk dari komposisi  $\text{BE}_2\text{NO}_4\text{RT}_3\text{RT}_3\text{N}_5$ , yaitu:

$$\frac{18!}{2! 2! 4! 3! 5!} \approx \frac{6,4 \cdot 10^{15}}{69120} \approx 0,93 \cdot 10^{11}$$

Hasil ini dengan mudah dapat diartikan secara umum: Suatu komposisi yang mengandung  $N$  karakter yaitu  $n_1$  karakter pertama,  $n_2$  karakter

—⑥—

—④—

—②—③—

—①—③—⑤—④—③—

ABABADABA

Gambar 17.1: Distribusi ini diberi kode melalui susunan ABACADABA. Keadaan-keadaan ini dibaca mulai dari bawah A, B, C, D dan ditulis untuk (di sini masih dapat dibedakan) deretan "partikel" berdasarkan keadaannya.

kedua dst., dapat direalisir dengan susunan berbeda sebanyak:

$$\frac{N!}{n_1! n_2! n_3! \dots} \quad \left( \text{dengan } \sum n_i = N \right) \quad (17.2)$$

Hasil rumusan ini adalah penting secara mendasar dan dengan sendirinya harus dimengerti dengan benar asal-usul rumusan.

Jika hanya terdapat dua karakter, yaitu  $n_1$  dan  $n_2$ , dengan  $n_1 + n_2 = N$ , maka pers. [17.2] dapat ditulis menjadi:

$$\frac{N!}{n_1! n_2!} = \frac{N!}{n_1! (N - n_1)!}$$

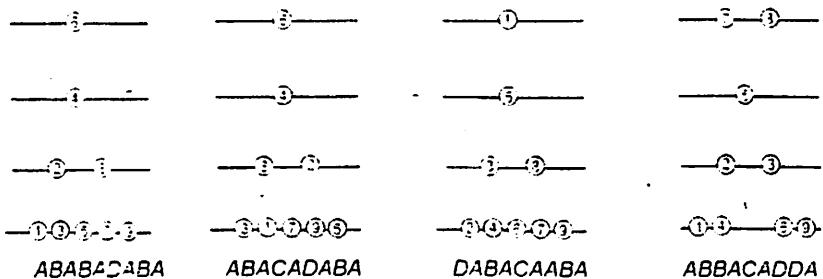
Jika rumusan ini ditulis lebih rinci:

$$\frac{N(N-1)(N-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}{5 \cdot 2 \cdots (n_1-1) \cdot 1 \cdot 2 \cdot (N - n_1 - 1)(N - n_1)}$$

dan kemudian penulisan disingkat menjadi

$$\frac{N!}{n_1! n_2! n_3! \cdots} := \frac{N(N-1) \cdots (N-n_1+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n_1} = \binom{N}{n_1}$$

Pers. [17.2] juga dinamakan sebagai *koefisien multinomial*.



Gambar 17.2: Pertukaran "partikel" yang terdapat dalam suatu keadaan tidak akan mengubah baik keadaan mikronya (*microstate*) maupun susunan yang diberi kode, tetapi keadaan makro *macrostate* dan komposisinya adalah tetap. Terjadi perubahan jika terdapat penambahan yang tidak terkompensasi dari suatu partikel ke sistem keadaan lain.

Komposisi  $\text{BE}_2\text{NO}_4\text{RT}_3\square_5$  dapat direalisir dalam susunan berbeda sebanyak

$$\frac{18!}{2! 2! 4! 3! 5!} = 0,93 \cdot 10^{11}$$

dan daripadanya probabilitas untuk masing-masing cara adalah sama, yaitu sama dengan

$$p_1^2 p_5^2 p_{11} p_{15}^4 p_{18} p_{20}^3 p_{27}^5 = 5 \cdot 10^{21},$$

dengan karakter 27 dianggap sama dengan  $\square$ . Maka probabilitas komposisi  $\text{BE}_2\text{NO}_4\text{RT}_3\square_5$  ini adalah

$$P_{\text{komp}}(\text{BE}_2\text{NO}_4\text{RT}_3\square_5) = 0,93 \cdot 10^{11} \cdot 5,6 \cdot 10^{-21} = 5,2 \cdot 10^{-10}$$

Walaupun susunan EEEEEEEEEEEEEEEEEE  $10^6$  kali lebih mungkin dibandingkan dengan TO BE OR NOT TO BE, komposisi E18 yang dapat direpresentasikan hanya dalam satu-satunya susunan (E

tidak dibedakan). Tetapi hampir sejuta kali lebih jarang terjadi dibandingkan dengan komposisi  $BE_2NO_4RT_3$  □ 5

$$P_{\text{komp}}(E_{18}) = P_{\text{susunan}} = p_5^{18} = 1.5 \cdot 10^{-15}$$

Secara umum probabilitas suatu komposisi yang terdiri atas sejumlah  $n_i$  simbol ke  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, 27$ ) adalah

$$\begin{aligned} P_{\text{komp}}(n_1, n_2, \dots) &= \frac{N!}{n_1! n_2! \dots} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots \\ &= \left( \frac{N!}{\prod_{i=1}^{27} n_i!} \right) \prod_{i=1}^{27} p_i^{n_i} \end{aligned} \quad (17.3)$$

Probabilitas suatu fungsi dari 27 variabel  $n_i$  dengan kebebasan bervariasi, tetapi terdapat pula *syarat tambahan* yang harus dipenuhi, yaitu

$$n_1 + n_2 + \dots = \sum_{i=1}^{27} n_i = N \quad (17.4)$$

### 17.1.3 Komposisi Paling Mungkin

Susunan yang selalu muncul adalah susunan yang mengandung karakter paling sering. Akan tetapi sebagai komposisi tidak akan menjadi yang paling sering. Komposisi mana yang paling sering muncul? Atau dalam bahasa matematis: Pada harga yang mana dari  $n_1, n_2, \dots$ , fungsi  $P_{\text{komp}}$  mempunyai harga maksimum dan memenuhi kondisi tambahan pers. [7.4]?

Sebelum membahas persoalan ini lebih lanjut, diperlukan untuk

—○—	—○—○—	—○—○—○—○—	$\frac{P}{1/3}$
—○—○—	—○—○—	—○—○—	
$P = 0.0823$	0.1235	0.0206	

Gambar 17.3: Pada keadaan probabilitas yang sama  $p$ ; merupakan probabilitas yang sama dan paling mungkin. Hal ini dapat dilihat misalnya apabila terdapat perpindahan partikel ke keadaan lainnya hanya akan merubah sedikit harga probabilitas, scandainya dimulai dengan probabilitas yang paling mungkin (kiri). Distribusi sebelah kanan yang mengandung dua partikel sekaligus dibandingkan dengan distribusi yang terdapat di bagian tengah, menjadi hampir 4 kali dari probabilitas susunan di bagian kirinya.

merumuskannya dengan cara yang lebih baik. Bentuk rumusan *fakultas* tidak begitu menguntungkan, seperti halnya diketahui secara praktis. Ada dua *trick* utama untuk memudahkan suatu perhitungan yang mengandung bentuk fakultas:

1. Mereduksi orde terbesar melalui logaritma:

$$\begin{aligned}\log N! &= \log (1.2.3 \dots N) \\ &= \log 2 + \log 3 + \dots + \log N \\ &= \sum_{v=1}^N v\end{aligned}$$

Contohnya adalah  $\log 18! = 15,82$  adalah lebih sederhana dibanding harus menulis  $18! = 6,4 \cdot 10^{15}$ . Selain dengan cara logaritma demikian, untuk mereduksi bentuk fakultas dapat pula digunakan fungsi lain yang cenderung mempunyai bentuk "mendatar". Akan tetapi, logaritma mempunyai keuntungan lain jika digunakan dalam perhitungan probabilitas, yaitu karena probabilitas dari kejadian yang saling tidak bergantung pada perkalian masing-masing probabilitas yang ada pada kejadian tersebut, dengan logaritma semua *perkalian* dapat berubah menjadi *penambahan*:

$$\log (P_1 \cdot P_2) = \log P_1 + \log P_2$$

Basis logaritma mana yang harus digunakan dalam persoalan ini tidak ditentukan (dapat digunakan basis 10 atau bilangan alamiah  $e$  secara sembarang asalkan tetap konsisten). Mengubah basis berarti akan muncul faktor konstanta pada logaritma. Cara paling menyenangkan dalam perhitungan adalah menggunakan basis logaritma

natural dengan menuliskan faktor tambahan. Dalam bentuk ini *logaritma probabilitas* disebut sebagai *entropi S*:

$$S = C \ln P$$

Di dalam fisika khususnya faktor  $C$  diberikan pula dimensi (energi/derajat) dan faktor tersebut diidentifikasi dengan konstanta Boltzmann  $k$ . Penggunaan fisis dari  $S$  adalah hanya satu dalam sekian banyak kemungkinan.

## 2. "Cara analitis" untuk $N!$ dengan menggunakan rumus Stirling

$$N! \approx \frac{N^N}{e^N} \sqrt{2\pi N} \quad (17.5)$$

yang khususnya dapat mendekati harga sebenarnya untuk harga  $N$  yang besar.

Kedua cara yang disebutkan di atas dapat dikombinasikan:

$$\ln N! \approx N \ln N - N + \frac{1}{2} \ln(2\pi N) \quad (17.6)$$

Dengan menggunakan logaritma kesalahan pendekatan yang didapat dari penggunaan rumus Stirling dapat direduksi sehingga dapat dianggap tidak berperan penting dan untuk harga  $N$  yang besar, pendekatan hingga suku kedua telah menghasilkan pendekatan yang cukup baik:

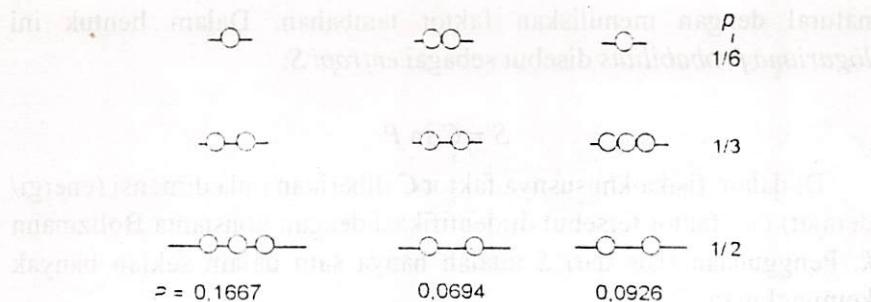
$$\ln N! \approx N \ln N - N \quad (17.7)$$

Penggunaan rumus Stirling (pers. [17.7]) untuk probabilitas yang dirumuskan pada pers. [17.3] adalah:

$$\begin{aligned} \ln P_{\text{komp}}(n_1, n_2, \dots) &= \ln N! - \ln n_1! - \ln n_2! - \dots + \ln p^{n_1} + \ln p^{n_2} + \dots \\ &= N \ln N - N - \sum n_i \ln n_i + \sum n_i + \sum n_i \ln p_i. \end{aligned}$$

Karena  $\sum n_i = N$ , maka suku ke-2 dan ke-4 akan saling menghilangkan:

$$\ln P_{\text{komp}}(n_1, n_2, \dots) = N \ln N - \sum n_i \ln n_i + \sum n_i \ln p_i. \quad (17.8)$$



Gambar 17.4: Jika probabilitas keadaan  $p_i$  sangat berbeda, maka distribusi dengan  $n_i \sim p_i$  adalah yang paling mungkin. Probabilitas distribusi lainnya akan semakin kecil jika terdapat penambahan yang semakin banyak padanya.

Pada harga  $n_1, n_2, \dots$  yang mana  $P_{\text{komp}}$  akan mempunyai harga maksimum? Untuk lebih jelas dapat digambarkan dengan "meminjam" suatu bentuk fungsi distribusi tertentu, kemudian mengubahnya, misalnya dengan menambahkan huruf A dan B. Kemudian  $n_1$  berubah menjadi  $n_1 - 1$  dan  $n_2$  menjadi  $n_2 - 1$ . Probabilitas  $P$  sebelumnya yang diubah menjadi  $P'$  tidak berubah hanya pada faktornya

$$P \sim \frac{p_1^{n_1} p_2^{n_2}}{n_1! n_2!} \quad P' \sim \frac{p_1^{n_1-1} p_2^{n_2+1}}{(n_1-1)! (n_2+1)!} \quad (17.9)$$

Perbandingan keduanya memberikan

$$\frac{P}{P'} = \frac{p_2 n_1}{p_1 (n_2 + 1)} \quad (17.10)$$

Jika dibuat pendekatan probabilitas yang paling mungkin, maka harga  $P$  hanya sedikit berubah untuk setiap perubahan yang terjadi, dengan perkataan lain faktor  $P'/P$  akan mendekati harga 1. Untuk probabilitas yang paling mungkin sendiri faktor ini haruslah merupakan indeks  $i, k$  untuk setiap huruf. Untuk harga  $n_1$  yang amat besar, yang tentunya menjadi perhatian utama dalam fisika, faktor 1 yang terdapat pada penyebut tidak akan berpengaruh sama sekali, sehingga akan diperoleh:

$$\frac{n_{io}}{p_{io}} = \frac{n_k}{p_k} \quad \text{atau} \quad n_i \sim p_i \quad (17.11)$$

Faktor kesebandingan dapat diperoleh secara sederhana, karena diketahui bahwa  $\sum n_i = N$  dan  $\sum p_i = 1$ , maka

$$n_{io} = N p_i \quad (17.12a)$$

Komposisi yang paling mungkin adalah komposisi yang di dalamnya mengandung huruf-huruf yang mempunyai tingkat keseringan relatif paling banyak yang terdapat di dalam karung.

Bagaimana seringnya muncul komposisi yang paling mungkin? Dengan menggantikan karakter yang sering muncul  $n_{io}$  dari pers. [17.12a] pada rumus entropi pers. [17.8] didapat

$$S_{\text{maks}} = \ln P_{\text{komp}}$$

$$\begin{aligned} &= N \ln N - \sum n_{io} \ln (N p_i) + \sum n_{io} \ln p_i \\ &= N \ln N - \sum n_{io} (\ln N + \ln p_i) + \sum n_{io} \ln p_i \\ &= N \ln N - \ln N \sum n_{io} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Komposisi yang paling sering muncul pasti berharga 1. Akan tetapi sesungguhnya kesimpulan ini tidak patut dinyatakan dengan perkataan: Keadaan lain yang mempunyai komposisi yang mirip juga akan muncul dengan probabilitas seperti di atas. Perbedaan yang ada muncul karena pengabaian suku ketiga pada rumus Stirling. Penggunaan rumusan ini untuk mencari harga entropi praktis tanpa cela. Entropi (mempunyai kesalahan sama dengan penjumlahan kesalahan-kesalahan) dari komposisi  $\text{BE}_2\text{NO}_4\text{RT}_3\text{O}_5$  dapat dicari dengan menggunakan pers. [17.8] sebagai berikut:

$$S(\text{BE}_2\text{NO}_4\text{RT}_3\text{O}_5) = -14,2$$

Komposisi yang paling mungkin dari  $\text{BE}_2\text{NO}_4\text{RT}_3\square_5$ , dipresentasikan melalui susunan seperti O NET BONNE TERRE atau RETTER OBEN ONE dengan demikian adalah  $e^{14,2} = 1,6 \cdot 10^5$  lebih sering muncul relatif dibandingkan dengan komposisi  $\text{BE}_2\text{NO}_4\text{RT}_3\square_5$ .

#### 17.1.4 Fenomena Deviasi

Penurunan harga probabilitas suatu deviasi dari komposisi yang paling mungkin sangat ditentukan oleh harga  $N$ , misalnya pada pers. [17.8] muncul sebagai faktor. Sekarang pandang bukan lagi 18 karakter seperti di atas, melainkan 1800 karakter, maka akan diperoleh harga maksimum secara dominan. Kalikan semua bilangan ( $n_i$  dan  $N$ ) dengan sebuah faktor  $f$ , maka akan mudah ditunjukkan bahwa entropi setiap komposisi akan dikalikan pula dengan  $f$ :

$$\begin{aligned} S(f n_i) &= f N \ln f N - \sum f n_i \ln f n_i + \sum f n_i \ln p_i \\ &= f N \ln N - f \sum n_i \ln n_i + f \sum n_i \ln p_i \\ &= f S(n_i). \end{aligned}$$

Berarti pula bahwa semua *jarak* entropi juga dikalikan dengan faktor  $f$ . Untuk  $N = 1800$  akan terdapat perbedaan entropi antara komposisi yang paling mungkin dan  $\text{B}_{200}\text{E}_{200}\text{N}_{100}\text{O}_{400}\text{R}_{100}\text{T}_{300}\square_{500}$  telah sebesar 425, sehingga komposisi ini adalah  $e^{425} \sim 10^{195}$  kali lebih jarang dibanding dengan probabilitas yang paling mungkin, berarti pula kemungkinan komposisi demikian tidak mungkin terjadi. Fisikawan biasanya bekerja bukan dengan angka 1800 melainkan dengan  $10^{18}$  atau bahkan lebih besar lagi, sebagai representasi jumlah partikel yang terdapat di dalam suatu sistem.

Berapa ukuran atau orde deviasi dari probabilitas yang paling mungkin untuk harga  $N$  yang besar masih dapat ditolerir? Suatu distribusi akan mengalami deviasi dari harga yang paling mungkin, atau dengan perkataan lain bilangan yang menyatakan keadaan tidak sama dengan  $n_{io}$ , melainkan  $n_i = n_{io} + v_i$ . Untuk harga deviasi  $v_i$  yang sangat kecil,  $S$  praktis tidak mengalami perubahan; hal ini merupakan

tanda-tanda adanya suatu harga yang paling mungkin.  $S$  tentunya bukan fungsi linier, melainkan fungsi kuadratik dari  $v_i$ :

$$S = S_{\max} - \frac{1}{2} a_i v_i^2,$$

yaitu fungsi yang berbentuk paraboloida yang membuka ke bawah. Jika semua bilangan yang menyatakan keadaan dan juga  $v_i$  dikalikan dengan suatu faktor  $f$ , maka harga  $S_{\max} - S$  haruslah merupakan harga yang dikalikan dengan  $f$  pula. Koefisiennya haruslah hingga mencapai faktor konstanta sama dengan  $n_{io}$ . Faktor tersebut adalah sama dengan  $1/2$ :

$$S = S_{\max} - \frac{1}{2} \sum \frac{v_i^2}{n_{io}}$$

atau

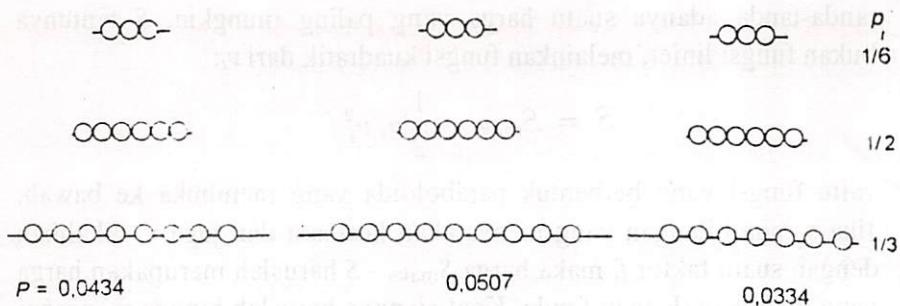
$$P = P_{\max} e^{-\frac{1}{2} \sum \frac{v_i^2}{n_{io}}} = P_{\max} \prod e^{-\frac{1}{2} \frac{v_i^2}{n_{io}}} \quad (17.14)$$

Kurva probabilitas dapat dibentuk melalui suatu produk suatu fungsi Gauss  $e^{-\frac{1}{2} \frac{v_i^2}{n_{io}}}$ , yaitu masing-masing satu untuk setiap "arah". Lebar kurva Gauss pada "arah"  $n_i$  diberikan sebagai deviasi standard dari fungsi Gauss sebagai berikut:

$$\Delta n_i = \sqrt{n_{io}} \quad (17.15)$$

Deviasi dari bilangan yang paling mungkin  $n_{io}$  dapat diandaikan masih mungkin terjadi, jika bilangan tersebut dalam orde  $\Delta n_i$  atau lebih kecil lagi. Akan tetapi untuk harga deviasi, yang terlalu besar praktis tidak akan mungkin terjadi. Jika  $n_{io} = 100$  maka bilangan yang paling mungkin didapat dari  $n_i$  terletak kira-kira dari 90 hingga 110. Sebaliknya jika  $n_{io} = 10^{18}$ , maka orde deviasi adalah sekitar

$10^9$ , sehingga kemungkinan terdapat probabilitas yang paling mungkin adalah sebesar satu per satu milyard. Terlepas dari deviasi yang tidak mungkin dapat diatur demikian, hanya terdapat kemungkinan satu komposisi yang paling mungkin, yaitu yang tidak dapat direalisir.



Gambar 17.5: Semakin banyak jumlah partikel, maka semakin jelas terlihat distribusi probabilitas bilangan yang paling mungkin, jika deviasi dengan *prosentual* yang sama dibandingkan dengannya. Suatu perpindahan tiap partikel sebaliknya membuat semakin kecil dan secara keseluruhan menyebabkan  $N$  - ooo tidak akan terpenuhi lagi. jika analisa dimulai dengan bilangan yang paling mungkin.

Walaupun semua berlangsung secara kebetulan, untuk suatu bilangan  $N$  yang sangat besar (hingga dalam orde deviasinya) hanya terdapat komposisi teks tertentu. Hal ini kelihatannya tidak dapat dibayangkan, seperti probabilitas menebak suatu angka yang pasti dalam melemparkan 6000 dadu sekaligus, bahwa setiap angka mempunyai kemungkinan kegagalan seribu kali (atau lebih baik jika dikatakan  $1000 \pm 30$  kali). Ketergantungan deviasi terhadap akar dari bilangan yang menyatakan jumlah tersebut ditemui pula pada distribusi Poisson (lihat § 13.2.7).

### 17.1.5 Distribusi Kanonik

Perhitungan probabilitas deviasi yang dibahas hingga sebatas ini belum mencukupi untuk mendapatkan hasil yang benar-benar diinginkan. Walaupun bagaimana pun siapa pun akan bisa membentuk kalimat yang paling mungkin dengan menggunakan huruf-huruf yang terdapat di karung. Pembahasan selanjutnya akan ditilik pembentukan kalimat dengan syarat-syarat yang berbeda, yaitu deretan huruf membentuk kalimat dengan panjang geometris kata yang sama, seperti halnya cetakan kalimat dengan menggunakan huruf-huruf yang dicetak

dengan baik. Dalam pembicaraan selanjutnya akan diperhatikan "lebar deret" huruf-huruf  $B$ . Huruf-huruf mempunyai lebar yang berbeda-beda secara individu, misalnya  $I$  tentunya lebih sempit dari  $L$  dan lebih sempit dari  $M$ . Misalnya  $b_i$  adalah lebar suatu karakter huruf ke  $i$ , akan tetapi dalam membentuk kalimat hanya boleh digunakan sebanyak  $n_i$  karakter dalam satu deret, sehingga lebar total dari deretan huruf-huruf yang membentuk kalimat, dengan lebar total  $\beta$  adalah

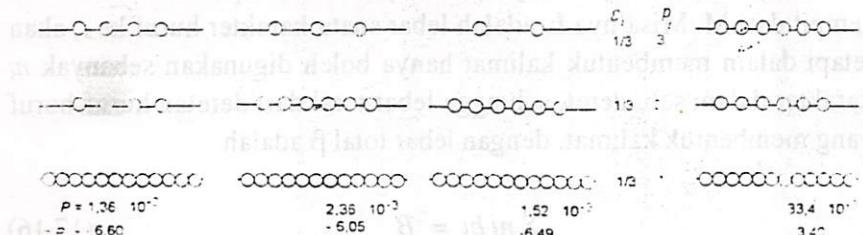
$$\sum_i n_i b_i = B \quad (17.16)$$

Kera-kera tentunya tidak memperhatikan atau memperhitungkan, apakah lebar kalimat adalah sesuai dengan mereka juga tidak mencoba untuk melakukan koreksi terhadap kesalahan yang muncul karena susunan huruf terlalu lebar atau terlalu pendek. Apa yang harus diperhatikan dalam menilai kalimat yang dibentuk oleh kera-kera adalah hanya deret-deret yang lebarnya memenuhi syarat dan membuang semua deret lainnya.

Bagaimana persyaratan tambahan ini berpengaruh terhadap kalimat yang dibuat dan khususnya bagaimana pengaruhnya terhadap komposisi yang paling mungkin, adalah tidak mudah untuk meramalkannya secara intuitif. Jika perbandingan antara lebar  $\beta$  dan jumlah huruf  $N$  kecil, maka huruf-huruf yang lebih sempit harus diutamakan, atau dengan perkataan lain huruf tersebut relatif sering muncul di dalam kalimat dibanding di dalam karung. Selain itu, harus pula diperhatikan bahwa huruf yang sempit lebih efisien, karena huruf demikian lebih memungkinkan untuk memenuhi panjang yang diinginkan dari suatu kalimat; setiap pembuat model kereta api mengetahui hal tersebut. Bagaimana pengaruhnya secara kuantitatif, dalam pembahasan ini tentu dapat ditunjukkan melalui perhitungan.

Buat variasi  $n_i$  sesedikit mungkin (misalnya kira-kira sebanyak  $v_i$ ) dan tetapkan kondisi, yaitu dengan membuat  $P$  atau  $\ln P$  tidak berubah. Keadaan demikian merupakan syarat kesetimbangan. Suatu fungsi  $f(n_i)$  dalam hal ini akan mengalami perubahan sebesar  $v_i \ln a_i$ , misalnya suku  $n_i \ln n_i$  pada pers. [17.8] mengalami perubahan menjadi

$(n_i \ln n_i)$ . Perhatikan pula bahwa  $\sum v_i = 0$ , maka



Gambar 17.6: Di sini terdapat kondisi energi total konstan  $E = \sum n_i E_i$ . Untuk menghargai kondisi demikian dalam mencari probabilitas yang paling mungkin dari suatu keadaan, partikel tidak lagi dianggap dapat berpindah ke bagian lebih tinggi, melainkan harus ke tempat yang lebih rendah (dalam gambaran yang dibuat tingkat energi mempunyai "jarak" yang sama). Kondisi ini akan menghasilkan probabilitas yang paling mungkin berbentuk fungsi distribusi eksponensial (gambar kedua dari kiri). Distribusi paling kanan masih merupakan probabilitas yang paling mungkin, akan tetapi mempunyai energi total yang berbeda.

perubahannya menjadi

$$\delta \ln P = \sum_i (\ln p_i - \ln n_i) \quad (17.17)$$

Perubahan ini haruslah sama dengan nol untuk setiap pemilihan  $\exists$ ; sembarang. Hal ini tentunya hanya mungkin, jika faktor  $v_i$  lenyap. Akan tetapi harga  $v_i$  tidak dapat dipilih secara sembarang, karena harga  $N$  dan  $\beta$  konstan, maka haruslah

$$\delta N = \sum_i v_i = 0, \quad \delta B = \sum_i b_i v_i = 0 \quad (17.18)$$

Dalam hal ini misalnya hanya ada dua  $\exists$ ; dapat dipilih dan yang terakhir ditentukan dengan anggapan bahwa syarat tambahan pada

pers. [17.18] adalah terdipenuhi. Untuk menghitungnya digunakan *trick* yang ditemukan Lagrange sebagai berikut (Lagrange Multiplier): Karena  $h N = 0$  dan juga  $\delta \beta = 0$ , maka pernyataan pada pers. [17.18] dapat dikalikan dengan konstanta sembarang, misalnya  $\alpha$  dan  $B$  kemudian menambahkan  $\delta \ln P$  dan hasilnya harus tetap sama dengan nol

$$\begin{aligned} \sum_i \nu_i (\ln p_i - \ln n_i) + \alpha \sum_i \nu_i + \beta \sum_i b_i \nu_i &= \quad (17.19) \\ \sum_i \nu_i (\ln p_i - \ln n_i + \alpha + \beta b_i) &= 0 \end{aligned}$$

Selanjutnya harga  $\nu_i$  terakhir yang tidak bebas, yang dikalikan dengan  $\alpha$  dan  $\beta$ , mengharuskan semua faktor  $\nu_i$  sama dengan nol:

$$-\ln n_i + \ln p_i + \alpha + \beta b_i = 0, \quad (17.20)$$

berarti

$$n_i = p_i e^{\alpha} e^{\beta b_i}$$

Dengan demikian  $\alpha$  dapat diidentifikasi dengan memperhatikan kembali bahwa  $\sum n_i = N$ , sehingga haruslah

$$\sum_i n_i = \sum_i p_i e^{\beta b_i} = N \longrightarrow e^{\alpha} = \frac{N}{\sum_i p_i e^{\beta b_i}}$$

Suku penyebut  $\sum_i p_i e^{\beta b_i}$  (huruf yang sering muncul dan lebar karakter ke  $i$  demikian sempurnanya, sehingga dapat mempunyai hubungannya sendiri: dinamakan sebagai *jumlah keadaan* atau *fungsi distribusi* (dalam istilah Inggris disebut *partition function*))

$$Z = \sum_i p_i e^{\beta b_i} \quad (17.21)$$

Maka pers. [17.21] dapat dituliskan kembali sebagai

$$n_i = \frac{N}{Z} p_i e^{\beta b_i} \quad (17.22)$$

Dengan dasar yang sama maka  $\beta$  dapat diberikan dalam lebar total yang telah diketahui  $\beta$  sebagai berikut:

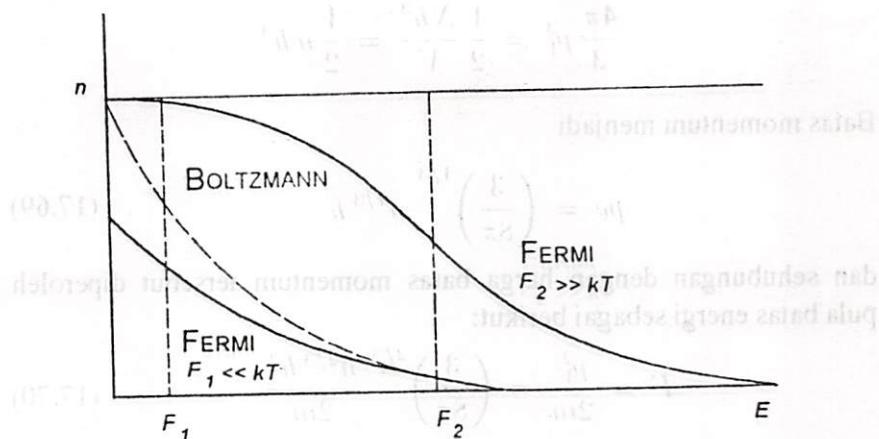
$$B = \sum_i b_i n_i = \frac{N}{Z} \sum_i b_i p_i e^{\beta b_i}, \quad (17.23)$$

akan tetapi penjumlahan ini umumnya amat sukar. Karenanya dalam banyak kasus "modul distribusi"  $\beta$  tetap dibiarkan, dengan anggapan bahwa modul ini mempunyai hubungan kompleks dengan lebar  $B$ . Keduanya mempunyai hubungan, walaupun belum jelas benar, dinyatakan dalam

$$B = N \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \quad (17.24)$$

Hubungan di atas diperoleh jika diperhatikan bahwa setiap suku dari jumlah keadaan yang dinyatakan pada pers. [17.21], didiferensiasi terhadap  $B$  memberikan suku pers. [17.23].

Fungsi distribusi pada pers. [17.22] dari jumlah karakter disebut *distribusi Boltzmann* atau *distribusi kanonik*. Seperti dapat terlihat, adanya hubungan kekerapan munculnya karakter huruf yang sempit dan lebar  $p_i$  dengan harga  $\beta$  negatif atau positif. Tanda mana yang dipunyai  $\beta$  (positif atau negatif) tidak dapat diramalkan secara pasti dari awal: karena bergantung dari "spektrum" dari lebar karakter huruf yang ada  $b_i$ . Seandainya terdapat perbedaan lebar spasi, misalnya lebar cetakan huruf, yang juga mempunyai panjang yang berbeda, *tanpa terdapat batasan untuk harga  $b_i$* , maka dengan mudah dapat dilihat, bahwa dengan harga  $\beta$  yang positif tidak akan diperoleh kemungkinan tersebut, dalam hal ini misalnya karena penjumlahan  $Z$  akan mempunyai harga yang terlalu besar. Untuk suatu spektrum yang meningkat tanpa batas "ke atas" (hal ini umumnya berguna dalam berbagai fenomena fisis) haruslah mempunyai harga  $\beta$  negatif atau nol. Untuk  $\beta = 0$  maka fungsi  $e$  keseluruhan mempunyai harga sama dengan 1, berarti bahwa distribusi karakter huruf seolah batasan lebarnya tidak berpengaruh sama sekali: pers. [17.22] akan menjadi distribusi yang serbasama atau homogen, menjadi pers. [17.11]. Hal ini



Gambar 17.8: Sesuai dengan harga batas energi Fermi  $F$ , yang ditentukan oleh jumlah partikel yang ada, distribusi Fermi akan menjadi distribusi Boltzmann. Pada  $F \ll kT$  (kerapatan partikel rendah) tidak begitu dapat diamati adanya efek kuantum; pada  $F \gg kT$  berlaku distribusi tersebut.

Pada temperatur  $T \gg T_{\text{deg}}$  adalah memenuhi statistik Boltzmann /Fermi (dasar mengapa pernyataan ini demikian, telah dijelaskan dalam mekanika kuantum dalam menjelaskan gas Fermi atau *gas terdegenerasi*).

Temperatur degenerasi, yaitu posisi batas energi Fermi, pada umumnya bergantung pada kerapatan dan massa partikel. Sekarang pandang gas yang terdiri atas  $N$  partikel, bermassa  $m$  dan volume  $V$ , sehingga kerapatan partikel adalah  $n = N/V$ . Telah diketahui bahwa tiap sepasang partikel yang mempunyai spin berlawanan memerlukan tempat sebesar  $h^3/V$  di dalam ruang fase ( $V$  adalah volume gas). Dengan demikian  $N$  partikel akan menempati ruang momentum sebesar  $1/2 N h^3/V$ . Karena dalam hal ini keadaan energi terendah selalu terpenuhi terlebih dahulu, maka partikel-partikel itu dikatakan menempati suatu bola berjari-jari  $p_F$  di dalam ruang momentum, dengan jari-jari:

$$\frac{4\pi}{3} p_F^3 = \frac{1}{2} \frac{Nh^3}{V} = \frac{1}{2} nh^3$$

Batas momentum menjadi

$$p_F = \left( \frac{3}{8\pi} \right)^{1/3} n^{1/3} h \quad (17.69)$$

dan sehubungan dengan harga batas momentum tersebut diperoleh pula batas energi sebagai berikut:

$$F = \frac{p_F^2}{2m} = \left( \frac{3}{8\pi} \right)^{2/3} \frac{n^{2/3} h^2}{2m} \quad (17.70)$$

Dengan demikian diperoleh temperatur degenerasi

$$T_{\text{deg}} = \left( \frac{3}{8\pi} \right)^{2/3} \frac{n^{2/3} h^2}{2km} \\ = 3.8 \cdot 10^{-37} \text{ K g cm}^2 \left( \frac{n^{2/3}}{m} \right) \quad (17.71)$$

Dengan demikian, elektron pada temperatur kamar dapat mengalami degenerasi atau tidak bergantung pada apakah konsentrasinya lebih besar atau kecil dari  $10^{19} \text{ cm}^{-3}$ . Untuk proton akan berlaku hal tersebut jika konsentrasinya  $1840^{2/3} \sim 10^5$  lebih tinggi.

Dari  $N = nV$  partikel gas Fermi, masing-masing akan mempunyai energi rata-rata sebesar  $3/5 F$  (faktor  $3/5$  berasal dari integrasi terhadap  $4\pi p^2 E = p^2 p^2 /2m$  atau integrasi  $p^4$ ). Energi total sistem partikel diperoleh menjadi

$$E = \frac{3}{5} N F = 0,036 \left( \frac{V h^2 n^{5/3}}{m} \right), \\ = 0,036 \left( \frac{h^2 N^{5/3} V^{-2/3}}{m} \right) \quad (17.72)$$

Energi total tidak bergantung pada temperatur. Karenanya gas Fermi mempunyai panas jenis sama dengan nol. Karenanya diketahui pula bahwa mengapa elektron konduksi pada logam tidak memberikan sumbangan terhadap harga panas jenisnya (pada pendekatan yang lebih lanjut baru diketahui adanya ketergantungan energi total gas elektron

### 17.1.7 Entropi Campuran

Suatu komplikasi kecil berikut ini yang harus diperhatikan: Seandainya terdapat dua karung sekaligus, satu karung berisi huruf putih dan lainnya berisi huruf kuning, akan tetapi keduanya mempunyai probabilitas munculnya karakter yang sama. Kera-keria mencampurkan isi kedua karung di suatu lapangan dan mengaduknya isinya dengan baik. Maka kalimat atau susunan huruf (teks) akan terdiri atas campuran antara huruf putih dan kuning yang keduanya dapat dibedakan. Bagaimana perubahan entropi karenanya?

Perhatikan seandainya terdapat teks mengandung huruf  $L$  putih dan  $M$  kuning, dengan  $L + M = N$ . Maka akan terdapat  $n_i$  huruf tipe ke  $i$  yaitu terdiri atas  $l_i$  berwarna putih dan  $m_i$  berwarna kuning. Karena warna masing-masing dapat dibedakan dengan baik, maka akan muncul huruf-huruf dengan cara seperti dinyatakan pers. [17.3]. Dengan demikian, probabilitas teks yang terbentuk adalah

$$P_{\text{camp}} = \frac{N!}{l_1! l_2! \cdots m_1! m_2! \cdots} \quad (17.27)$$

Sebagai perbandingan misalnya dipandang jumlah yang sama dari huruf, yaitu dengan menganggap semua huruf berwarna putih digeser ke kiri dan huruf kuning ke kanan, sehingga akan diperoleh dua teks

yang berbeda warna, yang satu berwarna putih dan lainnya kuning. Probabilitas bagian dari teks ini adalah

$$P_p = \frac{L!}{l_1! l_2! \cdots}, \quad P_k = \frac{M!}{m_1! m_2! \cdots}$$

Maka probabilitas campuran kedua teks yang terpisahkan tersebut menjadi

$$P_{\text{pisah}} = P_p P_k = \frac{L!}{l_1! l_2! \cdots} \frac{M!}{m_1! m_2! \cdots} \quad (17.28)$$

Pers. [17.28] adalah berbeda dengan pers. [17.27] dengan faktor

$$\frac{N!}{L! M!}$$

Entropi juga dibedakan dengan faktor pembeda sebagai berikut.

$$S_{\text{camp}} = N \ln N - L \ln L - M \ln M \quad (17.29)$$

Demikianlah perbedaan entropi seandainya dilakukan campuran sejumlah  $L$  suatu huruf dengan  $M$  huruf lainnya. Untuk kasus khusus, jika  $L=M=N/2$ , maka perbedaan entropi menjadi

$$S_{\text{camp}} = N \ln 2$$

### 17.1.8 Ensambel Kanonik (Ensambel Gibbs)

Seseorang mempunyai sederetan huruf-huruf ("kalimat") yang dibuat oleh kera-kera yang dirakit dengan pasti dan diletakkan di dalam karung kedua yang cukup besar menampungnya, sambil diaduk rata; karung yang diisi deretan huruf ini diberikan untuk permainan kera-kera lain, yaitu permainan yang sama: Setiap kera dapat mengambil deretan huruf secara sembarang (tanpa memilih) dan membentuk menjadi "deretan super" haruf atau "buku-buku". Dalam hal ini tidak diperhatikan lebar "kalimat" huruf, akan tetapi untuk membuat "buku-buku" tersebut harus dipenuhi kondisi sebagai berikut:

1. Setiap buku terdiri atas sejumlah  $N$  "kalimat".
2. Dalam setiap buku jumlah semua lebar kalimat seluruhnya harus sama dengan  $B$ .

Jika di dalam satu buku terdapat  $n_1$  kalimat, dengan lebar total  $B_1$   $n_2$  dengan lebar  $B_2$  dst., maka haruslah berlaku:

karena syarat 1 :  $\sum n_1 = N$ ,

karena syarat 2 :  $\sum n_1 B_1 = B$ .

Semua buku yang dihasilkan yang tidak memenuhi kedua syarat di atas, diabaikan semuanya. Buku-buku yang memenuhi syarat (legal)

disebut sebagai *ensambel kanonik* dari deretan huruf-huruf atau "kalimat".

Di dalam karangan berisi "kalimat" probabilitas lebar suatu "kalimat" yang sering muncul misalkan sama dengan  $P_i$ , berarti "kalimat" dengan lebar  $B_i$  muncul dengan probabilitas  $P_i$  dst. Dalam hal ini bahwa perbandingan logis antara "buku" dan "kalimat" adalah persis sama seperti perbandingan antara "kalimat" dan huruf. Kelompok kera kedua tidak perlu mengetahui bahwa satuan dasar ("kalimat") adalah merupakan satuan kompleks, yang sesungguhnya terdiri atas satuan pembentuk lainnya. Hasil yang diperoleh, khususnya probabilitas distribusi "kalimat" yang terdapat di dalam buku legal (memenuhi syarat 1 dan 2) terhadap lebar yang berbeda, haruslah persis analog dengan distribusi huruf terhadap lebar huruf tersebut dalam hal di mana panjang dan lebar "kalimat" harus telah ditentunya sebelumnya. Dengan perkataan lain: Akan diperoleh kembali distribusi Boltzmann:

$$n_i = \frac{N}{Z} P_i e^{-\beta'' B_i} \quad (17.31)$$

dengan jumlah keadaan

$$Z = \sum P_i e^{-\beta'' B_i} \quad (17.32)$$

Karakter eksponensial dari distribusi ini tidak bergantungan pada *struktur halus* dari masing-masing "kalimat" dan bagaimanaterbentuknya susunan huruf dalam "kalimat"; tentunya dalam hal ini keberadaan atau *eksistensi* dari struktur halus ini adalah tidak penting untuk itu. Struktur halus demikian hanya diperlukan untuk menghitung jumlah keadaan.

Jika pada akhirnya diketahui bahwa timbulnya "kalimat-kalimat" merupakan proses ketidaksengajaan, seperti telah dikatakan sebelumnya, bahwa probabilitas  $P_i$  kenyataannya merupakan probabilitas keberadaannya. Probabilitas ini secara formal dapat dinyatakan melalui entropi

$$P_i = e^{S_i/k} \quad (17.33)$$

Sehingga distribusi lebar pers. [17.31] menjadi

$$n_i = \frac{N}{Z} e^{S_i/k} e^{-\beta'' B_i} \quad (17.34)$$

Dapat diperhatikan kembali bahwa "kalimat-kalimat" yang mempunyai lebar yang kecil tidak selalu mempunyai probabilitas yang besar (sering muncul, misalnya anggapan pada pers. [17.31], karena "kalimat-kalimat" seperti ini (mempunyai harga  $P_i$  yang kecil). "Kalimat" yang sering muncul adalah hanya "kalimat-kalimat" dengan harga terkecil dari lebar *bebasnya*:

$$B_i = \frac{S_i}{k\beta''} \quad (17.35)$$

Jika sebuah buku mempunyai "kalimat" yang banyak, maka akan terdapat deviasi yang kecil dan apa yang sering muncul adalah "kalimat" yang mempunyai lebar-lebar minimal. Tanpa syarat lebar total  $B$  di dalam buku, maka "kalimat-kalimat" tersebut akan terdistribusi dengan probabilitas  $P_i$ .

### 17.1.9 Kerja dan Panas

Terdapat pula kemungkinan untuk mengubah lebar tiap karakter huruf, misalnya dengan memperbesar (meregang) atau memampatkan sisi huruf. Untuk suatu deret huruf yang mengandung  $n_i$  karakter huruf dengan lebar masing-masing huruf  $b_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ), sehingga lebar deret keseluruhan adalah  $B = \sum n_i b_i$ . Dalam hal ini terdapat dua kemungkinan untuk mengubah lebar deret, yaitu:

1. Jumlah huruf sebanyak  $n_i$  dibiarkan tetapi, yang diubah hanya beberapa atau seluruh huruf  $b_i$ . Perubahan dari besarnya lebar ini dimisalnya sama dengan *kerja*.
2. Lebar spektrum  $b_i$  dibiarkan seperti adanya, jumlah huruf  $n_i$  dikurangi. Perubahan lebar dengan cara ini diandaikan analog dengan *panas*.

Setiap perubahan lebar  $B$  dapat dibagi menjadi kerja dan panas

$$\begin{aligned} dB &= d \sum n_i b_i \\ &= \sum_{\text{kerja}} n_i d b_i + \sum_{\text{panas}} b_i d n_i \end{aligned} \quad (17.36)$$

Dapat pula terjadi bahwa lebar huruf dipengaruhi oleh berbagai macam cara (gesekan mekanis dls). Dalam penggunaan fisis lebar masing-masing keadaan biasanya ditandai dengan metode tertentu  $k$  melalui parameter  $S_k$ . Jika parameter ini mengalami perubahan, maka terjadi perubahan lebar melalui perubahan

$$dB = X_k d \zeta_k, \quad X_k = \sum_i \frac{\partial b_i}{\partial \zeta_k} n_i \quad (17.37)$$

$X_k$  disebut sebagai gaya diperumum. Jika beberapa parameter berubah secara bersamaan, maka perubahan lebar menjadi

$$dB = \sum_k X_k d \zeta_k \quad (17.38)$$

## 17.2 Ensambel Fisis

### 17.2.1 Pengertian Fisis

Demikianlah perhitungan statistik dengan mengambil contoh "permainan kera" diformulasikan dan kelihatannya lebih cocok digunakan sebagai teori informasi atau genetik dibandingkan dengan fisika. Akan tetapi, tanpa memandang persoalan fisika secara khusus dapat pula diturunkan relasi yang lebih umum. Sekarang tiba masanya untuk mencari hubungan istilah-istilah yang digunakan sebelumnya dengan pengertian-pengertian fisika. Terdapat banyak kegunaan, antara lain, beberapa istilah yang sering digunakan dapat ditulis dari "kamus" berikut:

Huruf	▷ sistem partikel
kalimat	▷ sistem
buku	▷ sejumlah sistem mengalami pertukaran panas (didalam termostat)
lebar huruf	▷ energi partikel
lebar kalimat	▷ energi total sistem
lebar buku	▷ energi total ensambel
lebar bebas	▷ energi bebas.

Sifat formal dari "lebar" hanya digunakan bahwa lebar dapat ditambahkan, berarti bahwa lebar masing-masing bagian dapat ditambahkan sehingga menjadi lebar total dan bahwa dalam suatu kondisi tertentu tidak terdapat kerja atau pertukaran panas, atau sistem demikian disebut sebagai sistem tertutup, tetap konstan, atau memenuhi hukum kekekalan energi. Setiap besaran lain yang dapat ditambahkan dan memenuhi hukum kekekalan adalah seperti halnya energi dapat berperan sebagai *B*.

Modul distribusi *B'* atau lebih tepat lagi *harga kebalikannya* adalah sangat bergantung pada temperatur yang terdapat pada sistem, seperti

$$\beta' = \frac{1}{kT} \quad (17.39)$$

Semua istilah-istilah lain seperti entropi, jumlah keadaan, keseimbangan, distribusi kanonik, panas, kerja, di dalam fisika berlaku sama.

Osilator harmonik ditandai, bahwa seperti halnya di dalam mekanika kuantum menunjukkan (§ 6.3.1) jarak-jarak tingkat energi yang sama (*equidistance*)  $E_i$  yang berbeda sebesar satu "kuantum"  $h\nu$  dalam hal ini berperan seperti *b*. Pers. [17.26] dapat diartikan sebagai: energi  $N$  osilator harmonik yang identik total adalah sama dengan

$$E = \frac{N h \nu}{1 - e^{-h \nu / kT}}$$

Untuk sampai pada pembahasan hukum radiasi Planck dan hukum-hukum fisika lainnya, pertama-tama harus ditentukan terlebih dahulu jumlah osilator  $N$ .

### 17.2.2 Perubahan Keadaan

Tanpa memperhatikan fenomena deviasi suatu keadaan kesetimbangan yang diperoleh pada suatu ketika tetap selalu akan diperoleh, yaitu jika kondisinya tidak diubah. Terdapat 4 macam perubahan seperti ini:

perubahan jumlah partikel  $N$ ;

perubahan energi total  $E$ ;

perubahan spektrum energi atau harga  $E_i$ ;

perubahan modul distribusi  $\beta'$ .

Seperti halnya terjadinya distribusi partikel, hal ini terjadi umumnya bergantung pada kecepatan perubahan. Suatu perubahan yang cukup lambat ke keadaan kesetimbangannya adalah *reversibel*.

Perubahan energi pada suatu perubahan keadaan adalah (lihat pers. [17.36]):

$$\begin{aligned} dE &= d \sum_i N_i E_i = \sum_i (N_i dE_i + E_i dN_i) \\ &= \sum_{\text{kerja}} N_i dE_i + \sum_{\text{panas}} E_i dN_i \end{aligned} \quad (17.40)$$

Perhatikan suatu peristiwa penambahan panas pada sistem yang terjadi secara reversibel tanpa memerlukan kerja, atau dengan perkataan lain tanpa perubahan  $E_i$ . Bawa peristiwa ini terjadi secara reversibel, berarti pula dapat dijelaskan melalui distribusi kanonik. Perbedaan distribusi kanonik, yaitu *terjadi pada perbedaan energi masing-masingnya* dengan probabilitas terbesar, akan tetapi terjadinya perubahan energi, menyebabkan akan terdapat pergeseran yang

mempunyai probabilitas maksimum. Perubahan kecil demikian, dianggap sebagai perubahan  $\ln P$  dan berdasarkan pers. [17.8] diperoleh menjadi:

$$\begin{aligned} d \ln P &= d \sum_i N_i \ln \frac{N_i}{p_i} \\ &= - \sum_i \ln \frac{N_i}{p_i} dN_i - \sum_i \ln \frac{dN_i}{N_i} N_i \\ &\doteq - \sum_i \ln \frac{N_i}{p_i} dN_i \end{aligned}$$

suku kedua berharga nol karena  $\sum_i dN_i = 0$ . Dengan menggunakan  $N_i$  dari pers. [17.22] diperoleh

$$\begin{aligned} d \ln P &= - \sum_i \ln \frac{N}{Z} dN_i - \beta \sum_i E_i dN_i \\ &= -\beta \sum_i E_i dN_i \end{aligned}$$

atau karena pers. [17.40], maka diperoleh

$$d \ln P = -\beta dE = \beta' dE \quad (17.41)$$

### 17.2.3 Modul Distribusi dan Temperatur

Sekarang akan dibahas ramalan yang pernah disebutkan sebelumnya, bahwa  $\beta'$  atau  $1/\beta'$  berhubungan dengan temperatur. Untuk itu amati dua sistem yang keduanya merupakan sistem tertutup dan memerlukan waktu yang cukup lama sehingga pada masing-masing tercapai distribusi kanonik. Modul distribusi yang terdapat pada masing-masing sistem adalah  $\beta_1'$  dan  $\beta_2'$  dan umumnya mempunyai harga yang berbeda.

Kemudian kedua sistem dibuat berada dalam keadaan kontak termis satu sama lainnya, sehingga keduanya mengalami pertukaran panas. Pertukaran panas kedua sistem sebagai satu kesatuan, atau *sistem total* dapat mempunyai probabilitas yang besar. Probabilitas sistem total adalah

$$E = \frac{N h\nu}{1 - e^{-h\nu/kT}}$$

Untuk sampai pada pembahasan hukum radiasi Planck dan hukum-hukum fisika lainnya, pertama-tama harus ditentukan terlebih dahulu jumlah osilator  $N$ .

### 17.2.2 Perubahan Keadaan

Tanpa memperhatikan fenomena deviasi suatu keadaan kesetimbangan yang diperoleh pada suatu ketika tetap selalu akan diperoleh, yaitu jika kondisinya tidak diubah. Terdapat 4 macam perubahan seperti ini:

perubahan jumlah partikel  $N$ ;

perubahan energi total  $E$ ;

perubahan spektrum energi atau harga  $E_i$ ;

perubahan modul distribusi  $\beta'$ .

Seperti halnya terjadinya distribusi partikel, hal ini terjadi umumnya bergantung pada kecepatan perubahan. Suatu perubahan yang cukup lambat ke keadaan kesetimbangannya adalah *reversibel*.

Perubahan energi pada suatu perubahan keadaan adalah (lihat pers. [17.36]):

$$\begin{aligned} dE &= d \sum_i N_i E_i = \sum_i (N_i dE_i + E_i dN_i) \\ &= \sum_{\text{kerja}} N_i dE_i + \sum_{\text{panas}} E_i dN_i \end{aligned} \quad (17.40)$$

Perhatikan suatu peristiwa penambahan panas pada sistem yang terjadi secara reversibel tanpa memerlukan kerja, atau dengan perkataan lain tanpa perubahan  $E_i$ . Bahwa peristiwa ini terjadi secara reversibel, berarti pula dapat dijelaskan melalui distribusi kanonik. Perbedaan distribusi kanonik, yaitu *terjadi pada perbedaan energi masing-masingnya* dengan probabilitas terbesar, akan tetapi terjadinya perubahan energi, menyebabkan akan terdapat pergeseran yang

mempunyai probabilitas maksimum. Perubahan kecil demikian, dianggap sebagai perubahan  $\ln P$  dan berdasarkan pers. [17.8] diperoleh menjadi:

$$\begin{aligned} d \ln P &= d \sum_i N_i \ln \frac{N_i}{p_i} \\ &= - \sum_i \ln \frac{N_i}{p_i} dN_i - \sum_i \ln \frac{dN_i}{N_i} N_i \\ &= - \sum_i \ln \frac{N_i}{p_i} dN_i \end{aligned}$$

suku kedua berharga nol karena  $\sum_i dN_i = 0$ . Dengan menggunakan  $N_i$  dari pers. [17.22] diperoleh

$$\begin{aligned} d \ln P &= - \sum_i \ln \frac{N}{Z} dN_i - \beta \sum_i E_i dN_i \\ &= -\beta \sum_i E_i dN_i \end{aligned}$$

atau karena pers. [17.40], maka diperoleh

$$d \ln P = -\beta dE = \beta' dE \quad (17.41)$$

### 17.2.3 Modul Distribusi dan Temperatur

Sekarang akan dibahas ramalan yang pernah disebutkan sebelumnya, bahwa  $\beta'$  atau  $1/\beta'$  berhubungan dengan temperatur. Untuk itu amati dua sistem yang keduanya merupakan sistem tertutup dan memerlukan waktu yang cukup lama sehingga pada masing-masing tercapai distribusi kanonik. Modul distribusi yang terdapat pada masing-masing sistem adalah  $\beta_1'$  dan  $\beta_2'$  dan umumnya mempunyai harga yang berbeda.

Kemudian kedua sistem dibuat berada dalam keadaan kontak termis satu sama lainnya, sehingga keduanya mengalami pertukaran panas. Pertukaran panas kedua sistem sebagai satu kesatuan, atau *sistem total* dapat mempunyai probabilitas yang besar. Probabilitas sistem total adalah

$$P = P_1 \cdot P_2, \text{ berarti } \ln P = \ln P_1 + \ln P_2,$$

jika  $P_1$  dan  $P_2$  masing-masing adalah probabilitas (dianggap saling tidak bergantung pada) keadaan sistem. Selanjutnya akan dicari bagaimana perubahan  $P$  terjadi, jika terdapat perubahan panas sebesar  $\delta E$  dari sistem 1 ke 2, atau energi pada sistem 1 berkurang menjadi  $E - \delta E$

$$\delta \ln P = \delta \ln P_1 + \delta \ln P_2$$

$$= -\frac{dP_1}{dE_1} \delta E_1 + \frac{dP_2}{dE_2} \delta E_2$$

Gunakan pers. [17.41], yang juga berlaku untuk sistem yang mengalami pertukaran panas secara reversibel, maka

$$\delta \ln P = -\beta'_1 \delta E + \beta'_2 \delta E$$

$$= (\beta'_2 - \beta'_1) \delta E \quad (17.42)$$

Probabilitas sistem yang saling bergantung ini dapat meningkat, yaitu apabila modul distribusi  $\beta'_1$  dan  $\beta'_2$  tidak mempunyai harga yang sama.

Dari pers. [17.42] diketahui bahwa harga  $\delta \ln P$  adalah positif, yaitu  $\ln P$  akan meningkat jika pada  $\beta'_2 \Rightarrow \beta'_1$  atau  $\beta'_2 < \beta'_1$  yang berhubungan dengan pertukaran panas  $\delta E \Rightarrow 0$  atau  $\delta E < 0$ , atau dengan perkataan lain panas berpindah dari 1 ke 2. Pertukaran panas ini terhenti dari 2 ke 1, jika modul distribusi mempunyai harga bersama yang dapat diperbandingkan satu sama lain. Dalam istilah yang lazim besaran yang satu sama lain. Dalam istilah yang lazim besaran yang menentukan apakah dua benda dapat mengalami pertukaran panas satu sama lainnya atau tidak disebut sebagai temperatur. Harga  $\beta'$  semakin besar berarti harga temperatur semakin kecil, sehingga dikatakan panas akan mengalir dari benda yang mempunyai  $\beta'$  kecil ke benda yang mempunyai  $\beta'$  lebih besar. Hal ini akan terbukti jika dianggap bahwa

$$\beta' = \frac{1}{kT}. \quad (17.39a)$$

Dalam hal ini dapat pula dikatakan bahwa  $\beta'$  adalah fungsi yang meningkat secara monoton dari kebalikan harga temperatur. Juga apa arti  $k$  sebenarnya, belum dapat diketahui. Hal ini akan dibicarakan lebih lanjut melalui peristiwa yang lebih konkret, yaitu gas ideal nantinya.

#### 17.2.4 Probabilitas dan Entropi

Sebelumnya telah dibahas apa arti  $\beta'$  pada pers. [17.41] yang menyatakan:

$$d \ln P = \frac{l}{kT} dE \quad (17.43)$$

Relasi di atas telah dikenal oleh kebanyakan para pakar termodinamika (setelah Claussius) yaitu pertambahan suatu besaran yang disebut sebagai *entropi*  $S$  dengan bertambahnya panas  $dQ$ :

$$dS = \frac{dQ}{T} \quad (17.44)$$

Dengan demikian berakhir sudah untuk mencari arti dari logaritma probabilitas  $P$  suatu keadaan sebagai *entropi*:

$$S = k \ln P \quad (17.45)$$

Adalah tidak mengherankan bahwa pada pakar termodinamika telah menemukan pengertian besaran ini dengan jalan yang seolah tidak berhubungan sama sekali dengan proses termodinamika sendiri, yaitu bahwa entropi suatu sistem tertutup termodinamika tidak akan pernah mengalami penurunan. Sekarang pernyataan ini dapat dijelaskan dengan lengkap.

#### 17.2.5 Energi Bebas dan Syarat Kesetimbangan

Misalnya sistem yang menjadi perhatian adalah sistem tertutup, energinya dianggap belum dapat ditentukan; misalnya terdapat

kemungkinan terjadinya pertukaran panas dengan lingkungan sekelilingnya. Anggap bahwa temperatur lingkungan adalah konstan dan temperatur sistem cepat atau lambat akan menyamai temperatur lingkungan tersebut. Keadaan-keadaan yang cenderung "dipilih" oleh sistem, khususnya yang mempunyai probabilitas terbesar, tidak lagi ditentukan oleh energi tertentu, melainkan ditentukan oleh harga temperatur tertentu.

Keadaan-keadaan yang mungkin dan berbeda satu sama lainnya yang terjadi sebagai akibat *mikrostruktur* yang terdapat di dalam sistem (tanpa memandang keadaan energinya), mempunyai perbedaan probabilitas dapat dinyatakan dalam entropinya:  $P_{str} = e^{S/k}$ . Di samping itu jika hanya diamati dari keadaan energinya dan dengan sendirinya keadaan yang mempunyai mikrostruktur yang sama dengan keadaan energi  $E$  yang berbeda akan mempunyai probabilitas yang berbeda sebesar  $P_{en} = C e^{-E/kT}$ . Jika kedua hal di atas diperhitungkan secara bersamaan (hal yang tidak berhubungan dengan sistem tertutup, sesuai dengan realitas fisis) maka akan diperoleh suatu probabilitas total dari suatu keadaan yang dinyatakan dalam entropi  $S$  dan energi  $E$  sebagai berikut:

$$P = P_{str} + P_{en} = C e^{S/k} e^{-E/kT} \quad (17.46)$$

atau

$$\begin{aligned} \ln P &= \ln C + \frac{S}{k} - \frac{E}{kT} \\ &= \ln C - \frac{E - TS}{kT} \end{aligned} \quad (17.47)$$

Probabilitas terbesar dari keadaan jika

$$E - TS \quad (17.48)$$

mempunyai harga terkecil. Fungsi ini yang berperan dalam proses ini dan telah diperkenalkan pada pers. [17.35] disebut sebagai *energi bebas*.

Pada definisi energi bebas masih bergantung pada apakah spektrum energi sistem turut mengalami perubahan pada suatu perubahan yang

diperbolehkan atau tidak, atau dengan perkataan lain apakah pada perubahan keadaan yang diperbolehkan diperlukan kerja atau tidak (lihat § 17.1.9). Dalam kasus pertama energi  $E$  masih perlu dibatasi oleh suatu besaran lain yang berhubungan dengan kerja yang bersangkutan. Besaran yang membatasi energi ini disebut sebagai *enthalpi*  $H$ :

$$H = E + W = E + \sum X_i \xi_i. \quad (17.49)$$

Besaran  $W$  tidak tergantung pada sifat alamiah keadaan, melainkan pada sifat perubahan yang terjadi (karena  $W$  atau kerja bukan merupakan fungsi keadaan). Keadaan kesetimbangan terjadi jika fungsi

$$G = H - TS = E + W - TS$$

$$= E + \sum X_i \xi_i - TS, \quad (17.50)$$

yang disebut sebagai *enthalpi bebas* atau *potensial Gibbs* mempunyai harga minimum.

Untuk perubahan keadaan yang bebas kerja atau perubahan keadaan yang tidak memerlukan kerja (di mana "energi" dimaksud hanya berhubungan dengan energi dalam sistem), energi akan berhubungan erat dengan energi potensial Helmholtz.

$$F = E - TS \quad (17.51)$$

yaitu untuk keadaan kesetimbangan.

Macam Perubahan keadaan	Besaran yang konstan	Keadaan fungsi $\Phi$
Energi sistem tertutup Proses Isotermik-Isokhorik	$E$ $T, V$	Entropi: $S$ Energi bebas: $F = E - TS$
Proses Isotermik-Isobarik	$T, p$	Enthalpi bebas: $G = E + \sum X_i \xi_i - TS$
Proses Adiabatik-Isokhorik Proses Adiabatik-Isobarik	$S, V$ $S, p$	Energi: $E$ Enthalpi: $H = E + \sum X_i \xi_i - TS$

Pada suatu gas yang terdiri atas partikel-partikel netral baik secara listrik maupun magnetik satu-satunya kemungkinan terdapatnya kerja adalah secara mekanis:  $dW = pdV$ . Jika  $V$  tetap dibuat konstan, maka besar kemungkinan terdapatnya perubahan keadaan karena tidak terdapat kerja. Energi bebas  $F$  menyebabkan terjadinya kesetimbangan, yaitu kesetimbangan pada  $V$  dan  $T$  konstan (kesetimbangan isotermik- isokhorik). Jika harga  $T$  dan  $p$  diberikan sebaliknya (di dalam realitas adalah hal yang sering terjadi) besarnya kerja adalah sama dengan  $pV$ ; fungsi yang berhubungan untuk proses isotermik-isobarik ini untuk gas dan juga larutan adalah

$$G_{\text{gas}} = E + PV - TS \quad (17.52)$$

Proses yang menarik secara fisis dan sering menjadi perhatian adalah proses di mana tidak terdapat pertukaran panas (proses *adiabatik*). Karena  $dS = dQ/T$  maka entropi dalam kasus ini tidak mengalami perubahan (proses *isentropi*). Selanjutnya, jelas bahwa probabilitas keadaan ditentukan melalui energi dan enthalpi (jika dalam proses tidak terdapat kerja):  $P = P_{\text{en}} = e^{-E/kT}$  atau juga  $\rho = e^{-H/kT}$ . Keadaan yang mempunyai harga  $E$  atau  $H$  yang kecil adalah keadaan setimbang.

*Kesetimbangan* adalah keadaan yang mempunyai fungsi keadaan yang bersangkutan mempunyai harga *ekstrimum* (mempunyai kemungkinan harga  $S$  besar dan  $F$ ,  $G$ ,  $E$ , dan  $H$  berharga kecil). Di luar keadaan setimbang dapat terjadi perubahan keadaan, akan tetapi hanya perubahan di mana harga probabilitasnya mengalami peningkatan atau semakin besar, atau dapat pula dikatakan bahwa perubahan fungsi keadaan mengacu pada arah tertentu: membesarnya harga  $S$ , penurunan harga  $F$ ,  $G$ ,  $E$ , dan  $H$ .

Juga kecepatan di mana perubahan terjadi dapat ditentukan melalui fungsi keadaan  $\Phi$ . Pengamatan selama ini merupakan pengamatan "termodinamika biasa", yang lebih baik jika disebut sebagai pengetahuan termostatika; sedangkan di luar pembahasan ini, yaitu pembahasan yang menyangkut kinetik dan proses *termodinamika ireversibel*.

### 17.2.6 Kesetimbangan Statistik

Untuk dapat menganalisa suatu sistem secara statistik patut diketahui bagaimana suatu keadaan dapat diasumsikan, bagaimana energi  $E$ ; dan *fungsi berat statistik*  $g_i$  masing-masing keadaan. Relasi Boltzmann dapat digunakan untuk menjelaskan kemungkinan distribusi keadaan-keadaan yang terdapat di dalam sistem demikian, atau probabilitas-probabilitas dari keadaan-keadaan yang mungkin "diduduki" di dalam sistem; rumusan yang sesuai dan menyatakan jumlah keadaan seluruhnya adalah entropi, energi bebas dls., yang semuanya berhubungan dengan keadaan kesetimbangan.

*Fungsi berat statistik* suatu keadaan adalah (juga disebut sebagai probabilitas *a priori*) adalah probabilitas yang menggambarkan keadaan yang belum diketahui dengan pasti, khususnya energi sistem yang mempunyai keadaan yang bersangkutan. Dalam analogi dengan permainan kera fungsi berat statistik dari kekerapan suatu karakter huruf yang terdapat di dalam karung dan fungsi berat statistik tiap keadaan (kalimat atau teks) masing-masing diberikan sebagai kombinasi, karena tidak diketahui dengan pasti lebar karakter huruf (energi). Di dalam fisika kondisi yang dihadapi lebih sederhana, jika keadaan sistem dapat dinyatakan melalui tempat, misalnya melalui posisi tiap  $N$  partikel yang terdapat di dalam sistem. *A priori* berarti bahwa energi potensial tidak tergantung pada keadaan yang tidak sama, dianggap bahwa setiap partikel cenderung mempunyai energi potensial sama, sehingga fungsi berat statistik dalam suatu ruang tertentu akan sebanding dengan volume ruang yang bersangkutan. Untuk menggambarkan secara lengkap suatu keadaan masih diperlukan kecepatan atau momomentum masing-masing bagian sistem. Suatu titik massa mempunyai tiga komponen posisi (koordinat) dan tiga komponen momen. Dalam sistem demikian akan terdapat sekian banyak perubahan koordinat dan kecepatan atau momen dalam setiap terjadinya perubahan, yang selanjutnya memberikan posisi masing-masing bagian sistem. Pandang misalnya suatu sistem yang mengandung  $k$  komponen koordinat dan  $k$  komponen momen (termasuk pula koordinat sudut dan momen angular jika ada).

### 17.2.7 Ruang Fase

Gambaran tentang ruang fase akan dikemukakan langkah demi langkah, walaupun sebenarnya gambaran keseluruhan tentang ini amat sederhana, jika dipandang  $k$  komponen posisi dan  $k$  momentum, keduanya dianggap sebagai koordinat di dalam ruang abstraksi 2 dimensi, yaitu *ruang fase*. Setiap keadaan dalam sistem ini digambarkan oleh *satu* titik yang terdapat di dalam ruang fase ini. Diasumsikan bahwa tiap titik ini umumnya dengan berjalannya waktu adalah berbeda, karena posisi dan juga momentum sebagai bagian dari sistem, mengalami perubahan. Hukum kekekalan batasan tentang kemungkinan berpindahnya *titik fase* (baca: keadaan). Jika sistem secara sederhana dipandang terdiri atas titik-titik massa yang bergerak di dalam medan gaya elastik menurut lintasan garis lurus, maka berdasarkan hukum kekekalan energi lintasan fase yang terbentuk adalah berbentuk elips, dengan persamaan gerak tiap titik massa dapat dituliskan dalam  $x$  dan  $p$  sebagai berikut.

$$\frac{D}{2} x^2 + \frac{1}{2m} p^2 = E$$

Tanpa memandang batasan tersebut maka tiap titik fase dapat dan akan mencapai setiap daerah di dalam ruang fase.

Dari berbagai sistem yang mempunyai kemiripan, tiap satu titik atau keadaan digambarkan sebagai satu titik pula di dalam ruang fase (*titik fase*). Semua titik-titik tersebut dianggap mengalami gerak, seperti halnya partikel-partikel zat cair. Analogi yang diambil dari aliran zat cair mengandung pengertian yang dalam, karena titik-titik fase mempunyai kelakuan yang mirip dengan kelakuan zat cair inkompresibel. Dapat ditunjukkan bahwa posisi absolut "awan titik-titik" yang terdapat di ruang fase ini mengalami perubahan, juga posisi relatif satu sama lainnya, akan tetapi tidak kerapatannya (kaidah Liouville). Seandainya hal ini tidak terjadi, maka dalam setiap elemen volume ruang fase yang diamati akan terdapat lebih banyak titik-titik fase yang masuk dibanding yang keluar atau sebaliknya. Selisih aliran keluar dan masuk, tanpa memandang dimensi ruang fase, dapat dirumuskan persis seperti divergensi dalam ruang sebenarnya, yang dalam hal ini tentunya dinyatakan melalui  $2k$  koordinat:

$$V = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{p}_1, \dot{p}_2, \dots)$$

Divergensi adalah, seperti biasa, dinyatakan sebagai jumlah seluruh turunan terhadap komponen vektor dalam koordinat yang bersangkutan:

$$\nabla \cdot V = \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial \dot{p}_1}{\partial p_1} + \frac{\partial \dot{p}_2}{\partial p_2} + \dots$$

Pandang hanya sebagian turunan  $\frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \dot{p}_1}{\partial p_1}$  dari pernyataan di atas. Dengan dasar dari energi total sistem yang untuk kasus sederhana ini ditulis sebagai:  $E = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \frac{m}{2} \sum \dot{x}_i^2 + U(x_1, x_2, \dots)$ ,

secara formal memberikan

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \frac{\partial E_{\text{kin}}}{\partial p_i} = \frac{\partial E}{\partial p_i}, \text{ sehingga } \frac{\partial^2 \dot{x}_i}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 E}{\partial p_i \partial x_i}, \\ \dot{p}_i &= F_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i} = -\frac{\partial E}{\partial x_i}, \text{ sehingga } \frac{\partial^2 \dot{p}_i}{\partial p_i} = \frac{\partial^2 E}{\partial x_i \partial p_i} \end{aligned} \quad (17.53)$$

Dalam urutan mana misalnya suatu fungsi  $E(x, p)$  diturunkan terhadap  $x$  dan  $p$ , tidak akan mempengaruhi rumusan keadaan. Sehingga dapat disimpulkan bahwa

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} = 0$$

Relasi ini berlaku untuk setiap komponen, juga divergensi kecepatan dari titik fase ke nol; titik-titik ini "mengalir" mirip seperti partikel dalam aliran inkompresibel dengan kerapatan yang konstan terhadap waktu. Pembuktian umum dari kenyataan penting ini diberikan secara langsung dari formulasi atau prinsip Hamilton dalam pelajaran mekanika klasik.

Jika "awan" titik-titik yang terdapat dalam ruang fase memenuhi hukum kekekalan energi, cepat atau lambat akan mencapai daerah tertentu di dalam ruang tersebut dengan kerapatan tidak berubah terhadap waktu, haruslah terdapat suatu lapisan, tanpa memperhatikan atasannya energi, setiap daerah ini akan mengandung "suatu bilangan tertentu" yang sebanding dengan volumenya. Suatu bilangan tertentu

tersebut dapat dianggap sebagai fungsi berat statistik, karena fungsi berat statistik adalah sebanding dengan volume fase.

### 17.2.8 Gas Ideal

Dengan perkakas yang telah dibahas di atas dapat dicari penyelesaian persoalan-persoalan, baik yang telah dikenal dan persoalan-persoalan yang umum lainnya, melingkup permasalahan yang lebih luas. Teori kinetik gas misalnya (lihat §5.2) dibuat dengan sederetan pengandaian untuk sifat-sifat molekul; misalnya bahwa molekul-molekul gas mengalami interaksi melalui tumbukan dengan dinding secara elastik, bahwa tumbukan terjadi hanya dalam waktu yang amat singkat, dan masih banyak lagi. Semua pengandaian ini sekarang terlihat sebagai sesuatu yang terlalu disengaja. Partikel-partikel dalam pandangan teori kinetik gas, gas hanya mengandung satu jenis partikel, sedangkan kenyataannya gas tidak hanya mengandung satu jenis partikel, melainkan sebagai campuran berbagai macam partikel yang berbeda; kenyataannya dari sifat-sifat partikel "sebenarnya" ini tidak mengandung satu pun sifat seperti pengandaian teori kinetik gas. Rincian interaksi memang merupakan hal sampingan. Satu-satunya kondisi atau syarat yang kenyataannya cukup memuaskan diketahui sebagai "parameter" untuk menggambarkan keadaan suatu sistem partikel adalah tiga komponen koordinat dan tiga komponen momentum masing-masing partikel. Gaya-gaya luar dianggap tidak berpengaruh (kenyataan kondisi demikian mudah dibuat). Tempat di mana partikel berada dalam hal ini tidak mempunyai peran penting. Apabila untuk menyatakan suatu keadaan sistem partikel cukup dinyatakan dalam interval kecepatan ( $v, v + dv$ ), maka fungsi berat statistik dari keadaan ini dapat dinyatakan dalam volume fase (kulit bola):  $g \sim v^2 dv V$ , sehingga akan menghasilkan fungsi distribusi Maxwell sebagai berikut:

$$f(v) = g e^{-mv^2/2kT} \sim V v^2 e^{-mv^2/2kT} dv$$

Dengan demikian dapat dijelaskan dengan baik bahwa partikel-partikel yang dapat terlihat di bawah mikroskop misalnya, mempunyai energi rata-rata sama dengan  $3/2kT$ , seperti halnya pada molekul normal.

Untuk menentukan entropi dan fungsi termodinamika paling jitu adalah bermula dari jumlah keadaan:

$$Z = \sum_i g_i e^{-E_i/kT} \sim V \int_0^{\infty} v^2 e^{-mv^2/2kT} dv$$

Faktor konstanta dalam hal ini dipandang tidak berperan penting. Juga dari suku integral cukup harus diketahui bahwa dengan mensubstitusikan  $x = v \sqrt{m/2kT}$  akan berubah menjadi

$$(2kT/m)^{3/2} \int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx,$$

karena integral berbatas akan menghasilkan angka, dengan harganya masih bergantung konstanta, maka  $Z$  dapat dituliskan:

$$Z \sim V \left( \frac{2kT}{m} \right)^{3/2} \quad (17.54)$$

Dari pers. [17.24] diketahui energi dan energi bebas sebagai berikut:

$$\begin{aligned} E &= N \frac{\partial \ln Z}{\partial (-1/kT)} \\ &= \frac{3}{2} N \frac{\partial \ln Z}{\partial (-1/kT)} = \frac{3}{2} N kT \quad (17.55) \\ F &= -NkT \ln Z \\ &= -NkT \left( \ln V + \frac{3}{2} \ln T + \text{konstanta} \right) \end{aligned}$$

Seandainya sistem partikel tidak mengandung 3 komponen momen-tum, melainkan  $a$ , maka pada persamaan yang menyatakan  $Z$  tidak akan muncul faktor  $3/2$ , melainkan  $a/2$  dan seandainya harga  $a$  ini bukan 3, maka faktor  $a$  juga akan muncul pada persamaan energi. Penurunan di atas tidak lain merupakan rumusan dasar dari *prinsip distribusi serbasama*. Rumusan dengan menggunakan kenyataan yang ada ini tidak cukup memuaskan pula seandainya sistem mengandung dua jenis partikel berbeda dengan energi sistem merupakan menjumlahkan dan probabilitas atau fungsi berat statistiknya adalah menjadi perkalian; berdasarkan hal demikian maka jumlah keadaan sistem keseluruhan juga merupakan perkalian dari masing-masing

jumlah keadaan, sementara fungsi-fungsi termodinamika yang semuanya berasal dari  $\ln Z$  mempunyai sifat sebagai penjumlahan. Energi bebas suatu sistem yang mengandung  $N$  partikel sejenis adalah  $N$  kali energi bebas untuk masing-masing partikel, dst.

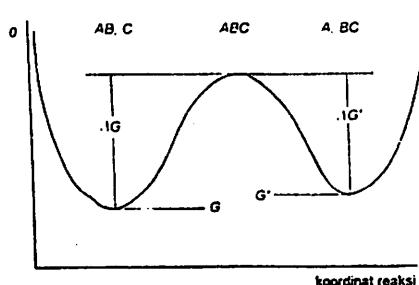
Dari sini kemudian dapat dibangun "jalan" selanjutnya menuju penggunaan fisika statistik kesetimbangan.

### 17.2.9 Laju Reaksi Absolut

Termodinamika klasik hanya membuat ramalan tentang posisi keadaan kesetimbangan, tetapi tidak mempertanyakan persoalan yang paling tidak penting tentang berapa lama sebenarnya keadaan kesetimbangan dapat tercapai. Dalam fisika zat padat telah dibahas beberapa fenomena bagaimana pengamatan secara kinetik maupun statik dapat mengisi "celah" ini. Dalam pembicaraan ini akan dibahas beberapa contoh yang menjadi dasar konsep dalam kimia. Perlakuan proses irreversibel secara umum meluas ke berbagai bidang dan masih berkembang hingga saat ini.

Misalnya terdapat suatu campuran  $AB$  dan  $C$ . Partikel  $B$  juga dapat berikatan dengan partikel  $C$ , yaitu dalam bentuk senyawa  $BC$ . Bagaimana distribusi kesetimbangan antara  $AB$  dan  $BC$  akan bergantung pada enthalpi bebas  $G$  keadaan campuran yang terbentuk dari  $AB$ ,  $C$  dan  $A$ ,  $BC$ .

Agar  $B$  dari  $A$  menjadi  $C$ , haruslah terjadi pertemuan setiap partikel  $AB$  dan  $C$  dan paling tidak terjadi dalam waktu singkat suatu campuran  $ABC$  yang kemudian "terpecah" dalam bentuk  $AB + C$  atau  $A + BC$ :



Gambar 17.7: Bentuk kurva enthalpi untuk reaksi  $ABC - A + BC$ . Laju reaksi bergantung pada besarnya transport massa pada jalan efektif reaksi dengan senyawa kompleks teraktivasi  $ABC$  di titik balik.

Senyawa kompleks  $ABC$  mempunyai enthalpi  $G$  yang jauh lebih besar dibanding dengan kedua senyawa akhir, apabila tidak demikian maka senyawa ini akan berada dalam keadaan kesetimbangan konsentrasi. Proses terjadinya senyawa secara skematis digambarkan pada gbr. [17.7] yang dalam pengamatan kinetik dari berbagai daerah selalu dapat balik. Pada absis terdapat pengertian geometris sebagai "koordinat reaksi", atau tidak selalu dapat dianggap demikian secara langsung. Misalnya panjang lintasan partikel yang ditransporkan adalah  $d$ . Untungnya tidak selalu terdapat peran harga  $d$ , karena tidak muncul dalam hasil akhir.

Suatu senyawa kompleks  $ABC$  memerlukan waktu kira-kira selama  $d/v$  untuk terpecah menjadi kedua senyawa akhir.  $v$  adalah kecepatan termis partikel dan dalam gerak efektif:  $v \sim \sqrt{mkT/m}$ . Apa yang diperlukan untuk diketahui adalah hanya berapa jumlah  $ABC$  yang terbentuk setiap waktu, misalnya kerapatan partikel adalah  $n_{ABC}$ , maka laju terjadinya reaksi atau jumlah partikel menjadi senyawa lain adalah  $n_{ABC} v/d$ .

$n_{ABC}$  dapat ditentukan berdasarkan distribusi Boltzmann yang harganya sebanding dengan  $n_{AB}n_C e^{-\Delta G/kT} \sqrt{mkT} d/h$ , dengan  $\Delta G$  adalah lebar pengembangan melalui bagian kiri kurva. Dalam persamaan ini muncul pula fungsi berat statistik dari senyawa kompleks  $ABC$ . Fungsi berat statistik suatu keadaan dalam kurva  $G$  adalah sama dengan 1. Gbr. [17.7] dapat dianggap sebagai gambaran ruang fase dua dimensi. Di dalam ruang fase berdimensi 2n fungsi berat statistiknya sama dengan jumlah deret  $h^n$  dalam volume fase, yaitu sesuai dengan keadaan yang dicari (alasan untuk ukuran deret ini telah dibahas pada §17.3). Volume fase adalah sama dengan momentum ruang fase dikali dengan volume ruang fase, dalam kasus ini adalah  $\sqrt{mkT} d$ . Selanjutnya didapat:

$$n_{ABC} \approx n_{AB} n_C e^{-\Delta G/kT} \sqrt{mkT} \frac{d}{h}$$

maka laju reaksi menjadi

$$n_{ABC} \frac{v}{d} \approx n_{AB} n_C e^{-\Delta G/kT} \frac{kT}{h}$$

Hasil akhir diperoleh sebagai perbedaan antara reaksi ke depan dan reaksi balik

$$n_{AB} = -\frac{kT}{h} (e^{-\Delta G/kT} n_{AB} n_C - e^{-\Delta G/kT} n_{BC} n_A) \quad (17.56)$$

Terjadinya kesetimbangan adalah jika  $n_{AB} = 0$ , yaitu sesuai dengan yang dijelaskan dalam hukum transpor massa sebagai berikut.

$$\frac{n_{AB} n_C}{n_{BC} n_A} = e^{(G' - G)/kT}$$

Pers. [17.56] adalah merupakan bentuk umum. Persamaan ini misalnya memberikan besar dan arti fisis dalam persamaan Arrhenius, walaupun kenyataannya besarnya  $\Delta G$  sukar diperoleh secara teoritis.

Suatu *katalisator* dan suatu *enzim* spesifik dapat mempunyai harga  $\Delta G$  pada keadaan transisi reaksi sehingga tidak terjadi perubahan kesetimbangan konsentrasi, akan tetapi terjadi transpor partikel antara keduanya sehingga mempercepat terjadinya reaksi yang dapat mencapai hingga pangkat sepuluh.

## 17.3 Statistik Kuantum

### 17.3.1 Partikel Kuantum

Partikel-partikel kuantum mekanik mempunyai beberapa sifat yang berbeda secara radikal dibanding dengan partikel mekanika klasik. Perbedaan sifat yang penting untuk statistik dinyatakan dalam prinsip Pauli:

*Setiap keadaan mekanika kuantum paling banyak hanya dapat ditempat oleh satu elektron.*

Dalam bahasa mekanika kuantum sesungguhnya keadaan tersebut dapat ditempati oleh dua partikel sekaligus, asalkan keduanya

mempunyai fungsi  $\psi$  yang tidak pernah sama (lihat §12.6.3). Bagi partikel klasik tidak terdapat batasan demikian: dalam suatu keadaan dapat ditempati oleh sejumlah partikel sembarang sekaligus.

Pernyataan yang sangat bertentangan dengan pandangan klasik ini akan lebih jelas jika dipandang dari hukum kekekalan momentum: di dalam gas elektron, meskipun gas terdapat di dalam volume dalam orde  $\text{km}^3$ , tidak akan pernah ada dua elektron yang mempunyai momentum sama secara eksak, walaupun keduanya dipisahkan oleh jarak dalam orde km satu sama lain. Gaya-gaya yang terdapat antar partikel, yang bekerja sedemikian rupa, tidak dapat dibayangkan; prinsip Pauli merupakan petunjuk dasar tentang kegagalan gambaran korpuskel dalam fisika klasik.

Keadaan-keadaan momentum elektron yang terdapat di dalam volume elektron tidak akan pernah sama. Pernyataan ini dapat dibuktikan dari prinsip ketidakpastian Heisenberg (penjelasan lebih rinci lihat § 16.2.2). Jika sejumlah elektron terdapat di dalam wadah berbentuk empat persegi panjang dengan ukuran volume  $a \times b \times c$ , setiap elektron akan mempunyai ketidakpastian koordinat maksimum sebesar  $\Delta x = a$ . Sesuai dengan relasi  $\Delta p_x \Delta x = h$ , maka elektron bersangkutan akan mempunyai ketidakpastian momentum minimum sebesar  $\Delta p_x = h/a$ . Sebuah elektron bebas yang terdapat di dalam wadah tersebut dapat menggunakan seluruh momentum minimum  $\Delta p_x = h/a$ ; dengan demikian  $h/a$  adalah merupakan harga sebenarnya dari ketidakpastian komponen momentum pada sumbu  $x$ . Daerah momentum  $\Delta p_x = h/a$  ini menurut prinsip Pauli adalah terlarang untuk ditempati oleh elektron lainnya. Hal yang sama berlaku pula untuk kedua komponen momentum lainnya  $\Delta p_y = h/b$  dan  $\Delta p_z = h/c$ . Dengan demikian elektron tersebut dapat berada dalam volume ruang momentum sebesar:

$$\Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z = \frac{h^3}{abc} = \frac{h^3}{V}$$

di luar darinya ( $V = abc$  adalah volume gas). Dalam dimensi enam ruang fase keadaan adalah masih sederhana: keadaan-keadaan ini terbagi dalam "sel-sel" yang mempunyai satuan volume tetap sebesar:

maka laju reaksi menjadi

$$n_{ABC} \frac{v}{d} \approx n_{AB} n_C e^{-\Delta G/kT} \frac{kT}{h}$$

Hasil akhir diperoleh sebagai perbedaan antara reaksi ke depan dan reaksi balik

$$i_{AB} = -\frac{kT}{h} (e^{-\Delta G/kT} n_{AB} n_C - e^{-\Delta G/kT} n_{BC} n_A) \quad (17.56)$$

Terjadinya kesetimbangan adalah jika  $n_{AB} = 0$ , yaitu sesuai dengan yang dijelaskan dalam hukum transpor massa sebagai berikut.

$$\frac{n_{AB} n_C}{n_{BC} n_A} = e^{(G' - G)/kT}$$

Pers. [17.56] adalah merupakan bentuk umum. Persamaan ini misalnya memberikan besar dan arti fisis dalam persamaan Arrhenius, walaupun kenyataannya besarnya  $\Delta G$  sukar diperoleh secara teoritis.

Suatu *katalisator* dan suatu *enzim* spesifik dapat mempunyai harga  $\Delta G$  pada keadaan transisi reaksi sehingga tidak terjadi perubahan kesetimbangan konsentrasi, akan tetapi terjadi transpor partikel antara keduanya sehingga mempercepat terjadinya reaksi yang dapat mencapai hingga pangkat sepuluh.

### 17.3 Statistik Kuantum

#### 17.3.1 Partikel Kuantum

Partikel-partikel kuantum mekanik mempunyai beberapa sifat yang berbeda secara radikal dibanding dengan partikel mekanika klasik. Perbedaan sifat yang penting untuk statistik dinyatakan dalam prinsip Pauli:

*Setiap keadaan mekanika kuantum paling banyak hanya dapat ditempat oleh satu elektron.*

Dalam bahasa mekanika kuantum sesungguhnya keadaan tersebut dapat ditempati oleh dua partikel sekaligus, asalkan keduanya

mempunyai fungsi  $\psi$  yang tidak pernah sama (lihat §12.6.3). Bagi partikel klasik tidak terdapat batasan demikian: dalam suatu keadaan dapat ditempati oleh sejumlah partikel sembarang sekaligus.

Pernyataan yang sangat bertentangan dengan pandangan klasik ini akan lebih jelas jika dipandang dari hukum kekekalan momentum: di dalam gas elektron, meskipun gas terdapat di dalam volume dalam orde  $\text{km}^3$ , tidak akan pernah ada dua elektron yang mempunyai momentum sama secara eksak, walaupun keduanya dipisahkan oleh jarak dalam orde km satu sama lain. Gaya-gaya yang terdapat antar partikel, yang bekerja sedemikian rupa, tidak dapat dibayangkan; prinsip Pauli merupakan petunjuk dasar tentang kegagalan gambaran korpuskel dalam fisika klasik.

Keadaan-keadaan momentum elektron yang terdapat di dalam volume elektron tidak akan pernah sama. Pernyataan ini dapat dibuktikan dari prinsip ketidakpastian Heisenberg (penjelasan lebih rinci lihat § 16.2.2). Jika sejumlah elektron terdapat di dalam wadah berbentuk empat persegi panjang dengan ukuran volume  $a \times b \times c$ , setiap elektron akan mempunyai ketidakpastian koordinat maksimum sebesar  $\Delta x = a$ . Sesuai dengan relasi  $\Delta p_x \Delta x = h$ , maka elektron bersangkutan akan mempunyai ketidakpastian momentum minimum sebesar  $\Delta p_x = h/a$ . Sebuah elektron bebas yang terdapat di dalam wadah tersebut dapat menggunakan seluruh momentum minimum  $\Delta p_x = h/a$ ; dengan demikian  $h/a$  adalah merupakan harga sebenarnya dari ketidakpastian komponen momentum pada sumbu  $x$ . Daerah momentum  $\Delta p_x = h/a$  ini menurut prinsip Pauli adalah terlarang untuk ditempati oleh elektron lainnya. Hal yang sama berlaku pula untuk kedua komponen momentum lainnya  $\Delta p_y = h/b$  dan  $\Delta p_z = h/c$ . Dengan demikian elektron tersebut dapat berada dalam volume ruang momentum sebesar:

$$\Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z = \frac{h^3}{abc} = \frac{h^3}{V}$$

di luar darinya ( $V = abc$  adalah volume gas). Dalam dimensi enam ruang fase keadaan adalah masih sederhana: keadaan-keadaan ini terbagi dalam "sel-sel" yang mempunyai satuan volume tetap sebesar:

$$\Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z V = h^3 \quad (17.57)$$

dan setiap sel hanya dapat ditempati oleh satu elektron. Dalam hal ini terlihat bahwa keadaan elektron di dalam gas tidak mempunyai pengulangan yang berbeda selain momentum. Pernyataan ini sesungguhnya tidak semuanya benar, karena setiap elektron dapat mempunyai keadaan spin yang sama. Karenanya setiap sel fase akan mempunyai dua "puncak elektron" yang paling berlawanan menggambarkan keadaan spin dari kedua elektron tersebut.

"Noktah" alamiah yang terdapat di dalam ruang momentum ini akan semakin halus jika volume ruang momentum semakin besar. Noktah ini ada untuk setiap partikel (setiap noktah menggambarkan tiap elektron dan berlaku sama apakah elektron mengikuti prinsip Pauli atau tidak. Semua partikel yang ada dapat dibedakan dalam dua grup: **Fermion**: mempunyai spin kelipatan bilangan bulat dari  $1/2(1/2, 3/2, \dots)$ ;

contohnya: elektron, proton, neutron, berbagai macam meson dan hiperon, kebanyakan inti yang mempunyai nukleon ganjil ( $\text{He}^3$ ), beberapa atom, sejumlah kecil molekul. Untuk partikel-partikel fermion ini berlaku prinsip Pauli.

**Boson**: mempunyai spin kelipatan bilangan bulat (0, 1, 2, ...); contohnya: foton,  $\pi^0$ -meson, inti-inti dengan jumlah nukleon genap, kebanyakan atom dan molekul. Untuk partikel-partikel ini tidak berlaku prinsip Pauli.

### 17.3.2 Statistik Fermi-Dirac dan Bose-Einstein

Partikel fermion haruslah mengikuti kaedah statistik yang berbeda dibandingkan dengan partikel klasik, karena dasar pengandaian dari perhitungan dalam "kasus" statistik klasik dianggap bahwa di dalam satu keadaan dapat ditempati oleh sejumlah partikel tidak lagi berlaku bagi fermion. Karenanya pula prosedur perhitungan statistik fermion harus diubah. Untuk mempersingkat penurunan statistik ini pandang pemikiran berikut:

Sedemikian banyak sistem mengandung partikel berbagai macam (fermion, boson, atau mungkin juga partikel yang berkelakuan menurut statistik klasik) cenderung berada di dalam ensambel kanonik. Sebagai contoh partikel-partikel tersebut lebih "senang" menempati "kotak-kotak" (sebagai tempat) yang identik dan diisi oleh gas elektron. "Kotak-kotak" tersebut adalah sebagai "bentuk bangun" makroskopik yang tidak lagi mengikuti prinsip Pauli, melainkan menuruti prosedur perhitungan statistik klasik, yaitu fungsi distribusi Boltzmann untuk energi dari kotak-kotak tersebut:

$$N_{\text{kotak}}(E) \sim e^{-E/kT} \quad (17.58)$$

Kemudian pandang dua macam kotak dengan seksama:

1. Kotak-kotak yang di dalamnya terdapat elektron dalam keadaan tertentu. Misalnya jumlah kotak ini adalah  $N_1$ .
2. Kotak-kotak yang didalamnya terdapat persis seperti kotak grup 1, akan tetapi terdapat *satu elektron* yang energinya berada dalam keadaan  $E_{12}$  lebih tinggi dari elektron-elektron lainnya. Misalnya jumlah kotak grup 2 ini adalah  $N_2$ .

Energi total kotak grup 2 adalah sebesar  $E_{12}$  lebih tinggi dibanding dengan grup pertama. Sehingga jumlah kotak mempunyai kelakuan sebagai berikut.

$$\frac{N_{\text{kotak } 1}}{N_{\text{kotak } 2}} = e^{-E_{12}/kT} \quad (17.59)$$

Secara kinetik berarti bahwa probabilitas transisi antara kedua keadaan total sistem gas elektron yang direpresentasikan oleh kedua macam kotak tersebut mempunyai kelakuan seperti

$$\frac{U_{\text{kotak } 12}}{N_{\text{kotak } 21}} = e^{-E_{12}/kT} \quad (17.60)$$

Transisi antara kedua keadaan total secara sederhana diwakili oleh transisi *sebuah* elektron yang mempunyai perbedaan seperti disebutkan di atas. Probabilitas transisi untuk kotak-kotak tersebut dalam kenyataan adalah tidak lain sama dengan probabilitas transisi elektron.

Untuk semua partikel umumnya berlaku sama, bagaimana pun macam partikel (fermion, boson, dan partikel klasik), sehingga probabilitas transisi antara dua keadaan dengan masing-masing keadaan menempati energi  $E_1$  dan  $E_2$  adalah

$$\frac{U_{\text{kotak } 12}}{N_{\text{kotak } 21}} = e^{(E_1 - E_2)/kT} \quad (17.61)$$

Cukup diketahui hal ini untuk menentukan distribusi energi yang muncul pada distribusi Boltzmann untuk fermion dan boson.

Setiap keadaan elektron dalam sistem makroskopik umumnya sangat bervariasi dan tidak sepenuhnya identik (lihat penjelasan di atas), akan tetapi terdapat kemiripan. Dalam gas yang terdiri atas molekul misalnya praktis berhubungan dengan kaidah-kaidah yang sama dengan keadaan elektron. Bahkan pada elektron-elektron bebas dapat dibayangkan adanya keadaan momentum atau energi yang sama, akan tetapi mempunyai arah momentum berbeda. Misalnya jumlah keadaan dengan energi  $E_i$  adalah  $N_i$ . Pada  $N_i$  keadaan terdapat  $n_i$  keadaan yang diisi oleh elektron. Dalam hal ini keadaan spin keduanya diperhitungkan secara ganda untuk setiap keadaan tertentu; hal ini adalah penting karena energi bergantung pada spin dan tentunya dapat dikatakan secara umum bahwa setiap keadaan hanya dapat ditempati oleh sebuah elektron. Untuk elektron-elektron yang ingin berada pada keadaan  $i$  hanya tersedia tempat sebanyak  $N_i - n_i$ .  $n_k$  elektron yang menempati keadaan  $k$  setiap saat akan mengalami transisi ke keadaan  $i$ :

$$U_{ki} \quad n_k \quad (N_i - n_i)$$

Laju transisi sebaliknya adalah

$$U_{ik} = n_i (N_k - n_k) = U_{ki} e^{(E_i - E_k)/kT} n_i (N_k - n_k)$$

Dalam keadaan kesetimbangan kedua laju transisi haruslah mempunyai harga yang sama:

$$U_{ki} n_k (N_i - n_i) = U_{ik} n_i (N_k - n_k)$$

$$= U_{ki} e^{(E_i - E_k)/kT} n_i (N_k - n_k)$$

atau dengan menjumlahkan besaran berindeks sama:

$$\frac{n_i}{N_i - n_i} e^{E_i/kT} = \frac{n_k}{N_k - n_k} e^{E_k/kT} \quad (17.63)$$

Jika persamaan ini berlaku untuk pemilihan pasangan  $k$ , maka suku ruas kiri tidak akan bergantung pada pemilihan keadaan dengan perkataan lain suku kiri merupakan konstanta:

$$\frac{n_i}{N_i - n_i} e^{E_i/kT} = C$$

atau

$$n_i = \frac{N_i}{C^{-1} e^{E_i/kT} + 1} \quad (17.64)$$

Pers. [17.64] merupakan distribusi Fermi untuk elektron di atas energi  $E_i$ . Persamaan ini berlaku untuk semua fermion, yaitu partikel berspin kelipatan setengah.

Fungsi  $n_i(E_i)$  mempunyai bentuk sebagai berikut: untuk harga  $E_i$  yang sangat kecil  $e^{C^{-1} e^{E_i/kT}} \ll 1$ , semua keadaan-keadaan praktis terisi:

$$\text{Rumus } E_i \ll kT \ln C \implies n_i \approx N_i.$$

$$e^{C^{-1} e^{E_i/kT}} \gg 1 \text{ maka } n_i \ll N_i.$$

Untuk harga  $E_i$  yang besar Rumus berarti pula bahwa jumlah keadaan yang ada tidak terisi penuh. Dalam kasus seperti ini dan hanya untuk ini, distribusi akan sama dengan distribusi Boltzmann:

$$E_i \gg kT \ln C \implies n_i \approx N_i C e^{-E_i/kT} \ll N_i$$

Batas antara keadaan yang terisi <sup>1)</sup> dan tidak terisi terletak pada  $E_i = kT \ln C$ ; untuk hal ini  $n_i = N_i/2$ . Jika energi batas ini disebut sebagai energi Fermi,

$$F = kT \ln C, \quad (17.65)$$

maka distribusi keadaan energi partikel dapat ditulis dalam bentuk:

$$n_i = \frac{n_i}{e^{(E_i - F)/kT} + 1} \quad (17.66)$$

Di sekitar batas energi Fermi fungsi  $n_i/N_i$  (okupasi relatif) paling tajam. Jika energi bertambah dari  $F$  ke  $F + kT$ , penyebut akan bertambah dari 2 menjadi  $e + 1 = 3,72$ , atau fungsi berkurang hampir setengahnya. Di daerah yang jauh dari energi Fermi suatu perubahan energi sebesar  $kT$  tidak lagi berpengaruh banyak. Selanjutnya fungsi  $n_i/N_i = (1/e^{(E_i - F)/kT} + 1)$  akan simetri terhadap titik tengah okupasi pada batas energi Fermi:

$$\frac{n_i}{N_i} (F + \varepsilon) = \frac{1}{e^{\varepsilon/kT} + 1} = \frac{n_i - N_i}{N_i} (F + \varepsilon)$$

Pada keadaan temperatur rendah okupasi relatif menjadi sangat tajam, khususnya pada batas energi Fermi  $F$ . Pada  $T = 0$   $F$  merupakan batas sangat tajam antara keadaan okupasi dan tidak. Elektron dalam hal ini akan membentuk "balok es Fermi." Pada temperatur tinggi balok es ini akan meleleh dan akan mengalirkan "lidah tipis" dalam daerah di atas batas energi Fermi.

Posisi batas energi Fermi ditentukan melalui jumlah keadaan yang tersedia untuk setiap energi dan jumlah total elektron yang dapat memasuki keadaan-keadaan tersebut. Pada  $T = 0$  keadaan bagian bawah akan terisi penuh, hingga semua elektron mengisi semua keadaan. Energi yang dicapai selanjutnya adalah batas energi Fermi.

Partikel yang mempunyai spin kelipatan bilangan bulat (partikel boson) mengikuti aturan distribusi statistik Bose-Einstein. Untuk partikel boson tidak berlaku prinsip Pauli. Sebaliknya partikel boson ini menunjukkan sifat yang berlawanan dibanding fermion: Di mana terdapat partikel, maka partikel-partikel lain cenderung akan mendekati partikel pertama. Jika  $N_k$  adalah jumlah keadaan yang belum terisi (terokupasi) diberikan  $N_k$  partikel, maka suatu keadaan

1) Keadaan terisi biasanya disebut juga dengan istilah keadaan okupasi.

yang telah terisi  $n_k$  partikel tidak akan mengalami penurunan, melainkan bahkan meningkat sebanyak  $n_k + N + k$ . Sehingga laju transisi dari  $i$  ke  $k$  menjadi:

$$U_{ik} n_k (N_k + n_k)$$

Perhitungan distribusi energi untuk keadaan kesetimbangan persis seperti penurunan fungsi statistik Fermi-Dirac; tanda - pada penyebut untuk fungsi Fermi-Dirac berubah menjadi +, sehingga fungsi Bose-Einstein dapat ditulis dalam bentuk:

$$n_i = \frac{N_i}{C^{-1} e^{E_i/kT} - 1} \quad (17.67)$$

### 17.3.3 Gas Fermi

Distribusi Fermi-Dirac mempunyai peran penting dalam Fisika zat padat, Fisika Plasma dan Astrofisika. Elektron-elektron yang terdapat di kulit terluar di dalam atom logam, yang relatif lebih bebas bergerak di dalam medan lemah yang disebabkan oleh inti dan elektron yang menempati "konfigurasi gas mulia", elektron dan ion yang terdapat di dalam plasma dengan kerapatan tinggi adalah menurut kaedah statistik Fermi-Dirac.

Terdapat pula hal, di mana kelakuan fermion praktis dapat dijelaskan dengan menggunakan fungsi distribusi Boltzmann. Hal tersebut dapat terlihat dengan jelas dari gbr. [17.8]. Jika batas energi Fermi  $F < kT$ , maka distribusi Fermi hanya memperlihatkan distribusi energi yang membentuk kurva sedikit mendatar dan hanya berlaku pada daerah di bawah harga  $F$ . Pada  $F > kT$  sebaliknya, kelakuan distribusi adalah mengikuti kaedah distribusi Fermi. Oleh sebab itu temperatur:

$$T_{\text{deg}} = \frac{F}{k} \quad (17.68)$$

disebut sebagai *temperatur degenerasi* dari sistem, yang memformulasikan kondisi sebagai berikut:

dapat terjadi jika harga  $B$  yang terdapat adalah sangat besar. Pada harga  $B$  yang tidak terlalu besar, harga  $B$  haruslah negatif dan karakter yang sempit lebih diutamakan. Disubstitusikan harga  $-\beta = \beta'$  dan pers. [17.22] ditulis kembali menjadi

$$n_i = \frac{N}{Z} p_i e^{-\beta' b_i} \quad (17.22a)$$

### 17.1.6 Contoh: Osilator Harmonik

Keutamaan karakter huruf yang sempit dapat berlangsung jauh. Jika karakter simbol yang terdapat di dalam karung disederhanakan menjadi hanya terdiri atas huruf-huruf I, L, E, dan M dengan lebar masing-asng 1, 2, 3 dan 4 satuan panjang, dan semuanya dianggap mempunyai kekerapan muncul yang sama, yaitu  $p$ . Selain itu terdapat pula spasi dengan lebar yang berbeda-beda menurut kelipatan bilangan menurut kelipatan bilangan bulat 5 satuan panjang dan tanpa batas ke atas (misalnya seperti lebarnya garis pembentuk huruf yang secara tanpa disengaja terputus). Spasi dalam hal ini juga dianggap mempunyai kekerapan muncul yang sama, misalnya  $p$  (dianggap tidak dilakukan pemisahan fragmen atau potongan-potongan garis pembentuk huruf).

Dalam kasus khusus ini jumlah keadaan secara sederhana dapat dirumuskan dalam deret geometris biasa

$$\begin{aligned} Z &= p \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\beta' b_i} = p \sum_{i=1}^{\infty} \left( e^{-\beta' b_i} \right)^i \\ &= \frac{p e^{-\beta' b}}{1 - e^{-\beta' b}} \end{aligned} \quad (17.25)$$

(misalnya  $\beta$  adalah satuan panjang dari lebar karakter). Dari pers. [17.24] diketahui atau dapat pula dilakukan penjumlahan secara langsung, hubungan antara  $\beta$  dan modul distribusi  $\beta'$

$$\begin{aligned}
 B &= N \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta'} = \frac{Nb}{e^{\beta' b} - 1} \\
 &= \frac{Nb}{1 - e^{-\beta' b}}
 \end{aligned} \tag{17.26}$$

Adalah jelas, bahwa  $B$  paling tidak sama dengan  $Nb$  ( $N$  adalah jumlah total karakter,  $\beta$  adalah satuan lebar karakter), karena selain itu tidak akan terdapat karakter huruf. Hal yang menarik adalah kelebihan lebar yang ada adalah

$$\begin{aligned}
 B' &= B - Nb = Nb = \frac{1}{e^{\beta' b} - 1} \\
 &= B e^{-\beta' b}
 \end{aligned}$$

Distribusi Boltzmann pada pers. [17.22a] dalam kasus ini dapat diubah dalam bentuk

$$n_i = N \frac{Nb}{B'} \left( \frac{B'}{B} \right)^i \tag{17.22b}$$

Pada  $B = Nb$  kalimat atau susunan karakter huruf yang dibolehkan adalah: IIIIIIIIIIIIIIIII.

Untuk  $\beta = 1,4 Nb$  kalimat atau susunan karakter huruf yang dibolehkan terlihat seperti IIIILIIILILIIIEIILIII.

Pada  $\beta = 3 Nb$  akan menjadi: EIMLI LILIME LEI IM.

Pada  $B \gg Nb$  praktis susunan karakter tidak ada (kosong), karena berbagai spasi lebih sering muncul.

Contoh ini akan dibahas lagi nantinya sebagai osilator harmonik, yaitu sebagai osilator mekanika kuantum yang pada  $B \gg Nb$  akan menjadi osolator klasik. Pers. [17.26] sesungguhnya merupakan hukum radiasi Plank.  $Nb$  tidak lain analog dengan energi keadaan dasar.

terhadap temperatur, walaupun ketergantungan tersebut sangat kecil).

Energi total sistem gas elektron yang mengandung  $N$  partikel akan menurun sebanding dengan  $V^{2/3}$ . Jika suku yang mengandung parameter ruang volume fase menurun, maka suku yang mengandung momentum haruslah meningkat dan "bola" Fermi akan mengambang: dari  $p_F \approx V^{1/3}$  diketahui bahwa  $E \approx F \approx V^{2/3}$ . Pertambahan energi ini haruslah tidak akan terjadi ada peristiwa kompresi, karena energi tidak bergantung pada temperatur; karenanya energi hanya diberikan pada gas sebagai kerja mekanis. Karena  $dE = -PdV$ , maka gas Fermi haruslah mempunyai tekanan sebesar

$$P = -\frac{\partial E}{\partial V} = 0,021 \left( \frac{N^{5/3} \hbar^2}{m} V^{-5/3} \right) \quad (17.73)$$

Tekanan ini umumnya merupakan tekanan terbesar yang dapat dikerjakan oleh elektron. Tekanan yang lebih kecil hanya dapat menyebabkan terjadinya perubahan struktur elektron yang terdapat di kulit atom; dari tekanan Fermi sehingga menyebabkan elektron-elektron yang terdapat di kulit atom akan menjadi suatu campuran gas Fermi yang kemudian hanya dapat bereaksi jika diberikan kenaikan tekanan selanjutnya melalui kontraksi  $V \sim P^{3/5}$ . Kondisi ini berlaku untuk materi "dingin"; energi kebanyakan tersimpan dalam bentuk energi panas atom-atom, berarti bahwa  $T > T^{\text{deg}}$ , kemudian timbul tekanan akibat adanya "tumbukan termis" seperti pada gas umumnya.

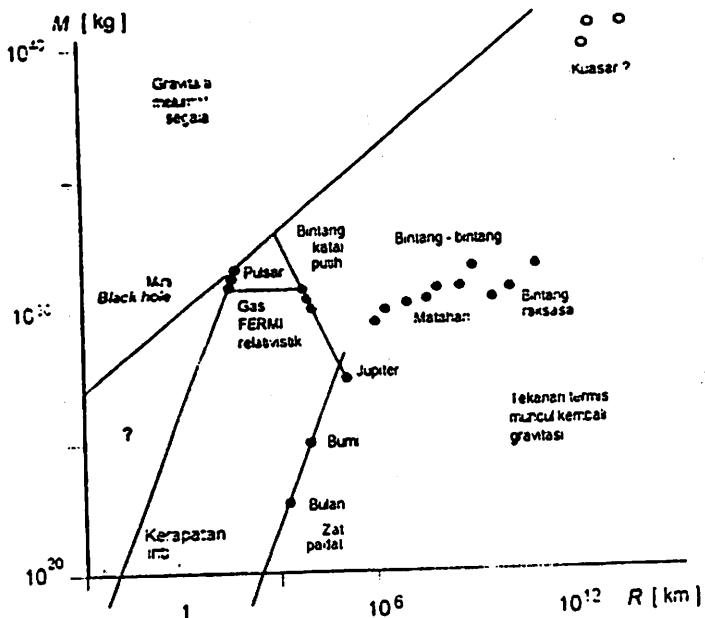
Materi dengan persamaan keadaan  $P \sim V^{-5/3}$  mempunyai kelakuan unik. Di dalam planet-planet berukuran raksasa tekanan gravitasi mencapai harga tersebut; di dalamnya atom-atom mulai melumat. Untuk memperbesar planet tersebut harus ditambahkan massa dari luar. Maka tekanan gravitasi yang terdapat di dalam planet tersebut akan membesar, menyebabkan inti planet mengkerut; semakin cepat pengkerutan intinya, menyebabkan planet bukan bertambah besar, bahkan akan bertambah kecil. Suatu pengamatan sederhana, yaitu pengamatan dimensi planet menunjukkan bahwa dalam kondisi demikian jari-jari dan massa benda-benda langit tersebut saling bergantung satu sama lain sesuai dengan  $R \sim M^{-3}$ . Tekanan gravitasi

adalah  $P^{\text{grav}} \approx GMp/R \approx Gn^2 R^2$ , sedangkan untuk menyamai tekanan Fermi  $P_F \approx n^{-5/3}$  masih diperlukan  $R^{-1/6}$ , maka  $M \sim nR^3 \sim R^{-3}$ . Perhitungan angka-angka dari rumusan ini menunjukkan bahwa Jupiter paling tidak merupakan materi dingin terbesar yang pernah ada. Bintang-bintang yang energi termonuklirnya praktis terpancarkan akan mengalami pengkerutan ukuran hingga tekanan Fermi-bintang yang bersangkutan mencapai tekanan gravitasi. Bintang "katai putih" demikian dibandingkan dengan massa matahari, sesuai dengan  $R \approx M^{-1/3}$  lebih kurang hanya seukuran bumi, dengan kerapatan massa mencapai  $10^5 \text{ g cm}^{-3}$  atau lebih. Karena permukaannya yang kecil, temperatur permukaan yang tinggi dan energi kontraksi gravitasi pada bintang demikian dapat bertahan sekian lama. Energi gravitasi  $GM^2/R$ , karena harga  $R$  yang kecil akan menjadi 100 kali lebih besar dari energi gravitasi semula, sedangkan pancaran cahayanya, sesuai dengan rumus  $R^2$  menjadi 10,000 kali lebih lemah, sehingga panas kontraksi yang dapat dipertahankannya tidak lagi mencapai  $10^7$  tahun, seperti halnya terjadi pada matahari, melainkan hampir  $10^{13}$  tahun, atau  $10^6$  lebih lama dibanding matahari, yaitu jika kontraksi terkontrol dengan baik.

Keadaan demikian untuk massa yang sangat besar tidak akan terjadi. Jika seandainya energi Fermi melebihi harga energi diam sebuah elektron  $m_ec^2 \approx 0,5 \text{ MeV}$ , maka gas akan mengalami *degenerasi relativistik*. Maka rumusan yang telah dibicarakan di atas, hingga pers. [17.69] akan berlaku, akan tetapi harga  $F = \mu_F^2/2m$  muncul  $F \approx n^{1/3}h$ .

Dengan demikian tekanan menjadi  $P \approx n^{4/3}$ . Untuk tekanan gravitasi yang dominan adalah nukleon dan partikel-partikel ini belum mencapai kondisi relativistik. Rumusan demikian mempunyai hubungan "normal" dan sama besar. Untuk gas Fermi non-relativistik tekanan  $P \approx R^{-3}$  bertambah pada peristiwa pengkerutan dengan cepat berubah menjadi  $P_{\text{grav}} \approx R^{-4}$ , berarti bahwa terdapat harga  $R$  tertentu untuk keadaan stabil. Kesetimbangan gas relativistik adalah indiferen: Suatu ekspansi perlahan-lahan tanpa disengaja karena kelembabannya menyebabkan terjadi ledakan, sedangkan suatu kontraksi menye-

babkan ambruk. Kejadian tersebut akan berakhir jika terdapat suatu gaya lain sebagai untuk menstabilkan keadaan, yaitu gaya yang



Gambar 17.9: Keadaan-keadaan yang berbeda dari materi dalam diagram  $M(R)$ .

disebabkan oleh tumbukan antar nukleon: dalam hal ini materi mengalami kompresi hingga mencapai kerapatan inti  $10^{14} \text{ g cm}^{-3}$ . Karenanya bintang hanya mempunyai jari-jari sekitar 10 km. Contoh kejadian ini dapat dilihat pada *pulsar* (soal 17.3.1 dan 17.3.3). Batas antara gas Fermi relativistik dan non-relativistik terletak pada  $p_F = m_ec^2$ , atau pada  $n \approx (m_ec/h)^3 \approx 10^6 \text{ g cm}^{-3}$ , sesuai dengan  $M \approx 1,4$  kali massa matahari (*batas Chandrasekhar*).

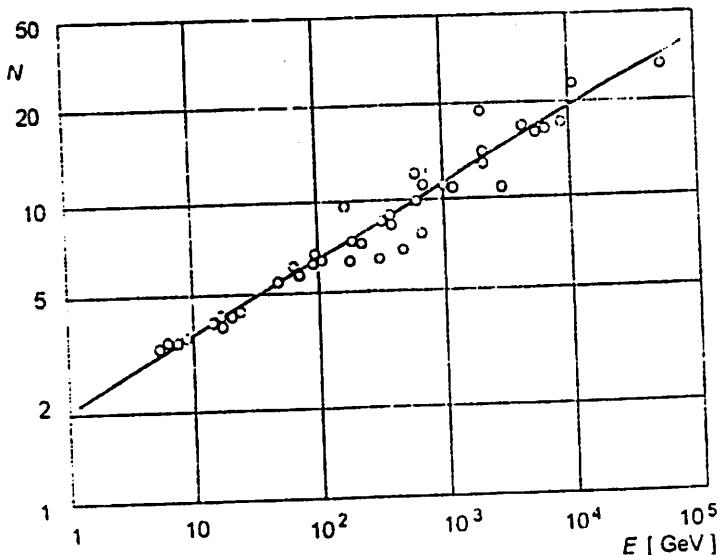
Syarat "robohnya" bintang katai putih adalah jika energi gravitasi suatu partikel  $\approx$  energi diam elektron. Dari perbedaan massa elektron-proton (faktor ini pada perhitungan lebih teliti masih mengandung kelemahan) juga merupakan syarat untuk pembentukan lubang hitam (*black hole*): energi gravitasi rata-rata  $\approx$  energi diam sebuah proton. Di daerah lebih besar dari batas Chandrasekhar kontraksi tidak akan

menyebabkan kerapatan inti dapat bertahan: nukleon sendiri akan ambruk dan bintang tua ini akan lenyap dari "dunia" kita dan menjadi lubang hitam.

#### 17.3.4 Peristiwa Tumbukan pada Energi Tinggi

Pokok perhatian utama fisika energi tinggi yang membahas peristiwa pancaran sinar kosmik dan membuat perlakuan dengan menggunakan pemercepat partikel berenergi tinggi adalah: Jika sebuah partikel mempunyai energi tinggi (sangat besar dari ukuran energi diamnya, umumnya jauh besar dari 1 GeV) menumbuk partikel bermuatan lain, maka setelah tumbukan partikel yang ditumbuk tersebut tidak akan dikenal lagi, karena telah "berubah" menjadi partikel lain (kebanyakan partikel yang terbentuk adalah pion). Gbr. [13.57] menunjukkan peristiwa tumbukan partikel berenergi tinggi, yaitu proton kosmik dengan inti diam. Gambaran yang sama juga diperoleh dari pemercepat partikel yang sangat besar seperti terdapat di Cern (di kota Genf, Swiss) atau Stanford (Amerika Serikat). Partikel-partikel yang "berterbangan" setelah peristiwa tumbukan sama sekali tidak berhubungan dengan partikel sebelumnya; jumlah partikel yang terbentuk  $N$  adalah hanya bergantung pada energi  $E$  partikel yang digunakan untuk proses tumbukan ( $E$  diukur dalam sistem koordinat laboratorium, dengan menganggap bahwa partikel yang ditumbuk olehnya berada dalam keadaan diam, yang pada kenyataannya di dalam pemercepatan partikel tidak terjadi). Ketergantungan  $N \sim E^{1/4}$  berhasil dengan baik menjelaskan sejumlah besar multiplisitas  $N$  dari energi  $E$  yang terjadi di berbagai "bintang" (lihat gbr. [17.10]).

Hubungan ini merupakan salah satu kegunaan statistika kuantum dan teori relativitas. Idea dasarnya berasal dari Fermi (1950), kemudian dikembangkan lebih lanjut oleh Landau dalam hubungannya dengan hidrodinamika, pernah dilupakan beberapa lama akan tetapi pada saat ini merupakan *interest* para spesialis dibidang ini.



Gambar 17.10: Jumlah  $N$  partikel sekunder bermuatan yang muncul pada tumbukan proton-proton sebagai fungsi dari energi  $E$  proton yang menumbuk dalam sistem koordinat laboratorium (proton lainnya dianggap diam; perhitungan dilakukan dalam eksperimen). Pengukuran pada pemercepat partikel lainnya, untuk proton kosmik, juga dilakukan misalnya oleh Carruther. Kurva garis lurus dari log-log ini menggambarkan ketergantungan  $N$  terhadap  $E^{1/4}$  berdasarkan teori Fermi dan Landau.

Peristiwa tumbukan materi berenergi tinggi dapat dianggap seolah seperti sebuah tetesan "materi asal" atau "energi asal" tanpa struktur yang mengalami pelelehan dan kemudian berdasarkan prinsip fisika statistik "terpecah" menjadi materi yang berbeda sama sekali. Apakah partikel-partikel tersebut mengikuti kaedah statistik distribusi Fermi-Dirac atau Bose-Einstein (atau untuk kasus lebih sederhana bahkan mengikuti distribusi Maxwell-Boltzmann), hanya peran faktor konstanta kesebandingan yang akan dijelaskan di bawah ini.

Pada semua kasus distribusi energi adalah sebanding dengan  $e^{-E/kT}$ , yaitu  $f(e^{-E/kT})$ . Di dalam ruang interval energi ( $E, E + dE$ ) yang mengisi volume sebesar  $4\pi p^2 V dp$  akan terdapat "tempat" yang menyatakan keadaan sebanyak  $4\pi p^2 V dp h^{-3} f(e^{-E/kT})$ .  $V$  adalah volume

tetesan materi asal. Di dalam interval energi ini terdapat  $4\pi p^2 V dp h^{-3} f(e^{-E/kT})$ .  $V$  partikel. Pada energi tinggi harga  $E = pc$ . Maka jumlah partikel yang terdapat di dalam tetesan adalah sebanyak

$$N = \int_0^{\infty} 4\pi p^2 V h^{-3} dp f(e^{-E/kT}), \quad (17.74)$$

dan energi total yang dihitung dari sistem koordinat titik pusat massa tetesan adalah

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{\infty} 4\pi p^2 V h^{-3} dp E f(e^{-E/kT}) \\ &= \int_0^{\infty} 4\pi p^3 V h^{-3} dp c f(e^{-pc/kT}) \end{aligned} \quad (17.75)$$

Untuk menyelesaikan persamaan integral di atas, substitusikan variabel  $x = pc/kT$ , sehingga didapat:

$$N = 4\pi V k^3 T^3 c^{-3} h^{-3} \int_0^{\infty} x^2 f(e^{-x}) dx \quad (17.76)$$

dan

$$W = 4\pi V k^4 T^4 c^{-3} h^{-3} \int_0^{\infty} x^3 f(e^{-x}) dx, \quad (17.77)$$

Integral tertentu akan menghasilkan angka yang harganya tidak jauh dari 1. Satu-satunya variabel adalah  $V$  dan  $T$ . Pers. [17.77] tidak lain adalah hukum Stefan-Boltzmann (dalam hal ini benda hitam dapat dianggap mengandung sekumpulan materi asal, yaitu sejumlah partikel, misalnya proton yang membentuk materi yang tidak konstan, melainkan akan "diatur" menurut hukum-hukum statistik).

Volume  $V$  dari tetesan materi asal mengandung partikel sedemikian yang mengisi volume  $V_0$  dengan jari-jari sesuai dengan panjang gelombang Compton dari proton  $r = h/mc$  (atau jari-jari klasik elektron adalah sama dengan  $r' = \text{Rumus}$ ), dengan perkataan lain jari-jarinya berkisar dalam orde  $r \approx 10^{15}$  m. Dalam peristiwa tumbukan sesaat, jika diamati dari sistem koordinat titik pusat massa, kedua partikel yang

saling berlawanan tersebut mengalami kontraksi Lorentz atau ukuran panjangnya, dengan demikian juga volumenya hanya

$$V = V_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

Faktor dalam tanda akar juga muncul pada energi  $W$ :

$$W = 2m c^2 = \frac{2m c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Atau dapat pula ditulis dalam bentuk:

$$V = \frac{V_0 2m_0 c^2}{W} \quad (17.78)$$

Dengan demikian, dari pers. [17.76] dan [17.77]  $N \propto T^3/W$  dan  $W \propto T^4/W$  atau  $T \propto W^{1/2}$  dan  $N \propto T \propto W^{1/2}$  atau jika dinyatakan dalam angka dengan anggap  $r = h/mc$ :

$$N = \left( \frac{16\pi^2}{3} \right)^{1/4} \left( \frac{W}{m_0 c^2} \right)^{1/2} \quad (17.79)$$

$W$  hanya dapat diukur melalui penyimpan energi pada penggunaan energi nominal dari pemercepat partikel: Sistem koordinat titik massa dan laboratorium menjadi identik. Untuk partikel-partikel kosmik dan pemercepat partikel lainnya energi  $W$  dalam sistem koordinat titik pusat massa umumnya mempunyai harga  $E$  jauh lebih kecil dibanding dengan sistem koordinat laboratorium, yaitu  $W = \sqrt{2m_0 c^2 E + 2m_0^2 c^4}$  atau pada energi yang sangat tinggi  $W = \sqrt{2m_0 c^2 E}$ . Dengan demikian, maka diperoleh multiplisitas bintang yang bergantung pada  $E^{1/4}$  sebagai berikut:

$$N = \left( \frac{32\pi^2}{3} \right)^{1/4} \left( \frac{W}{m_0 c^2} \right)^{1/4} \quad (17.80)$$

Dengan mensubstitusikan semua angka-angka didapat bahwa  $N \propto 3E^{1/4}$  ( $E$  dan GeV). Melalui eksperimen terbaik hanya diperoleh  $N = 2,05E^{1/4}$ .

Energi rata-rata yang terkandung di dalam masing-masing  $N$  partikel, dalam sistem koordinat titik pusat massa hanya bergantung pada  $N/W^{1/2} \approx W^{1/2}$ .

### Soal-soal § 17.1

Deretan soal-soal di bawah ini memerlukan pengertian (istilah) dasar tentang teori informasi. Nantinya pengertian-pengertian ini secara formal dapat dimengerti identik dengan istilah-istilah yang terdapat di dalam Fisika Statistik. Pengertian penting yang memegang peran utama dalam kedua bidang ini adalah entropi. Cukup "mengagetkan" memang bahwa istilah yang pertama kali ditemukan para fisikawan ini dalam teori informasi dapat dijelaskan lebih sederhana.

17.1.1. Dalam permainan teka-teki "abstrak-konkrit" yang dise-nangi, sebuah objek harus diidentifikasi melalui sederetan pertanyaan (jawab dengan ya dan tidak). Karenanya yang menarik perhatian adalah menentukan sebuah angka, katakanlah angka tiga desimal. Metode apa yang Anda sarankan untuk itu? Berapa pertanyaan yang Anda perlukan? Bagaimana Anda harus mengubah Prosedur permainan, jika dalam permainan menyangkut hal yang berhubungan dengan angka-angka tahun bersejarah? Setiap pemain harus menebak pemain lainnya. Mulailah permainkan dengan mengoperasikan sebuah istilah dan pertanyaan dapat dimulai dengan menebak huruf yang terdapat dalam kata istilah yang bersangkutan. Bagaimana cara untuk memperoleh permainan yang baik? Huruf yang mana kebanyakan ditransfer informasi? Pertanyaan "cerdik" berhubungan dengan objek yang rumit misalnya: "sebuah lubang sumbat di dalam tong *diogene*" dengan 50 hingga 70 pertanyaan. Apa yang dapat Anda simpulkan?

17.1.2. Plat kendaraan di Jerman paling banyak mengandung tiga huruf yang menyimbolkan nama kota atau kampung (desa). Apakah Anda setuju bahwa huruf "E" jarang sekali muncul? Mengapa? Dapatkah sistem diperbaiki, dengan batasan tertentu bahwa polisi juga manusia?

**17.1.3.** Tunjukkan bahwa semua hasil yang diperoleh hingga kini, khusus dari penggunaan definisi berikut: Jika sederetan simbol mempunyai probabilitas  $P$ , secara kebetulan diperoleh dari simbol-simbol yang ada, maka deretan simbol mengandung suatu informasi  $I = \text{Id } P$ . Dengan  $\text{Id}$  adalah logaritma basis 2. Satuan informasi adalah 1 bit, yang berhubungan dengan rumusan jawaban optimal yang menentukan. Apakah informasi suatu berita, yang didefinisikan sedemikian, bergantung pada deret atau komposisinya? Berapa probabilitas huruf yang paling kerap muncul  $p_i$  yang harus dikandung sumber, sehingga akan terdapat banyak informasi yang "diemisikan"? Berapa? Berapa besar deviasi dari harga optimalnya jika  $p_i$  sumber diketahui?

**17.1.4.** Tentukan probabilitas dari huruf yang paling kerap muncul dalam suatu teks (artikel) cukup panjang yang berbahasa Indonesia atau bahasa lainnya! Amatilah bagaimana distribusi terhadap "sebenarnya" mengalami konvergensi, khususnya jika teks terlalu panjang. Jika Anda mengerti komputer, Anda dapat merumuskan persoalan ini dalam bahasa Fortran, Basic, Pascal atau dalam 4-6 langkah bahasa mesin (assembler). Hasilnya berguna untuk menyadap kode rahasia. Berapa besar, dengan dasar  $p_i$  sebenarnya, dapat diperoleh probabilitas dan informasi dalam "TO BE OR NOT TO BE" atau buku "Hamlet" seluruhnya? Bagaimana probabilitas paling mungkin dari teks dengan panjang yang sama? Berapa banyak informasi yang terkandung di dalamnya?

**17.1.5.** Mengapa simbol Morse untuk  $E$  dan  $T$  hanya mempunyai satu simbol dan mengapa  $X$  mempunyai empat simbol? Berapa banyak informasi yang terkandung di dalam kode huruf Morse? Apakah Morse benar-benar "menghargai" terhadap  $p_i$  dari bahasa Inggris? Berapa jumlah informasi telah "dihadiahkan" olehnya?

**17.1.6.** Sebuah kamus Jerman mengandung 100.000 kata dan tiap kata rata-rata terdiri atas 10 huruf. Jika Anda tidak percaya dengan data yang diberikan di atas, pastikanlah sendiri. Berapa jumlah informasi yang dihadiahkan bahasa Jerman, karena tidak menggunakan seluruh kombinasi huruf yang tidak mempunyai arti? Bagaimana bentuk

sebuah kamus teknik informasi yang ideal, akan tetapi tidak tersusun dengan bahasa yang baik secara fonetik dan mnemonik? Berapa kandungan rata-rata huruf untuk satu kata yang terdapat di dalam kamus ini menurut perkiraan Anda? *Redundan* adalah "hadih" kapasitas informasi, yaitu sebagai perbedaan antara informasi yang dapat ditransfer dan transfer informasi yang nyata; biasanya dinyatakan dalam %. Ramalkan redundan yang terdapat di dalam bahasa Jerman (dalam basis huruf). Apakah redundan selalu merupakan kelemahan?

17.1.7. Sebagian redundan suatu bahasa berasal dari ketidaksamaan huruf yang kerap dijumpai. Berapa jumlahnya dalam bahasa Jerman? Darimana asal sisanya? Jika setelah huruf  $S$  selalu dijumpai huruf  $T$  atau  $C$  dan tidak pernah huruf  $X$ , apakah hal ini berarti sebagai redundan? Misalnya  $q_{ik}$  adalah probabilitas setelah huruf ke  $i$  terdapat huruf ke  $k$ . Suatu berita yang hanya dikarakteristikkan oleh  $p_i$  dan  $q_{ik}$  disebut rantai Markov dari ingatan pertama. Tanpa hubungan antar simbol tetangganya, seperti diandaikan pada § 17.1, maka hal ini berhubungan dengan rantai Markov ingatan ke nol. Berikan contoh lain rantai Markov! Apakah panjang ingatan mempunyai peran penting di dalam bahasa dan dimana saja?

17.1.8. Tunjukkan bahwa kekerapan simbol  $p_i$  yang terdapat di dalam rantai Markov ingatan pertama menurun terhadap batas distribusi yang diberikan melalui probabilitas transisi  $q_{ik}$  dan jika panjang rantai mendekati tak berhingga! Distribusi asimtotik  $p_i$  ini merupakan vektor eigen dari matriks  $q_{ik}$ . Bagaimana harga eigen yang dipunyai vektor eigen ini? Kepastian apa yang dapat diperoleh, bahwa berdasarkan sifat alamiah persoalan selalu terdapat vektor eigen dan harga eigen? Buktikan pula bahwa berapa jauh persoalan dapat disederhanakan dengan menggunakan perhitungan matriks secara langsung, bahkan misalnya hanya untuk dua huruf!

17.1.9. Nyatakan probabilitas deret dari suatu berita yang diasumsikan sebagai rantai Markov ingatan pertama dalam  $p_i$  dan  $q_{ik}$  sebagai sumber. Petunjuk: Jika  $p_i$  umumnya muncul, maka berdasarkan soal

17.1.8 hanya singkatan untuk kombinasi tertentu dari  $q_{ik}$ . Ramalkan "redundan orde pertama" bahasa Jerman untuk harga  $q_{ik}$  dengan menggunakan contoh yang sesuai dengan kondisi di atas (atau dengan menghitung jumlah pasangan yang kerap muncul, gunakan komputer sejauh panjang huruf masih dapat dicapai).

17.1.10. Dalam kebanyakan teknik informasi kanal "berita" suatu gelombang dimodulasi. Mengapa untuk itu diperlukan suatu lebar pita (lebar frekuensi yang diperbolehkan), walaupun misalnya tidak diperlukan untuk musik? Misalnya berita diberi kode dengan dua angka: 0 dan 1, yaitu berhubungan dengan keadaan tidak dan adanya arus dalam satu satuan waktu tertentu. Jika satuan waktu ini adalah  $r$ , berapa lebar pita paling tidak yang diperbolehkan lewat pada kanal (lihat teori lebar pita)? Berapa besar kapasitas transfer (dalam bit/det), jika lebar pita pada kanal sebesar  $\Delta v$ ? Bagaimana perubahan posisi jika sejumlah simbol biner tertumpu pada satu huruf, atau jika sejumlah tingkat amplitudo harus dapat dipisahkan?

17.1.11. Ramalkan kapasitas transfer informasi dari syaraf manusia dan kapasitas kerja otak pada saat membaca, mendengar, berbicara, mengingat suatu rantai huruf atau simbol lainnya tanpa makna (mengapa rantai tanpa makna?). Berapa transfer bit per waktu yang terjadi dari hal-hal di atas? Berapa jumlah informasi yang terdapat pada gambar televisi (hitam-putih atau berwarna)? Berapa jumlah informasi yang ditangkap oleh mata seumur hidup Anda? Dapatkah informasi tersebut diberikan lebih lanjut? Bandingkan dengan harga yang ditemukan sebelumnya. Berikan kesimpulan!

17.1.12. Seorang pesulap Amerika mempersilahkan seorang penonton mendekat kepadanya, dari permainan *bridge* (jumlah kartu 52) dipilih lima kartu. Salah satu darinya adalah "kartu tebakan", telah dibuat sedemikian, mempunyai dua "muka" dan empat kartu lainnya disimpan oleh pesulap di dalam sebuah amplop. Seorang penonton lain yang tidak mengetahui kartu sebelumnya, membawa amplop tersebut ke istri sang pesulap yang sebelumnya berada di kamar hotel, sehingga tidak ada kemungkinan ia berkomunikasi dengan penonton di ruang

pertunjukkan. Sang istri membuka amplop dan menyebut kartu tebakan. Bukan tipuan!

17.1.13. Orang percaya bahwa struktur dan fungsi suatu protein kemungkinan ditentukan oleh deretan asam amino yang terdapat di dalamnya. Di dalam terdapat 20 asam amino. Suatu protein berukuran sedang (dipandang menurut berat molekulnya) mengandung paling sedikit 200 asam amino. Berapa protein yang berbeda dapat mempunyai kemungkinan deretan asam amino seperti ini? Berapa pula jumlah protein untuk susunan asam amino yang lebih pendek? Ramalkan berapa jumlah senyawa yang terdapat di dalam makhluk hidup di bumi dan jumlah molekul protein yang terdapat di dalamnya! Jika masing-masing hanya hidup selama 1 detik dan digantikan oleh rantai lainnya, Berapa jumlah rantai yang terdapat sejak adanya kehidupan? Apa kesimpulan yang Anda peroleh?

17.2.1. Di dalam sebuah kotak yang dibagi menjadi dua bagian sama besar oleh suatu dinding, di setengah bagianya terdapat  $N$  molekul yang tidak saling berinteraksi satu sama lain. Kemudian lubang yang terdapat di dinding pembagi dibuka. Mengapa tekanan di kedua sisi akan sama? Berapa besar entropi dalam peristiwa ini? Apakah sesuai dengan rumusan yang terdapat pada § 17.2.8? Uraikan peristiwa ini secara rinci, misalnya untuk  $N = 4$  dan tentukan probabilitas masing-masing keadaan. Jika suatu keadaan  $A$  dapat berubah menjadi keadaan  $B$ , maka haruslah dapat terjadi sebaliknya,  $B$  dapat berubah ke keadaan  $A$ . Mengapa probabilitas seperti ini jarang sekali terjadi jika dikalikan dengan  $10^{20}$ ?

17.2.2. Buktikan bahwa pembagian energi yang dinyatakan pada pers. [17.36] adalah sama dengan apa yang secara fisis disebut energi atau panas, sehingga pers. [17.36] tidak lain merupakan persamaan hukum pertama termodinamika. Amati misalnya suatu sistem mengandung partikel bermuatan dan tersedia berbagai keadaan dan sistem ditempatkan di dalam medan listrik. Bagaimana tekanan yang terdapat di dalam sistem dalam dengan pengamatan secara mekanis?

17.2.3. Diketahui sesuatu "osilator mekanis", yaitu suatu sistem dengan keadaan-keadaan energi "berjarak" sama. Distribusikan  $N$  partikel yang mempunyai energi total  $E$  di dalam sistem ini. Bagaimana dengan kombinasi sederhana perpindahan partikel dari tingkat energi satu ke tingkat energi lainnya dan jika dianggap bahwa terdapat perubahan keadaan makro, tetapi  $E$  tetap konstan? Bagaimana perubahan probabilitas keadaan  $P$  yang akan terjadi? Bagaimana seharusnya keadaan, seandainya tidak terdapat perubahan  $P$  (harga  $N$  sangat besar)? Apakah hal demikian sesuai dengan hukum distribusi Boltzmann?

17.2.4. Pendahuluan termodinamika irreversibel: Pandang suatu sistem tertutup dan keadaan-keadaannya digambarkan oleh variabel  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Entropi sistem adalah sebagai fungsi variabel ini. Bayangkan suatu permukaan berdimensi  $n + 1$ . Di mana akan terjadi kesetimbangan? Bagaimana permukaan  $S$  (entropi) yang terdapat di sekitarnya? Bandingkan dengan kesetimbangan mekanis sebagai berikut: Harga  $U$  minimum, membentuk permukaan  $F$  di sekitarnya. Proses irreversibel menyebabkan pertambahan entropi. Proses reversibel terjadi sangat lama tak berhingga. Suatu proses akan semakin cepat berjalan, jika semakin besar entropi yang dibentuk. Apakah pernyataan ini benar? Berikan contoh! Dapatkah dikatakan pula bahwa kemungkinan penyebab bertambahnya entropi adalah gaya penggerak suatu proses? Nyatakan proses tersebut pada permukaan  $S$ . Bagaimana titik-titik keadaan mengalami perubahan? Jika Anda ingin menyempurnakan dengan analogi  $U$ , model mekanis apa yang harus Anda gunakan? Dapatkah diperoleh persamaan gerak secara umum untuk sistem titik  $a_i$ ?

17.2.5. Bagaimana menyelesaikan relasi berikut ini dan ramalan dengan model pada soal 17.2.4: Misalnya  $J_i = a_i$  adalah arus diperumum. Rumus adalah gaya diperumum. Gaya "menarik" arus mengikuti relasi Rumus ( $L_{ik}$  adalah koefisien Onsager). Sebuah sistem di luar kesetimbangan menimbulkan entropi dengan laju Rumus. Dalam hal ini diasumsikan bahwa variabel  $a_i$  harus dipilih

dengan. Apa yang dimaksud dengan pemilihan variabel "penting" tersebut?

17.2.6. Sebuah sistem dalam keadaan kesetimbangan tidak persis berada di puncak dari "gunung  $S$ ", melainkan terdapat deviasi. Berapa jauh sistem tersebut rata-rata berada dari titik puncaknya? Apakah persoalan ini menyangkut perbedaan  $S$  atau  $a_i$ ? Pandang kembali definisi statistik dari  $S$ . Untuk deviasi demikian juga berlaku persamaan gerak Rumus. Bandingkan antara  $a_k a_i$  dan  $a_i a_k$ . Apakah benar bahwa pemilihan "penting" dari variabel keadaan  $a_i$  dan  $a_k$  tidak bergantung pada deviasi masing-masing variabel dan apa yang akan diperoleh? Dapatkan harga rata-rata  $\partial S / \partial a_i$  diramalkan secara umum? Dapatkan  $a_i$  dan  $\partial S / \partial a_i$  rata-rata terhadap waktu dianggap sebagai ortonormal? Mengapa diperoleh hubungan  $L_{ik} = L_{ki}$  (relasi Onsager)? Mungkinkan rumusan di atas dapat digunakan untuk proses tidak setimbang?

17.2.7. Dua kawat terbuat dari logam berbeda dan kedua ujungnya saling disolder. Solder 1 dan 2 masing-masing dimasukkan ke dalam termostat, masing-masing dengan temperatur  $T_1$  dan  $T_2$  ( $T_1 > T_2$ ). Salah satu kawat dipotong dan dihubungkan dengan sebuah kondensator. Variabel apa yang dapat menggambarkan sistem demikian (tidak berhubungan dengan rincian  $T$  dan distribusi potensial, melainkan hanya tegangan pada kondensator)? Berapa besar entropi yang timbul, jika terdapat aliran panas  $O$  dari 1 ke 2 dan juga arus? Apakah hal ini sesuai dengan rumusan Onsager pada soal 17.2.5? Syarat batas: A) tidak terdapat arus,  $\Delta T$  tetap; B) Tegangan pada kondensator konstan,  $\Delta T = 0$ . Dapatkah Anda turunkan relasi antara gaya termis dan koefisien Peltier?

17.2.8 Dua bejana 1 dan 2, masing-masing bervolume konstan dan keduanya dihubungkan melalui pipa kapiler dengan penampang sempit atau sebuah membran. Didalam kedua bejana diisi bahan sejenis (gas, cairan atau He cair), akan tetapi temperatur dan tekanan dapat berbeda. Tentukan variabel "penting" dan nyatakan dalam persamaan Onsager ! Syarat batas; A) Perbedaan temperatur  $T$  antara kedua bejana dijaga konstan, B) perbedaan tekanan  $p$  kedua bejana dijaga konstan.

Diskusikan hubugannya dengan perbedaan tekanan termomolekuler, osmose termis dan efek kalormekanis. Berapa besar lubang penghubung seharusnya, sehingga diskusi akan memberikan arti? Untuk gas seringkali dihubungkan dengan efek Knudsen dan untuk He cair dihubungkan dengan efek Springbrunnen.

17.2.9. Suatu besaran ekstensif  $F$  suatu sistem adalah suatu besaran, apabila sistem dipandang sebagai suatu kesatuan misalnya harga besaran ini menjadi dua kali semula jika dua sistem identik saling digabungkan satu sama lain. Besaran mana saja di antara besaran berikut merupakan besaran ekstensif: Massa, tekanan, temperatur, volume, energi, dan konsentrasi? Apakah  $F$  selalu dapat dinyatakan sebagai integral suatu "kerapatan"  $f$  terhadap seluruh volume sistem :  $f F dV$ ?  $F$  dapat berubah terhadap waktu: karena adanya arus masuk dan keluar dari sistem; melalui proses yang terjadi di dalam sistem. Formulasikan kerapatan arus dan kerapatan sumber untuk besaran  $F$  dan cari persamaan kesamaan. Bagaimana penggunaannya jika "materi" yang dialirkan adalah massa, muatan, energi, momentum dan entropi? Tunjukkan bahwa semua konsekuensi dari hukum termodinamika kedua juga akan diperoleh dari ramalan bahwa entropi kerapatan sumber tidak akan berharga negatif?

17.2.10. Dua buah reservoir besar bertemperatur  $T_1$  dan  $T_2$  secara tiba-tiba dihubungkan dengan sebuah batang logam. Apa yang terjadi setelah batang logam dimasukkan dan apa yang terjadi setelah beberapa saat yang cukup lama kemudian? Definisikan istilah stasioneritas. Berapa lama keadaan seperti itu dapat terjadi? Periksalah perbandingan entropi, khususnya dalam keadaan stasioner. Apakah entropi batang logam akan mengalami perubahan juga? Apakah batang menyebabkan pertambahan entropi? Bagaimana kedua ramalan tersebut dapat disatukan? Carilah contoh apa yang diistilahkan dengan munculnya "entropi dalam"  $\sigma$ ! Bagaimana  $\sigma$  berubah terhadap waktu?

17.2.11. Buktikan hukum Prigoriev sebagai berikut: Suatu sistem dikarakteristikkan oleh gaya-gaya  $X_1, \dots, X_n$ .  $k$  darinya, yaitu  $X_1, \dots, X_k$  harus tetap ada. Jika dalam keadaan ini entropi harus minimal, maka arus yang disebabkan oleh gaya-gaya lainnya  $J_{k+1}, \dots, J_n$  harus

berharga nol. Berikan contoh untuk itu ! Apakah batasan yang diambil berdasarkan harga entropi minimal cukup mewakili? Pengertian apa yang dapat diperoleh dari stasioneritas orde ke  $k$  (khususnya untuk  $k = 1$  dan  $k = 0$ )?

**17.2.12.** Jika suatu sistem tidak berada dalam keadaan setimbang, atau dengan perkataan lain harus timbul entropi, maka sistem akan "berusaha" agar entropi yang timbul mempunyai harga sekecil mungkin. Mengapa keadaan seperti ini stabil? Mengapa prinsip ini dipakai sebagai perkembangan lebih lanjut dari termodinamika kesetimbangan (sebenarnya lebih tepat termosstatistik)? Berikan gambaran tentang perkiraan skala waktu yang disebabkan oleh keadaan tersebut: Distribusi sembarang dari  $T$ ; keadaan stasioner; kesetimbangan. Prigone menunjukkan bahwa prinsip timbulnya entropi minimal dalam keadaan tertentu, misalnya dalam peristiwa biologis dapat mempengaruhi perubahan "susunan dalam". Peristiwa ini tidak selalu menyebabkan terjadinya pengaruh. Sebaliknya, melainkan kadang-kadang menyebabkan timbulnya "struktur dissipatif".

### Soal-Soal § 17.3

**17.3.1.** Di tengah-tengah *awan kepiting*, yaitu sebagai sisa ledakan supernova di atas Cina pada tahun 1054 Masehi, muncul bintang kecil periodis setiap 0,033 detik, yang dapat diketahui melalui rekaman sinyal radio sangat intensif berlangsung selama 0,0033 detik. Jika periodisitas berhubungan dengan rotasinya, mengapa bagian-bagian bintang ini tidak perpisahkan secara sentrifugal? Pengandaian: Bintang, seperti bintang-bintang lainnya, mempunyai massa mendekati massa matahari. Berapa kerapatannya? Bandingkan dengan kerapatan bahan atau materi inti ! Berapa momentum angular bintang? Bandingkan dengan harga momentum angular matahari !

**17.3.2** Ketajaman sinyal radio suatu *pulsar* memerlukan pengamatan yang tidak biasa. Misalnya muncul emisinya dengan  $\lambda = 1$  m kira-kira selama 0,1 detik kemudian sampai dalam pengamatan kita dengan  $\lambda = 1$  cm. Dapatkah dari peristiwa tersebut disimpulkan dispersi plasma interstelar? Berapa kerapatan elektron (mengapa hanya dipandang

elektron saja?) harus diasumsikan? Jarak pulsar kepiting adalah 4000 tahun cahaya.

17.3.3 Medan magnet rata-rata matahari dapat mencapai hingga beberapa Gauss. Pada terjadinya kontraksi harga medan  $B$  umumnya tetap terbelenggu di dalam materi. Ramalkan medan magnet suatu pulsar. Berapa besar jari-jari dan frekuensi Larmor untuk berbagai partikel yang berbeda, khususnya untuk elektron non-relativistik? Partikel dengan energi maksimal berapa yang dapat disimpan oleh magnetik pulsar?

17.3.4 Buatlah analisa "penuapan inti" yang terdapat pada gbr. [13.57]! Mengapa orang menyusun justru proton primer yang mempunyai lintasan tipis? Berapa besar energi maksimum proton primer ini sebelumnya? Berapa pula energi rata-rata partikel sekunder? (semua energi dinyatakan dalam sistem pusat massa atau sistem laboratorium!). Berapa seharusnya jarak jangkauan dari partikel sekunder dan primer?

17.3.5 Teori Fermi tentang peluruhan  $\beta$ : Spektrum energi peluruhan partikel  $\beta$  dihitung, yaitu probabilitas energi  $E_e$  yang diperoleh oleh partikel  $\beta$  dengan pengandaian dan menggunakan kenyataan berikut: Keadaan transisi dari inti induk dan keadaan akhir inti anak dan untuk berbagai aktivitas peluruhan adalah sama. Jika masih terdapat elektron berenergi berbeda karenanya, dapat disimpulkan bahwa neutrino turut dipancarkan. Karena neutrino mempunyai massa diam kecil (kemungkinan sama dengan nol), maka selalu relativistik, sedangkan elektron tidak selalu relativistik (kapan elektron akan relativistik?; walau bagaimanapun perhitungan adalah amat sederhana). Probabilitas suatu aktivitas peluruhan dikarakteristikkan melalui kombinasi tertentu dari energi dan momentum elektron dan neutrino dan sebanding dengan volume ruang momentum (fase). Rumusan dinyatakan dalam enam dimensi, karena berhubungan dengan dua partikel. Bagaimana dengan spektrum energi untuk elektron relativistik dan non-relativistik?

17.3.6 Berapa lama energi gravitasi dapat bertahan untuk men- cukupi energi radiasi suatu bintang katai putih?

## Indeks

- Anderson penemu positron, 348
- Arrhenius hubungan konduktivitas dan temperatur, 637 persamaan, 991
- Balmer seri, 110
- Bequerel Hendri, 1896, 295
- Bergmann prosedur pembuatan kristal semikonduktor, 542 prosedur pembuatan kristal semikonduktor, 542 seri, 118
- Bethe, 315 proses siklik, 508
- Bose-Einstein distribusi, 1000
- Bose cairan, 588
- Bothe-Geiger pengukuran koinsiden, 73
- Brackett seri, 111
- Bragg W, 144 intensitas refleksi, 481 metode rotasi kristal, 149 syarat refleksi, 145
- Bravais
- Bhabha hamburan, 382
- Bjerrum kesalahan lih. kesalahan *d* dan *l*, 533
- Bloch F., 210
- Bohr-Sommerfeld syarat kuantum, 119
- Bohr, 315 jari-jari, 113, 889
- magneton, 193 postulat, 108 syarat frekuensi, 93
- Boltzmann distribusi, 959
- Born-Haber massa neutron, 363 penemuan neutron, 261
- Chamberlain antiproton, 350
- Chandrasekhar batas, 788, 1008
- Cohen-fritzsche-Ovshinski model amorf, 637
- Compton efek, 70 efek, 172 hamburan, 382 panjang gelombang, 72
- Cork

- kisi, 490
- Brillouin**
  - hamburan, 506, 572
  - zone, 500
- Bunsen**
  - fotometer, 13
- Chadwick**
  - Marie, 295
  - Piere, 295
- Darlitz**
  - plot, 410
- Debye-Waller**
  - faktor, 505
- Debye-Hueckel**
  - panjang, 592
- Debye-Scherer**
  - metode bubuk, 150
- Debye**
  - kurva panas jenis, 553
  - temperatur, 551
  - teori panas jenis, 547
- Dicke-Brans-Jordan**
  - teori campuran
  - tensor-skalar, 779
- Dior**, 47
- Dirac**
  - antipartikel, 348
  - ramalan antipartikel, 350
  - teori, 905
  - energi, 584, 999
  - gas, 584, 1001
  - momentum, 583
  - penemuan neutrino, 348
  - ramalan neutrino, 299
- antineutron**, 350
- Coulomb**
  - medan, 250
- Cowan**
  - pembuktian neutrino, 348
- Curie**
- Irene Juliet**, 275
- Drude-Lorentz**
  - teori logam, 577
- Drude**
  - absorpsi, 590
- Einstein**
  - 1905, 65
- 1907**
  - gagalnya teori klasik ttg. kerapatan radiasi, 544
  - kosmos statik, 798
- persamaan**, 65
  - ruang, 801
  - temperatur, 547
  - teori panas jenis, 545
- Ewald**
  - konstruksi, 498
- Faraday**
  - kurungan, 296
- Fermi**
  - Enrico, 1934, 275
  - cairan, 588
  - distribusi, 998
- Geiger**
- H**
  - tabung pencacah, 325
  - hukum jangkauan jarak, 317
  - pencacah, 311

- tekanan, 787, 1005
- temperatur, 584
- Feynmann
  - 'partikel' parton, 420
- Feynman
  - diagram, 377
- Fortrat
  - diagram, 135
- Frenkel
  - cacat kristal, 640
  - kekosongan kisi, 617
- Friedmann
  - waktu, 793
- Gauss
  - fungsi, 953
- Geiger-nuttal
  - aturan, 302
  - Otto, 1938, 275
- Hamiltonian
  - operator, 871
- Hamilton
  - persamaan, 854
- Heisenberg
  - relasi ketidakpastian, 859
- Heitler-London
  - Lcao Dan Ao, 917
- Helmholtz
  - 1852, 43
  - potensial, 978
- Hertz
  - Heinrich, 243
  - dipol, 81
- Hess
  - 1910, penemuan sinar
- Gell-mann-Okubo
  - rumus massa, 418
- Gell-Mann
  - postulasi quark, 419
- Gibbs
  - potensial
  - lih. enthalpi bebas, 977
- Geiger
  - hamburan tunggal, 257
- Glaser
  - bilik gelembung, 322
- Goldhaber
  - massa neutron, 363
- Grueneisten
  - kurva, 597
  - Hahn
- E.L., 211
- Hoyle-Bondi-Gold
  - teori, 804
- Hubble
  - konstanta, 791
  - waktu, 793
- Hund-Mulliken
  - metode MO, 917
- Hund
  - aturan, 528, 898
- J.J. Thomson
  - model atom 105
- Josephson-Gleich
  - efek, 678
- Josephson
  - efek bolak-balik, 679
  - junction, 679
- Juliot, 348

- kosmik, 427
- Hilbert
  - ruang, 842
- Hofstadter
  - elektron energi tinggi, 292
  - Hukum, 30
  - hukum radiasi, 28
- Kyropoulos-Czochralski
  - prosedur pembuatan kristal semikonduktor, 542
- Lagrange
  - persamaan, 854
- Lambert-Beer
  - hukum, 11
- Lambert
  - permukaan, 6
  - radiator, 5
- Lamborghini, 47
- Lamb
  - pergeseran, 373, 384
- Langmuir
  - frekuensi, 588
- Larmor
  - gerak presesi, 197
- Laue
  - indeks, 481
  - metode, 149
  - Micherlson, 710
- Lorentz
  - Invarian, 750
  - kontraksi, 725
  - persamaan transformasi, 750
  - transormasi kovarian, 386
- Kammerling
  - Onnes, 1911: percobaan superkonduktor pertama kali, 667
- Kirchhoff
- Lowson
  - kriteria, 283
- Lebedev
  - pembuktian tekanan cahaya, 69
- Lemaire-Eddington
  - kosmos, 798
- Lenard
- Phillip, 243
  - hukum massa, 247
- jendela, 243
- Leslie
  - percobaan, 24
- Lie
  - aljabar, 417
- Liouville
  - kaidah, 983
- Lobatchevski-Bolyai
  - ruang, 801
- Lorentz-Fitzgerald
  - pengukuran waktu tempuh cahaya pada perc.
  - persamaan
  - bentuk relativistik, 760
- Meissner-ochsenfeld
  - efek superkonduktor, 669
- Meissner
  - efek, 671
- Michelson

- Lorenzt-Fitzgerald**  
 rumus pemendekatan  
 batang bergerak, 725
- Lyman**  
 seri, 111
- Madelung**  
 faktor, 521
- Markov**  
 rantai, 848
- Marsden**  
 hamburan tunggal, 257
- Mathias**  
 aturan unsur  
 superkonduktor, 668
- Maxwell**  
 teleskop, 777
- Paschen**  
 seri, 111
- Pauli**  
 penemuan neutrino, 348  
 prinsip, 991  
 ramalan Neutrino, 299
- Penzia-Wilson**  
 penemuan gel. radio Dari  
 angkasa luar, 803
- Pfund**
- Seri**, 111
- Planck-Einstein**  
 relasi energi-frekuensi, 762
- Planck**  
 hipotesa kuantum, 32  
 hukum radiasi, 32, 963  
 konstanta, 33
- Poisson**
- percobaan pembuktian eter**,  
 707
- Miller.**  
 indeks, 481
- Moseley**  
 hukum, 162
- Moooller**  
 hamburan, 382
- Nernst**  
 pemijar, 15
- Noether**
- Emmy**, simetri, 402
- Ohm**  
 hukum, 578
- Palomar**
- Powell**  
 penemuan hiperon, 351  
 penemuan kaon, 351  
 penemuan pion, 349
- Prout**
- postulasi**, 419
- Pucell**
- E.m**, 210
- Raman**  
 efek, 97
- Rayleigh-Jeans**  
 hukum, 36
- Rayleigh**  
 hamburan, 159
- Rebka**
- G.a.**, 1960, 7
- Reines**  
 pembuktian neutrino, 348
- Ritz**, 93

- distribusi, 65, 311
- Pound
  - V.A., 1960, 77
  - sinar, 140
  - sinar fluoresen, 159
  - tabung sinar, 140
- Rubens
  - metode radiasi sisa, 19
- Rutherford-Soddy
  - hukum pergeseran, 297
- Rutherford
  - Ernst, 105
  - 1911, 249
  - model atom, 106
  - percobaan berkas partikel, 105
  - rumus hamburan, 256
- Rydberg
  - konstanta, 111
- Sach-Lyddane-Teller
  - relasi, 567
- Schottky
  - anti-
    - cacat kristal, 640
  - cacat kristal, 640
  - prosedur pembuatan kristal semikonduktor, 542
- Strassmann
  - Fritz, 1938, 275
- Sturm-Liouville
  - persoalan harga batas, 886
- Tacke
  - Ida, 275
- Tserenkov
- prinsip kombinasi, 866
- rumusan, 111
- Roentgen
- kekosongan kisi, 617
- Schroedinger
  - persamaan, 188
  - bergantung pada waktu, 870
  - tidak bergantung pada waktu, 870 -
- Schubnikov
  - grup, 493
- Schwinger
  - ,J
  - dyon, 427
- Seyfert
  - galaksi, 805
- Sommerfeld
  - model atom, 120
- Stark
  - efek, 220
- Stern-Gerlach
  - percobaan, 200
  - Stirling
    - rumus, 536, 947
- Stockbarger
  - hukum pergeseran spektral, 37
- Wilson
  - bilik, 320
- Young
  - 1807, 43
- Yukawa
  - gaya inti, 259
  - postulasi pion, 349

- pencacah, 328
- Tyndall
  - hamburan, 572
- Berneuil
  - prosedur pembuatan logam mulia, 542
- Weber
  - teleskop gavitasi, 785
- Whiddington
  - hukum, 317
- Wiedemann-Franz
  - hukum, 578
- Wien
- Einstein
  - relasi, 643
- Stoke
  - aturan, 85
- Van Allen
  - sabuk, 437
- Van Gogh
- Tizian. 47
- Van Der Graf
  - generator elektrostatik, 331
- Van Der Waals
  - gaya, 525
- Von Laue
  - Max, 142
- Von neumann
  - J. Konsep, 310
- Absorpsi
  - Drude, 590
  - efek foto listrik, 171
  - elektron oleh gas, 246
  - koefisien, 25, 160, 246, 589
- Zeeman
  - efek, 215
  - efek anomali, 217
  - efek normal, 217
- Zweg (zweig)
  - postulasi quark, 419
- De Broglie
  - Louis, 1923, 761
  - hubungan
  - panjang gelombang dan momentum, 762
- De Haas-Van Alpen
  - efek, 602
  - koefisien sebenarnya, 171
  - pada atom, 109
  - resonansi
  - sinar y, 75
  - Sinar y, 170
  - Sinar Roentgen, 170
  - adiabatik
  - proses, 979
  - afinitas
  - elektron, 908
- Akseptor
  - term energi, 618
  - aktinida
  - unsur, 189
  - aktinium
- Ac, 295, 302
  - akustik
  - cabang
  - vibrasi kisi, 560
  - optik
  - vibrasi kisi, 560

- koefisien massa, 172, 247
- amorf, 543
  - polimer berderajat tinggi
  - linier, 658
  - struktur, 474
- anihilasi, 176
  - elektron-positiron, 382
- antiauksokrom
  - grup, 49
- antiferromagnetik
  - resonansi, 214
- antihidrogen, 351
- antikatode, 140
- antipartikel, 348
- antiproton, 350
- AO
  - metode pendekatan
  - struktur molekul, 917
- arus
  - empat dimensi, 759
- atom
  - sistem satuan massa
    - SSMA), 267
  - lepton  $L$ , 388
  - magnetik, 120, 184
  - momentum orbital  $l$ , 891
  - orbital, 183
  - spin, 120, 184
  - tambahan  $l$ , 890
  - utama, 109, 183
  - utama  $n$ , 888
- bilangan kuantum
  - momentum angular, 120
- bilik
- amilasetat, 10
- volume, 181
- aturan seleksi, 94
  - aturan transisi, 123, 904
- Auger
- efek, 170
- auksokrom
- grup, 49
  - barium
  - Ba, 275
- bathokrom
  - grup, 49
- benda hitam
  - absolut, 27
- betatron
- kosmik, 428
  - pemercepat partikel, 331
- bilangan ajaib, 271
- bilangan koordinasi, 487
- bilangan kuantum, 183
- 'charme', 420
- barion, 388
  - barion  $A$ , 388
- syarat pembentukan, 1008
- bolometer, 16
- bom
  - atom, 258
- H, 279
- termonuklir, 279
- boson, 994
  - aturan, 369
  - bremsstrahlung, 141
- spektrum karakteristik, 158
- cacat eigen

- bunga api, 324
- ionisasi, 320
- kabut, 321
- bilik berkabut, 170
- bilik ionisasi, 159
- bintang
  - ganda, 783
  - katai putih, 770
  - neutron, 783
  - panas, 787
- black hole, 428, 780
- defek elektron, 610
- deformasi
  - plastis. 522
- degenerasi. 584
  - energi. 121
  - keadaan, 892
  - relativistik, 1006
- deuterium
  - D, 281
- deuteron, 265
- deviasi
  - rata-rata, lih. standard, 312
  - relatif. 312
  - standar, 312
- deviasi statistik
  - proses peluruhan, 311
- diagram
  - tegangan-regangan, 507
- dielektrik
  - konstanta, pengaruh ion dan elektron, 589
- difusi
  - dissosiasi
- li. cacat termis, 639
- cacat kimia
  - cacat kisi, 639
- cacat termis
- cacat kisi, 639
  - cadmium
  - Cd, 276
  - candela
  - satuan kuat radiasi, 10
  - chromosom, 344
- colorimetri, 43
- partikel antara tempat di kisi, 641
- dilatasi waktu, 727
- dioda
- Esaki, 631
- Schottky, 631
- elektroluminisen, 632
- foto, 626, 632
- kristal, 626
- pembuatan, 630
- lancip, 631
  - lempeng, 631
  - pin, 631
  - zener, 631
- dislokasi, 651
  - cacat kisi, 639
- garis, 652
  - pada kristal, 507, 516
- sekrup, 653
- dispersi
- relasi, 556
- longitudinal, 556
  - Meissner-Ochsenfeld,

- molekul
- distribusi
  - Boltzmann, 959
  - Poisson, 311
  - kanonik, 959
  - statistik, 312
- Distribusi serba sama
  - prinsip, 987
- divergensi
  - empat dimensi, 759
- Dna
  - desoxyribonuleic acid, 344
  - heliks ganda, 526
- donator
  - term energi, 618
- dosis, 340
  - daya, 340
  - ekuivalen, 341
  - energi, 340, 341
- efek
  - Josephson-Gleich, 678
- elektroskop
  - sinar  $\gamma$  339
- emisi titik
  - dipaksakan, 35, 99
  - induksi, 99
  - pada atom, 109
  - spontan, 34, 99
- energi
  - Fermi, 584
  - afinitas, 508
  - bebas, 977
  - dissosiasi, 508
  - hidrataasi, 520
- diatomik, 139 669
- Meissner, 671
  - Barat-Utara
  - sinar kosmik, 430
- Bolak-balik Josephson, 679
  - fotolistrik
  - inti, 289
  - isotop, 678
  - kanal, 279, 677
  - pinch, 286
  - efek kanal, 878
  - eigenstrahlung, 141
  - eightfold way, 417
  - eksentrisitas, 121
- ekstensi
  - koefisien, 567
- elektron
  - valensi, 117
  - elektron-positron
- pembentukan pasangan, 175
- tingkat dasar, 93
  - tingkat eksitasi, 93
  - nol, 876
- ensambel
  - statistik, 969
- enthalpi, 977
  - bebas, 977
- entropi, 975
  - enzim, 991
  - faktor
- struktur atom, 502
- fermion, 994
- aturan, 369

- hukum
  - relativistik, 739
- ikat, 523
- ionisasi, 508, 900
- ionisasi 0, 901
- kinetik relativistik, 738
- kisi, 507, 508
- kuantum, 32
- pemisahan, 538
- partikel vibrasi, 568
- transport, 573
- fosfor
  - unsur, 88
- fosforesensi, 88
- foto listrik
  - efek, 170
- fotodissosiasi, 363
- fotometer
  - olesan lemak, 13
  - polarisasi, 14
- fotometri, 3
  - fungsi, 13
- foton, 66
- frekuensi
  - maksimum kerapatan radiasi, 37
- Fujiyama
  - model energi potensial inti, 259
- fungsi
  - distribusi, 958
  - kecepatan fase, 569
- getaran
  - eigen, 848
- kekekalan ferromagnetik
- resonansi, 214
- fluoresen
- Roentgen, 159
- fluoresens, 21, 85
- resonansi, 85
- fluosresens, 84
- fonon
- partikel getaran, 506
- eigen
- ortonormal, 907
- fungsi eigen, 847
  - fungsi  $\delta$ , 856
- fusi
- inti, 266
- laser, 283
- gas
- Fermi, 1001
  - elektron, 577
  - konduktivitas panas, 578
- konduktivitas
  - panas-listrik, 578
- panas jenis logam, 587
- gaya
  - dispersi london, 525
  - entropi, 662
- kerapatan, 68
  - kuasi elastik, 137
  - gelombang
- faktor fasor, 501
  - kisi, 569
  - harga rata-rata
- posisi, 856
  - hasil pengukuran, 853

- gravitasi
  - gelombang, 781
- gyromagnetik
  - ratio, 197
- hamburan
  - Brillouin, 506
  - lihat hamburan
    - foton-fonon, 572
  - Rayleigh, 159
  - Tyndall, 572
  - foton-fonon, 572
  - inelastik, 288
  - klasik, 159, 171
  - koefisien, 172
    - massa, 174
  - tunggal, 257
- harga eigen, 847
  - degenerasi, 847
- harga ekspektasi, 872
  - logam, 487
- inframerah, 18
- intan
  - sintetis
    - pembuatan, 543
- interaksi
  - elektromagnetik, 369
  - gravitasi, 369
  - kuat, 369
  - lemah, 369
- interferometer keadaan
  - gelombang radio, 777
- inti
  - model tetesan, 268
- ionisasi, 94
- heteropolar
  - ikatan, 908
- hibridisasi, 907
  - hidrogen
- cair, 322
- hipsokrom
- grup, 49
  - hole, 602, 610
  - homoeopolar
  - ikatan, 910
  - ionik, 910
  - hyperfine structure, 293
  - ikatan
    - antibinding, 915
    - binding, 915
    - hidrogen, 525
  - ion, 487
    - kovalen, 487, 523
  - kristal, 518
    - inti, 291
  - isospin, 347
  - isotop
    - efek, 678
  - Kalium
  - K, 295
    - kanomik
    - distribusi, 959
    - ensambel, 965
    - katalisator, 991
  - jumlah, 958
  - keadaan stasioner, 871
    - kecepatan
    - cahaya, 712

- energi, 95
- kerapatan, 317
- potensial, 95
- tegangan, 181
- isentropi
  - proses, 979
- isomer
- kesalahan *l*
  - pada kristal es, 533
- kisi
  - balik, 496
  - konstanta, 144
  - kristal, 142
  - rhombohedral elementer, 489
  - sel elementer, 488
  - simetri
  - rhombohedral, 489
  - trigonal, 489
  - substrat, 541
- koefisien
  - absorpsi, 160, 589
    - H-cair, 172
    - H-gas, 172
    - massa, 172
  - absorpsi sebenarnya, 171
  - difusi diri, 643
  - hamburan, 172
    - massa, 174
  - empat dimensi, 757
- korespondensi
  - prinsip, 123
- korpustel, 66
- kosmologi
- teorema penambahan kec. relativistik, 731
- kekosongan pada kristal, 516
- kerja, 968
  - kesalahan *d*
- pada kristal es, 533
- muai, 181
  - multinomial, 943
- pelemahan sinar
- Roentgen, 170
  - koherensi
  - panjang, 84
  - kolom termis, 16
  - konduktivitas
  - panas
  - gas elektron, 578
  - koefisien, 573
  - panas-listrik
  - gas elektron, 578
  - konduktor
- foto, 621
  - konstanta
  - Hubble, 791
  - peluruhan, 300
  - struktur halus, 373
- konversi
  - elektron, 298
- koordinat
- pembiakan, 541
- komponen jamak, 541
- satu komponen, 541
- pembuatan semikonduktor
- prosedur Bergmann, 542

- prinsip ekuivalen, 768
- kosmos**
  - Lemaire-Eddington, 798
  - statik Einstein, 798
- kristal**
  - pembuatan semikonduktor
  - prosedur Kyropoulos-Czochralski, 542
  - bakal, 540
  - bidang, 144
  - es
    - kesalahan  $D$ , 533
    - kesalahan  $L$ , 533
  - ideal, 639
  - ikatan, 518
  - ionik, 519
  - luminisen, 621
  - valensi, 523
- krisalin parsial**, 658
- kromofor**
  - grup, 49
- kuadrupol**
  - momen massa, 782
- kuantisasi**
  - arah s. 199
  - orde kedua  $EH = hh$ , 425
- kuasar**, 777
  - sumber gel. radio kuasi stellar, 804
- kurva**
  - sensitivitas spektral, 9
- laju cacah**
  - rata-rata, 311
- laser**
- prosedur Stockbarger**, 542
  - pengembangan spiral, 656
  - perkembangan spiral, 541
- posisi setengah**, 537
  - real, 639
  - rubin, 101
  - satuan basis, 487
  - semikonduktor
  - perkembangan epitaksi, 541
  - struktur, 474, 476
  - Bcc, 487
  - Fcc, 476
  - Hcp, 476
  - kubus pusat ruang, 487
  - tunggal, 541
  - lilin
- satuan kuat radiasi**, 10
- lintasan absorpsi**, 173
  - lithium
  - Li, 281
  - logam mulia
- prosedur Verneuil**, 542
  - logam transisi
  - unsur, 188
- logaritma probabilitas**, 947
  - lubang hitam
  - lih. black hole, 780, 1008
- tekanan gaya berat**, 787
  - luthenium
  - Lu, 295
- lux**
  - kuat radiasi, 10

- impuls, 104
- rubin, 103
- semikonduktor, 103
- Lcao
  - lihat AO, 917
  - inti, 193
- magnetoresitan, 602
- maser, 100
- massa
  - defek, 265
  - diam, 737, 738
  - reduksi, 138
  - relativitas, 734
- medan
  - konservatif, 869
- megaparsec
  - Mpc, 791
- metode
  - impuls, 211
- metrik warna, 43
- mikrométer
  - okular, 340
- MO
  - metode pendekatan
  - struktur molekul, 917
- mobilitas
  - elektron, 578, 590
  - triplet, 393
- muatan efektif, 895
- mutasi
  - genetik, 344
  - somatis, 344
- myo, 116
- neptunium
- magnetisasi, 211
- magneto-mekanis
- paralelismus, 197
- magneton
  - Bohr, 193
- moderator, 365
- modul distribusi, 970
- momen
  - dipol
  - magnetik, 193
  - kuadrupol
  - magnetik, 196
  - kuadrupol listrik, 196
- momentum
  - Fermi, 583
- relativistik, 738
- momentum angular
  - eigen elektron, 185
- monokristal, 150
- lih. kristal tunggal, 541
- monomer, 657
- muatan
  - dublet, 393
- efektif, 900
- hiper, 394
- hyper  $Y$ , 417
- persamaan kontinuitas, 759
- O<sub>3</sub>08
- oktaedral
- kekosongan, 645
- okupasi invers, 100
- operator, 846
- Hamiltonian, 871
- energi, 861

- Np, 302
- neutrino, 299
- nitrogen
  - N, 308
- nomor atom, 179
- nomor massa atom, 179
- normalisasi
  - fungsi, 856
- nova, 428
- nukleon, 261
  - core, 374
- nuklida, 265
  - radioaktif
    - alamiah, 295
- oksidigen
- paket heksagonal terpadu, 479
- panas
  - arus, 573
  - pembentukan, 508
  - sublimasi, 508
  - sublimasi atomik, 507
  - sublimasi molekuler, 507
- panas jenis
  - logam
  - gas elektron, 587
- panas jenis spesifik
  - logam, 577
- paramagnetik
  - inti, 211
- parameter
  - tumbukan, 252
- partikel
  - $\alpha$ , 248
  - $\beta$ , 273
- frekuensi, 866
- hermitian, 848
- konyugasi diri, 848
- linier, 846
- momentum, 854
- posisi, 854
- relasi pertukaran, 861
- orbital
  - momentum angular, 192
- osilator
  - anharmonik, 140
  - harmonik
    - energi keadaan dasar, 132
  - osilator harmonik
    - energi total, 131
- meson, 259
- neutron, 261
- pion, 260
- neutrino, 290
- pertukaran
  - meson, 259
  - positron, 290
- strangeness, 351
- partikel elementer
  - antimuon, 360
  - antiquark, 421
  - barion, 387
  - dyon
    - pembangan dasar materi, 427
  - elektron, 348
  - foton, 369
  - graviton, 369
  - hadron, 387

- elementer  
 hiperon, 351  
 kaon, 351  
 $\Omega$ , 351  
 $\Sigma$ , 351, 414  
 $\Xi$ , 351  
 lepton, 387  
 meson, 387  
 $K^o$ , 358  
 $\eta$ , 351  
 $\pi$ , 336, 361  
 muon, 359, 360  
 muon-neutrino, 368  
 neutretto, 368  
 neutrino, 348  
 neutron, 348  
     albedo, 438  
 parton, 420  
 pion, 361, 369  
 positron, 348  
 proton, 348  
 quark, 419, 427  
 resonan barion, 351  
 resonan meson, 351  
 peluruhan  
     Arrhenius, 991  
 pion  
     atmosfir, 374  
     awan isoskalar, 373  
     awan isovektor, 373  
     stratosfir, 373  
 pita energi, 599  
 isolator, 606  
 semikonduktor, 606  
 hiperon  
 $A$ , 414  
 $A$ , 351, 414  
 bebas, 374  
 konstanta, 300  
 tumbukan, 374  
 pemancar  
 radiasi  
 kelabu, 42  
 pemancar radiasi kelabu, 42  
 pemancar temperatur, 15  
 pemercepat linier, 337  
 penampang lintang, 245  
 deferensial, 257  
 pencacah  
 cahaya, 65  
 kristal, 320  
 sintilasi, 296  
 tabung, 296, 325  
 percepatan  
 relativistik, 733  
 pergeseran letak  
 lihat dislokasi, 651  
 pergeseran merah, 70  
 persamaan  
 derajat tinggi, 657  
 terhubung, 658  
 pompa optis, 103  
 positronium, 116  
 atom, 177  
 postulasi kosmologi, 791  
 potensial  
 Coulomb, 877  
 kotak, 875, 877

- pita konduksi, 611
- pita utama, 135
- pita valensi, 611
- plasma, 281
  - jebakan magnetik, 283
- plasmon, 594
- plat jejak inti, 329
- plutonium
  - Pu, 276
- polarisasi vakuum, 384
- polimer
  - berderajat tinggi kristalin
  - parsial, 658
- probabilitas
  - mendapatkan partikel, 857
- proses pemanasan, 575
- proses pergeseran letak
  - pada kristal, 507
- proses siklik
  - Born-Haber, 508
- protein
  - $\alpha$ -heliks, 526
- pusat
  - F, 647
  - M, 649
  - V, 649
  - warna, 648
  - Z, 649
- pusat dilatasi, 645
- pyrometer, 39
- rad Rn, 297
  - satuan dosis energi, 341
- radiasi
  - daya, 3,9
- kurva
- molekul diatomik, 139
- parabol, 877
- sumur, 871
- presesi
- bebas, 211
- prinsip
- Pauli, 991
- kombinasi, 93
- prinsip relatif, 712
- prinsip relativitas, 712
- probabilitas
- distribusi, 856
- intensitas, 6
- jumlah, 4
- kerapatan, 5
- kerapatan fluks, 6
- kuat, 4
- ruang hampa, 28
- sabuk, 434
- spesifik, 4,25
- radikal, 319
- radioaktif
  - aktivitas, 338
  - kesetimbangan, 303
  - radioaktivitas, 295
  - radiokimia, 295
  - radium
  - Ra, 297, 310
  - radon
- rantai statistik, 658
- reaksi
- pp, 280

- fluks 3
- rantai, 274
- termis inti, 278
  - reaktor
  - fusi, 279
  - inti 275
- refleksi
  - gelombang spektrom campuran, 128
  - permukaan logam , 588
- rekombinasi
  - Kekosongan kisi, 641
- relasi
  - ketidakpastian, 857
- relativitas rubidium
  - kesamaan, 719
- rem
  - satuan dosis ekuivalen, 342
- resonansi
  - antiferromagnetik, 214
  - ferromagnetik, 214
  - inti, 204
    - akurva, 209
  - siklotron, 602
- simetri
  - bidang, 492
  - invarian, 402
  - muatan, 396
  - pusat, 403
  - ruang, 493
  - sumbu, 492
  - uniter, 417
- sinar
  - $\beta$ , 290
  - karakteristik, 141
- fusi, 278
- spin, 204
- reversibel
- kesetimbangan, 971
- Roentgen
- satuan dosis ionisasi, 341
- notasi-vibrasi
- ruang
- Einstein, 801
- Lobatchevski-Bolyai, 801
- ruang fase, 982
- Rb. 295
- samarium
- Sm, 295
- sel surya
- lih. dioda foto, 632
- semikonduktor, 610
- pembuatan, 541
- siklotron, 331
- siklus, CN, 280
- vakum, 21
- spektroskopi
- frekuensi tinggi, 214
- massa
- pemisahan isotop, 263
- orde kedua, 414
- orde ketiga, 414
- orde pertama, 414
- spektrotrograf
- kristal, 155
- spektrum

- kosmik, 427
- sinkrosiklotron, 334
- sinkrotron, 334
  - elektron, 336
- sintilasi
  - pencacah, 296, 327
- sistem acuan, 705
- sistem periodik, 178
- spektral
  - kurva sensitivitas, 9
- spektrometer
  - diatomik, 130
- spin
  - lih. momentum angular
    - eigen, 185
  - momentum angular, 192
  - momentum putar, 893
  - resonansi, 204
- strangeness, 347
- struktur
  - kristal
    - HCP, 479
  - struktur energi
    - halus, 893
    - sangat halus, 894
  - struktur halus
    - garis spektrum, 219
  - struktur hyperfine, 220
  - sudut hambur, 145
  - superaktinida
    - unsur, 190
  - superkonduktor
    - efek
      - titik lebur, 181
- K8,1, 162
- L8,1, 162
- batas kontinu, 115
- bunga api, 116
- fonon
- cara mengukur, 572
- optik
- bentuk bangun, 181
- spektrum
- lebar alamiah, 83
- spektrum rotasi
- Ochsenfeld, 669
- Hg, 667
- supermultiplet, 417
- supernova, 428
- tabung pencacah, 325
- tanah jarang
- unsur, 188
- tekanan
- Fermi
  - lih. tekanan gas Fermi, 1005
  - Fermi gas, 1004
  - cahaya, 67
  - teleskop
    - Palomar, 777
  - gavitasi, Weber, 785
  - sinar Roentgen, 789
  - televisi, 47
  - temperatur
    - degenerasi, 1001
    - hitam, 40
  - Meissner-Negatif, 100
  - trioda kristal, 626

- warna, 42
- tensor, 754
  - antimetrik, 754
- teori grup, 904
- term
  - dasar, 111
  - variasi, 111
- thorium
  - Th, 295, 302
- transistor 633
  - pnp*, 633
  - npn*, 633
  - kontak basis, 633
  - kontak emiter, 633
  - kontak kolektor, 633
  - lempengan, 626
- transuranium
  - unsur, 190
- traps
  - pada pita semikonduktor, halogen, 179
    - 621
  - teknetium, 803
- uranium
  - U, 276, 295
- vektor keempat, 752
- vibrasi
  - longitudinal, 549
  - transversal, 549
- waktu
  - hidup, 291
  - hidup rata-rata, 300
  - paruh, 300
- waktu relaksasi
  - kesetimbangan kristal, 643
- triplet fundamental, 419
- tritium
  - <sup>3</sup>H, 281
- tumbukan
  - elektron-fonon, 581
  - orde kedua, 95
  - tumbukan fonon-fonon, 574
- ultramerah
  - gelombang pendek, 15
- ultraviolet
- sumber, 20
- umklapen
- proton, 208
- unsur
- aktinida, 181
- alkali, 179
- alkali tanah, 179
- chalkogen, 179
- gas mulia, 179
- tanah jarang, 181
- zone pelelehan
- prosedur, 542

warna  
segitiga, 44  
substraktif, 46  
whiskers, 543  
wolfram  
W, 325  
xenon  
Xe, 297

## Satuan Energi dan Satuan Ekuivalen

430

$J$	$\text{erg}$	$\text{mJ}$	$\text{cal}$	$\text{eV}$	$T$ [K]	$\frac{\text{keal}}{\text{mol}}$	$\nu$ [Hz]	$\lambda$ [m]	$m$ [AMU]
$1\text{J}$	1	$10^7$	0.1020	0.2389	$6.242 \cdot 10^{18}$	$7.244 \cdot 10^{21}$	$1.439 \cdot 10^{30}$	$1.509 \cdot 10^{33}$	$1.986 \cdot 10^{-33}$
$1\text{erg}$	$10^{-7}$	1	$1.020 \cdot 10^{-6}$	$2.389 \cdot 10^{-6}$	$6.242 \cdot 10^{11}$	$7.244 \cdot 10^{14}$	$1.439 \cdot 10^{13}$	$1.509 \cdot 10^{16}$	$1.986 \cdot 10^{-16}$
$1\text{mJ}$									
$1\text{cal}$	9.807	$9.807 \cdot 10^3$	1		2.343	$6.121 \cdot 10^9$	$7.03 \cdot 10^{12}$	$1.411 \cdot 10^{11}$	$1.480 \cdot 10^{14}$
$1\text{eV}$									
$T$ 1 K									
$1\text{keal/mol}$	6.931 $\cdot 10^{-21}$	6.931 $\cdot 10^{-14}$	7.088 $\cdot 10^{-11}$	1.660 $\cdot 10^{-11}$	0.0434	503.47	1	$1.986 \cdot 10^{-3}$	$2.084 \cdot 10^0$
$\nu$ 1 Hz									
$1\text{m}$									
$m$ 1 AMU	1.992 $\cdot 10^{-10}$	1.992 $\cdot 10^{-3}$	1.532 $\cdot 10^{-11}$	3.565 $\cdot 10^{-11}$	9.315 $\cdot 10^8$	1.081 $\cdot 10^3$	$2.147 \cdot 10^{10}$	$1.331 \cdot 10^{-13}$	1

### Contoh penggunaan:

Jika satu satuan massa atom (SMA) melebur, dapat terjadi sebuah foton dengan frekuensi  $2.252 \cdot 10^{23}$  Hz atau  $\lambda = 1.331 \cdot 10^{-15}$  m; energi ini setara dengan  $T = 1.081 \cdot 10^{13}$  K atau sekitar  $2.147 \cdot 10^{10}$  kcal/mol.

Pada temperatur 11600 K sebuah partikel kira-kira akan mempunyai energi sebesar 1 eV sebuah foton kira-kira berenergi  $2 \cdot 10^{14}$  Hz dan  $\lambda \approx 10^{-6}$  m = 1000 Å. Sebuah foton dengan  $\lambda = 1 \text{ \AA} = 10^{-10}$  m mempunyai energi 12400 eV sesuai dengan  $1.49 \cdot 10^8$  K dan  $1.331 \cdot 10^{-13}$  SMA (dalam hal ini digunakan rumus  $E = hc/\lambda$ , karena cukup untuk membagi besaran konstanta  $hc$  dengan  $\lambda$ ).

Beberapa Sifat Zat Padat

H	0.088
Li	0.542
Be	1.82
B	453.7
C	1351
N	1.65
O	1.33
F	58
Ne	12.3
Mg	1.16
Al	100.9
Si	0.02

Fig	1
7.87	1
1808	1
4.29	1
12	1
16,81	1

Summer : Handbook of Chemistry and Physics (RCI Press 1972).  
Kittel : Introduction to Solid State Physics, New York, John Wiley, 1971

	B	C	N	O	P
Al	2.47	3.52	1.03	1.14	53.5
Si	2.50	3.50	0.33	5.43	
Ge	2.50	3.50	0.11	0.10	
Sn	2.50	3.50	0.11	0.10	
Sb	2.50	3.50	0.11	0.10	
Te	2.50	3.50	0.11	0.10	
Bi	2.50	3.50	0.11	0.10	
Pb	2.50	3.50	0.11	0.10	
Tl	2.50	3.50	0.11	0.10	
In	2.50	3.50	0.11	0.10	
Al	2.50	3.50	0.11	0.10	

11	1	1000	10000	100000	1000000
11.1	1	1000	10000	100000	1000000
11.2	1	1000	10000	100000	1000000
11.3	1	1000	10000	100000	1000000
11.4	1	1000	10000	100000	1000000



Sistem Berkala Unsur

# Sistem Berkala Unsur

## Konstanta-konstanta Penting

Nama	Lihat	Simbol	Besar
Konstanta Gravitasi	§ 1.7.1	$G$	$(6,673 \pm 3) \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$
Konstanta AVOGADRO	§ 5.2.1	$L$	$(6,02241 \pm 4) \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Volume Mol (standard)	§ 5.2.1	$V_{\text{mol}}$	$(0,0224136 \pm 4) \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1}$
Konstanta BOLTZMANN	§ 5.2.1	$k$	$(1,38062 \pm 6) \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
Konstanta gas	§ 5.1.7	$R = kL$	$(8,3142 \pm 3) \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$
Kecepatan cahaya di vakuum	§ 9.3.1	$c$	$(2,997925 \pm 1) \cdot 10^8 \text{ m det}^{-1}$
Konstanta permittivitas (vakuum)	§ 6.1.1	$\epsilon_0$	$8,8542 \cdot 10^{-12} \text{ A det V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
Konstanta permeabilitas magnetik (vakuum)	§ 7.2.3	$\mu_0 = 1/\epsilon_0 c^2$	$1,2566 \cdot 10^{-6} \text{ V det A}^{-1}$
Mutant Elementer	§ 6.1.2	$e$	$(1,6022192 \pm 1) \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Konstanta FARADAY	§ 6.4.3	$F = eL$	$(9,64867 \pm 5) \cdot 10^4 \text{ C Mol}^{-1}$
Massa diam Proton	§ 13.1.3	$m_p$	$(1,67261 \pm 1) \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Massa diam Neutron	§ 13.4.2	$m_n$	$1,67482 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Massa diam Elektron	§ 6.1.2	$m_e$	$(9,10956 \pm 5) \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
Mutant spesifik Elektron	§ 6.1.2	$e/m_e$	$(1,758803 \pm 5) \cdot 10^{11} \text{ C kg}^{-1}$
Energi diam Elektron	§ 12.5.8	$mc^2$	$0,51100 \text{ MeV}$
Perbandingan massa Proton/Elektron	§ 13.1.3	$m_p/m_e$	$1836,10$
Satuan massa atom	§ 3.1.3	$\frac{1}{12} m(C^{12})$	$1660555 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \equiv 931,48 \text{ MeV}$
Konstanta PLANCK	§ 8.1.2	$\hbar$	$(6,62062 \pm 2) \cdot 10^{-34} \text{ J det.}$
Konstanta STEFAN-BOLTZMANN	§ 11.2.8	$\hbar = h/2\pi$	$1,0546 \cdot 10^{-34} \text{ J det.}$
Jari-jari Bohr	§ 12.3.4	$\sigma = 2\pi^5 k^4 / 15 e^2 h^3$	$(5,6696 \pm 10) \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-4}$
Konstanta Rydberg	§ 12.3.3	$r_1 = 4\pi \epsilon_0 h^2 / me c^2$	$0,529116 \cdot 10^{-10} \text{ m}$
Panjang gelombang COMPTON untuk elektron	§ 12.1.3	$R_{\text{sym}} c^4 / 8\epsilon_0^2 h^3$	$(3,2898423 \pm 3) \cdot 10^{15} \text{ det}^{-1}$
Magneton BOUR	§ 12.7.1	$\lambda_e = h/m_e c$	$2,4263 \cdot 10^{-12} \text{ m}$
		$\mu_B = \mu_0 h c / 2me$	$1,1654 \cdot 10^{-29} \text{ V det m}$

