Modul

Pengembangan Keprofesian Berkelanjutan

I

Kelompok Kompetensi

PROFESIONAL

SEJARAH DAN FILSAFAT MATEMATIKA

Edisi Revisi 2018

Edisi Revisi 2018

Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan
Direktorat Jenderal Guru dan Tenaga Kependidikan
2018

MODUL PENGEMBANGAN KEPROFESIAN BERKELANJUTAN

MATEMATIKA TEKNIK
SEKOLAH MENENGAH KEJURUAN (SMK)

TERINTEGRASI PENGUATAN PENDIDIKAN KARAKTER DAN PENGEMBANGAN SOAL KETERAMPILAN BERPIKIR ARAS TINGGI (HOTS)

EDISI REVISI 2018

KELOMPOK KOMPETENSI I

PROFESIONAL:
Sejarah dan Filsafat Matematika

Penulis:
Wahyu Purnama, S.Si, M.Pd.
Maya Siti Rohmah, S.Si, M.Pd.
Penalaah:
Prof. Dr. Nanang Priatna, M.Pd.
Drs. Sukarna, M.Si.

Desain Grafis dan Ilustrasi:
Tim Desain Grafis

Direktorat Jenderal Guru dan Tenaga Kependidikan
Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan

KATA SAMBUTAN

Peran guru profesional dalam proses pembelajaran sangat penting sebagai kunci keberhasilan belajar siswa. Guru profesional adalah guru yang kompeten membangun proses pembelajaran yang baik sehingga dapat menghasilkan pendidikan yang berkualitas dan berkarakter prima. Hal tersebut menjadikan guru sebagai komponen yang menjadi fokus perhatian pemerintah pusat maupun pemerintah daerah dalam peningkatan mutu pendidikan terutama menyangkut kompetensi guru.

Pengembangan profesionalitas guru melalui Program Pengembangan Keprofesian Berkelanjutan merupakan upaya Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan melalui Direktorat Jenderal Guru dan Tenaga Kependikan dalam upaya peningkatan kompetensi guru. Sejalan dengan hal tersebut, pemetaan kompetensi guru telah dilakukan melalui Uji Kompetensi Guru (UKG) untuk kompetensi pedagogi dan profesional pada akhir tahun 2015. Peta profil hasil UKG menunjukkan kekuatan dan kelemahan kompetensi guru dalam penguasaan pengetahuan pedagogi dan profesional. Peta kompetensi guru tersebut dikelompokkan menjadi 10 (sepuluh) kelompok kompetensi. Tindak lanjut pelaksanaan UKG diwujudkan dalam bentuk pelatihan guru paska UKG sejak tahun 2016 dan akan dilanjutkan pada tahun 2018 ini dengan Program Pengembangan Keprofesian Berkelanjutan bagi Guru. Tujuannya adalah untuk meningkatkan kompetensi guru sebagai agen perubahan dan sumber belajar utama bagi peserta didik. Program Pengembangan Keprofesian Berkelanjutan bagi Guru dilaksanakan melalui Moda Tatap Muka.

Pusat Pengembangan dan Pemberdayaan Pendidik dan Tenaga Kependidikan (PPPPTK) dan, Lembaga Pengembangan dan Pemberdayaan Pendidik dan Tenaga Kependidikan Kelautan Perikanan Teknologi Informasi dan Komunikasi (LP3TK KPTK) merupakan Unit Pelaksanana Teknis di lingkungan Direktorat Jenderal Guru dan Tenaga Kependidikan yang bertanggung jawab dalam mengembangkan perangkat dan melaksanakan peningkatan kompetensi guru sesuai bidangnya. Adapun perangkat pembelajaran yang dikembangkan tersebut adalah modul Program Pengembangan Keprofesian Berkelanjutan melalui Pendidikan dan Pelatihan Guru moda tatap muka untuk semua mata pelajaran dan kelompok kompetensi. Dengan modul ini diharapkan program Pengembangan Keprofesian Berkelanjutan memberikan sumbangan yang sangat besar dalam peningkatan kualitas kompetensi guru.

Mari kita sukseskan Program Pengembangan Keprofesian Berkelanjutan melalui Pendidikan dan Pelatihan Guru ini untuk mewujudkan Guru Mulia karena Karya.

Jakarta, Juli 2018

Direktur Jenderal Guru
dan Tenaga Kependidikan,

Dr. Supriano, M.Ed.
NIP 196208161991031001

KATA PENGANTAR

Undang–Undang Republik Indonesia Nomor 14 Tahun 2005 tentang Guru dan Dosen mengamanatkan adanya pembinaan dan pengembangan profesi guru secara berkelanjutan sebagai aktualisasi dari profesi pendidik. Program Peningkatan Keprofesian Berkelanjutan dilaksanakan bagi semua guru, baik yang sudah bersertifikasi maupun belum bersertifikasi. Untuk melaksanakan Program Peningkatan Keprofesian Berkelanjutan bagi guru, pemetaan kompetensi telah dilakukan melalui Uji Kompetensi Guru (UKG) bagi semua guru di di Indonesia. Dengan melihat hasil UKG dapat diketahui secara objektif kondisi guru saat ini, dan data tersebut dapat digunakan untuk meningkatan kompetensi guru tersebut.

Modul ini disusun sebagai materi utama dalam program peningkatan kompetensi guru mulai tahun 2017 yang diberi nama Peningkatan Keprofesian Berkelanjutan (PKB). Program ini disesuaikan dengan mata pelajaran/paket keahlian yang diampu oleh guru dan kelompok kompetensi yang diindikasi perlu untuk ditingkatkan. Untuk setiap mata pelajaran/paket keahlian telah dikembangkan sepuluh modul kelompok kompetensi yang mengacu pada Standar Kompetensi Guru (SKG) dan indikator pencapaian kompetensi (IPK) yang ada di dalamnya. Demikian pula soal-soal Uji Kompetensi Guru (UKG) telah terbagi atas 10 kelompok kompetensi. Sehingga program Peningkatan Keprofesian Berkelanjutan yang ditujukan bagi guru berdasarkan hasil UKG diharapkan dapat menjawab kebutuhan guru dalam peningkatan kompetensinya.

Sasaran program strategis pencapaian target RPJMN tahun 2015–2019 antara lain adalah meningkatnya kompetensi guru dilihat dari *Subject Knowledge* dan *Pedagogical Knowledge* yang diharapkan akan berdampak pada kualitas hasil belajar siswa. Oleh karena itu, materi di dalam modul dirancang meliputi kompetensi pedagogik yang disatukan dengan kompetensi profesional yang didalamnya terintegrasi penguatan pendidikan karakter dan pengembangan soal keterampilan berpikir aras tinggi (HOTS) sehingga diharapkan dapat mendorong peserta diklat agar dapat langsung menerapkan kompetensi pedagogiknya dalam proses pembelajaran sesuai dengan substansi materi yang diampunya. Disamping dalam bentuk *hard-copy*, modul ini dapat diperoleh juga dalam bentuk digital, sehingga guru dapat lebih mudah mengaksesnya kapan saja dan dimana saja meskipun tidak mengikuti diklat secara tatap muka.

Kepada semua pihak yang telah bekerja keras dalam penyusunan modul program Guru Pembelajar ini, kami sampaikan terima kasih yang sebesar-besarnya.

Cimahi, Juli 2018

Kepala PPPPTK BMTI,

Drs. Marthen Katte Patiung, M.M.

NIP. 19590416 198603 1 000

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR ..... **III**

DAFTAR ISI ..... **V**

DAFTAR GAMBAR ..... **VII**

PENDAHULUAN **9**

A. LATAR BELAKANG 9
B. TUJUAN 10
C. PETA KOMPETENSI 10
D. RUANG LINGKUP 11
E. SARAN CARA PENGGUNAAN MODUL 11

KEGIATAN PEMBELAJARAN **13**

KEGIATAN BELAJAR 1 - SEJARAH MATEMATIKA 13
A. PENGANTAR 13
B. TUJUAN 13
C. INDIKATOR PENCAPAIAN KOMPETENSI 13
D. URAIAN MATERI 13
1. Sejarah Matematika 14
2. Penemu Konsep-Konsep Dasar dalam Matematika 28
3. Sejarah Matematika dalam Pembelajaran 38
4. Beberapa Tokoh Matematika 40
5. Sejarah Matematika Konsep Matematika Jenjang SMK 53
6. Konsep dan Sistem Bilangan 54
7. Konsep Aljabar 57
8. Konsep Geometri 60
9. Konsep Kalkulus 62
10. Konsep Kombinatorika 65
11. Teori Peluang 65
12. Statistika 66
E. AKTIVITAS PEMBELAJARAN 68
F. RANGKUMAN 73
G. TES FORMATIF 75
H. KUNCI JAWABAN 76
I. UMPAN BALIK DAN TINDAK LANJUT 78
KEGIATAN BELAJAR 2 - FILSAFAT MATEMATIKA 79
A. PENGANTAR 79
B. TUJUAN 79
C. INDIKATOR PENCAPAIAN KOMPETENSI 79
D. URAIAN MATERI 80
1. Pengertian dan ruang lingkup filsafat 80

2. *Hubungan filsafat dengan matematika* *81*
3. *Filsafat matematika* *81*
4. *Epistemologi, Ontologi, dan Metodologi Matematika* *88*
5. *Etnomathematics* *92*
6. *Implikasi Filsafat Matematika dalam Pembelajaran Sekolah* *92*

E. AKTIVITAS PEMBELAJARAN 93
F. RANGKUMAN 96
G. TES FORMATIF 98
H. KUNCI JAWABAN 99
I. UMPAN BALIK DAN TINDAK LANJUT 100

PENUTUP **101**

UJI KOMPETENSI **102**

DAFTAR PUSTAKA **105**

GLOSARIUM **106**

LAMPIRAN **108**

DAFTAR GAMBAR

Gambar 1 Batu Rosetta 15
Gambar 2 Papirus Rhind 16
Gambar 3 Papirus Moskow 19
Gambar 4 Tulisan Paku 21
Gambar 5 Sir Isaac Newton 29
Gambar 6 Gottfriend Wilhem Leibniz 30
Gambar 7 Karl Weierstrass 32
Gambar 8 Maria Gaetana Agnesi 33
Gambar 9 Josiah Willard Gibbs 34
Gambar 10 Georg Friedrich Bernhard Riemann 34
Gambar 11 Leonhard Euleur 36
Gambar 12 Johann Bernoulli 37
Gambar 13 Augustin-Louis Cauchy 38
Gambar 14 Pythagoras 40
Gambar 15 Bukti Geometris Teorema Pythagoras 41
Gambar 16 Euclid 42
Gambar 17 Archimedes 43
Gambar 18 Brahmagupta 44
Gambar 19 Al-Khwarizmi 45
Gambar 20 Fibonacci 46
Gambar 21 Descartes 47
Gambar 22 Fermat 48
Gambar 23 Pascal 49
Gambar 24 Gauss 51
Gambar 25 Cantor 52
Gambar 26 Aristoteles 54
Gambar 27 Al-Kashi 55
Gambar 28 John Napier 56
Gambar 29 Deskripsi Segitiga Pascal oleh Yang Hui (1238–1298) 57
Gambar 30 Jianzhang Suan Shu 59

Gambar 31 Seki Kowa 59
Gambar 32 Frustum pada Papirus Moskow 60
Gambar 33 Leibniz 63
Gambar 34 Lobachevsky 64
Gambar 35 Al-Tusi 64

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Pengembangan keprofesian berkelanjutan sebagai salah satu strategi pembinaan guru dan tenaga kependidikan diharapkan dapat menjamin guru dan tenaga kependidikan mampu secara terus menerus memelihara, meningkatkan, dan mengembangkan kompetensi sesuai dengan standar yang telah ditetapkan. Pelaksanaan kegiatan PKB akan mengurangi kesenjangan antara kompetensi yang dimiliki guru dan tenaga kependidikan dengan tuntutan profesional yang dipersyaratkan.

Guru dan tenaga kependidikan wajib melaksanakan PKB baik secara mandiri maupun kelompok. Khusus untuk PKB dalam bentuk diklat dilakukan oleh lembaga pelatihan sesuai dengan jenis kegiatan dan kebutuhan guru. Penyelenggaraan diklat PKB dilaksanakan oleh PPPPTK dan LPPPTK KPTK atau penyedia layanan diklat lainnya. Pelaksanaan diklat tersebut memerlukan modul sebagai salah satu sumber belajar bagi peserta diklat. Modul merupakan bahan ajar yang dirancang untuk dapat dipelajari secara mandiri oleh peserta diklat berisi materi, metode, batasan-batasan, dan cara mengevaluasi yang disajikan secara sistematis dan menarik untuk mencapai tingkatan kompetensi yang diharapkan sesuai dengan tingkat kompleksitasnya.

Untuk mempersiapkan kegiatan PKB dalam bentuk diklat bagi guru-guru matematika diperlukan adanya modul yang tepat sesuai dengan tuntutan dari Permendinas Nomor 16 Tahun 2007 tentang Standar Kualifikasi Akademik dan Kompetensi Guru. Dari permendiknas tersebut, standar kompetensi guru yang dikembangkan dari kompetensi pedagogik memuat sepuluh kompetensi inti guru yang diantaranya memuat tentang penguasaan konsep pemanfaatan hasil penilaian dan evaluasi untuk kepentingan pembelajaran dari kompetensi profesional memuat tentang sejarah dan filsafat matematika.

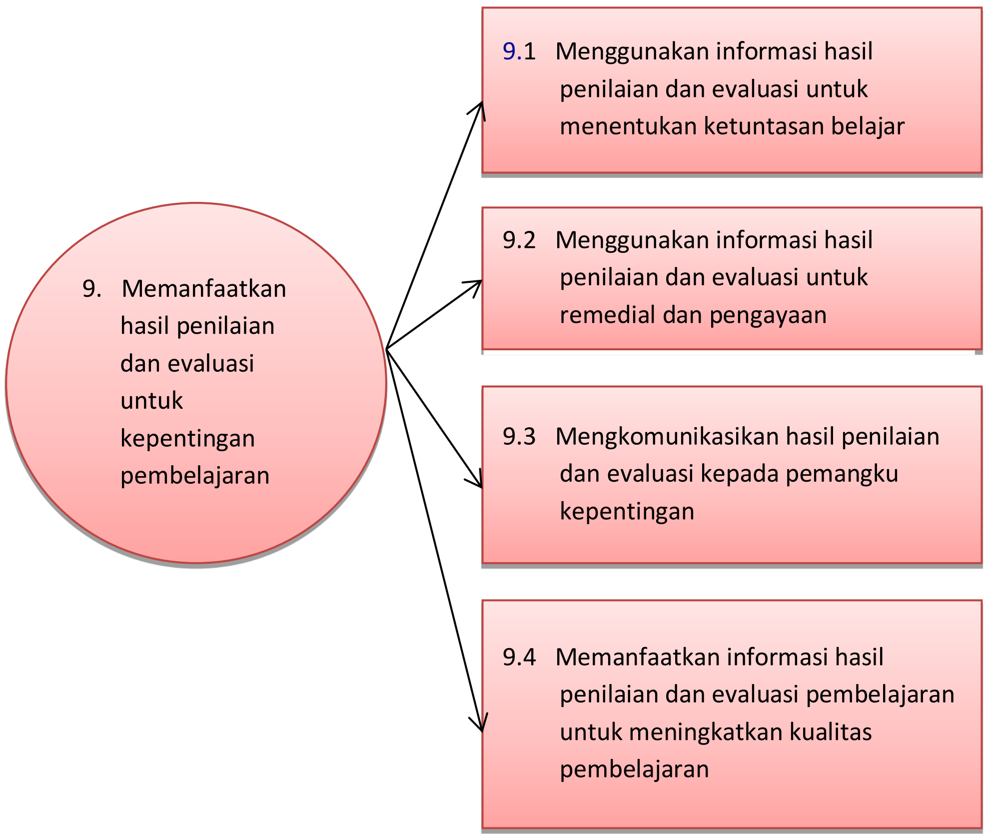
B. Tujuan

Tujuan penyusunan modul ini adalah agar peserta diklat PKB dapat menguasai konsep pemanfaatan hasil penilaian dan evaluasi untuk kepentingan pembelajaran serta sejarah dan filsafat matematika melalui kegiatan diskusi dengan percaya diri.

C. Peta Kompetensi

Pada Gambar 1 dan Gambar 2 berikut dicantumkan daftar kompetensi pedagogik dan daftar kompetensi profesional sesuai dengan Permendiknas Nomor 16 Tahun 2007 tentang Standar Kualifikasi Akademik dan Kompetensi Guru yang akan ditingkatkan melalui proses belajar dengan menggunakan modul ini.

Peta Kompetensi Pedagogik



Peta Kompetensi Profesional

D. Ruang Lingkup

Ruang lingkup dari modul ini berisikan materi tentang:

1. Pemanfaatan hasil penilaian dan evaluasi untuk kepentingan pembelajaran
2. Sejarah Matematika
3. Filsafat Matematika

E. Saran Cara Penggunaan Modul

Untuk mempelajari modul ini, hal-hal yang perlu peserta diklat lakukan adalah sebagai berikut:

1. Baca dan pelajari semua materi yang disajikan dalam modul ini.

2. Kerjakan soal-soal tes formatif dan cocokkan jawabannya dengan kunci jawaban yang ada.

3. Jika ada bagian yang belum dipahami, diskusikanlah dengan rekan belajar Anda. Jika masih menemui kesulitan, mintalah petunjuk instruktur/widyaiswara.

4. Untuk mengukur tingkat penguasaan materi kerjakan soal-soal uji kompetensi di akhir bab dalam modul ini.

KEGIATAN PEMBELAJARAN

Kegiatan Belajar 1 - Sejarah Matematika

A. Pengantar

Dalam kegiatan ini Anda akan melakukan serangkaian kegiatan untuk mencapai kompetensi berkaitan dengan Sejarah Matematika. Kegiatan-kegiatan tersebut akan terbagi dalam beberapa topik, diantaranya adalah:

1. Matematika Mesir Kuno, matematika Babilonia, matematika Yunani, matematika Cina, matematika India, dan matematika Islam.

2. Penemu konsep-konsep dasar dalam matematika yang pernah dikenal, mulai dari Decrates, Fibonacci, sampai Marie Agnesi.

B. Tujuan

Tujuan dari kegiatan pembelajaran 1 ini adalah melalui diskusi dan penugasan peserta diklat dapat menjelaskan sejarah penemuan beberapa konsep dasar dan penting dalam matematika dengan cermat.

C. Indikator Pencapaian Kompetensi

Indikator pencapaian kompetensi yang harus dikuasai setelah mengikuti kegiatan belajar ini adalah, peserta diklat dapat menjelaskan sejarah penemuan beberapa konsep dasar dan penting dalam matematika.

D. Uraian Materi

Pada kegiatan belajar ini akan dibahas mengenai sejarah penemuan matematika dari jaman Mesir kuno sampai pada penemuan beberapa konsep dasar dan penting serta perkembangannya menjadi matematika yang saat ini dipergunakan di sekolah. Matematika berasal dari bahasa Yunani "mathemata" yang menunjukkan bentuk pengajaran apapun. Pada perkembangannya digunakan untuk bidang khusus dari ilmu pengetahuan.

1. Sejarah Matematika

a. Matematika Mesir Kuno

Sejarah mengatakan bahwa matematika berasal dari Mesir adalah gagasan Aristoteles dalam bukunya yang berjudul *Metapysics* yang menyebutkan bahwa "sains-sains matematis berasal dari kawasan Mesir, karena di sana kaum yang sekelas pendeta memiliki waktu luang yang cukup."

Pandangan Proclus (410-485 S.M.), seorang pengamat ahli dari Yunani, dalam *Commentary on the First Book of Euclid's Elements* adalah bahwa sebagian besar catatan sejarah mengatakan geometri adalah ilmu yang pertama ditemukan di Mesir. Ilmu ini berasal dari perngukuran luas tanah. Hal ini sangat penting mengingat sungai Nil yang setiap tahun meluap akan menghapus batas-batas tanah.

Dari pendapat dia atas dapat disimpulkan bahwa matematika di Mesir muncul akibat kebutuhan-kebutuhan praktis. Peradaban Mesir yang terdapat di sepanjang sungai Nil yang setiap tahun banjir, menyebabkan lahan bertambah atau berkurang. Aturan geometri sederhana dipakai untuk menentukan batas-batas ladang dan daya tampung lumbung. Selain itu, peradaban Mesir membutuhkan aritematika sederhana untuk melakukan transaksi perdagangan, pemungutan pajak oleh pemerintah, mengitung bunga pinjaman, gaji, serta penyusunan kalender kerja.

Sejarah penemuan matematika Mesir kuno adalah pada saat invasi Napoleon ke Mesir pada tahun 1798. Ketika pasukan Napoleon kalah oleh armada Inggris dan memutuskan untuk meneliti tiap aspek kehidupan bangsa Mesir pada masa kuno dan zaman modern. Bersama dengan 167 ilmuwan termasuk dua matematikawan yaitu Gaspard Monge dan Jean-Baptise Fourier, mereka menghasilkan sebuah karya monumental yang berjudul *Déscription de l'Egypte.*

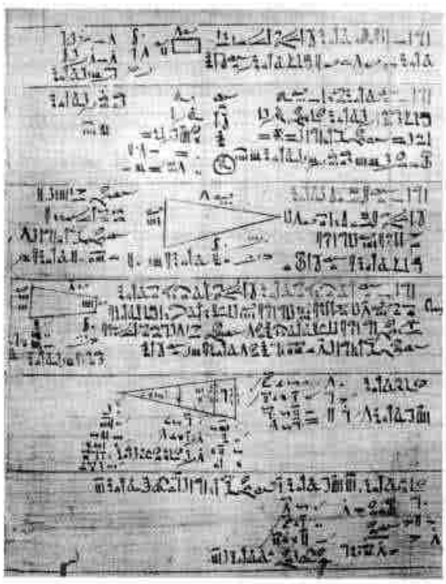
Teks yang membahas tentang peradaban Mesir Kuno, tentang monumen-monumen yang mereka bangun, Mesir modern, dan sejarah alamnya. Catatan sejarah peradaban awal ini ditulis dalam sebuah naskah yang belum mampu dibaca siapapun dan belum dapat diterjemahkan. Barulah pada saat Batu Rosetta ditemukan oleh teknisi pada saat invasi militer serupa yang dilakukan Napoleon, selanjutnya terungkaplah bahwa batu tersebut berguna untuk menerjemahkan tulisan hieroglif.

Gambar 1 Batu Rosetta

Matematika Mesir sebagian besar kita peroleh dari dua papirus yang berukuran cukup besar. Apa itu papirus? Papirus adalah alat tulis sederhana yang berasal dari kulit batang pohon yang dikeringkan dan dianyam sehingga dapat digunakan untuk menulis. Sumber lain mengatakan papirus adalah suatu lembaran atau media yang digunakan oleh orang-orang masa lalu (sekitar 1800-an SM) untuk mendokumentasikan sesuatu seperti gambar dan tulisan. Dua papirus besar yang membuka sejarah tentang matematika Mesir adalah Papirus Rhind dan Papirus Golenischev atau yang lebih dikenal dengan Papirus Moskow.

Papirus Rhind sendiri atau biasa disebut Ahmes adalah suatu risalah matematika yang menyerupai buku pentunjuk praktis dan mengandung 85 soal yang ditulis dengan huruf hieratik oleh penulis Ahmes. Tulisan ini diperkirakan berasal dari tahun 1650 SM tetapi mungkin lembaran itu adalah salinan dari dokumen yang lebih tua dari Kerajaan Tengah yaitu dari tahun 2000-1800 SM. Papyrus itu dibeli di Mesir oleh ahli Egyptologi Inggris A. Henry Rhind dan kemudian diserahkan ke British Museum. Oleh karena itulah papyrus ini kemudian dinamakan papyrus Rhind. Papyrus ini merupakan sumber utama mengenai matematika Mesir kuno dan diterbitkan dalam tahun 1927.

Papirus Rhind adalah manual instruksi bagi pelajar aritmetika dan geometri. Selain memberikan rumus-rumus luas dan cara-cara perkalian, pembagian, dan pengerjaan pecahan. Lembaran itu juga menjadi bukti bagi pengetahuan matematika lainnya, termasuk bilangan komposit dan prima, rata-rata aritmetika, geometri, dan harmonik; dan pemahaman sederhana Saringan Eratosthenes dan teori bilangan sempurna (yaitu, bilangan 6). Lembaran ini juga berisi cara menyelesaikan persamaan linear orde satu juga barisan aritmetika dan geometri.



Gambar 2 Papirus Rhind

Kandungan dalam Papirus Rhind diawali dengan suatu premis yang berkaitan dengan "sebuah kajian yang cermat tentang segala hal, memahami semua hal yang ada, pengetahuan dari semua rahasia yang menghalangi". Inti dari Papirus Rhind adalah bagaimana cara mengalikan dan membagi. Berikut adalah cara mengalikan menurut Papirus Rhind. Perkalian dari dua bilangan dapat diselesaikan dengan cara menggandakan secara berurutan salah satu dari bilangan tersebut dan kemudian menambahkan pengulang yang sesuai untuk memperoleh hasil kalinya. Contohnya, untuk mencari hasil kali 21 dengan 71, kita misalkan bilangan yang akan dikalikan adalah 71, lalu kalikan dengan dua bilangan tersebut seperti berikut:

1	71
2	142
4	284
8	568
16	1136

Kita berhenti sampai di sini, karena jika dilanjutkan maka pengali yang muncul selanjutnya untuk 71 akan lebih besar dari 21. Perhatikan bahwa $21 = 16 + 4 + 1$, kita beri tanda pada angka 16, 4, dan 1. Maka angka yang di sebelahnya kita tambahkan

1	71	v	
2	142		
4	284	v	
8	568		
16	1136	v	+
21	1491		

Dengan menambahkan kedua kolom didapat 21 dan 1491. Hasil perkalian yang dimaksud adalah 1491. Jika diuraikan maka akan nampak seperti berikut

$$1491 = 71 + 284 + 1136 = (1 + 4 + 16) \cdot 71 = 21 \cdot 71$$

Jika kita ambil 21 sebagai bilangan yang dikalikan dan 71 sebagai pengalinya, maka akan diperoleh hasil sebagai berikut

1	21	v	
2	42	v	
4	84	v	
8	168		
16	336		
32	672		
64	1344	v	+
71	1491		

Terlihat bahwa hasilnya adalah sama dengan yang sebelumnya. Sekarang bagaimana cara membagi?

Untuk pembagian, misalkan 35 dibagi 8. Maka pembaginya akan digandakan sampai penggandaan berikutnya akan lebih besar dari bilangan yang dibagi. Selanjutnya, pembaginya mulai dibagi dua untuk melengkapi sisanya sampai pada nilai 1. Perhitungannya seperti berikut.

1	8	
2	16	
4	32	v
$\frac{1}{2}$	4	
$\frac{1}{4}$	2	v

$\frac{1}{8}$	1	v	+
71	1491		

Dengan menggandakan 16 kita peroleh 32, sehingga nilai yang hilang adalah 35-32=3. Nilai yang hilang kita lihat di kolom pembagi, nilai yang hilang tersebut akan terpenuhi dengan menjumlahkan $\frac{1}{4}$ dan $\frac{1}{8}$. Dengan demikian hasil baginya adalah: $4 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$.

Permasalahan lain yang berada pada papirus Rhind adalah luas sebuah lingkaran, yaitu yang muncul pada permasalahan 50:

Contoh dari sebidang tanah yang bulat dengan dimensi 9 khet. Berapakah luasnya? Kurangilah $\frac{1}{9}$ dari diameter tersebut, yaitu 1, sehingga sisanya adalah 8. Kalikan 8 dengan 8, hasilnya 64. Jadi, luas bidang tanah itu adalah 64 setat.

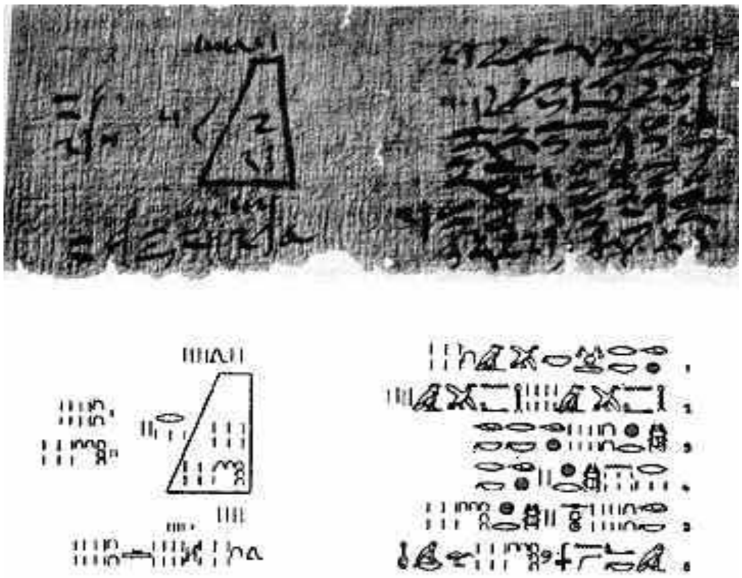
Cara penulis papirus menghitung luas lingkaran adalah: kurangi diameter lingkaran tersebut oleh $\frac{1}{9}$ bagiannya dan kuadratkan sisanya. Dapat disimbolkan sebagai berikut:

$$A = \left(d - \frac{1}{9}\right)^2 = \left(\frac{8d}{9}\right)^2$$

Coba kita bandingkan dengan rumus luas lingkaran yang dipakai saat ini $L = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2$

$$\pi\frac{d^2}{4} = \left(\frac{8d}{9}\right)^2 \Leftrightarrow \pi = 4\left(\frac{8}{9}\right)^2 = 3{,}1605 \ldots$$

Papirus besar lainnya adalah Papirus Golenischev disebut juga papirus Moskow, karena dimiliki oleh Museum Seni Murni di Moskow. Naskah ini berisikan *soal kata* atau *soal cerita*, yang barangkali ditujukan sebagai hiburan. Satu soal dipandang memiliki kepentingan khusus karena soal itu memberikan metoda untuk memperoleh volume limas terpenggal: "Jika Anda dikatakan: Limas terpenggal setinggi 6 satuan panjang, yakni 4 satuan panjang di bawah dan 2 satuan panjang di atas. Anda menguadratkan 4, sama dengan 16. Anda menduakalilipatkan 4, sama dengan 8. Anda menguadratkan 2, sama dengan 4. Anda menjumlahkan 16, 8, dan 4, sama dengan 28. Anda ambil sepertiga dari 6, sama dengan 2. Anda ambil dua kali lipat dari 28, sama dengan 56. Maka lihatlah, hasilnya sama dengan 56. Anda memperoleh kebenaran."



Gambar 3 Papirus Moskow

Geometri Mesir kuno dijelaskan oleh Herodotus yang mengunjungi Nil sekitar 460-455 S.M. sebagai berikut:

Mereka juga berkata bahwa raja ini (Sesostris) membagi tanah kepada semua penduduk Mesir dengan tujuan agar masing-masing dari mereka mendapatkan ukuran yang sama dan untuk kemudian menarik pendapatan dari mereka, dengan menarik pajak tahunan. Tetapi siapapun yang tanahnya terusik harus datang kepada sang raja dan menjelaskan apa yang sebenarnya terjadi. Sang raja kemudian mengirim tim peninjau, yang harus mengukur seberapa dari luas tanah yang telah berkurang, agar sang pemilik tanah hanya membayar sesuai dengan tanah yang tersisa, agar sebanding dengan besar pungutan pajaknya. Dari cara ini, tampak bahwa geometri berasal dari Mesir.

Bangsa Mesir dalam menentukan luas-luas ataupun volume-volume dari berbagai bangun datar dan bangun ruang saat itu melalui perjalanan panjang hasil pengalaman dan penelitian *trial* and *error*. Bangsa Mesir menggali fakta-fakta yang berguna bagi pengukuran tanpa memusingkan bukti deduktifnya. Beberapa dari rumus yang mereka punyai mendekati benar akan tetapi cukup praktis untuk dipakai sehari-hari.

Contohnya adalah perhitungan piramida terpotong pada Papirus Moskow yang telah diuraikan di atas.

Perhitungan lain adalah pada sebuah naskah untuk tujuan peringatan (sekitar 100 S.M.) di Kuil Horus wilayah Edfu, terdapat referensi-referensi yang terkait dengan banyak sekali bangun bersisi empat yang dipersembahkan bagi kuil itu. Untuk tiap bangun tersebut, luas diperoleh dengan mengambil hasil kali dari rata-rata dua pasang sisi yang berlawanan, dengan rumus

$$A = \frac{1}{4}(a + c)(b + d)$$

Dimana a, b, c dan d adalah panjang-panjang dari sisi-sisi secara berurutan. Rumus tersebut jelas tidak benar, karena rumus itu akan memberikan nilai yang benar jika bangun yang diukur kurang lebih menyerupai persegi panjang.

b. Matematika Babilonia

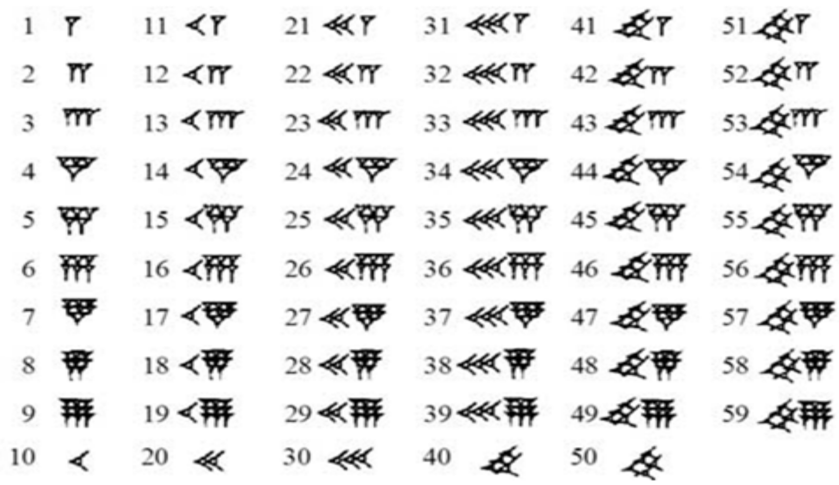
Matematika Babilonia merujuk pada seluruh matematika yang dikembangkan oleh bangsa Mesopotamia yang kini bernama Iraq, sejak permulaan Sumeria hingga permulaan peradaban helenistik. Dinamai "Matematika Babilonia" karena peran utama kawasan Babilonia sebagai tempat untuk belajar. Lebih dari 400 lempengan tanah liat ditemukan sebagai sumber sejarah bangsa Babilonia yang digali sejak 1850-an. Lempengan-lempengan tersebut ditulis dengan menggunakan tulisan berbentuk paku. Lempengan tersebut diberi tulisan ketika tanah liat masih basah, dan kemudian dibakar dalam tungku atau dijemur di bawah terik matahari bahkan beberapa di antaranya adalah karya rumahan.

Bukti terdini matematika menyebutkan bahwa lempengan bertulisan tersebut adalah karya bangsa Sumeria, yang membangun peradaban kuno di Mesopotamia. Mereka mengembangkan sistem rumitmetrologi sejak tahun 3000 SM. Dari kira-kira 2500 SM ke muka, bangsa Sumeria menuliskan tabel perkalian pada lempengan tanah liat yang berkaitan dengan geometri dan pembagian. Jejak terdini sistem bilangan Babilonia juga merujuk pada periode ini.

Sebagian besar lempengan tanah liat yang sudah diketahui berasal dari tahun 1800 sampai 1600 SM, dan meliputi topik-topik pecahan, aljabar, persamaan kuadrat dan kubik, dan perhitungan bilangan regular, invers perkalian, dan bilangan prima kembar. Lempengan itu juga meliputi tabel perkalian dan metode penyelesaian persamaan linear dan persamaan kuadrat. Lempengan Babilonia 7289 SM memberikan hampiran bagi $\sqrt{2}$ yang akurat sampai lima tempat desimal.

Teks matematika Babilonia sangat banyak jumlahnya dan teredit dengan sangat baik. Sistem matematik Babilonia adalah seksagesimal atau bilangan berbasis 60. Kemajuan besar dalam matematika ini terjadi karena dua alasan. Pertama, angka 60 memiliki banyak pembagi yaitu 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, dan 30, yang membuat perhitungan jadi lebih mudah. Selain itu, bangsa Babilonia memiliki sistem bilangan real dimana digit yang ditulis sebelah kiri memiliki nilai yang lebih besar seperti bilangan berbasis 10.

Tulisan dan angka bangsa Babilonia sering juga disebut sabagai tulisan paku karena bentuknya seperti paku. Orang Babilonia menuliskan huruf paku menggunakan tongkat yang berbentuk segitiga yang memanjang (prisma segitiga) dengan cara menekannya pada lempeng tanah liat yang masih basah sehingga menghasilkan cekungan segitiga yang meruncing menyerupai gambar paku.



Gambar 4 Tulisan Paku

Pencapaian dalam ilmu matematika lainnya yaitu ditemukannya penentuan nilai akar kuadrat, bahkan para ilmuan Babilonia telah mendemonstrasikan teori Pythagoras, jauh sebelum Pythagoras sendiri muncul dengan teorinya dan hal ini dibuktikan oleh Dennis Ramsey yang menerjemahkan sebuah catatan kuno yang berasal dari tahun 1900 sebelum masehi. Penjelasannya seperti berikut:

"4 adalah panjangnya dan 5 adalah panjang diagonalnya, lalu berapa lebarnya?. Mereka mengumpamakan jika kedua angka tadi dikalikan dengan angka itu

sendiri, maka akan ditemukan nilai tengahnya. Jika 4 x 4 = 16 dan 5 x 5 = 25, maka selisih antara 16 dan 25 adalah 9. Dari angka berapakah kita bisa mendapatkan angka 9? Angka tersebut harus bisa menghasilkan 9 jika angka tersebut dikalikan dengan angka itu sendiri, dan 9 didapatkan dari 3 x 3. Sehingga disimpulkan bahwa 3 adalah lebarnya karena semua angka dikalikan dengan angka itu sendiri."

Catatan kuno tentang kuadrat dan kubus yang dihitung menggunakan angka 1 hingga 60, ditemukan di Senkera dimana orang-orang telah mengenal jam matahari, clepsydra, juga tuas dan katrol, padahal saat itu mereka belum memiliki pengetahuan tentang mekanika. Bangsa Babilonia juga sudah lama mengenal lensa kristal dan penyalaan bubut sebelum ditemukan oleh Austen Henry Layard dari Nimrud.

Bangsa Babilonia juga sudah sangat familiar dengan aturan umum untuk mengukur suatu area. Mereka mengukur keliling lingkaran sebanyak 3 kali diameter dan luasnya sebagai satu per duabelas kuadrat dari lingkaran, dan jika hitungannya benar, maka nilai π akan bernilai 3.

Volume silinder diambil sebagai produk dari alas dan tinggi, namun, volume frustum sebuah kerucut atau piramida persegi dihitung dengan tidak benar sebagai produk dari ketinggian dan setengah jumlah dari basis. Juga ada penemuan terbaru dalam sebuah catatan kuno mencantumkan bahwa nilai π adalah 3 dan $\frac{1}{8}$. Di Babilonia juga dikenal mil, yang merupakan ukuran sebesar jarak sekitar tujuh mil hari ini. Pengukuran jarak ini dikonversi menjadi satu mil, waktu yang digunakan untuk mengukur perjalanan matahari, yang mempresentasikan panjangnya waktu.

Matematika Babilonia ditulis menggunakan sistem bilangan seksagesimal (basis-60). Penggunaan bilangan seksagesimal dapat dilihat pada penggunaan satuan waktu yaitu 60 detik untuk semenit, 60 menit untuk satu jam, dan pada penggunaan satuan sudut yaitu 360 (60 x 6) derajat untuk satu putaran lingkaran, juga penggunaan detik dan menit pada busur lingkaran yang melambangkan pecahan derajat. Kemajuan orang Babilonia di dalam matematika didukung oleh fakta bahwa 60 memiliki banyak pembagi. Bangsa Babilonia memiliki sistem nilai-tempat yang sejati, di mana angka-angka yang dituliskan di lajur lebih kiri menyatakan nilai yang lebih besar, seperti di dalam sistem desimal. Akan tetapi, terdapat kekurangan pada kesetaraan koma desimal, sehingga nilai tempat suatu simbol seringkali harus dikira-kira berdasarkan konteksnya. Pada zaman ini juga belum ditemukan angka nol. Berikut contoh angka babilonia:

Untuk suatu sistem posisional tertentu diperlukan suatu konvensi tentang bilangan yang menunjukkan keunikan suatu bilangan. Misalnya desimal 12345 berarti: 1 x 104 + 2 x 103 + 3 x 102 + 4x 10 + 5

Sistem posisional seksagesimal Bablonia menganut cara penulisan seperti cara di atas, yaitu bahwa posisi yang paling kanan adalah untuk unit sampai 59, satu sisi di sebelah kirinya adalah untuk 60 x n, dimana $1 \leq n \leq 59$ dan seterusnya.

Sekarang kita menggunakan notasi dimana bilangan dipisahkan dengan koma, misalnya, 1,57,46,40 menyatakan bilangan seksagesimal1×60 pangkat 3 tambah 57 kali 60 pangkat dua ditambah 46 kali 60 tambah 40.Yaitu, dalam notasi desimal bernilai 424000.

Namun masih terdapat persoalan dengan sistem ini. Karena dua dinyatakan dengan dua karakter yang masing-masing menyatakan satu unit, dan 61 dinyatakan dengan satu karakter untuk satu unit sebagai bilangan pertama dan sebagai bilangan kedua adalah karakter yang identik untuk satu unit maka bilangan seksagesimal Babiloniaia 1,1 dan 2 secara esensial dinyatakan secara serupa. Namun hal ini bukanlah persoalan sebenarnya karena adanya spasi diantara karakter-karakter tersebut menunjukkan perbedaan-perbedaannya. Dalam simbol untuk 2 kedua karakter yang menyatakan unit saling berdempet dan menjadi simbol tunggal. Dalam bilangan 1,1 terdapat suatu spasi diantaranya.

Satu persoalan yang lebih serius adalah fakta bahwa tidak terdapat nol untuk menyatakan posisi yang kosong. Bilangan seksagesimal menyatakan bilangan 1 dan 1,0 untuk 1 dan 60 desimal, memiliki pernyataan yang sama persis dan spasi tidak membawa perbedaaan. Barangkali peradaban Babilon selanjutnya telah menetapkan sebuah simbol untuk menyatakan kekosongan.

Jikalau posisi untuk kosong menjadi masalah untuk bilangan bulat maka justru terdapat persoalan yang lebih besar pada fraksi seksagesimal Babilonia. Bangsa Babilonia menggunakan suatu sistem fraksi seksagesimal yang serupa dengan fraksi desimal kita. Misalnya jika kita menulis 0,125 maka berarti 1/10 + 2/100 +5/1000 = 1/8. Tentu saja fraksi dengan bentuk a/b, dalam bentuknya yang paling rendah, dapat dinyatakan sebagai fraksi desimal finit jika dan hanya jika b tidak dapat dibagi dengan bilangan Prima selain 2 atau 5. Jadi 1/3 tidak memiliki fraksi desimal yang finit. Serupa halnya fraksi seksagesimal Vabilonia 0;7,30 dinyatakan dengan 7/60 +30/3600 yang ditulis dengan notasi kita sebagai 1/8.

Karena 60 dapat dibagi dengan bilangan prima 2,3 dan 5 maka sebuah bilangan dengan bentuk a/b, dan bentuknya yang paling rendah, dapat dinyatakan sebagai fraksi desimal finit jika dan hanya jika b tidak dapat dibagi oleh bilangan selain 2,3,dan 5. Fraksi yang lain oleh karenanya dapat dinyatakan sebagai fraksi seksagesimal dan bukan sebagai fraksi desimal finit.

Perkiraan notasi tersebut digunakan untuk menyatakan bilangan seksagesimal dengan bilangan pecahan. Untuk menyatakan 10,12,5;1.52.30 adalah

10 x 602 + 12 x 60 + 5 +1/60 +52/602 + 30/603

Yang dalam notasi kita adalah 36725 1/32. Hal ini berlaku namun di atas telah dikemukakan notasi semikolon untuk menunjukkan dimana bagian integernya berakhir dan bagian pecahannya dimulai. Inilah "koma seksagesimal" dan memainkan peranan yang analog pada koma desimal. Namun bangsa Babilonia tidak memiliki notasi untuk menunjukkan dimana bagian integer berakhir dan bagian pecahan dimulai. Jika kita menulis 10,12,5,1,52,30 tanpa memiliki suatu notasi tentang "koma seksagesimal" maka bilangan ini dapat memiliki beberapa arti sebagai berikut:

0;10,12,5,1,52,30

10;12,5,1,52,30

10,12;5,1,52,30

10,12,5;1,52,30

10,12,5,1;52,30

10,12,5,1,52;30

10,12,5,1,52,30

Sebagai tambahan, tentu saja, sampai 10,12,5,1,52,30,0 atau 0;0,10,12,5,1,52,30 dan seterusnya.

c. Matematika Yunani

Matematika Yunani ditenggarai dimulai oleh Thales dari Miletus (kira-kira 624 sampai 546 SM) dan Pythagoras dari Samos (kira-kira 582 sampai 507 SM). Menurut legenda, Pythagoras bersafari ke Mesir untuk mempelajari matematika, geometri, dan astronomi dari pendeta Mesir. Thales menggunakan geometri untuk menyelesaikan soal-soal perhitungan ketinggian piramida dan jarak perahu dari garis pantai. Dia dihargai sebagai orang pertama yang menggunakan penalaran deduktif untuk diterapkan pada geometri, dengan menurunkan empat akibat wajar dari teorema Thales. Teorema Thales sendiri menyatakan bahwa sudut-sentuh-busur yang dilukiskan di dalam setengah-lingkaran adalah sudut siku-siku. Teorema ini mungkin dipelajarinya saat dia berada di Babilonia, tetapi yang khas adalah peragaan teorema tersebut. Thales juga dianggap sebagai orang terdini di dalam sejarah, yang kepadanya temuan-temuan khusus matematika disematkan.

Meskipun tidak diketahui apakah Thales atau bukan yang pertama memperkenalkan struktur logika ke dalam matematika, yang saat ini menjadi hal yang berlaku di manapun, tetapi diketahui bahwa di dalam dua ratus tahun sesudah kematian Thales bangsa Yunani memperkenalkan struktur logika dan gagasan pembuktian ke dalam matematika.

Pythagoras mendirikan Mazhab Pythagoras, yang mendakwakan bahwa matematikalah yang menguasai semesta. Mazhab Pythagoraslah yang menggulirkan istilah "matematika", dan merekalah yang memulakan pengkajian matematika. Mazhab Pythagoras dihargai sebagai penemu bukti pertama teorema Pythagoras.

Mazhab Pythagoras dihargai dengan beberapa pengembangan matematika tingkat lanjut, seperti penemuan bilangan irasional. Sejarawan menghargai mereka atas peran utamanya di dalam pengembangan matematika Yunani (khususnya teori bilangan dan geometri) ke dalam sistem logika utuh menurut definisi-definisi yang jelas dan teorema-teorema yang terbuktikan, yang dianggap sebagai subjek yang pantas dari pengkajian di dalam kebenarannya sendiri, tanpa memandang terapan praktis yang menjadi perhatian utama bagi bangsa Mesir dan Babilonia.

d. Matematika Cina

Tulisan matematika yang dianggap tertua dari Cina adalah Chou Pei Suan Ching, berangka tahun antara 1200 SM sampai 100 SM. Hal yang menjadi catatan khusus dari penggunaan matematika Cina adalah sistem notasi posisional bilangan desimal, yang disebut pula "bilangan batang" dimana sandi-sandi yang berbeda digunakan untuk bilangan-bilangan antara 1 dan 10, dan sandi-sandi lainnya sebagai perpangkatan dari sepuluh. Dengan demikian, bilangan 123 ditulis menggunakan lambang untuk "1", diikuti oleh lambang untuk "100", kemudian lambang untuk "2" diikuti lambang utnuk "10", diikuti oleh lambang untuk "3".

Karya tertua yang masih terawat mengenai geometri di Cina berasal dari peraturan kanonik filsafat Mohisme kira-kira tahun 330 SM, yang disusun oleh para pengikut Mozi (470–390 SM). Mo Jing menjelaskan berbagai aspek dari banyak disiplin yang berkaitan dengan ilmu fisika, dan juga memberikan sedikit kekayaan informasi matematika.

Pada tahun 212 SM, Kaisar Qín Shǐ Huáng (Shi Huang-ti) memerintahkan semua buku di dalam Kekaisaran Qin selain daripada yang resmi diakui pemerintah haruslah dibakar. Akibat dari perintah ini adalah begitu sedikitnya informasi tentang matematika Cina kuno yang terpelihara yang berasal dari zaman sebelum itu.

Setelah pembakaran buku pada tahun 212 SM, dinasti Han (202 SM–220 M) menghasilkan karya matematika yang barangkali sebagai perluasan dari karya-karya yang kini sudah hilang. Yang terpenting dari semua ini adalah Sembilan Bab tentang Seni Matematika, judul lengkap yang muncul dari tahun 179 M, tetapi wujud sebagai bagian di bawah judul yang berbeda. Ia terdiri dari 246 soal kata yang melibatkan pertanian, perdagangan, pengerjaan geometri yang menggambarkan rentang ketinggian dan perbandingan dimensi untuk menara pagoda Cina, teknik, survey, dan bahan-bahan segitiga siku-siku dan π. Ia juga menggunakan prinsip Cavalieri tentang volume lebih dari seribu tahun sebelum Cavalieri mengajukannya di Barat. Ia menciptakan bukti matematika untuk teorema Pythagoras, dan rumus matematika untuk eliminasi Gauss. Liu Hui memberikan komentarnya pada karya ini pada abad ke-3 M. karya-karya matematika lainnya adalah dari astronom Han dan penemu Zhang Heng (78–139) memiliki perumusan untuk pi juga, yang berbeda dari cara perhitungan yang dilakukan oleh Liu Hui. Zhang Heng menggunakan rumus pi-nya untuk menentukan volume bola. Juga terdapat karya tertulis dari matematikawan dan teoriwan musikJing Fang (78–37 SM); dengan menggunakan koma Pythagoras, Jing mengamati bahwa 53 perlimaan sempurna menghampiri 31 oktaf. Ini kemudian mengarah pada penemuan 53 temperamen sama, dan tidak pernah dihitung dengan tepat di tempat lain hingga seorang Jerman, Nicholas Mercator melakukannya pada abad ke-17.

Bangsa Cina juga membuat penggunaan diagram kombinatorial kompleks yang dikenal sebagai kotak ajaib dan lingkaran ajaib, dijelaskan pada zaman kuno dan disempurnakan oleh Yang Hui (1238–1398 M). Zu Chongzhi (abad ke-5) dari Dinasti Selatan dan Utara menghitung nilai pi sampai tujuh tempat desimal, yang bertahan menjadi nilai pi paling akurat selama hampir 1.000 tahun.

e. Matematika India

Matematika Vedanta dimulai di India sejak Zaman Besi. Shatapatha Brahmana (kira-kira abad ke-9 SM), menghampiri nilai π. Sulba Sutras (kira-kira 800–500 SM) merupakan tulisan-tulisan yang berisi tentang geometri yang menggunakan bilangan irasional, bilangan prima, aturan tiga dan akar kubik; menghitung akar kuadrat dari 2 sampai sebagian dari seratus ribuan; memberikan metode konstruksi lingkaran yang luasnya menghampiri persegi yang diberikan, menyelesaikan persamaan linear dan kuadrat; mengembangkan tripel Pythagoras secara aljabar, dan memberikan pernyataan dan bukti numerik untuk teorema Pythagoras.

Pāṇini (kira-kira abad ke-5 SM) yang merumuskan aturan-aturan tata bahasa Sanskerta. Notasi yang dia gunakan sama dengan notasi matematika modern, dan menggunakan aturan-aturan meta, transformasi, dan rekursi. Pingala (kira-kira abad ke-3 sampai abad pertama SM) di dalam risalahnya prosody menggunakan alat yang bersesuaian dengan sistem bilangan biner. Pembahasannya tentang kombinatorikameter bersesuaian dengan versi dasar dari teorema binomial. Karya Pingala juga berisi gagasan dasar tentang bilangan Fibonacci (yang disebut mātrāmeru).

Surya Siddhanta (kira-kira 400) memperkenalkan fungsi trigonometrisinus, kosinus, dan balikan sinus. Aryabhata, pada tahun 499, memperkenalkan fungsi versinus, menghasilkan tabel trigonometri India pertama tentang sinus, mengembangkan teknik-teknik dan algoritmaaljabar, infinitesimal, dan persamaan diferensial, dan memperoleh solusi seluruh bilangan untuk persamaan linear oleh sebuah metode yang setara dengan metode modern, bersama-sama dengan perhitungan astronomi yang akurat berdasarkan sistem heliosentrisgravitasi. Dia juga memberikan nilai π yang bersesuaian dengan 62832/20000 = 3,1416. Pada abad ke-14, Madhava dari Sangamagrama menemukan rumus Leibniz untuk pi, dan, menggunakan 21 suku, untuk menghitung nilai π sebagai 3,14159265359.

2. Penemu Konsep-Konsep Dasar dalam Matematika

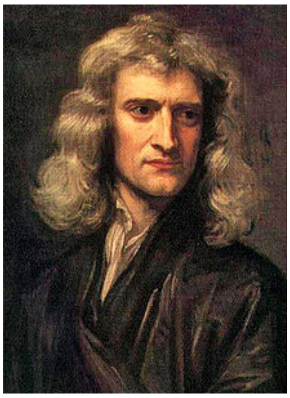
a. Rene Decrates

Rene Decrates dikenal sebagai ahli filsafat modern besar yang pertama. Ia juga penemu biologi modern, ahli fisika dan seorang matematikawan. Decrates lahir di Touraine, Perancis, merupakan putra dari seorang ahli hukum.

Decrates menyelidiki suatu metode berfikir yang umum yang akan memberi pertalian pada pengetahuan dan menuju kebenaran dalam ilmu-ilmu. Penyelidikan itu mengantarnya ke matematika, yang ia simpulkan sebagai sarana pengembangan kebenaran di segala bidang. Karya matematikanya yang paling berpengaruh adalah *La Geometrie*, yang diterbitkan tahun 1637. Di dalamnya ia mencoba suatu penggabungan dari geometri tua dan patut dimuliakan dengan aljabar yang masih bayi. Bersama dengan Pierre Fermat (1601-1665), ia diberi pujian dengan gabungan tersebut yang saat ini kita sebut geometri analitik, atau geometri ordinat, yang pengembangan lengkap kalkulus tidak mungkin tercapai tanpanya.

b. Sir Isaac Newton

Lahir di Woolsthorpe-by-Colsterworth, Lincolnshire, 4 Januari1643 –meninggal 31 Maret 1727 pada umur 84 tahun; KJ: 25 Desember 1642–20 Maret 1726 adalah seorang fisikawan, matematikawan, ahli astronomi, filsuf alam, kimiawan, dan teolog yang berasal dari Inggris. Ia merupakan pengikut aliran heliosentris dan ilmuwan yang sangat berpengaruh sepanjang sejarah, bahkan dikatakan sebagai bapak ilmu fisika klasik.



Gambar 5 Sir Isaac Newton

Karya bukunya *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* yang diterbitkan pada tahun 1687 dianggap sebagai buku paling berpengaruh sepanjang sejarah sains. Buku ini meletakkan dasar-dasar mekanika klasik. Dalam karyanya ini, Newton menjabarkan hukum gravitasi dan tiga hukum gerak yang mendominasi pandangan sains mengenai alam semesta selama tiga abad. Newton berhasil menunjukkan bahwa gerak benda di Bumi dan benda-benda luar angkasa lainnya diatur oleh sekumpulan hukum-hukum alam yang sama. Ia membuktikannya dengan menunjukkan konsistensi antara hukum gerak planet Kepler dengan teori gravitasinya. Karyanya ini akhirnya menyirnakan keraguan. Dalam bidang matematika pula, bersama dengan karya Gottfried Leibniz yang dilakukan secara terpisah, Newton mengembangkan kalkulus diferensial dan kalkulus integral. Ia juga berhasil menjabarkan teori binomial, mengembangkan "metode Newton" untuk melakukan pendekatan terhadap nilai nol suatu fungsi, dan berkontribusi terhadap kajian deret pangkat. Hal ini merupakan salah satu bukti kemajuan para ilmuwan akan heliosentrisme dan revolusi ilmiah.

c. Gottfried Wilhem Leibniz

Leibniz lahir di kota Leipzig, Sachsen pada tahun 1646. Orang tuanya, terutama ayahnya Friedrich Leibniz sudah sejak awal membangkitkan rasa ketertarikannya terhadap masalah-masalah yuridis dan falsafi. Ayahnya merupakan seorang ahli hukum dan profesor dalam bidang etika dan ibunya adalah putri seorang ahli hukum pula. Gottfried Leibniz telah belajar bahasa Yunani dan bahasa Latin pada usia 8 tahun berkat kumpulan buku-buku ayahnya yang luas. Pada usia 12 tahun ia telah mengembangkan beberapa hipotesa logika yang menjadi bahasa simbol matematika.

Gambar 6 Gottfriend Wilhem Leibniz

Pada tahun 1661 Leibniz mendaftarkan diri di Universitas Leipzig dan kuliah filsafat pada ahli teologi Johann Adam Schertzer dan teoretikus filsafat Jakob Thomasius. Pada tahun 1663 ia berubah universitas, sekarang di Universitas Jena untuk belajar lebih lanjut di bawah ahli matematika, fisika dan astronomi Erhard Wiegel untuk membedah pemikiran Pythagoras. Dengan usia 20 tahun ia ingin promosi dalam bidang doktor hukum, namun para profesor Leipzig menganggapnya terlalu muda. Leibniz maka pergi ke Nürnberg, untuk belajar lebih lanjut di Universitas Altdorf.

Kebanyakan ahli sejarah percaya bahwa Newton dan Leibniz mengembangkan kalkulus secara terpisah. Keduanya pula menggunakan notasi matematika yang berbeda pula. Menurut teman-teman dekat Newton, Newton telah menyelesaikan karyanya bertahun-tahun sebelum Leibniz, namun tidak mempublikasikannya sampai dengan tahun 1693. Ia pula baru menjelaskannya secara penuh pada tahun 1704, manakala pada tahun 1684, Leibniz sudah mulai mempublikasikan penjelasan penuh atas karyanya. Notasi dan "metode diferensial" Leibniz secara universal diadopsi di Daratan Eropa, sedangkan Kerajaan Britania baru mengadopsinya setelah tahun 1820.

Dalam buku catatan Leibniz, dapat ditemukan adanya gagasan-gagasan sistematis yang memperlihatkan bagaimana Leibniz mengembangkan kalkulusnya dari awal sampai akhir, manakala pada catatan Newton hanya dapat ditemukan hasil akhirnya saja. Newton mengklaim bahwa ia enggan mempublikasi kalkulusnya karena takut ditertawakan. Newton juga memiliki hubungan dekat dengan matematikawan Swiss Nicolas Fatio de Duillier. Pada tahun 1691, Duillie merencanakan untuk mempersiapaan versi baru buku *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* Newton, namun tidak pernah menyelesaikannya. Pada tahun 1693 pula hubungan antara keduanya menjadi tidak sedekat sebelumnya. Pada saat yang sama, Duillier saling bertukar surat dengan Leibniz.

Pada tahun 1699, anggota-anggota Royal Society mulai menuduh Leibniz menjiplak karya Newton. Perselisihan ini memuncak pada tahun 1711. Royal Society kemudian dalam suatu kajian memutuskan bahwa Newtonlah penemu sebenarnya dan mencap Leibniz sebagai penjiplak. Kajian ini kemudian diragukan karena setelahnya ditemukan bahwa Newton sendiri yang menulis kata akhir kesimpulan laporan kajian ini. Sejak itulah bermulainya perselisihan sengit antara Newton dengan Leibniz. Perselisihan ini berakhir sepeninggal Leibniz pada tahun 1716.

Mungkin Leibniz adalah pencipta lambang-lambang matematika terbesar. Kepadanya kita berhutang nama-nama kalkulus differensial dan kalkulus integral, sama halnya dengan lambang-lambang baku $\frac{dy}{dx}$ dan $\int$ untuk turunan dan integral. Istilah fungsi dan penggunaan secara konsisten dari = untuk kesamaan merupakan sumbangan lainnya. Kalkulus berkembang jauh lebih cepat di daratan Eropa daripada Inggris, sebagian besar disebabkan oleh keunggulan perlambangannya.

d. Karl Weierstrass

Banyak nama yang terkait dengan deret tak terhingga. Newton, Leibniz, keluarga Bernoulli, Taylor, Maclaurin, Euler, dan Lagrange memakai dan salah memakai deret dalam karya mereka. Mungkin tidak ada subjek lain menyebabkan pertentangan matematis yang lebih banyak, ini karena semua matematikawan yang lebih dini gagal untuk membedakan secara cermat antara derek konvergen dan divergen. Kenyataannya, Cauchy (1789-1857) merupakan orang pertama yang memberikan definisi persis tentang kekonvergenan dan membuktikan sejumlah pengujian kekonvergenan dalam bab ini. Sampai kemudian Karl Weierstras mengembangkan teori lengkap tentang deret fungsi dan menyusun legitimasi operasi-operasi yang demikian sebagai pengintegralan dan pendiferensialan suku demi suku.

Terlahir sebagai warga Jerman, Weierstarss belajar hukum di Universitas Bonn tetapi gagal memperoleh gelar (sebagian karena kelakar minum-birnya) ia memang lulus ujian negara untuk guru dan untuk selama 15 tahun mengajar subjek-subjek seperti mengarang dan olahraga senam, sementara mempelajari matematika di malam hari. Dari posisi yang tidak dikenal di sebuah kota kecil, ia kemudian melakukan karya dalam matematika yang dapat dibandingkan dengan yang terbaik di Eropa. Beberapa hasil yang diterbitkannya memberinya undangan untuk lebih dulu mengajar di

Technical Institute di Berlin kemudian di Universitas Berlin. Dari sana pengaruhnya telah menyebar ke seluruh dunia matematika. Weierstrass adalah seorang pemikir metodis yang cermat, ia bersikeras pada ketepatan yang lengkap di semua matematika dan menetapkan pembakuan yang diakui dan ditiru sampai hari ini.

Gambar 7 Karl Weierstrass

e. Maria Gaetana Agnesi

Hanya dua orang wanita yang muncul dalam daftar nama kehormatan kalkulus kita. Kurangnya perwakilan wanita mencerminkan suatu prasangka yang telah lama ada di Eropa Barat dan berlanjut hingga ke abad ini. Jarang sekali wanita didorong untuk mengejar keunggulan akademis dan mereka yang melakukan biasanya merasakan bahwa karir akademis dihalangi untuk mereka. Untunglah beberapa orang tetap bertahan meskipun ada halangan-halangan tersebut.

Salah seorang yang demikian adalah Maria Gaetana Agnesi. Yang tertua diantara 21 anak, ia dilahirkan dalam keluarga Italia kaya dan terpelajar dan mempunyai ayah seorang matematikawan. Seorang anak yang luar biasa kepandaiannya, ia menguasai bahasa Latin, Yunani, Tahudi dan beberapa bahasa modern pada usia 9 tahun. Pada usia 20 tahun, ia memulai karyanya yang terpenting, sebuah buku ajar kalkulus. Untuk masanya, kejelasannya sungguh-sungguh mengagumkan dan merupakan buku ajar kalkulus luas yang pertama sejak karya dari l'Hopital. Buku itu memberinya banyak kehormatan, termasuk pengakuan oleh Kaisar Maria Theresa dan Paus Benedict XIV.

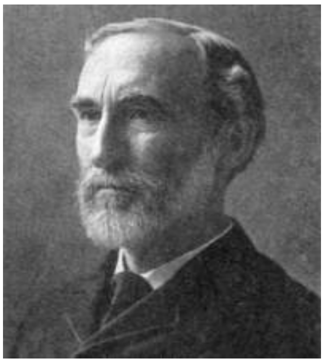
Gambar 8 Maria Gaetana Agnesi

Nama Agnesi menguasi suatu tempat dalam kepustakaan matematika melalui satu sumbangan kecil Maria, pembahasannya tentang kurva yang kemudian dikenal sebagai versiera, yang berasal dari bahasa Latin vertere, membalik.

f. Josiah Willard Gibbs

Dengan Josiah Willard Gibbs, kita perkenalkan orang amerika pertama dalam galaksi bintang-bintang yang memberikan sumbangan pada perkembangan kalkulus. Mahasiswa-mahasiswa Amerika seringkali terkejut setelah mengetahui bahwa tidak terdapat kegiatan matematik yang berarti di belahan barat sampai akhir tahun 1800-an. Memang benar bahwa American Journal of Mathematics mulai terbit pada tahun 1878, tetapi penemuannya berkat usaha J.J. Sylverster, seorang Inggris yang mengajar untuk beberapa tahun di Universitas John Hopkins. Kenyataannya samapai setelah perang dunia I, kebanyakan matematikawan Amerika adalah emigran dari eropa atau telah menerima latihan di sana.

Gibbs lahir di New Haven, Connecticut, wisudawan dari Yale, dan belajar di Paris, Berlin, dan Heidelberg. Ia ditawari kemahaguruan dalam fisika matematis di Yale, penunjukkan pertama yang demikian di Amerika, dan sebuah posisi tanpa gaji untuk 10 tahun.



Gambar 9 Josiah Willard Gibbs

Gibbs lebih terkenal dengan karena karyanya dalam menerapkan termodinamika dalam ilmu kimia. Tetapi tempatnya pada daftar kita ini adalah pada penggunaan metode vektor olehnya. Dimulai sekitar tahun 1880, ia mengembangkan perlambangan dan aljabar vektor-vektor. Pada tahun 1901, perlakuan penuh gagasan-gagasannya disajikan oleh salah seorang mahasiswanya, E. B. Wilson, dalam sebuah buku yang berpengaruh berjudul Vector Analysis

g. Georg Friedrich Bernhard Riemann

Bernhard Riemann memilih Universitas Gottingen, yang telah dan selama 100 tahun berikutnya tetap menjadi pusat matematika dunia. Di sana ia kena pengaruh W. E. Weber, seorang fisikawan kelas satu dan Karl F. Gauss, matematikawan terbesar saat itu. Pada tahun 1851 dia menerima Ph.D-nya di bawah Gauss, setelah itu dia tinggal di Gottingen untuk mengajar dan meninggal karena tbc 15 tahun kemudian.

Gambar 10 Georg Friedrich Bernhard Riemann

Hidupnya singkat, hanya 39 tahun. Ia tidak mempunyai waktu untuk menghasilkan karya matematika sebanyak yang dihasilkan Euleur atau Cauchy, akan tetapi karyanya mengagumkan untuk kualitas dan kedalamannya. Makalah-makalah matematikanya menetapkan arah baru dalam teori fungsi kompleks memprakarsai studi terdalam dari apa yang sekarang ini disebut dengan topologi. Juga dalam geometri memulai perkembangan yang memuncak 50 tahun kemudian dalan teori relativitas Einstein. Salah satu karyanya dalam kalkulus adalah definisi modern tentang integral tentu yang kita kenal sebagai integral Riemann.

h. Leonhard Euleur

Euler lahir tanggal 15 April 1707 di Basel, Switzerland. Ayahnya adalah Paul Euler, seorang pastur Calvinisme. Ibunya adalah Marguerite Brucker, anak dari seorang pastur. Pendidikan formal Euler berawal di Basel. Disana dia tinggal bersama nenek dari pihak ibunya. Di usianya yang ketigabelas, dia mendaftar di Universitas Basel, dan pada tahun 1723, dia menerima gelar ''Master of Philosophy'' dengan disertasi yang membandingkan filsafat dari Descartes dan Newton.

Setelah kelulusannya, dia mengambil les Sabtu sore dari Johann Bernoulli, yang dengan cepat menemukan bakat luar biasa dari murid barunya itu dalam matematika. Dari sini, Euler mempelajari teologi, bahasa Yunani, dan bahasa Ibrani karena desakan ayahnya, agar ia menjadi seorang pastor, tapi Bernoulli meyakinkan Paul Euler bahwa Leonhard telah ditakdirkan untuk menjadi seorang matematikawan hebat. Pada tahun 1726, Euler merampungkan disertasi tentang perambatan suara dengan gelar De Sono. Kemudian, dia berusaha mendapatkan posisi di Universitas Basel (yang akhirnya gagal).

Pada tahun 1727, dia mengikuti kompetisi Paris Academy Prize Problem (kompetisi memecahkan masalah), yang pada saat itu tantangannya adalah menemukan cara terbaik untuk menempatkan tiang kapal pada sebuah perahu. Dia mendapat juara kedua, kalah dari Pierre Bouguer—yang sekarang dikenal sebagai "bapak arsitekur angkatan laut." Euler kemudian memenangkan kompetisi tahunan yang didambakan ini dua belas kali sepanjang karirnya.

Gambar 11 Leonhard Euleur

Euler juga dikenang dengan hasil karyanya berupa kurva tertutup untuk menggambarkan pemikiran silogisme (1768). Diagram ini telah dikenal dengan nama diagram Euler. Euler dan temannya Daniel Bernoulli bertolak belakang dengan monadisme Leibniz dan filosofi Christian Wolff. Euler bersikeras bahwa pengetahuan didirikan atas dasar hukum kuantitatif yang tepat, hal yang tidak dapat dijelaskan oleh monadisme dan ilmu pengetahuan Wolffian. Kecenderungan religius Euler mungkin juga menjadi alasan ketidaksukaannya terhadap doktrin; dia bertindak lebih jauh dan menyebut ideologi Wolff sebagai "kafir dan ateis".

Leonhard Euler menyumbangkan tulisan yang setara dengan 75 buku tentang matematika. Euleur adalah tokoh dominan dari matematika abad ke delapan belas dan pengarang matematika paling subur sepanjang masa. Ia telah menerbitkan makalah-makalah pada usia 18 tahun. Minat Euler terentang di semua matematika dan fisika. Sumbangannya pada kalkulus fungsi-fungsi transenden, yaitu memperkenalkan e sebagai bilangan dasar untuk logaritma asli, memperlihatkan bahwa e dan e^2 adalah tak rasional, dan menemukan hubungan dari $e^{i\pi} = -1$.

Ia menjabat di Universitas Basel, St. Petersburg Academy of Sciences, dan Berlin Academy of Sciences kebutaan selama 17 tahun terakhir dari masa hidupnya tidak menghambat karyanya. Ia mengetahui dalam hati rumus-rumus trigonometri dan analisis. Dikatakan bahwa ia telah mengerjakan suatu perhitungan sampai 50 desimal di dalam kepalanya. Pada waktu ia meninggal, disebutkan bahwa semua matematikawan Eropa adalah mahasiswanya.

Selama 21 tahun, ia telah menulis sekitar 380 makalah. Tahun 1771, ia menderita kebutaan total. Namun Euler terus menulis bahkan jumlahnya hampir setengah dari total tulisan sebelum kebutaan. Bahkan *St Petersburg Academy* masih menerbitkan karya Euler yang belum diterbitkan selama hampir 50 tahun setelah kematiannya.Selain di bidang fisika, ia membuat lompatan besar pada geometri analitik dan trigonometri, kalkulus, dan teori bilangan. Ia memperkenalkan fungsi Beta dan fungsi Gamma (1729), serta faktor integrasi untuk persamaan differensial.

i. Johann Bernoulli

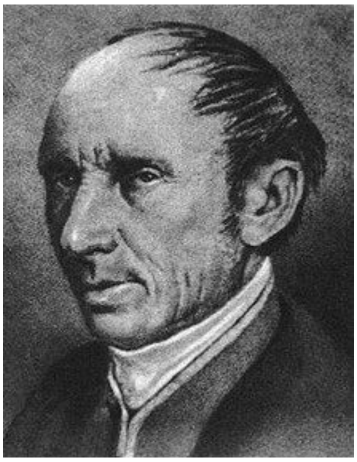
Johann dan saudaranya Jacques, setelah Newton dan Leibniz, merupakan perintis-perintis yang terpenting dari kalkulus. Kedua saudara inibersaing dengan penuh semangat dan sengit demi sebuah pengakuan. Walaupun demikian, mereka tetap saling berkomunikasi dan juga berkomunikasi dengan Leibniz tentang matematika.

Gambar 12 Johann Bernoulli

Keluarga Bernoulli menangani semua jenis masalah dasar dalam kalkulus, termasuk titik-titik balik, panjang kurva-kurva, deret tak terhingga, dan teknik-teknik pengintegralan. Johann menulis buku ajar kalkulus yang pertama pada tahun 1691 dan 1692, tetapi bagian tentang kalkulus integrl tidak diterbitkan sampai tahun 1924. Sebagai gantiya, pada tahun 1969, Guillaume F.A. de l"Hôpital, mahasiswa Johann, menerbitkan naskah kalkulus yang pertama. Bentuknya diubah sedikit dari karya gurunya. Mungkin pengaruh Johann paling baik dilihat dari mahasiswanya yang lain dan yang lebih terkenal, Leonhard Euler.

j. Augustin-Louis Cauchy

Augustin-Louis Cauchy lahir di Paris dan didik di Ecole Polytechnique. Karena kesehatannya yang buruk, ia dinasehatkan untuk memusatkan pikiran pada matematika. Selama karirnya dia menjabat mahaguru di Ecole Polytechnique dan College de France. Sumbangan-sumbangan matematisnya cemerlang dan mengejutkan dalam jumlahnya. Produktifitasnya sangat hebat sehingga Academi Paris memilih untuk membatasi ukuran makalahnya dalam majalah ilmiah untuk mengatasi keluaran dari Cauchy.



Gambar 13 Augustin-Louis Cauchy

Walaupun kalkulus diciptakan pada akhir abad ke tujuh belas, daasr-dasarnya tetap kacau dan berantakan sampai Cauchy dan rekan sebayanya (Gauss, Abel dan Bolzano) mengadakan ketelitian baku. Kepada Cauchy kita berhutang pemikiran tentang pemberian dasar kalkulus pada konsep limit. Semua buku ajar modern mengikuti, paling sedikit dalam intinya, penjelasan kalkulus yang terinci oeh Cauchy.

3. Sejarah Matematika dalam Pembelajaran

Salah satu kompetensi guru adalah memahami sejarah matematika. Pentingnya sejarah matematika bagi guru, tidak semata-mata karena sejarah matematika sebagai salah satu cabang matematika, tetapi lebih dari itu, karena peran sejarah matematika yang secara langsung maupun tak langsung mempengaruhi pembelajaran matematika.

Fauvel (2000) menyatakan bahwa terdapat tiga dimensi besar pengaruh positif sejarah matematika dalam pembelajaran:

a. ***understanding*** (pemahaman): perspektif sejarah dan perspektif matematika (struktur modern) saling melengkapi untuk memberikan gambaran yang jelas dan menyeluruh tentang konsep dan teorema, serta bagaimana konsep-konsep saling berkaitan,

b. ***enthusiasm*** (antusiasme): sejarah matematika memberikan sisi aktivitas sehingga menimbulkan antusiasme dan motivasi, dan

c. ***skills*** (keterampilan): memacu keterampilan menata informasi, menafsirkan secara kritis berbagai anggapan dan hipotesis, menulis secara koheren, mempresentasikan kerja, dan menempatkan suatu konsep pada level yang berbeda.

Bagaimanakah cara menggunakan sejarah matematika tersebut? Sesungguhnya sangat banyak cara yang dapat ditempuh sesuai dengan tujuan apa yang diinginkan. Berikut ini secara lebih rinci, John Fauvel (Garner, 1996) menyarankan beberapa cara yang dapat ditempuh dalam menggunakan sejarah dalam pembelajaran matematika di kelas, yaitu:

a. Menyebutkan atau menceritakan tentang matematikawan pada zaman dahulu secara menyenangkan.

b. Menyediakan pengantar sejarah untuk konsep-konsep yang baru bagi siswa.

c. Memacu siswa untuk memahami masalah-masalah sejarah untuk mana konsep-konsep yang telah mereka pelajari merupakan jawabannya.

d. Memberi tugas-tugas tentang sejarah matematika.

e. Melengkapi latihan-latihan di kelas atau di rumah dengan menggunakan tulisan-tulisan matematika dari zaman dahulu.

f. Aktivitas drama langsung dengan kegiatan refleksi interaksi matematika.

g. Memacu kreasi tampilan poster atau proyek lain dengan topik-topik sejarah.

h. Merencanakan proyek tentang aktivitas lokal matematika pada zaman dahulu.

i. Menggunakan contoh-contoh penting dalam sejarah matematika untuk menggambarkan teknik-teknik atau metode-metode matematika.

j. Mengeksplorasi miskonsepsi, kesalahan, atau pandangan lain pada zaman dahulu untuk membantu pemahaman dan penyelesaian kembali akan kesulitan-kesulitan yang dijumpai oleh siswa pada masa sekarang.

k. Merencanakan suatu pendekatan pedagogik untuk suatu topik tertentu dengan menggunakan perkembangan sejarahnya.

l. Merencanakan urutan dan struktur topik dalam silabus pembelajaran dengan landasan sejarah.

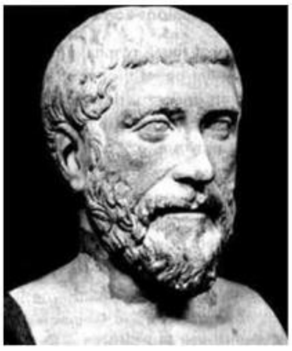
Pada bagian selanjutnya, dibahas mengenai sejarah matematika. Ada banyak cara menyajikan sejarah matematika, mulai dari sejarah matematika tiap peradaban, tiap tokoh, tiap topik matematika, hingga dari sudut pandang tertentu misalnya filsafat. Di bawah ini disajikan sejarah matematika berdasarkan tokoh matematika dan topik matematika sekolah.

4. Beberapa Tokoh Matematika

Tokoh-tokoh matematika telah banyak dirangkum para sejarawan hingga ribuan jumlahnya. Di bagian ini hanya disajikan sebagian kecil saja dari tokoh-tokoh matematika itu, namun memiliki konstribusi yang penting di dalam matematika, terutama matematika sekolah.

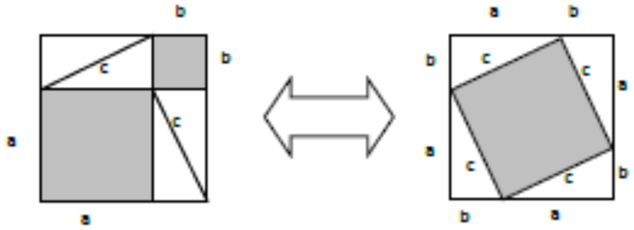
a. Pythagoras (580-501 SM)

Pythagoras yang lahir di pulau Samos (di Turki) mendirikan perguruan yang disebut Perguruan Pythagoras. Dasar perguruan tersebut adalah bilangan, yang mengatur segala sesuatu. Karya perguruan Pythagoras kita ketahui hanya dari tulisan Aristoteles, Euclid, Proclus, Diogenes Laertisus, dan lain-lain.



Gambar 14 Pythagoras

Sumbangan matematika yang penting dari perguruan Pythagoras, antara lain bukti Teorema Pythagoras dan konversinya. Bukti teorema Pythagoras dari perguruan Pythagoras berdasarkan pada gambar geometris di bawah. Ada yang mengatakan rumus Tripel Pythagoras: $\frac{(m^2-1)}{2}, \frac{(m^2+1)}{2}$ (berasal dari perguruan Pythagoras, tetapi sesungguhnya telah dikenal di Babilonia.



Gambar 15 Bukti Geometris Teorema Pythagoras

Contohnya 6 = 1 + 2 + 3. Bilangan-bilangan bersahabat adalah dua bilangan bulat positif, masing-masing merupakan jumlah dari pembagi-pembagi murni dari bilangan pasangannya. Contohnya, pasangan 220 dan 284. Selain itu, juga mengenai rata-rata hitung, geometris, harmonik, dan hubungan ketiganya. Teorema yang menyatakan bahwa jumlah sudut-sudut sebarang segitiga sama dengan dua kali sudut siku-siku, pertama kali berasal dari perguruan Pythagoras.

Pythagoras mengajarkan bahwa semua bilangan adalah rasional. Namun, muridnya yang bernama Theodorus membuktikan bahwa akar dari 3, 5, 6, 7, 10, 11, 13, 14, 15, dan 17 adalah irasional. Sementara bukti bahwa akar suatu bilangan asli adalah irasional jika dan hanya jika bilangan asli tersebut bukan bentuk kuadrat, diberikan oleh Theaetetus.

Berdasarkan beberapa literatur, Pythagoras meninggal sekitar 507 SM saat kompleks perguruannya dibakar oleh penguasa setempat karena dianggap mengajarkan aliran yang sesat.

b. Euclid (325-265 SM)

Euclid dari Alexandria sangat terkenal dalam matematika. Tetapi sedikit yang dapat diketahui dari kehidupan Euclid. Data yang dapat dipercaya berasal dari Procus sekitar tahun 420 M. Euclid dipastikan pernah belajar di Akademi Plato di Athena. Tidak ada karya Euclid yang memiliki kata pengantar, sehingga kita tidak dapat mengetahui "siapa" pengarangnya.

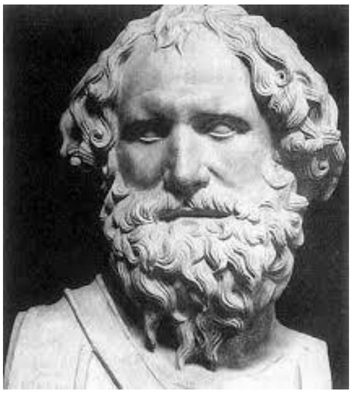
Karya terkenal dari Euclid adalah *Element*, yang merupakan kompilasi pengetahuan dan menjadi sumber belajar selama 2000 tahun. Buku tersebut dimulai dengan definisi dan lima postulat, serta aksioma. Yang terkenal adalah postulat kelima atau postulat paralel. Dengan mengganti postulat ini, kita mengenal geometri non-euclidean. Geometri euclidean adalah geometri yang dipelajari di sekolah. Buku Element yang terdiri dari 13 buah buku terpisah, amat menakjubkan dalam hal kecermatan dan urutan teori yang dinyatakan dan dibuktikan. Buku ini menjadi cikal bakal sistem aksiomatis dalam matematika. Telah ada ribuan edisi diterbitkan sejak pertama kali dicetak tahun 1482.

Gambar 16 Euclid

Euclid juga menulis banyak buku lain, tetapi yang dapat bertahan hingga kini terkait matematika antara lain *Data* yang berisi 94 proposisi dan *On Divisions* yang membahas mengenai cara membagi sebuah bangun menurut perbandingan yang diberikan.

c. Archimedes (287-212 SM)

Archimedes berasal dari Syracuse, pulau Sicilia yang menjadi koloni Yunani. Barangkali ia belajar di Universitas Alexandria sebab ia bersahabat dengan Erasthothenes, murid Euclid. Ia sering disebut sebagai matematikawan terbesar sebelum Isaac Newton.



Gambar 17 Archimedes

Archimedes mampu memusatkan perhatiannya pada suatu persoalan hingga terkadang melupakan dirinya sendiri. Cerita tentang penemuan hukum hidrostatis merupakan salah satu contohnya, ketika ia mendapatkan tugas dari raja Hieron, untuk menguji kemurnian mahkota emas. Di saat mandi, ia menemukan sifat hidrostatis, dan karena kegembiraannya ia berlari ke luar dalam keadaan tanpa pakaian sambil berteriak "*Eureka-Eureka*" (aku menemukan, aku menemukan). Pada saat Syracuse diserang oleh Romawi, Archimedes membantu dengan membuatkan beberapa mesin untuk mempertahankan kotanya. Pada saat Syracuse akhirnya jatuh pada 212 tahun SM, Archimedes pun terbunuh oleh tentara Romawi karena begitu asyiknya melukis kurva di pasir.

Archimedes menulis banyak subjek, dan seringkali menggunakan cara apa yang sekarang dalam bentuk modern kita sebut dengan kalkulus. Karena itu ia sering disebut sebagai Bapak Integral. Beberapa karyanya sebagai berikut: *The Method* (Metode) yang banyak menjelaskan tentang metode menemukan teorema-teoremanya, *Qudrature of the Parabola* (Membujursangkarkan parabo yang berisi24dalil,*MeasurementofaCircle* (Pengukuran lingkaran) di mana dengan "metode klasik" (metode poligon beraturan) ia mendapatkan perbandingan √ berada di antara dan dengan menghitung keliling poligon segi 96 beraturan, *On Spirals* (Tentang spiral) yang berisi 28 dalil mengenai sifat-sifat spiral yang kini disebut spiral Archimedes, dengan persamaan polar $r = a \cdot \theta$, juga buku tentang Conoida dan Sferoida yang memuat 40 dalil mengenai isi benda putaran yang terbentuk oleh kurva derajat dua dan soal-soal mengenai membagi bola sehingga volum segmen-segmen bola mengikuti suatu perbandingan yang ditentukan.

d. Brahmagupta (598-670 M)

Brahmagupta adalah kepala observatori astronomi di Ujjain yang merupakan pusat perkembangan matematika India saat itu. Karya terpenting adalah *Brahmasphutasiddhanta* (628) yang ditulis di Bhinmal, ibukota Dinasti Gurjara. Sebagai pelengkap karya di atas, Brahmagupta juga menulis *Khandakhadyaka* pada tahun 665 saat ia berusia 67 tahun.*Brahmasphutasiddhanta* memuat 25 bab.

Gambar 18 Brahmagupta

Pemahaman Brahmagupta tentang sistem bilangan jauh melebihi orang-orang sejamannya. Dalam *Brahmasphutasiddhanta*, ia mendefinisikan nol sebagai hasil pengurangan sebuah bilangan dengan dirinya sendiri. Brahmagupta juga memberikan aturan aritmetika dalam istilah untung (bilangan positif) dan istilah rugi/hutang (bilangan negatif). Brahmagupta juga memberikan metode perkalian yang menggunakan nilai tempat, yang menjadi cikal bakal cara perkalian kita. Terdapat tiga metode yang dinyatakannya dalam *Brahmasphutasiddhanta*.

Sumbangan lain adalah algoritma untuk menghitung akar kuadrat suatu bilangan. Algoritma ini kini dikenal dengan rumus iterasi Newton-Raphson. Brahmagupta juga mengembangkan notasi aljabar dan metode menyelesaikan persamaan kuadrat, serta metode menyelesaikan persamaan tak tentu berbentuk $ax + c = by$. Dalam Brahmasphutasiddhanta, ia juga memberikan rumus untuk luas segiempat tali busur dan diagonal segiempat talibusur dengan menggunakan sisi-sisi segiempat. Dalam buku *Khandakhadyaka*, ia membahas rumus interpolasi untuk menghitung nilai sinus yang sekarang dikenal dengan nama rumus interpolasi Newton-Stirling.

e. Al-Khwarizmi (780-850 M)

Abu Musa al-Khwarizmi lahir di Khiran, al-Khwarizm, Uzbekistan dan wafat di kota 1001 malam, Baghdad. Aljabar sering dilekatkan dengan nama Ibnu Musa al-Khwarizmi. Gandz dalam *The Source of Al-Khwarizmi's algebra* menyebut bahwa al-Khwarizmi adalah "Bapak aljabar", begitu pula Boyer dalam *A history of mathematics*.

Gambar 19 Al-Khwarizmi

Abu Musa al-Khwarizmi menyusun karya aljabar *Hisab al-Jabr wal-Muqabala* yang selama berabad-abad digunakan di Timur maupun Barat, di mana kitab asli berbahasa Arabnya telah lama hilang. Terjemahan yang termasyur oleh Gerard de Cremona yaitu *DeJebra et Almucabala*. Di dalam terjemahan karya al-Khwarizmi tersebut terdapat 6 bab yang berisi 6 bentuk persamaan linear dan kuadrat. Selain secara aljabar, al-Khwarizmi juga memberikan penyelesaian secara geometri dengan membuat diagram geometris. Salah satu contohnya untuk persamaan kuadrat $x^2 + 10x = 39$.

Lewat sebuah karya aritmetikanya, yaitu *Liber Argoritum* atau *Algorismi de NumeroIndorum* (arabnya : *Al-Jami' wa at-Tafriq bil Hisab al-Hind*) diperkenalkan angka-angka Hindu-Arab untuk pertama kali ke Eropa beserta sistem desimal. Ia berjasa dalam merintis dan memelopori perhitungan dengan angka nol (bahasa Inggris: *chiper*, yang berasal dari bahasa arab *sifr*) dan sistem desimal. Karena pengkajiannya yang analitis dalam karya-karyanya, namanya menjadi suatu istilah "algoritma".

Selain karya yang telah disebutkan, terdapat pula karya lain yang terkenal yaitu *Trattatid'Arithmetica*, terjemahan Prince Boncompagni. Tokoh ini sering dikaitkan dengan teorema *The Casting Out 9`s*. Sebagai astronom, al-Khwarizmi juga menyusun Zij (daftar astronomi) yang sangat populer pada saat itu dan berisi nilai-nilai sinus dan tangens. Dia pun mempersiapkan sebuah peta bumi bersama-sama ilmuwan lain.

f. Fibonacci (1170-1250 M)

Fibonacci adalah matematikawan Italian yang hidup antara 1170 – 1240/1250 M. Ada sumber lain juga yang menyebutkan bahwa dia lahir di Pisa pada tahun 1175. Nama lainnya adalah Leonardo if Pisa, Leonardo da Pisa atau Leonardo Pisano. Ayahnya bernama Guilielmo Bonacci adalah seorang pedagang dan ibunya Alessandra. Fibonacci mengenal sistem matematika ketika mengikuti ayahnya berdagang sampai ke Afrika Utara. Setelah 15 tahun melancongm Fibonacci menetap di Italia dan menulis dasar-dasar matematika. Tulisannya antara lain adalah Liber Abaci (1202), Practica Geometricae/Practical Geometry (1220), Flos (1225), Liber Qudratorum (1225) dan A Letter to Master Theodorus (1225). Adapun beberapa karya yang lain tentang aritmetika perdagangan dan bilangan irasional dinyatakan hilang. Beberapa kontribusi Fibonacci dalam matematika adalah sebagai berikut:

a. Memperkenalkan Sistem Bilangan Hindu-Arab di Eropa dan menemukan bilangan Fibonacci Bukunya yang berjudul Liber Abaci (*The Book of Calculating*), memberi perhatian khusus pada sistem bilangan Hindu-Arab dan mungin sebagai pengaruhnya, matematika menggunakan sistem bilangan tersebut. Kontribusi ini menjadi salah satu alasan mengapa Fibonacci masih terus dikenang hingga sekarang.Buku tersebut berisi aritmetika dan aljabar yang ia himpun selama perjalanannya di Afrika Utara. Pada bagian berikutnya, banyak dibahas mengenai soal-soal yang berkaitan dengan perdagangan, sedang pada bagian ketiga memperkenalkan bilangan Fibonacci dan barisan Fibonacci, yaitu 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34 , 55, ... (tetapi Fibonacci tidak menulis suku pertama dalam bukunya) dari suatu masalah yang dikenal sebagai masalah kelinci. Barisan ini sangat terkenal dan diketahui banyak ditemukan dalam gejala alam.

Gambar 20 Fibonacci

b. Perintis dalam penggunaan kembali pecahan Mesir (Egyptian fraction). Tidak diketahui pasti siapa yang menemukan pecahan, tetapi Fibonacci telah menggunakannya dalam perhitungan yang dilakukannya.

c. Dalam Liber Quadratum (The Book of Square), Fibonacci memperkenakan salah satu hasil dalam teori bilangan yaitu bilangan kuadrat dapat dituliskan sebagai penjumlahan bilangan-bilangan ganjil. Fibonacci juga memberikan bukti untuk masalah: tidak ada bilangan $x$dan y sedemikian sehingga $x^2 + y^2$ dan $x^2 - y^2$ keduanya merupakan bilangan kuadrat dan hasil dari $x^4 - y^4$ bukan bilangan kuadrat.

d. Practica *geometriae* ditulis tahun 1220. Buku ini berisi koleksi soal geometri yang dibagi ke dalam 8 bab.

e. Flosi (1225), Fibonacci memberikan pendekatan yang akurat terhadap akar dari $10x + 2x^2 + x^3 = 20$.

g. Descartes (1596-1650 M)

Rene Descartes selain belajar filsafat, ia juga mempelajari matematika dari buku Clavius. Saat sekolah, kesehatannya memburuk, lalu diijinkan untuk tetap di tempat tidur hingga jam 11 siang. Hal ini kemudian menjadi kebiasaan Descartes hingga meninggal dunia. Ia mulai belajar matematika sejak tahun 1618. Tahun 1623, ia berhubungan dengan Mersenne, seorang matematikawan di Paris. Korespondensi ini meneguhkannya untuk bergelut dengan ilmu pengetahuan.

Gambar 21 Descartes

Karena dorongan kolega-koleganya, ia lalu menerbitkan *Discours de la methode pour bienconduire sa raison et chercher la verite dans les sciences*, sebuah karya sain. Karya inidilengkapi dengan tiga apendiks, yaitu *La Dioptrique* tentang optika, *Les Meteores* tentang meteorologi, serta *La Geometrie*. Karya terpenting, terletak pada *La Geometrie* yang membahas mengenai matematika. Dalam karya ini terdapat ide geometri analitik yaitu masalah yang memuat gagasan mengaitkan geometri dan aljabar. Sebagai penghormatan, kini koordinat silang (tegak lurus) kita namakan koordinat kartesian/kartesius. Karya yang penting lainnya adalah *Principia*

Philosophiae yang dipublikasi di Amsterdam tahun 1644. Karya ini terbagi dalam 4 bagian yang membawa masalah alam ke dalam matematika.

Tahun 1649, ratu Christina dari Swedia mengundang Descartes untuk datang dan mengajar di Stockholm. Karena suatu tugas dari ratu, di sana ia mengubah pola bangun tidur siangnya. Setelah beberapa bulan dari musim dingin yang ekstrim, ia meninggal tahun 1650 karena pneumonia.

h. Fermat (1601-1665 M)

Pierre Fermat mula-mula belajar di universitas Toulouse lalu tahun 1620 di Bordeaux. Dari Bordeaux, ia pindah ke Orleans dan menyelesaikan studi hokum di sana. Ia lalu bekerja sebagai pengacara sekaligus terpilih dan masyur di parlemen.

Gambar 22 Fermat

Tahun 1636 dimulai kontak antara Mersenne dengan Fermat. Fermat lalu menceritakan penemuannya mengenai kesalahan yang dibuat Galileo mengenai jatuh bebas, juga penemuannya tentang spiral, dan perbaikan tulisan Apollonius mengenai titik pada bidang. Fermat lalu menulis *Method for determining Maxima and Minima and Tangents to Curved Lines*.

Selama tahun 1643 hingga 1654, ia tidak lagi mengajar di Paris namun banyak mengenai Teori Bilangan walaupun kurang disenangi pada saat itu. Teorema Terakhir Fermat, yang menyatakan bahwa $x^n + y^n = z^n$ tidak memiliki penyelesaian bulat x, y dan z untuk $n > 2$ menjadi terkenal. Ia menulis dalam bagian tepi terjemahan Bachet terhadap karya Diophantus, *Arithmetica*:"Aku telah menemukan bukti yang benar namun tepi halaman ini terlalu kecil untuk memuat bukti itu". Sekarang, matematikawan menunjukkan bahwa bukti Fermat salah. Bukti lengkap ditunjukkan oleh Andrew Wiles pada Nopember 1994.

Fermat mulai berkorespondensi dengan Blaise Pascal tahun 1654. Dari sini terungkap idenya mengenai teori probabilitas. Kini, Fermat dan Pascal dihormati sebagai pendiri teori probabilitas. Dalam buku *New Account of Discoveries in the Sciences of Numbers* tahun 1659, banyak memuat metode antara lain untuk menunjukkan bahwa setiap bilangan prima berbentuk $4k+1$ dapat ditulis sebagai jumlah dua bilangan kuadrat, namun tidak detail. Di kemudian hari, Euler membuat bukti yang lebih rinci.

i. Pascal (1623-1662 M)

Blaise Pascal adalah anak ketiga dari Étienne Pascal. Blaise secara mandiri telah mempelajari geometri di usia 12 tahun. Sejak itu, Ayahnya memberi Blaise buku Element dari Euclid. Saat berusia 14 tahun, Blaise Pascal telah mengikuti ayahnya mengikuti pertemuan ilmiah atas prakarsa Mersenne di Paris. Pada usia 16 tahun, Pascal mempresentasikan makalahnya di bulan Juni 1639, yang memuat sejumlah teorema geometri proyektif, termasuk *Pascal`s mystic hexagon*. Pascal menyelesaikan buku pertamanya, *Essay on Conic Sections* yang diterbitkan tahun 1640. Pascal juga membuat kalkulator digital pertama, yang disebut *Pascaline* untuk membantu pekerjaan ayahnya. Untuk membuatnya ia membutuhkan waktu antara tahun 1642 hingga 1645.

Gambar 23 Pascal

Tahun 1651, ayahnya Étienne Pascal meninggal. Peristiwa ini mendorongnya menulis tentang filsafat, yang terkenal, *Pensées*, sebuah koleksi pemikirannya antara tahun 1656 hingga 1658. Tahun 1653, Pascal menulis *Treatise on the Equilibrium of Liquids*, di mana ia menjelaskan tentang Hukum Pascal mengenai tekanan.

Setelah sempat dimulai tahun 1648, tahun 1654 ia menyelesaikan bukunya tentang irisan kerucut, *The Generation of Conic Sections*. Pascal menganggap irisan kerucut sebagai hasil dari proyeksi titik terhadap lingkaran. Walaupun Pascal bukan orang pertama yang membahas mengenai “Segitiga Pascal”, tetapi tulisannya dalam *Treatise on theArithmetical Triangle* amat penting. Melalui surat-menyurat dengan Fermat tahun 1654,Pascal membangun dasar-dasar Teori Probabilitas. Dalam lima buah suratnya, ia membahas dua masalah terkenal, *the dice problem* dan *the problem of points*. Karya terakhir tentang kurva *cycloid*, sebelum ia meninggal pada usia 39 tahun karena sakit.

j. Newton (1643-1727 M)

Isaac Newton dilahirkan di Lincolnshire, Inggris. Masa kecil Newton kurang mendapat perhatian. Menurut de Moivre, ketertarikan Newton pada matematika dimulai tahun 1663 saat ia dibelikan buku astrologi di Cambridge tetapi ia tidak memahami matematika di dalamnya. Ia lalu memutuskan untuk mempelajari beberapa buku matematika lainnya. Talenta Newton mulai berkembang pesat setelah kedatangan seorang matematikawan Barrow di Cambridge tahun 1663. Barrow melihat bakat jenius pada Newton. Tahun 1671, Newton menulis dasar-dasar kalkulus differensial dan integral, dengan Metode Fluxion-nya lewat buku *De Methodis Serierum et Fluxionum* (diterbitkan 1736).

Tahun 1669, saat Newton baru berusia 27 tahun, ia telah dipromosikan Barrow untuk menduduki profesor Lucasian. Karya Newton pertama sebagai profesor Lucasian adalah mengenai optik di mana ia meneliti bahwa cahaya putih adalah gabungan berbagai tipe-tipe sinar lewat aberasi kromatik. Tahun 1672, Newton terpilih sebagai anggota *Royal Society* setelah mempersembahkan teleskop reflektif. Tahun itu juga, ia menerbitkan makalah tentang cahaya dan warna di the *Philosophical Transactions of the Royal Society.* Tahun 1666, Newton telah membuat versi awal dari tiga hukum geraknya. Ia juga menjelaskan tentang gerak sentrifugal. Atas saran dari Halley, Newton lalu menyusun buku yang terkenal, *Philosophiae naturalis principia mathematica* (disingkat dengan nama *Principia*). Ia menganalisa gerak benda, gerak sentrifugal dan sentripetal, dan bahwa setiap benda sesungguhnya saling mempengaruhi melalui apa yang disebut Hukum Gravitasi Umum, “semua benda mempengaruhi benda lain dengan suatu gaya sebanding dengan hasil kali massanya dan berbanding terbalik dengan kuadrat jaraknya”.

Walau mulai tahun 1703, ia terpilih sebagai presiden the *Royal Society* hingga Ia meninggal dan menerima penghargaan kehormatan sebagai ilmuwan dari Ratu Anne (1705), namun di akhir hidupnya ia berkonfrontasi dengan Leibniz mengenai siapa yang menemukan Kalkulus.

k. Gauss (1777-1855 M)

Carl Friedrich Gauss mulai masuk sekolah dasar saat berusia tujuh tahun. Gurunya, Büttner, terkejut saat Gauss dengan seketika dapat menjawab jumlah bilangan asli 1 hingga 100. Ia masuk akademi Brunswick dan di sana secara mandiri berhasil menemukan hukum Bode, teorema binomial, rata-rata aritmetik dan geometrik, hukum kebalikan kuadratik, dan teorema bilangan prima.

Gambar 24 Gauss

Tahun 1795, ia melanjutkan ke Universitas Göttingen. Tahun 1798 ia meninggalkan Göttingen tanpa gelar, namun dengan prestasi yang gemilang tentang konstruksi segi-17 beraturan dengan penggaris dan jangka. Temuan ini diterbitkan dalam *DisquisitionesArithmeticae*, bagian VII pada tahun 1801. Gauss kembali ke Brunswick, danmenyelesaikan studi sarjana di Universitas Helmstedt dengan disertasi mengenai Teorema Fundamental Aljabar.

Saat bulan Ceres ditemukan posisinya oleh Zach tahun 1801, ini telah diprediksi dengan baik oleh Gauss lewat metode aproksimasi kuadrat terkecil. Ia banyak menulis mengenai astronomi hingga tahun 1817 karena banyak menghabiskan waktu di observatorium. Namun ia juga masih menghasilkan banyak karya di bidang lainnya, termasuk *Disquisitiones generales circa seriem infinitam*, tentang deret dan fungsi hipergeometrik.Tahun 1820, Gauss begitu tertarik dengan geodesik. Antara tahun 1820 hingga 1830, Gauss telah menerbitkan lebih dari 70 makalah. Sejak tahun 1820, Gauss juga telah tertarik dengan eksistensi geometri non-euclidean, namun tidak mempublikasikannya. Gauss juga tertarik dengan geometri differensial dan menerbitkan *Disquisitiones generales circasuperficies curva* (1828).

Tahun 1832, Gauss dan Weber menyelidiki teori magnetisme terestrial. Hingga tahun 1840, ia telah menerbitkan tiga buku mengenai subjek ini. Gauss dan Weber juga menemukan banyak hukum fisika dan diterbitkan dalam kurun 1836-1841.

Gauss terkenal karena kesabarannya. Ia seringkali telah mengetahui suatu metode atau masalah tetapi tidak merasa perlu mempublikasikannya, bahkan amat menghargai matematikawan lain yang menemukannya kembali. Dalam masa akhir hidupnya, Gauss banyak berkecimpung pada masalah praktis. Ia meninggal pada 23 Februari 1855 saat tidur paginya.

l. Cantor (1854-1918 M)

George Cantor terkenal sebagai penemu teori himpunan. Kontribusinya ini mengubah wacana matematika. Pada 1870, Cantor berhasil menyelesaikan soal ketunggalan representasi fungsi atas deret trigonometri yang tak dapat dipecahkan sebelumnya. Cantor menerbitkan makalah yang mendefinisikan bilangan irasional sebagai barisan bilangan rasional yang konvergen tahun 1870. Dedekind menulis definisi bilangan real lewat potongan Dedekind (*Dedekind cuts*) setelah membaca makalah Cantor di atas. Cantor membuktikan bahwa himpunan bilangan rasional dan bilangan aljabar adalah terhitung (*countable*) tahun 1873. Pada Desember 1873 ia membuktikan bahwa himpunan bilangan real adalah tak-terhitung. Tahun 1874, Cantor mengajukan soal, apakah ada korespondensi 1-1 titik-titik pada satu satuan luas dengan satu satuan panjang, yang akhirnya diselesaikan Cantor sendiri (1877) bahwa ada korespondensi 1-1 titik-titik pada interval [0, 1] dan titik-titik pada ruang berdimensi-*p*. Selama kurun waktu 1877 hingga 1882, Cantor mengirim karyanya tentang landasan teori himpunan ke Journal *Crelle*, journal *Mathematische Annalen*, dan Journal *Acta Mathematica*.

Gambar 25 Cantor

Makalah pentingnya yang terakhir tentang teori himpunan terbit tahun 1895 dan 1897 di*Mathematische Annalen* tentang aritmetika transfinit. Di makalah kedua terdapat teorinyatentang *well-ordered set* dan bilangan ordinal. Tahun 1897 ia menemukan sebuah paradoks dalam teori himpunannya.

Cantor mengalami depresi tahun 1884 karena kekhawatirannya dalam matematika dan hubungan yang kurang serasi dengan Kronecker, hingga mulai tahun 1899 ia berhenti mengajar karena kesehatan mentalnya yang memburuk. Di tahun-tahun berikutnya aktivitas matematikanya menurun, namun tetap menulis mengenai filsafat, sastra, dan religi. Tahun 1917 ia masuk ruang perawatan dan akhirnya meninggal tahun 1918 karena serangan jantung.

5. Sejarah Matematika Konsep Matematika Jenjang SMK

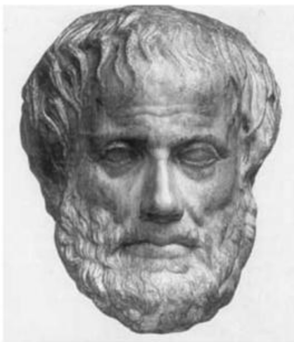
Pada bagian ini, dikemukakan sejarah beberapa topik atau konsep penting dalam matematika sekolah. Sebagian besar bersumber dari modul Sejarah dan Filsafat Matematika (2012).

a. Teori Himpunan

Teori himpunan bermula dari diterbitkannya makalah berjudul *On a CharacteristicProperty of All Real Algebraic Numbers* karya George Cantor tahun 1874. Topik yangmenjadi cikal bakal lahirnya Teori Himpunan, salah satunya konsep ketakhinggaan. Bertrand Russell dan Ernst Zermelo secara independen menemukan paradoks yang kemudian dikenal sebagai "Paradoks Russell". Pada tahun 1899, Cantor sendiri juga menyuguhkan sebuah paradoks terkait bilangan kardinal. Walaupun menimbulkan beberapa paradoks, Teori Himpunan terus menemukan peranannya dalam membangun struktur matematika modern. Misalnya, Henri Lebesgue yang menggunakan Teori Himpunan untuk membangun teori ukuran. Kini Teori Himpunan dianggap sebagai salah satu landasan matematika modern.

b. Logika Matematika

Sejarah logika dimulai dengan tokohnya, Aristoteles. Koleksi tulisan Aristoteles dalam logika terkumpul dalam buku *Organon*. Tulisan lain yang penting adalah *Prior Analytics*. Kontribusi penting lainnya adalah logika dari Avicenna atau Ibnu Sinna. Sistem logika Ibnu Sinna antara lain melahirkan silogisme hipotetik, logika modal temporal, dan logika induktif, termasuk rintisan *propositional calculus*.



Gambar 26 Aristoteles

Logika simbolik (logika matematika) muncul sekitar pertengahan abad ke-19 sebagai akibat dari perumusan dasar-dasar matematika. Pada tahun 1854, George Boole menulis *"An Investigation of the Laws of Thought on Which are Founded the Mathematical Theoriesof Logic and Probabilities"* yang memperkenalkan logika simbolik dan prinsip-prinsip yangkini dikenal sebagai logika Boole. Tahun 1903, Alfred North Whitehead (1861 - 1947) & Bertrand Russell menerbitkan "*Principia Mathematica*" yang mengulas kebenaran matematika berdasar aksioma dan aturan kesimpulan dalam logika simbolik.

6. Konsep dan Sistem Bilangan

a. Angka Hindu-Arab

Angka yang kita gunakan sekarang ini disebut Angka Arab atau Angka Hindu-Arab dan berasal dari India kemudian berkembang di Arab. Catatan Arab yang pertama menjelaskan angka Hindu tersebut adalah *Algoritmi de numero Indorum*, terjemahan Latin dari karya al-Khwarizmi (k.780-k.850). Dari bagian barat kawasan Islam, angka Hindu-Arab beserta sistem desimalnya masuk ke Eropa, yang terpenting oleh Fibonacci (k.1170-1240) dengan buku *Liber Abaci* tahun 1202.

b. Bilangan Pecahan dan Desimal

Menurut catatan sejarah, perkembangan bilangan pecahan tertua mungkin dimulai di Mesir Kuno. Brahmagupta dalam Brahmasphutasiddhanta menjelaskan tentang penulisan dan perhitungan bilangan pecahan. Sementara itu, al-Qalasadi (1412-1486) orang pertama yang menulis tanda garis horizontal di antara pembilang dan penyebut, namun Jeff Miller menyebut nama al-Hassar (abad ke-12). Sedangkan pemakaian pecahan desimal berikut cara perhitungannya yang signifikan terdapat pada karya al-Kashi (k.1380-1429), Miftah al-Hisab. Ini dilanjutkan oleh Simon Stevin (1548-1620) dengan menulis La Disme tahun 1585.

Gambar 27 Al-Kashi

c. Bilangan Negatif

Diduga Bangsa Mesir Kuno telah mengenal bilangan negatif. Bilangan positif dengan lambang kaki melangkah ke kiri, sedang bilangan negatif ditandai dengan kaki melangkah ke kanan. Matematikawan Cina kuno belum menerima bilangan negatif sebagai penyelesaian suatu persamaan bahkan matematikawan Yunani Kuno hampir dalam setiap bukunya tidak memberikan penyelesaian bilangan negatif. Penerimaan bilangan negatif lebih maju di India. Brahmagupta telah mempergunakan bilangan negatif hampir serupa dengan konsep modern.

d. Bilangan Irasional

Tentang bilangan irasional, perguruan Pythagoras (sekitar 570- 490 SM) menganggapsemua bilangan adalah rasional. Ketika perguruan ini menemukan bahwa $\sqrt{2}$ *incommensurable*, mereka lalu merahasiakannya. Berbeda dengan Yunani Kuno, matematikawan India Kuno memperlakukan akar bilangan bukan kuadrat sebagai bilangan juga. Penanganan bilangan irasional secara tepat baru dimulai pada abad ke-19. Adalah Dedekind (1831-1916) dalam bukunya *Stetigkeit und die Irrationalzahlen* atau *Continuity and Irrational Numbers* tahun 1872 yang membuat definisi bilangan irasional secara tepat dan jelas.

e. Logaritma

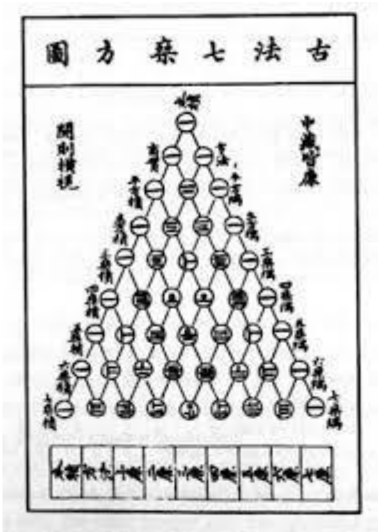
Gagasan yang mendasari penelitian logaritma yaitu prosthaphaeresis, perubahan proses pembagian dan perkalian kepada penambahan dan pengurangan. Orang pertama yang memulai gagasan ini adalah Ibnu Yunus As-Sadafi al-Misri (950-1009), dengan menggunakan trigonometri. Gagasan yang mendasari penelitian logaritma yaitu prosthaphaeresis, perubahan proses pembagian dan perkalian kepada penambahan dan pengurangan. Orang pertama yang memulai gagasan ini adalah Ibnu Yunus As-Sadafi al-Misri (950-1009), dengan menggunakan trigonometri.

Gambar 28 John Napier

Logaritma ditemukan di awal tahun 1600 oleh John Napier (1550-1617) dan Joost Bürgi (1552-1632), walaupun banyak yang mengatakan Napier adalah perintis yang sebenarnya. Napier menerbitkan Minifici Logarithmorum Canonis Descriptio tahun 1614. Bürgi mempublikasikan Arithmetische und geometrische Progress-Tabulen tahun 1620, namun penemuannya itu dari tahun 1588. Bila Napier lewat pendekatan aljabar maka Bürgi menggunakan pendekatan geometris. Henry Briggs (1561-1631), mendiskusikan logaritma Napier dan menyarankan metode yang dikenal sekarang, misalnya ia dapatkan bahwa log(101/2) = log(3,1622277) = 0,500000. Briggs juga yang mulai menggunakan istilah“mantissa” dan “characteristic”.

f. Segitiga Pascal

Walaupun diberi nama Segitiga Pascal, tetapi segitiga tersebut telah lama dikenal ratusan tahun sebelum Blaise Pascal (1623-1662). Mungkin secara independen, matematikawan Cina dan Muslim (Persia) masing-masing menemukan segitiga tersebut, antara lain oleh Chia Hsien atau Jia Xian (sekitar 1050) telah menggunakan segitiga tersebut untuk menentukan akar kuadrat dan akar kubik suatu bilangan, serta Omar Khayyam dalam menentukan akar suatu bilangan



Gambar 29 Deskripsi Segitiga Pascal oleh Yang Hui (1238–1298)
(di Cina, disebut Segitiga Yang Hui)

Mungkin deskripsi tentang segitiga Pascal, yang paling tua berasal dari India, dengan apa yang disebut Meru Prastara (berasal dari abad ke-3 atau 4). Segitiga binomial tersebut menjadi terkenal lewat karya Blaise Pascal, Traité du triangle arithmétique pada tahun 1654. Pascal menulis banyak sifat yang berkenaan dengan segitiga binomial tersebut.

7. Konsep Aljabar

a. Teorema Pythagoras

Teorema ini diberi nama Pythagoras karena ia yang pertama memberi sebuah bukti (secara geometris). Tetapi hubungan antara sisi-sisi segitiga siku-siku tersebut telah lama dikenal jauh sebelum Pythagoras dan perguruannya. Di Universitas Columbia, terdapat naskah prasasti bernama *Plimpton 322* (dari 1900 SM hingga 1600 SM). Tabel pada naskah itu terdiri atas tiga kolom bilangan, yang ternyata bersesuaian dengan tripel Pythagoras. Sebuah catatan kuno, *Chou Pie Suan Ching* (500 hingga 200 SM) menyajikan pembahasan dan bukti secara geometris tentang Teorema Pythagoras. Teks kuno dari India juga telah mengenal tentang Teorema Pythagoras jauh sebelum Pythagoras. Di dalam naskah kuno *Baudhayana Sulbasutras* (800-600 SM) terdapat bahasan Teorema Pythagoras, juga TripelPythagoras, seperti: (5, 12, 13), (12, 16, 20), (8, 15, 17), (15, 20, 25), (12, 35, 37), (15, 36, 39), ($^{5}/_{2}$, 6, $^{13}/_{2}$), dan ($^{15}/_{2}$, 10, $^{25}/_{2}$).

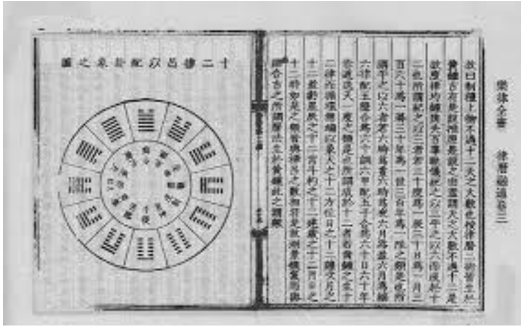
b. Persamaan Kuadrat

Bangsa Babilonia telah menggunakan suatu algoritma ‘melengkapkan kuadrat’ untuk menentukan penyelesaian suatu persamaan kuadrat, misalnya dalam Papirus Berlin (suatu naskah Mesir Kuno) dari tahun 2160-1700 SM. Sekitar 300 SM, Euclid dalam buku *Data* membahas 3 soal mengenai persamaan kuadrat, namun menggunakan kuantitas geometri. Dalam buku *Arithmetica,* Diophantus (antara 210-290) juga menyelesaikan persamaan kuadrat. Matematikawan India telah menggunakan cara yang ekuivalen dengan rumus akar persamaan kuadrat.

Aryabhata I memberikan aturan untuk jumlah suatu deret geometri yang menunjukkan pengetahuannya tentang persamaan kuadrat dengan kedua akarnya. Brahmagupta menggunakan cara mirip Babilonia tetapi dengan variasi yang lebih baik, termasuk dengan kuantitas negatif. Perkembangan penting berikutnya oleh Al-Khwarizmi yang menulis tipe-tipe persamaan kuadrat dengan mengabaikan akar nol maupun negatif. Al-Khwarizmi menyusun 6 macam persamaan kuadrat. Setiap tipe persamaan kuadrat di atas, diselesaikannya dengan menggunakan diagram geometris dan prinsip *melengkapkan kuadrat*. Menurut sejarawan, Abraham bar Hiyya Ha-Nasi atau lebih dikenal di Eropasebagai Savasorda (k.1125) menulis buku *Liber embadorum* yang diterbitkan di Eropa tahun 1145 dan merupakan buku pertama yang memberikan penyelesaian lengkap persamaan kuadrat.

c. Sistem Persamaan Linear

Babilonia diketahui yang pertama mengenal dan menulis tentang sistem persamaan. Pada sebuah batu bertulis bangsa Babilonia, dari masa 300 SM, termuat sebuah soal yang berkaitan dengan sistem persamaan linier. Bangsa Cina sekitar tahun 200 SM hingga 100 SM, telah lebih jauh melangkah dalam menangani sistem persamaan.



Gambar 30 Jianzhang Suan Shu

Dalam teks kuno *Jianzhang Suan Shu*, yang terjemahan Inggrisnya *Nine Chapters of theMatematical Arts*, telah menyuguhkan berbagai soal sistem persamaan linier, termasuk metode untuk menyelesaikannya yang dasarnya merupakan metode matriks, yaitu metode *fang cheng*, yang kini disebut Metode Eliminasi Gauss.

d. Matriks dan Determinan

Perkembangan konsep determinan muncul lebih dulu dari konsep matriks. Ide determinan muncul pertama kali di Jepang dan di Eropa pada waktu hampir bersamaan, tetapi Seki Kowa (1642-1708) mempublikasikan lebih dulu di Jepang tahun 1683, lewat buku *Methodof Solving the dissimulated problems* yang memuat metode matriks.

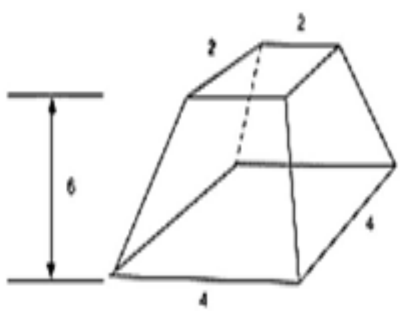
Gambar 31 Seki Kowa

Leibniz dalam suratnya ke l`Hôpital tahun 1683 menjelaskan penyelesaian sebuah sistem persamaan dengan menggunakan istilah "resultant" untuk kombinasi hasil kali koefisien dari determinan. Pada tahun 1750, Cramer (1704-1752) lewat buku *Introduction to theanalysis of algebraic curve* memberikan aturan umum untuk aturan Cramer pada matriks n n sehingga aturan itu disebut Aturan Cramer. Istilah “determinant” pertama kalidigunakan oleh Carl F. Gauss (1777-1855) dalam *Disquisitiones arithmeticae* (1801).

Eliminasi Gauss, yang ditelah digunakan di Cina tahun 200 SM, ditemukan pada karya Gauss tentang studi orbit asteroid Pallas. Cauchy (1789-1857) pada 1812 pertama kali menggunakan istilah “determinant” dalam konteks modern. Karya-karya Cauchy hampir mewakili konsep determinan modern. Dia merintis konsep “minor” dan “adjoints’, serta hasil kali matriks. Dalam karya tahun 1841, Ia menggunakan tanda dua garis vertikal untuk menunjukkan determinan. Pada 1850, istilah “matrix” (matriks) muncul dalam tulisanSylvester (1814-1897). Tahun 1853, Cayley (1821-1895) yang dikenal lewat “Tabel Cayley” menulis tentang invers matriks.

8. Konsep Geometri

Sejarah peradaban paling kuno yang tercatat dalam sejarah adalah peradaban Babilonia. Pengetahuan Babilonia mengenai geometri khususnya keliling, luas, dan volum cukup teliti. Dalam Batu Susa yang ditemukan tahun 1936, terdapat perhitungan yang lebih teliti. Pada peradaban Mesir Kuno, terdapat Papirus Rhind berisi masalah matematika dan pemecahannya, terkait dengan aritmetika dan geometri. Masalah geometri terdapat pada soal 41 hingga 46, lalu 48 hingga 60. Lalu tujuh dari 25 soal pada Papirus Moskow merupakan soal geometri, yang membahas perhitungan luas segitiga hingga menemukan luas permukaan setengah bola dan volum frustum. Soal nomor 14 berisi perhitungan volum frustum (piramida terpancung) dengan rumus yang tepat, yaitu $V = {}^1/_3 h(a^2+ab+b^2)$ dengan a dan b panjang sisi-sisi persegi atas dan persegi bawah, serta h tinggi frustum.



Gambar 32 Frustum pada Papirus Moskow

Pada peradaban India kuno, pengetahuan geometri pada sulbasutra adalah mengenai transformasi bentuk bangun datar ke bentuk bangun datar yang lain, dengan luas yang sama. Terdapat cara transformasi persegi menjadi persegipanjang, trapesium samakaki, segitiga samasisi, belahketupat, dan lingkaran. Terdapat soal transformasi antara persegi dan lingkaran, dengan penggunaan nilai □ sebesar 3,088 dan 3,004.

Pada peradaban Cina kuno, dikenal naskah kuno Jiǔzhāng Suànshù dan berisi persoalan aritmetika hingga geometri. Naskah bab 5 (shang kung, pekerjaan teknik sipil) dan bab 9 (Kou ku, sudut siku-siku) berisi masalah geometri. Liu Hui sudah berusaha menghitung volum bola, namun mengaku belum berhasil. Zu Keng (450 - 520) berhasil menghitung diameter bola jika diketahui volum bola. Ia menyelesaikannya menggunakan prinsip yang lalu disebut prinsip Cavalieri.

Dari warisan sejarah geometri pada peradaban kuno, yang paling lestari pemanfaatannya hingga jaman modern adalah geometri dari Yunani kuno. Sumber dan warisan utama geometri Yunani kuno berasal dari Euclid dengan bukunya berjudul *Elements* yang terdiri dari 13 buah buku. Masalah keliling, luas dan volum bangun geometri dibahas pada buku *Elements* tersebut dan menjadi acuan pokok dalam pengajaran geometri di sekolah danuniversitas selama berabad-abad. Selain *Element*, buku *On the Sphere and Cylinder* misalnya, dibahas volum berbagai bangun ruang, salah satunya penurunan rumus volum bola dengan cara membandingkannya dengan volum kerucut dan tabung. Pada buku*Measurement of a Circle* dibahas penurunan luas lingkaran, dan yang terpenting penemuannilai pi dengan menggunakan metode pendekatan hingga segi 96 beraturan. Archimedes menemukan nilai pi berada di antara $3\ {}^{10}/_{71}$ dan $3\ {}^{1}/_{7}$. Dari sinilah kemudian penggunaan nilai ${}^{22}/_{7}$ untuk pi menjadi terkenal. Pada buku *The Quadrature of the Parabola*, Archimedesmenggunakan metode yang menjadi cikal bakal kalkulus integral yaitu *method ofexhaustion*.

Selanjutnya perkembangan terpenting bidang geometri, terjadi pada masa peradaban Islam (Arab dan Persia) yaitu rintisan geometri non-euclidean. Mengenai tema keliling, luas, dan volum, dapat disebutkan salah satunya mengenai persamaan al-Mahani. Persamaan ini merupakan solusi bagaimana membagi sebuah bola menjadi dua segmen bola dengan perbandingan volum yang diberikan. Pada abad-abad selanjutnya, studi keliling, luas, dan volum bangun geometri telah sepenuhnya dipelajari dengan bantuan analisis atau kalkulus. Salah satu penemuan terpentingnya adalah penemuan integral kalkulus yang dapat menghitung luas dan volum berbagai bangun ruang.

9. Konsep Kalkulus

a. Fungsi

Penggunaan nama fungsi pada awalnya memang tidak persis sama dengan konsep modern yang kini ada. Sebagai istilah matematika, kata “fungsi” pertama kali digunakan oleh Gottfried Leibniz tahun 1673, namun untuk menunjukkan nilai kemiringan kurva pada titik tertentu. Fungsi yang demikian, kini dikenal sebagai fungsi turunan. Leibniz juga memperkenalkan istilah “variable”, “constant” dan “parameter”. Tahun 1718, Johann Bernoulli memperkenalkan fungsi sebagai sebarang ekspresi yang menggunakan variabel dan beberapa konstanta. Demikian juga yang dianut oleh Euler. Jadi, ekspresi semisal x^2+2x+1 juga disebut fungsi. Clairaut dan Euler kemudian memperkenalkan lambang $f(x)$.

b. Limit, Turunan, dan Integral

Perkembangan ide yang melahirkan kalkulus berlangsung sangat lama. Mungkin langkah penting pertama dimulai oleh matematikawan Yunani. Zeno dari Elea (k.490-k.430 SM) sekitar 450 SM mengemukakan empat masalah yang berkaitan dengan ketakhinggaan, dan dikenal sebagai *paradoks Zeno*. Masalah lain yang berkaitan dengan kalkulus adalah metode *exhaustion* (metode “melelahkan”). Metode ini disebut demikian karena orang harus berpikir menghitung luas daerah dengan menghitung bagian demi bagian semakin kecil sehingga semakin mewakili daerah yang akan dihitung. Ini terkait dengan ide dasar dari kalkulus integral. Metode ini pertama kali digagas oleh Eudoxus sekitar 70 SM. Archimedes sekitar 225 SM memberi kontribusi yang penting. Ia menunjukkan bahwa luas daerah yang dibatasi parabola sama dengan $^4/_3$ luas daerah segitiga dengan alas dan tinggi yang sama.

Persoalan kedua yang penting adalah menghitung harga π dengan cara luas poligon. Masalah “integral” lain yang dikerjakan Archimedes yaitu menghitung luas permukaan dan volum bola, kerucut, paraboloida, dan hiperboloida. Fermat (1601-1665) menyelidiki tentang ‘maksima’ dan ‘minima’ dengan menganggap hal itu terjadi bila kemiringan terhadap kurva, sejajar dengan sumbu mendatar. Ini tentu saja bagian dari studi differensial (turunan). Descartes (1596-1650) mengembangkan suatu cara menentukan normal (garis yang tegak lurus kurva di suatu titik) dalam *La Géométrie* (1637) dan De Beaune (1601-1652) mengembangkan metodenya untuk menentukan garis singgung. Hudde (1628-1704) lalu membuat metode yang lebih sederhana, yang pada dasarnya menggunakan derivatif. Barrow (1630-1677) maupun Torriceli (1608-1647) menggunakan masalah gerak benda dengan variabel kecepatan (sekarang masalah tersebut sering digunakan untuk menunjukkan kecepatan sesaat sebagai masalah turunan). Newton (1642-1727) menulis tentang teori *fluxion* pada Oktober 1666. *Fluxion* ini berkaitan dengan gerak yang terbagi menjadi *fluxion x*'dan *fluxion y*'. Notasi dari Newton berupa bersesuaian dengan garis singgung kurva $f(x,y) = 0$. Newton kemudian mengemukakan kebalikan masalah, yaitu bila diketahui x dan y maka berapa y. Newton lalu menyelesaikan masalah tersebut dengan cara antidifferensial. Dalam pekerjaan ini terdapat pernyataan tentang Teorema Fundamental Kalkulus. Bukunya sendiri, *Method of fluxionsand infinity series*, baru selesai ditulis tahun 1671, dan diterbitkan 1736.

Gambar 33 Leibniz

Leibniz menggunakan pendekatan yang telah mengarah ke analisis modern. Karena itu pula banyak lambang-lambang kalkulus berasal dari Leibniz, antara lain notasi dx, dy, dy/dx, dan pada tahun 1675 ia menggunakan notasi$\int$, persis seperti yang kitatulis sekarang. Karyanya tentang kalkulus integral ini diterbitkan tahun 1684 dan 1686 dengan nama 'calculus summatorius'. Dasar-dasar kalkulus modern mulai jelas lewat karya-karya dari Cauchy.

c. Konsep Trigonometri

Penggunaan fungsi trigonometri bermula sebagai hubungan antara matematika dan astronomi, sehingga trigonometri mula-mula berkenaan dengan trigonometri bola (*spherical trigonometry*). Bila diberikan sebuah lingkaran maka masalahnya adalah mencari panjang tali busur (*chord*) di hadapan suatu sudut pusat. Untuk lingkaran satuan (berjari-jari satu), maka panjang tali busur tersebut dengan sudut x diukur dengan 2. Tabel tali busur yang pertama dikenal dari Hipparchus (k.180-k.125 SM) sekitar 140 SM tetapi bukunya sendiri telah hilang. Dari sini, Hipparchus kemudian sering disebut sebagai Bapak Trigonometri. Menelaus (k. 100) antara lain membuktikan sebuah teorema dalam segitiga bidang yang kini disebut Teorema Menelaus.

Pemakaian setengah tali busur (*halfchord*) - dalam notasi modern berarti menunjukkan nilai *sinus*-dimulai di India. Dalamkarya Aryabhata I, sekitar 500 M, terdapat tabel setengah tali busur dengan menggunakan nama "jya". Tabel yang serupa juga dihasilkan Brahmagupta tahun 628 dan Bhaskara II(1114-k.1185) pada tahun 1150. Di dalam bukunya yang berjudul "*On The Motion of TheStars*", al-Battani atau *albatenius* (k.858-929) adalah orang pertama yang menyusun tabel dan memperkenalkan fungsi *cot*. Abu al-Wafa` dikenal sebagai yang pertama kali menggunakan fungsi *tan* dan menyusun tabel *tan* dan *sin* dengan interval 15 menit

Gambar 34 Lobachevsky

Pendefinisian modern dimulai dari karya Dirichlet (tahun 1837) dan Lobachevsky (1838) yang secara independen mendefinisikan istilah fungsi sebagai relasi di mana elemen pertama menentukan dengan tunggal elemen kedua. Namun Lobachevsky masih dibatasi pada fungsi yang kontinu.

Gambar 35 Al-Tusi

Studi trigonometri sebagai ilmu matematika - lepas dari astronomi - pertama kali diberikan oleh Nashiruddin al-Tusi (1201-1274) dalam *Treatise on the quadrilateral*. Bahkan dalam buku ini ia untuk pertama kali memperlihatkan keenam fungsi trigonometri lewat sebuah segitiga siku-siku (hanya masih dalam trigonometri sferis). Menurut O`Conners & Robertson, al-Tusi yang pertama memperkenalkan Aturan Sinus (di bidang datar). Konsep *tan* dan *cot* sendiri lahir dengan jalur yang berbeda dengan *sin* dan *cos*. Konsep *tan* dan *cot* pada mulanya tidak berhubungan langsung dengan sudut, tetapi berasal dari perhitungan tinggi menggunakan panjang bayangan matahari (studi *gnomonic*). Di Arab, studi ini dikenal dengan nama studi *gnomon,* suatu bagian alat penunjuk waktu dengan bantuan sinar matahari dan mulai muncul oleh matematikawan Arab sekitar 860. Konsep *sec* dan *cosec* pun lahir dari studi tentang *gnomon* ini. Tahun 1533, Regiomontanus atau Johann Müller (1436-1476) menerbitkan buku *De triangulis omnimodis* yang dipercaya beberapa sejarawan sebagai buku lengkap pertama yang membahas trigonometri bidang.

10. Konsep Kombinatorika

Buku pertama yang membahas mengenai kombinatorika secara jelas berasal dari peradaban Jain di India, salah satunya buku *Bhagati Sutra* (k.300 SM). Mahavira (sekitar 850 M) secara menakjubkan menulis rumus umum untuk banyak permutasi dan juga kombinasi. Pada buku Lilavati, Bhaskara menulis tentang permutasi dan kombinasi di bawah judul *Anka Pasha*. Berikutnya buku kuno/*Ching*, yang memuat soal mengenai berapa jenis 'heksagram' yang dapat dibuat. Di Cina juga telah dikenal masalah mengenai teori graph, bujursangkar ajaib (*magic square*), sekitar 200 M. Nama *Lo Shu* adalah nama untuk bujursangkar ajaib 3 3. Abraham bin Ezra (sekitar 1140 M) telah menemukan bukti sifat simetri koefisien binomial. Pada sekitar 1321, Levi Ben Gerson atau Gersonides menulis sifat yang terkait rumus $P(n,n)$, $P(n,r)$ dan rumus umum $C(n,r)$. Blaise Pascal, Leibniz, Bernoulli, dan Euler termasuk peletak dasar-dasar kombinatorika modern. Jacob Bernoulli menulis *Ars Conjectandi* sekitar 1713, dan dapat dianggap sebagai buku pertama yang ditulis tentang kombinatorika. Pada abad ke-18, Euler mengembangkan masalah-masalah yang terkait kombinatorika. Ia antara lain mengembangkan untuk pertama kali Teori Graf saat memecahkan masalah Tujuh Jembatan Konigsberg, yang menjadi embrio ilmu baru, topologi.

11. Teori Peluang

Konsep peluang telah muncul ribuan tahun yang lalu, namun sebagai cabang matematika baru terlihat jelas pada pertengahan abad ke-17 M. Sementara abad ke-15 muncul beberapa karya terkait peluang. Tahun 1494, Luca Paccioli menulis buku pertama tentang peluang, *Summa de arithmetica, geometria, proportioni e proportionalita*. Tahun 1550, Geronimo Cardano menulis buku *Liber de Ludo Aleae* (buku tentang permainan peluang). Pada pertengahan abad ke-17, Blaise Pascal berkorespondensi dengan Chevalier de Méré. Dari sinilah, Pascal kemudian mengembangkan teori peluang dan berkorespondensi dengan matematikawan Pierre de Fermat tahun 1654. Kedua orang inilah yang kemudian dikenal sebagai peletak dasar teori peluang. Buku Jakob Bernoulli yaitu *Ars Conjectandi* (1713) serta buku *Abraham de Moivre* yaitu *The Doctrine of Chance* (1718) menjadi sumber terpenting teori peluang sebagai cabang matematika. Teori peluang dan statistika pada masa selanjutnya saling berhubungan erat dalam topik distribusi data. Nama-nama seperti Fisher, Markov, Neyman banyak memberi kontribusi. Namun kajian secara deduktif-aksiomatis terhadap Teori Peluang pertama kali diberikan oleh Kolmogorov tahun 1931.

12. Statistika

Penggunaan metode statistik yang paling tua mungkin berasal dari 5 abad SM. Dalam buku*History of the Peloponnesian War* (Buku 2: 71-78) dijelaskan bagaimana tentara Yunani memperkirakan banyak batu yang menyusun tembok Platea. Juga dalam buku Mahabharata, dijelaskan bagaimana Raja Rtuparna memperkirakan banyak buah dan daun pada kebun yang luas. Tulisan penting pertama berasal dari abad ke-9, dalam buku *Manuscript on Deciphering Cryptographic Messages*, karya Al-Kindi (801–873 M). Ia memberikan detil bagaimana menggunakan statistik dan analisis frekuensi. Konsep rerata "mean" dikenal di Yunani kuno namun hanya untuk dua bilangan.

Baru pada abad ke-16 M, Tycho Brahe memperluas konsep mean untuk menghitung lokasi beberapa benda langit. Ide "median" muncul pertama kali dari buku Edward Wright dalam buku *Certain Errors in Navigation* (1599) dalam menentukan lokasi menggunakan kompas. Metode matematis dalam mengkaji statistika muncul dari Teori Peluang yang dimulai dari korespodensi Fermat dan Blaise Pascal (1654). Huygens (1657) menulis teori peluang secara matematis untuk pertama kali, tetapi karya Jakob Bernoulli yaitu *Ars Conjectandi* (1713) serta karya Abraham de Moivre yaitu *The Doctrine of Chance* (1718) yang membahas teori peluang sebagai cabang matematika.

Pada bukunya, Bernoulli membahas ide peluang kepastian dengan bilangan 1, dan nilai peluang di antara 0 dan 1. Dengan kajian yang telah dilakukan Laplace, tahun 1795 Gauss memperkenalkan distribusi normal yang menjadi konsep sentral dalam statistika. Metode kuadrat terkecil yang digunakan untuk memprediksi dengan kesalahan sekecil mungkin, pertama kali diperkenalkan oleh Andrien-Marie Legendre (1805), Robert Andrain (1808), dan Gauss (1809). Cournot tahun 1843 untuk pertama kali menggunakan konsep median untuk membagi distribusi peluang ke dalam dua kelompok sama banyak. Sedang kata "median" pertama kali digunakan oleh Francis Galton tahun 1881.

E. Aktivitas Pembelajaran

Aktivitas 0: Mengidentifikasi Isi Bahan Ajar

Mengawali proses pembelajaran, diskusikan dengan percaya diri dan kritis bersama rekan guru untuk mengidentifikasi hal-hal berikut:

1. Ada berapa aktivitas yang harus Anda ikuti dalam mempelajari bahan belajar ini? Sebutkan topik-topik untuk masing-masing aktivitas.
2. Kompetensi apa yang diharapkan tercapai setelah mempelajari bahan belajar ini? Sebutkan!
3. Anda saat ini mengikuti pelatihan dengan pola tatap muka. Apa saja yang harus Anda lakukan saat tatap muka?

Jawablah pertanyaan di atas dengan menggunakan LK 00

Aktivitas 1a: Sejarah Matematika

Dalam Aktivitas ini Anda akan mempelajari tentang Sejarah Matematika. Jawablah pertanyaan di bawah ini dengan percaya diri menggunakan LK 01a. Jika Anda kesulitan menjawab LK 01a, disarankan untuk membaca dengan teliti bahan bacaan tentang Sejarah matematika.

1. Matematika di Mesir berawal dari dibacanya papirus Rhind dengan perantaraan batu Rosetta. Jelaskan bagaimana alur penemuan papirus dan batu rosetta hingga terpecahkannya matematika mesir kuno!
2. Diskusikan dengan teman satu kelompok Anda apa saja persoalan yang terdapat pada Papirus Rhind. Cari sumber lain untuk melengkapi hasil diskusi Anda.
3. Diskusikan tentang penggunaan bilangan berbasis 60 pada matematika Babilonia! Berikan juga contoh penggunaannya dalam bidang kejuruan di jurusan Anda.
4. Temukanlah hubungan antara penemuan-penemuan matematika dari Mesir, Babilonia, Yunani, Cina, dan India!
5. Selain peradaban yang dibicarakan di atas, carilah peradaban lain yang memiliki sejarah tentang matematika!

Aktivitas 1b: Manfaat Sejarah Matematika

Jelaskanlah manfaat menyertakan sejarah matematika dalam pembelajaran matematika SMK!

Diskusikan dengan kritis pendapat Anda bersama guru lain.

Tulislah hasil diskusi aktivitas 1b di LK 01b pada lampiran.

Aktivitas 2: Penemu Konsep-Konsep Dasar dalam Matematika

Dalam Aktivitas ini Anda akan mempelajari tentang Penemu Konsep-Konsep Dasar dalam Matematika. Jawablah pertanyaan di bawah ini dengan cermat menggunakan LK 02. Jika Anda kesulitan menjawab LK 02, disarankan untuk membaca dengan teliti bahan bacaan tentang Penemu Konsep-Konsep Dasar dalam Matematika.

1. Jelaskan bagaimana alur penemuan konsep-konsep penting dalam matematika!
2. Carilah tokoh matematika lain yang menemukan konsep dasar matematika!
3. Menurut Anda, konsep matematika mana yang paling penting/sering dipakai di jurusan asal Anda? Berikan alasan mengapa konsep tersebut menurut Anda sangat penting dan beri contohnya!

Aktivitas 3: Bermain Peran tentang Sejarah Matematika

Alat: spidol warna, kertas *flipchart*

1. Bagi kelas diklat menjadi 5 kelompok untuk mendirikan café.
2. Beri nama café kelompok Anda dengan nama yang menarik pengunjung.
3. Setiap café (seluruh anggota kelompok) agar menghidangkan menu spesial sebagai berikut. Menu dapat berupa topik, konsep, atau tokoh yang dianggap penting dan menarik. (Manfaatkan spidol warna dan kertas *flipchart* untuk memvisualisasikan menu semenarik mungkin sehingga pengunjung tertarik untuk bertanya).

   Kelompok 1. Tokoh Matematika Sebelum Abad ke-11 M.

Kelompok 2. Tokoh Matematika Mulai Abad ke-11 M.

Kelompok 3. Sejarah Bilangan

Kelompok 4. Sejarah Geometri

Kelompok 5. Sejarah Aljabar

Kelompok 6. Sejarah Kalkulus dan Trigonometri

Kelompok 7. Sejarah Teori Peluang dan Statistika

4. Tetapkan satu orang anggota kelompok sebagai *host* / tuan rumah / pemilik café, dan anggota kelompok yang lain sebagai pengunjung.

5. Seluruh anggota kelompok, kecuali *host*, silahkan berkunjung ke *café* lain untuk menikmati menu yang disajikan oleh *hostcafé* yang dikunjungi.

   Host bertugas:

   - menjelaskan sajian menu dan memimpin diskusi/konsultasi/tanya jawab terkait menu yang disajikannya.
   - mengarahkan catatan yang diberikan setiap pengunjung agar tanggapannya fokus, singkat, dan relevan dengan menu sajian.
   - mencatat atau memberi memvisualisasikan tambahan pada pendapat atau tanggapan peserta di kertas *flipchart*.

6. Seluruh peserta wajib mengunjungi semua café (lainnya). Setiap pengunjung dapat memberikan tanggapan dengan cara menulis pada bagian kosong pada menu yang telah disajikan dan diakhiri dengan nomor.presensi dan/atau nama.

7. Masing-masing host dapat melakukan penilaian terhadap pengunjung sebagai berikut

Kriteria	Nilai
Menambahkan lebih dari 3 ide yang relevan dengan menu *dan* belum ditambahkan pengunjung lain.	3
Menambahkan 2 ide yang relevan dengan menu dan belum ditambahkan kelompok lain	2
Menambahkan 1 ide yang relevan dengan menu dan belum ditambahkan kelompok lain	1
Tidak memberi kontribusi	0

8. Setiap pengunjung juga dapat memberikan penilaian terhadap *host* sebagai berikut.

Kriteria	Nilai
Penjelasan dan *performance* yang sangat baik	3
Penjelasan dan *performance* yang cukup baik	2
Penjelasan dan *performance* yang kurang baik.	1
Penjelasan dan *performance* yang tidak baik.	0

Pergunakan LK 03 untuk menulis informasi pada kegiatan 3.

Aktivitas 4: Penggunaan Sejarah Matematika dalam Topik Matematika

Pilihlah salah satu topik matematika di SMK, kemudian tuliskan ide Anda secara lengkap dengan percaya diri tentang bagaimana menggunakan sejarah untuk pembelajaran topik tersebut.

Anda dapat merujuk pada John Fauvel (Garner, 1996) tentang beberapa cara yang dapat ditempuh dalam menggunakan sejarah dalam pembelajaran matematika di kelas.

Aktivitas 5 : Penyusunan Instrumen Penilaian

Pada aktivitas ini anda diminta untuk berlatih menyusun instrumen penilaian pada materi sejarah matematika dengan mengacu pada panduan penulisan dan penyusunan soal dari Puspendik. Diskusikan dengan rekan anda, Jika Anda kesulitan menjawab LK 05, disarankan untuk membaca dengan teliti bahan bacaan tentang Panduan Penilaian dari Puspendik.

1. Buatlah kisi-kisi penulisan soal mengenai materi sejarah matematika!
2. Buatlah 20 soal berupa 15 soal pilihan ganda dan 5 soal uraian sesuai dengan kisi-kisi yang sudah anda buat!

F. Rangkuman

1. Matematika Mesir kuno didasarkan pada dua buah papirus besar yang ditemukan yaitu papirus Rhind dan Papirus Moskow. Dalam papirus Rhind intinya adalah pengkalian dan pembagian bilangan. Adapun tentang geometri yang dibahas dalam papirus Rhind adalah tentang menghitung luas lingkaran. Sedangkan dalam papirus moskow adalah bagaimana bangsa mesir kuno menghitung volume bangun ruang yaitu prisma terpancung.

2. Matematika Babilonia menggunakan angka dengan basis 60 karena basis 60 lebih mudah digunakan.

3. Matematika Yunani dimulai oleh Thales dari Melitus dan Phytagoras dari Samos. Thales menggunakan geometri untuk menyelesaikan soal-soal perhitungan ketinggian piramida dan jarak perahu dari garis pantai. Dia dihargai sebagai orang pertama yang menggunakan penalaran deduktif untuk diterapkan pada geometri, dengan menurunkan empat akibat wajar dari teorema Thales. Pythagoras mendirikan Mazhab Pythagoras, yang mendakwakan bahwa matematikalah yang menguasai semesta dan dihargai dengan beberapa pengembangan matematika tingkat lanjut, seperti penemuan bilangan irasional. Sejarawan menghargai mereka atas peran utamanya di dalam pengembangan matematika Yunani.

4. Tulisan matematika Cina yang tertua adalah *Chou Pei Suan Ching*, antara 1200 SM sampai 100 SM. Penggunaan matematika di Cina adalah sistem notasi posisional bilangan desimal, yang disebut pula "bilangan batang" dimana sandi-sandi yang berbeda digunakan untuk bilangan-bilangan antara 1 dan 10, dan sandi-sandi lainnya sebagai perpangkatan dari sepuluh. Adapula *Sembilan Bab tentang Seni Matematika* yang terdiri dari 246 soal kata yang melibatkan pertanian, perdagangan, pengerjaan geometri yang menggambarkan rentang ketinggian dan perbandingan dimensi untuk menara pagoda Cina, teknik, survey, dan bahan-bahan segitiga siku-siku dan π.

5. Matematika Vedanta dimulai di India sejak Zaman Besi. *Shatapatha Brahmana* (kira-kira abad ke-9 SM), menghampiri nilai π. Geometri yang menggunakan bilangan irasional, bilangan prima, aturan tiga dan akar kubik; menghitung akar kuadrat dari 2 sampai sebagian dari seratus ribuan; memberikan metode konstruksi lingkaran yang luasnya menghampiri

persegi yang diberikan, menyelesaikan persamaan linear dan kuadrat; mengembangkan tripel Pythagoras secara aljabar, dan memberikan pernyataan dan bukti numerik untuk teorema Pythagoras. Aturan-aturan meta, transformasi, dan rekursi. Kombinatorial, binomial dan trigonometri.

6. Beberapa penemu konsep dasar matematika dan tokoh-tokoh dalam matematika adalah Phytagoras, Euclid, Archimedes, Brahmagupta, Al-Khawarizmi, Decrates, Fibonacci, Sir Isaac Newton, Pierre Fermat, Blaise Pascal, Carl Friedrich Gauss, Cantor, Gottfried Wilhem Leibniz, Karl Weierstrass, Maria Gaetana Agnesi, Josiah Willard Gibbs, Georg Friedrich Bernhard Riemann, Leonhard Euleur, Johann Bernoulli, dan Augustin-Louis Cauchy.

7. Terdapat tiga dimensi besar pengaruh positif sejarah matematika dalam pembelajaran, yaitu pemahaman, antusiasme dan keterampilan.

8. Sejarah logika dimulai dengan tokohnya, Aristoteles. Koleksi tulisan Aristoteles dalam logika terkumpul dalam buku *Organon*. Tulisan lain yang penting adalah *Prior Analytics*. Kontribusi penting lainnya adalah logika dari Avicenna atau Ibnu Sinna.

9. Angka Arab atau Angka Hindu-Arab dan berasal dari India kemudian berkembang di Arab. Perkembangan bilangan pecahan tertua mungkin dimulai di Mesir Kuno. Brahmagupta dalam Brahmasphutasiddhanta menjelaskan tentang penulisan dan perhitungan bilangan pecahan. Sedangkan pemakaian pecahan desimal berikut cara perhitungannya yang signifikan terdapat pada karya al-Kashi (k.1380-1429). Bilangan negatif diperkenalkan di Mesir, dan lebih maju perkembangannya di India. Penanganan bilangan irasional secara tepat baru dimulai pada abad ke-19. Dedekind (1831-1916) dalam bukunya *Stetigkeit und die Irrationalzahlen* atau *Continuity and Irrational Numbers* tahun 1872 yang membuat definisi bilangan irasional secara tepat dan jelas. Logaritma ditemukan di awal tahun 1600 oleh John Napier (1550-1617) dan Joost Bürgi (1552-1632). segitiga tersebut telah lama dikenal ratusan tahun sebelum Blaise Pascal (1623-1662). Matematikawan Cina dan Muslim (Persia) masing-masing menemukan segitiga tersebut.

10. Sebuah catatan kuno, *Chou Pie Suan Ching* (500 hingga 200 SM) menyajikan pembahasan dan bukti secara geometris tentang Teorema Pythagoras. Bangsa Babilonia telah menggunakan suatu algoritma ‘melengkapkan

kuadrat' untuk menentukan penyelesaian suatu persamaan kuadrat, misalnya dalam Papirus Berlin (suatu naskah Mesir Kuno) dari tahun 2160-1700 SM. Sekitar 300 SM, Euclid dalam buku *Data* membahas 3 soal mengenai persamaan kuadrat. Diophantus (antara 210-290) juga menyelesaikan persamaan kuadrat. Matematikawan India telah menggunakan cara yang ekuivalen dengan rumus akar persamaan kuadrat. Pada sebuah batu bertulis bangsa Babilonia, dari masa 300 SM, termuat sebuah soal yang berkaitan dengan sistem persamaan linier. Bangsa Cina sekitar tahun 200 SM hingga 100 SM, telah lebih jauh melangkah dalam menangani sistem persamaan. Ide determinan muncul pertama kali di Jepang dan di Eropa pada waktu hampir bersamaan, tetapi Seki Kowa (1642-1708) mempublikasikan lebih dulu di Jepang tahun 1683, lewat buku *Methodof Solving the dissimulated problems* yang memuat metode matriks.

G. Tes Formatif

1. Jelaskan tentang Matematika Mesir Kuno!
2. Jelaskan tentang Matematika Babilonia!
3. Sebutkan beberapa orang penemu konsep matematika dan hasil penemuannya!
4. Jelaskan tentang penemuan konsep-konsep dasar matematika!
5. Jelaskan tentang penemuan konsep geometri!
6. Tentukan hasil perkalian 15 x 26, dengan cara menurut Papyrus Rhind

H. Kunci Jawaban

1. Matematika Mesir kuno berkembang karena adanya kebutuhan akan penggunaan aritmatika sederhana dalam kehidupan sehari-hari, juga untuk mengukur lahan pertanian yang akan digunakan sebagai dasar pembayaran pajak pada kerajaan. Berdasarkan pada dua buah papirus besar yang ditemukan yaitu papirus Rhind dan Papirus Moskow. Dalam papirus Rhind initinya adalah pengkalian dan pembagian bilangan. Adapun tentang geometri yang dibahas dalam papirus Rhind adalah tentang menghitung luas lingkaran. Sedangkan dalam papirus moskow adalah bagaimana bangsa mesir kuno menghitung volume bangun ruang yaitu prisma terpancung.

2. Peradaban Babilonia memberikan bukti perkembangan matematika pada jamannya melalui penemuan lempengan-lempengan tanah liat yang berisi manuskrip tentang bilangan, topik-topik pecahan, aljabar, persamaan kuadrat dan kubik, dan perhitungan bilangan regular, invers perkalian, dan bilangan prima kembar, tabel perkalian dan metode penyelesaian persamaan linear dan persamaan kuadrat. Tulisan pada lempengan tersebut berbentuk mirip paku, maka disebut tulisan paku. Matematika Babilonia menggunakan bilangan berbasis 60 yang kemudian menjadi dasar penentuan satu jam adalah 60 menit, 1 menit adalah 60 detik.

3. Beberapa penemu konsep dasar matematika adalah Fibonacci (bilangan fibonaci), Sir Isaac Newton (kalkulus), Gottfried Wilhem Leibniz (kalkulus), Karl Weierstrass, Maria Gaetana Agnesi (kalkulus), dan Josiah Willard Gibbs (vektor).

4. Angka Arab atau Angka Hindu-Arab dan berasal dari India kemudian berkembang di Arab. Angka ini yang dipakai oleh kita pada saat ini. Perkembangan bilangan pecahan tertua dimulai di Mesir Kuno. Brahmagupta dalam Brahmasphutasiddhanta menjelaskan tentang penulisan dan perhitungan bilangan pecahan. Sedangkan pemakaian pecahan desimal berikut cara perhitungannya yang signifikan terdapat pada karya al-Kashi (k.1380-1429). Bilangan negatif diperkenalkan di Mesir, dan lebih maju perkembangannya di India. Penanganan bilangan irasional secara tepat baru dimulai pada abad ke-19. Dedekind (1831-1916) dalam bukunya *Stetigkeit und die Irrationalzahlen* atau *Continuity and Irrational Numbers* tahun 1872 yang membuat definisi bilangan irasional secara tepat dan jelas.

5. Pada peradaban Mesir Kuno, terdapat Papirus Rhind berisi masalah matematika dan pemecahannya, terkait dengan aritmetika dan geometri. Masalah geometri terdapat pada soal 41 hingga 46, lalu 48 hingga 60. Lalu tujuh dari 25 soal pada Papirus Moskow merupakan soal geometri, yang membahas perhitungan luas segitiga hingga menemukan luas permukaan setengah bola dan volum frustum. Soal nomor 14 berisi perhitungan volum frustum (piramida terpancung) dengan rumus yang tepat, yaitu $V = \frac{1}{3}h(a^2+ab+b^2)$ dengan a dan b panjang sisi-sisi persegi atas dan persegi bawah, serta h tinggi frustum.Pada peradaban India kuno, pengetahuan geometri pada sulbasutra adalah mengenai transformasi bentuk bangun datar ke bentuk bangun datar yang lain, dengan luas yang sama.Pada peradaban Cina kuno, dikenal naskah kuno Jiǔzhāng Suànshù dan berisi persoalan aritmetika hingga geometri. Naskah bab 5 (shang kung, pekerjaan teknik sipil) dan bab 9 (Kou ku, sudut siku-siku) berisi masalah geometri. Liu Hui sudah berusaha menghitung volum bola, namun mengaku belum berhasil. Zu Keng (450 - 520) berhasil menghitung diameter bola jika diketahui volum bola.

6.

1	15		
2	30		v
4	60		
8	120		v
16	240	+	v
26	390		

I. Umpan Balik dan Tindak Lanjut

Pada kegiatan belajar 1 ini telah dibahas mengenai sejarah penemuan beberapa konsep dasar dan penting dalam matematika.

Cocokan jawaban Latihan dan Tugas pada Kegiatan Belajar 1 ini dengan kunci jawaban yang tersedia. Hitunglah jumlah skor jawaban Anda yang benar, dan gunakan rumus di bawah ini untuk mengetahui tingkat penguasaan materi kegiatan belajar ini.

$$\text{Tingkat Penguasaan} = \frac{\text{Jumlah skor jawaban benar}}{15} \times 100\%$$

Bila kebenaran jawab Anda mencapai ≥ 67%, Anda dapat meneruskan dengan kegiatan belajar selanjutnya. Akan tetapi bila kebenaran jawaban Anda belum mencapai 67%, hendanya anda mengulangi kegiatan belajar, terutama pada bagian yang Anda anggap rumit dan berdiskusilah dengan teman sejawat yang lainnya atau dengan narasumber/fasilitator.

Untuk mengembangkan materi yang lebih jauh Anda sebaiknya mempelajari materi Aljabar pada kegiatan belajar berikutnya. Lakukan tahapan kegiatan belajar materi selanjutnya dengan mengerjakan aktifitas kegiatannya dan mengerjakan lembar kerjanya. Ukurlah kemampuan pemahaman materi yang Anda pelajari dengan mengerjakan latihan soal-soalnya.

Kegiatan Belajar 2 - Filsafat Matematika

A. Pengantar

Dalam kegiatan ini Anda akan melakukan serangkaian kegiatan untuk mencapai kompetensi berkaitan dengan Filsafat Matematika. Kegiatan-kegiatan tersebut akan terbagi dalam beberapa topik, di antaranya adalah:

a. Pengertian dan ruang lingkup filsafat. Pada bagian ini Anda akan belajar tentang pengertian filsafat, apa yang menjadi pertanyaan mendasar dalam filsafat.

b. Filsafat matematika. Pada bagian ini Anda akan belajar tentang aliran-aliran dalam filsafat matematika.

c. Epistemologi, ontologi, dan metodologi matematika. Pada bagian ini Anda akan belajar tentang pengertian epistemologi matematika, ontologi matematika, dan metodologi matematika.

d. Etnomathematics. Pada bagian ini Anda akan belajar tentang etnomathematics.

B. Tujuan

Tujuan dari kegiatan pembelajaran 2 ini adalah melalui membaca, diskusi kelompok dan penugasan, peserta diklat dapat menjelaskan perkembangan filsafat Matematika.

C. Indikator Pencapaian Kompetensi

Indikator pencapaian kompetensi yang harus dikuasai setelah mengikuti kegiatan belajar ini adalah, peserta diklat dengan percaya diri dapat:

1. Menjelaskan perkembangan filsafat Matematika.
2. Menyebutkan dan menggunakan karakteristik matematika di sekolah.
3. Menjelaskan sistem aksiomatis pada matematika.

D. Uraian Materi

Pada kegiatan belajar ini akan dibahas mengenai pengertian dan ruang lingkup filsafat, filsafat matematika, epistemologi matematika, ontologi matematika, metodologi matematika.

1. Pengertian dan ruang lingkup filsafat

Kata filsafat sudah seringkali didengar, baik itu di dalam perkuliahan ataupun dalam kehidupan sehari-hari. Sebenarnya, apa yang dimaksud dengan filsafat? Kata filsafat berasal dari bahasa Yunani yaitu *philosphos*, yang terdiri atas dua kata, *shopia* dan *philos*. *Shopia* berarti kebijaksanaan, hikmah, kecakapan, kearifan, ataupun pengetahuan yang benar. Sedangkan *philos* artinya cinta. Oleh karena itu, secara harfiah, filsafat berarti cinta dan kebijaksanaan.

Filsafat juga berarti keinginan yang sungguh-sungguh akan kebenaran yang sejati, bukan sekedar kebenaran itu sendiri. Berfilsafat adalah upaya berfikir dan bertindak benar dengan menggunakan daya rasio sebagai instrumen utama untuk mengetahui secara murni berbagai realitas yang ada dan yang mungkin ada di dunia ini dan nilai-nilai dalam hidup dan kehidupan manusia (Muhmidayeli, 2011: 1).

Menurut Rene Decrates (1596-1650) bahwa filsafat ialah kumpulan segala pengetahuan di mana Tuhan, alam dan manusia menjadi pokok penyelidikannya. Sedangkan Immanuel Kant (1724-1804) berpendapat filsafat ialah ilmu pengetahuan yang menjadipokok dan pangkal segala pengetahuan yang tercakup di dalamnya empat persoalan, yaitu:

a. Apakah yang dapat kita ketahui

b. Apa yang seharusnya kita kerjakan?

c. Sampai di manakan harapan kita?

d. Apakah yang dinamakan manusia itu?

Keempat pertanyaan di atas memiliki jawaban yang termasuk ke dalam bidang yang berbeda-beda. Jawaban untuk pertanyaan pertama termsuk ke dalam bidang metafisika. Jawaban pertanyaan kedua termasuk ke dalam bidang etika. Jawaban pertanyaan ketiga termasuk pada bidang agama, dan jawaban untuk pertanyaan keempat termasuk pada bidang antropologi dan sosiologi, yang semuanya menyangkut interaksi manusia. (Haryono, 2014). Menurut Burhanuddin Salam

(Haryanto, 2014), terdapat tiga karakteristik berfikir dalam filsafat, yaitu: sifat universal (menyeluruh), sifat radikal (mengakar atau mendasar), dan sifat spekulatif.

2. Hubungan filsafat dengan matematika

Dua bidang pengetahuan rasional yang tidak diragukan lagi berhubungan sangat erat sejak dulu sampai sekarang ialah filsafat dan matematika. Namun hubungan itu sering diuraikan secara keliru oleh sebagian filsuf maupun matematikawan. Seperti yang diungkapkan oleh Brumfiel (dalam Oktaviandy: 2011) bahwa pada awal peradaban Yunani, filsafat adalah penelaahan dari semua cabang pengetahuan. Ketika pengetahuan ilmiah manusia bertambah selama berabad-abad, cabang-cabang ilmu tertentu tumbuh sampai mereka memisakan diri dari filsafat dan menjadi bidang-bidang studi yang terpisah. Hal ini sejalan dengan yang diungkapkan oleh Francis Bacon (1561-1626) tokoh pembeharu Zaman Renaissances dari Inggris bahwa filsafat sebagai "*the great mother of sciences*".

Ternyata pendapat-pendapat tersebut di atas keliru karena filsafat dan geometri (suatu cabang matematika) sesungguhnya lahir pada masa yang berbarengan, di tempat yang sama sekitar 640-546 SM di Miletus (terletak di pantai barat Negara Turki sekarang). Jadi matematika tidak pernah lahir dari filsafat, melainkan keduanya berkembang secara bersama-sama dengan saling memberikan persoalan-persoalan sebagai bahan masukan dan umpan balik.

Wahyudin (2011: 74) mengemukakan hubungan antara matematika dan filsafat adalah sebagai berikut:

1. Matematika dan filsafat merupakan upaya-upaya intelektual paling awal untuk memahami dunia di sekitar kita, dan keduanya lahir di Yunani Kuno serta mengalami transformasi-transformasi penting disana.

2. Matematika adalah suatu studi kasus penting bagi filsuf. Agenda filsafat kontemporer memiliki formulasi-formulasi yang sangat jelas berfokus pada matematika, yang meliputi Epistomologi dan Ontologi.

3. Filsafat matematika

Filsafat matematika telah lahir sejak ribuan tahun yang lalu. Perkembangan penting diwakili oleh Pythagoras dan para pengikutnya, yang berkeyakinan bahwa bilangan adalah yang paling bertanggungjawab dalam mengatur alam semester. Filsafat matematika merupakan kajian filsafat yang sasarannya adalah matematika.

Filsafat matematika pada dasarnya merupakan pemikiran reflektif terhadap matematika. (Haryono, 2014: 47). Objek yang dikaji dan dipertimbangkan secara cermat dan penuh perhatian adalah matematika. Secara khusus, filsafat matematika menurut Howard W. Eves dan Caroll V. Newson (Liang Gie, dalam Haryono, 2014: 14) adalah:

> *"In particular, a phylosophy of the mathematics essentially amounts to an attempted reconstruction in which the chaotic mass of mathematical knowledge accumulated over the ages is given a certain sense or order"*
>
> (secara umum, filsafat matematika pada dasarnya ialah percobaan penyusunan kembali kumpulan pengetahuan matematika yang tidak teratur selama berabad-abad dan diberi simbol serta makna tertentu).

Berdasarkan perspektif epistemologi, kebenaran matematika terbagi dalam dua kategori, yaitu pandangan absolut dan pandangan fallibilis. Absolutis memandang kebenaran matematika secara absolut, bahwa "mathematics is the one and perhaps the only realm of certain, unquestionable and objective knowledge‟, sedangkan menurut fallibilis mathematic truth is corrigible, and can never regarded as being above revision and correction‟ (Ernest, 1991).

Menurut Woozley (dalam Ernest, 1991), pengetahuan terbagi dalam dua kategori, yaitu pengetahuan a priori dan pengetahuan a posteriori (empirical). Pengetahuan a priori memuat proposisi yang didasarkan tanpa dibantu dengan observasi terhadap dunia. Penalaran di sini memuat penggunaan logika deduktif dan makna dari istilah-istilah, secara tipikal dapat ditemukan dalam definisi. Secara kontras pengetahuan a posteriori memuat proposi yang didasarkan atas pengalaman, yaitu berdasarkan observasi dunia.

Absolutis memandang pengetahuan matematika didasarkan atas dua jenis asumsi; matematika ini berkaitan dengan asumsi dari aksioma dan definisi, dan logika yang berkaitan dengan asumsi aksioma, aturan menarik kesimpulan dan bahasa formal serta sintak. Ada lokal (micro) dan ada global (macro) asumsi, seperti deduksi logika cukup untuk menetapkan kebenaran matematika.

Menurut Wilder (dalam Ernest, 1991), pandangan absolutis menemui masalah pada permulaan permulaan abad 20, ketika sejumlah antinomis dan kontradiksi yang diturunkan dalam matematika. Russel telah menunjukkan bahwa sistem yang dipublikasikan Gottlob Frege tahun 1879 dan 1893 tidak konsisten. Kontradiksi lainnya muncul dalah teori himpunan dan teori fungsi. Penemuan ini berakibat terkuburnya pandangan absolutis tentang matematika. Jika matematika itu pasti dan semua semua teoremanya pasti, bagaimana dapat terjadi kontradiksi di antara teorema-teorema itu?

Tesis dari fallibilis memiliki dua bentuk yang ekivalen, satu positif dan satu negatif. Bentuk negatif berkaitan dengan penolakan terhadap absolutis; pengetahuan matematika bukan kebenaran yang mutlak dan tidak memiliki validitas yang absolut. Bentuk positifnya adalah pengetahuan matematika dapat dikoreksi dan terbuka untuk direvisi terus menerus. Terdapat empat aliran besar dalam filsafat matematika, yaitu aliran Logisisme, aliran Formalisme, aliran Intiutionisme, dan platonisme.

a. Aliran Logisisme

Logisisme memandang bahwa matematika sebagai bagian dari logika. Oleh karena itu pengkajiannya juga harus menggunakan logika, sehingga matematika lebih logis untuk dipahami. Penganut aliran Logisisme antara lain G. Leibniz, G. Frege (1893), B. Russell (1919), A.N. Whitehead dan R. Carnap(1931) (Mulyana, 2004). Russell dalam bukunya yang berjudul *The Principle of Mathematics* menyatakan bahwa matematika dan logika berkembang secara bersamaan seperti halnya anak kecil dan orang dewasa. (Haryono, 2014).

Pengakuan Bertrand Russell menerima logisime adalah yang paling jelas dan dalam rumusan yang sangat ekspilisit. Dua 3 pernyataan penting yang dikemukakannya, yaitu (1) semua konsep matematika secara mutlak dapat disederhanakan pada konsep logika; (2) semua kebenaran matematika dapat dibuktikan dari aksioma dan aturan melalui penarikan kesimpulan secara logika semata (Ernest, 1991).

Logisisme adalah desertasi bahwa matematika diturunkan menjadi logika, oleh sebab itu tidak ada sama sekali bagian dari logika (Carnap 1931/1883, 41). Para ahli Logika berpendapat bahwa matematik dapat dikenal a priori, tetapi mereka menyarankan bahwa pengetahuan matematika adalah hanya bagian dari pengetahuan logika secara umum, jadi secara analitis tidak membutuhkan kemampuan khusus tentang intuisi matematik. Dalam sudut pandang ini, logika adalah dasar-dasar yang benar dari matematika, dan semua pernyataan matematik memerlukan kebenaran logika. Rudolf Carnap (1931) memperkenalkan disertasi para ahli logika yang terdiri dari dua bagian:

1. Konsep-konsep matematika dapat diturunkan dari konsep-konsep logika melalui definisi-definisi yang gamblang/jelas.

2. Teorema-teorema matematika dapat diturunkan dari aksioma-aksioma logika melalui pengambilan kesimpulan murni.

Gottlob Frege adalah penemu logisisme. Dalam tulisannya Die Grundgesetze der Arithmetik (Basic Laws of Arithmetic) ia membangun aritmetika dari suatu sistem logika dengan prinsip pemahaman yang umum, yang disebut "Basic Law V" (untuk konsep F dan G, perluasan dari F sama dengan perluasan dari G jika dan hanya jika untuk semua obyek a, Fa jika dan hanya jika Ga), sebuah prinsip yang dapat diterima sebagai bagian dari logika.

Konstruksi Frege ini cacat. Russell menemukan bahwa Basic Law V tidak konsisten. (disebut dengan paradoks Russell). Setelah Frege meninggalkan ahli-ahli program logikanya, diteruskan oleh Russell dan Whitehead dengan menghubungkan paradoks "lingkaran setan" tersebut dan kemudian membangun apa yang mereka sebut dengan jenis teori yang bercabang (ramified type theory) untuk menanganinya. Dalam sistem ini, mereka akhirnya mampu membangun banyak matematika modern, tetapi bentuknya berubah dan kebanyakan kompleks (sebagai contoh, ada bilangan asli yang berbeda dalam setiap jenis, dan ada banyak jenis yang tak hingga). Mereka juga telah membuat beberapa kompromi untuk mengembangkan begitu banyak matematika, seperti "axiom of reducibility". Bahkan Russell mengatakan bahwa aksioma ini tidak benar-benar termasuk logika.

Para ahli logika moderen (seperti Bob Hale, Crispin Wright, dan mungkin yang lainnya) telah kembali ke program yang lebih mendekati ke Frege. Mereka telah meninggalkan Basic Law V dan setuju terhadap prinsip-prinsip abstraksi seperti prinsip Hume (banyaknya obyek yang jatuh dibawah konsep F sama dengan banyaknya obyek yang jatuh dibawah konsep G jika dan hanya jika extension dari F dan extension dari G dapat digolongkan ke dalam korespondensi satu-satu). Frege membutuhkan Basic Law V agar mampu memberikan definisi ekplisit dari bilangan, tetapi semua sifat-sifat bilangan dapat diturunkan dari prinsip Hume. Hal ini tidak cukup untuk Frege karena tidak meniadakan kemungkinan bahwa bilangan 3 sebetulnya adalah Julius Caesar.

Jika matematika adalah bagian dari logika, maka pertanyaan-pertanyaan tentang obyek matematik mengurangi pertanyaan-pertanyaan tentang obyek logika. Satu pertanyaan, apa obyek dari konsep logika? Logisisme dapat diartikan sebagai pergeseran pertanyaan tentang filsafat matematika beralih ke pertanyaan tentang logika tanpa jawaban secara lengkap. Menurut Ernest (1991), ada beberapa keberatan terhadap Logisisme antara lain:

1. Bahwa pernyataan matematika sebagai impilikasi pernyataan sebelumnya, dengan demikian kebenaran-kebenaran aksioma sebelumnya memerlukan eksplorasi tanpa menyatakan benar atau salah. Hal ini mengarah pada kekeliruan karena tidak semua kebenaran matematika dapat dinyatakan sebagai pernyataan implikasi.

2. Teorema Ketidaksempurnaan Godel menyatakan bahwa bukti deduktif tidak cukup untuk mendemonstrasikan semua kebenaran matematika. Oleh karena itu reduksi yang sukses mengenai aksioma matematika melalui logika belum cukup untuk menurunkan semua kebenaran matematika.

3. Kepastian dan keajegan logika bergantung kepada asumsi-asumsi yang tidak teruji dan tidak dijustifikasi. Program logisis mengurangi kepastian pengetahuan matematika dan merupakan kegagalan prinsip dari logisisme. Logika tidak menyediakan suatu dasar tertentu untuk pengetahuan matematika.

b. Aliran Formalisme

Aliran ini menyatakan bahwa matematika merupakan sistem lambang yang digunakan dalam mewakili benda-benda yang ada atau menggunakan proses pengolahan terhadap lambang-lambang yang digunakan (Haryono, 2014: 49). Formalisme berpegang pada prinsip bahwa pernyataan matematik bisa diartikan sebagai pernyataan tentang konsekuensi dari aturan rangkaian manipulasi tertentu. Sebagai contoh, dalam "permainan" dari geometri Euclid (yang kelihatannya terdiri dari beberapa rangkaian yang disebut "aksioma-aksioma", dan beberapa "aturan inferensi" untuk membangun rangkaian baru dari rangkaian-rangkaian yang diketahui), salah satunya dapat dibuktikan memenuhi teorema Phytagoras (yaitu, dapat membangun string yang berkaitan dengan teorema Phytagoras). Menurut Formalisme, kebenaran matematik adalah bukan tentang bilangan dan himpunan dan segitiga dan semacamnya seperti kenyataannya.

Versi lain dari formalisme sering dikenal dengan nama deduktivisme. Dalam deduktivisme, teorema Pythagoras tidak benar secara absolut, tetapi relatif benar: jika Anda menetapkan arti strings sedemikian sehingga aturan-aturan permainan menjadi benar (contohnya, pernyataan yang benar diberikan untuk aksioma dan aturan-aturan inferensi adalah memelihara kebenaran), maka Anda harus menerima teorema, atau sebaliknya, interpretasi yang telah Anda berikan harus menjadi pernyataan yang benar. Jadi, formalisme tidak membutuhkan arti bahwa matematika tidak lebih dari permainan simbolis yang tidak berarti. Biasanya diharapkan ada suatu interpretasi dimana aturan-aturan permainan dipenuhi. (Bandingkan dengan posisi strukturalisme). Tetapi formalisme mempersilahkan para ahli matematika melanjutkan karya-karyanya dan meninggalkan masalah-masalah pada para ahli filsafat dan ilmu pengetahuan. Banyak para penganut formalisme akan mengatakan bahwa dalam prakteknya, sistem aksioma yang dipelajari akan dusulkan oleh peminat ilmu pengetahuan atau bidang matematika lain.

Pendukung awal dari formalisme adalah David Hilbert, dimana programnya bertujuan mengaksiomakan semua matematika secara lengkap dan konsisten ("Konsisten" disini berarti bahwa tidak ada kontradiksi yang dapat berasal dari sistem). Hilbert bertujuan menunjukkan konsistensi sistem matematik dari asumsi bahwa "aritmetik yang hingga" (suatu subsistem aritmetik lazimnya dari bilangan bulat positif, yang terpilih tidak kontroversi secara filsafat) adalah konsisten. Tujuan Hilbert untuk menciptakan suatu sistem matematika yang lengkap dan konsisten tertutup oleh teorema *incompleteness* Gödel kedua, yang menyatakan bahwa sistem aksioma konsisten yang cukup ekspresif tidak pernah dapat membuktikan kekonsistenan mereka sendiri. Karena setiap sistem aksioma akan berisi aritmetik yang hingga sebagai sebuah subsistem. Teorema Gödel telah mengartikan bahwa tidak mungkin aksioma membuktikan kekonsistenan sistem secara relatif (karena aksioma akan membuktikan kekonsistenan dirinya sendiri, dimana Gödel telah menunjukkan ketidakmungkinan). Jadi, untuk menunjukkan bahwa setiap sistem aksioma matematika sebenarnya konsisten, maka salah satunya adalah membutuhkan asumsi pertama kekonsistenan suatu sistem matematika yang dirasakan lebih kuat dari sistem yang telah terbukti konsisten.

Bahasa matematika berlaku secara universal. Matematika diterjemahkan ke dalam simbol-simbol tertentu yang dianggap mewakili berbagai sasaran yang menjadi objek matematika. Formalis memandang matematika sebagai suatu permainan formal yang tak bermakna (*meaningless*) dengan tulisan pada kertas, yang mengikuti aturan (Ernest, 1991). Menurut Ernest (1991) formalis memiliki dua tesis, yaitu:

1. Matematika dapat dinyatakan sebagai sistem formal yang tidak dapat ditafsirkan sebarangan, kebenaran matematika disajikan melalui teorema-teorema formal.

2. Keamanan dari sistem formal ini dapat didemostrasikan dengan terbebasnya dari ketidak konsistenan.

Adapun keberatan yang dikemukakan oleh beberapa kalangan terhadap pendapat dan pemahaman penganut formalisme menurut Anglin (Haryono, 2014: 51) adalah:

1. Formalis dalam memahami obyek matematika seperti lingkaran, sebagai sesuatu yang kongkrit, padahal tidak bergantung pada obyek fisik.
2. Formalis tidak dapat menjamin permainan matematika itu konsisten

Keberatan-keberatan tersebut dapat pula dijawab oleh para penganut formalisme sebagai berikut:

1. Lingkaran dan yang lainnya adalah obyek yang bersifat material.
2. Meskipun beberapa permainan itu tidak konsisten dan kadang-kadang trivial, tetapi yang lainnya tidak demikian, Anglin (Haryono, 2014: 51)

c. Aliran Intiutionisme

Aliran ini memandang matematika sebagai hasil dari intuisi. Intuisi dijadikan andalan dalam mengkaji dan memahami matematika. Pengetahuan secara intuisi dapat dipergunakan sebagai hipotesa bagi analisis selanjutnya dalam menentukan benar tidaknya pernyataan yang dikemukakan (Haryono, 2014: 50). Ketetapan matematika terletak dalam akal manusia dan tidak pada simbol – simbol di atas kertas. Selanjutnya intuisionis menyatakan bahwa obyek segala sesuatu termasuk matematika, keberadaannya hanya terdapat pada pikiran kita, sedangkan secara eksternal dianggap tidak ada.

Dalam matematika, intuisionisme adalah suatu program menyatukan kembali metodologi dengan motto bahwa "tidak ada kebenaran matematik tanpa pengalaman" (L.E.J. Brouwer). Dari loncatan ini, para penganut intuisionisme mencari untuk merekonstruksi apakah mereka memperhatikan terhadap bagian matematika yang dapat diperbaiki sesuai dengan konsep-konsep Kantian, benar, pantas, intuisi, dan pengetahuan. Brouwer, pendiri dari gerakan ini, beranggapan bahwa obyek-

obyek matematik muncul dari bentuk-bentuk a priori kehendak yang menerangkan persepsi dari obyek-obyek yang bersifat empirik.

Leopold Kronecker mengatakan: "Bilangan-bilangan asli datang dari Tuhan, segala sesuatunya adalah kerja laki-laki." Kekuatan besar dibelakang Intuisionisme adalah L.E.J. Brouwer, yang menolak kegunaan dari logika formal dari setiap penggolongan matematika.

Dalam intuisionisme, batasan "pengkonstruksian eksplisit" tidak dengan tepat didefinisikan, dan banyak menuai kritik. Ada usaha untuk menggunakan konsep Turing machine atau fungsi yang dapat dihitung untuk mengisi kesenjangan ini, yang utama adalah klaim bahwa hanya pertanyaan-pertanyaan tentang perilaku algoritma-algoritma yang hingga yang mempunyai makna dan sebaiknya diinvestigasi dalam matematika. Dari sini lahirlah studi tentang bilangan-bilangan yang terhitung, yang pertama kali diperkenalkan oleh Alan Turing.Maka tidaklah mengherankan bahwa pendekatan terhadap matematika ini kadang-kadang dikaitkan dengan teori ilmu pengetahuan komputer (*computer science*). Tokoh yang menganut intiutionisme adalah seorang ahli matematika asal Belanda yang bernama Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966).

d. Platonisme

Pandangan Plato terhadap matematika bahwa objek matematika bersifat abstrak dan tidak memiliki hubungan realitas atau asal-usul sehingga bersifat abadi dan tidak berubah. Masalah dari aliran ini antara lain tidak dapat menjawab pertanyaan: tepatnya dimana dan bagaimana objek matematika itu ada, dan bagaimana cara kita mengetahui keberadaannya.

4. Epistemologi, Ontologi, dan Metodologi Matematika

a. Epistemologi Matematika

Epistemologi matematika merupakan cabang filsafat yang berhubungan dengan pengetahuan matematika. Hal-hal yang ditelaah dalam cabang filsafat ini adalah segi-segi dasar pengetahuan matematika, seperti sumber, hakikat, batas-batas, dan kebenaranpengetahuan beserta ciri-ciri matematika yang meliputi abstraksi, ruang, waktu, besaran, simbolik, bentuk, dan pola.

Matematika sebagai bagian dari *sciene* artinya matematika merupakan sebuah pengetahuan yang diperoleh dari proses belajar. Beberapa ilmuwan menyatakan bahwa matematika merupakan ilmu pengetahuan yang berhubungan dengan bilangan-bilangan, titik, garis, ruang, abstraksi, besaran dan lain sebagainya. Matematika merupakan suatu ilmu yang lebih banyak mengkaji tentang kuantitas-kuantitas, bangunan, ruang dan perubahan. Dalam cara pandang lain matematika adalah suatu ilmu yang menggunakan argumentasi logis dengan bantuan kaidah-kaidah dan definsi-definisi untuk mencapai suatu hasil yang teliti, cermat dan baru.

Saat ini seluruh kehidupan manusia menggunakan matematika, mulai dari perhitungan sederhana dalam kehidupan sehari-hari sampai pada perhitungan yang rumit seperti ilmu astronomi, geologi, informatika dan lain sebagainya. Belum lagi ilmu-ilmu lain yang menggunakan matematika sebagai alat bantunya, seperti ilmu ekonomi, sosial, biologi, dan lain-lain dalam hal ini pengembangan aljabar ataupun statistika. Ini artinya matematika dipakai untuk membantu perkembangan ilmu pengetahuan, yang secara langsung ataupun tidak langsung menjadi sarana kegiatan ilmiah.

Beberapa ahli filsafat mengatakan bahwa matematika terbagi menjadi beberapa ilmu pengetahuan secara garis besar. Ibnu Khaldun menyatakan bahwa matematika terbagi menjadi empat macam, yaitu ilmu geometri, ilmu aritmatika, ilmu musika dan ilmu astronomi. Berbeda dengan pendapat Immanuel Kant yang membagi matematika menjadi tiga disiplin pengetahuan, yaitu logika, aritmetika dan geometri.

Indikator suatu pemikiran yaitu menemukan pengetahuan yang benar atau usaha untuk menghasilkan pengetahuan yang benar. Epistemologi membagi kebenaran menjadi tiga yaitu kebenaran epistemolog, kebenaran ontologis dan kebenaran sematis. Adapun teori yang menjelaskan kebenaran ada tiga, yaitu teori korespondensi, teori koherensi dan teori pragmatisme.

Teori korespondensi menyatakan bahwa kebenaran haruslah bersesuaian dengan fakta atau kenyataan yang ada. Jika pertimbangan atau pernyataan sesuai dengan fakta maka dia benar, jika tidak maka dia salah. Teori koherensi menyatakan bahwa suatu pernyataan dianggap benar jika bersifat tetap atau konsisten dengan pernyataan-pernyataan sebelumnya yang dianggap benar. Sedangkan teori pragmatisme beranggapan bahwa suatu pernyataan dianggap benar jika pernyataan tersebut bersifat fungsional dan memiliki manfaat dalam kehidupan praktis.

b. Ontologi Matematika

Ontologi matematika merupakan cabang filsafat yang berhubungan dengan yang ada, sesuatu yang ada termasuk di dalamnya hal-hal metafisik di dalam pengetahuan matematika. Banyak hal yang dipersoalkan di dalam ontologi mtematika, diantaranya adalah cakupan dari pernyataan matematika yang berkaitan dengan dunia nyata (fakta) ataupun hanya dalam pikiran manusia. Cakupan tersebut merupakan suatu realitas dari entitas matematika yang menjadi juga bahan pemikiran filsafat.

Sejarah mengatakan bahwa para ahli filosofi dan ahli matematika pada jaman dahulu mempergunakan matematika sebagai alat dalam melakukan suatu pekerjaan ataupun menyelesaikan masalah. Mulai dari hal-hal yang sederhana sampai pada hal yang menakjubkan. Kita lihat saja perkembangan peradaban Mesir kuno dan Babilonia. Perhitunganmatematika sederhana diperlukan untuk kehidupan sehari-hari. Bangsa Mesir yang mempergunakan perhitungan sederhana untuk menghitung pajak, luas lumbung, perdagangan, menghitung batas luas tanah yang hilang karena luapan sungai Nil, sampai pada pembangunan istana dan piramida yang termasuk ke dalam keajaiban dunia. Bagaimana bangsa Babilonia mengukur jarak kapal di tengah lautan dengan menggunakan perbandingan segitiga, tanpa harus benar-benar terjun ke laut.

Semua itu dilakukan para matematikawan pada zamannya menggunakan perbandingan. Perbandingan dari benda nyata yang dapat mereka ukur secara langsung dengan sesuatu yang akan mereka ukur. Suatu pemikiran yang luar biasa untuk masa itu sebelum konsep-konsep perhitungan baku dalam matematika ada. Seperti perhitungan Thales yang mempergunakan tongkat untuk menghitung jarak perahu di lautan, adalah perbandingan dalam trigonometri walaupun saat itu belum ditemukan apa yang dinamakan trigonometri.

Matematika modern tentang pengukuran digunakan untuk menghitung ketinggian awan dalam bidang penerbangan, dalam bidang meteriologi yang berkaitan dengan keadaan cuaca, ataupun cara kerja kamera yang selalu kita pakai. Contoh lain adalah layar bioskop, yang menggunakan perbandingan dengan film yang ditayangkan dari pemutar film.

Matematika sebagai bahasa artinya matematika sebagai alat yang menyatukan manusia dalam hal berhitung. Bahasa matematika berlaku universal, internasional. Di mana pun kita berada, $1+1=2$. Dengan bahasa matematika memungkinkan adanya perhitungan secara kuantitatif. Bahasa matematika lebih singkat daripada bahasa biasa, lambang dan simbol dipergunakan untuk mempersingkat kata-kata yang berlebihan. Pada bahasa matematika telah disepakati sombol-simbol tertentu. Penggunaan simbol ini karena matematika digunakan oleh para pemikir dunia. Dari manapun para ahli ini berasal, mereka akan mengerti simbol-simbol dari matematika walaupun lambang atau simbol yang digunakan berbeda.

c. Metodologi Matematika

Metodologi matematika adalah penelaahan terhadap metode yang khusus digunakan dalam matematika, yang dikenal sebagai metode aksiomatik atau metode hipotetik deduktif. Metodologi matematika adalah kumpulan cara-cara, rumus-rumus dan kaidah-kaidah yang digunakan dalam matematika. Dapat juga diartikan sebagai cara penyusunan berbagai alur dan asas yang diterapkan pada matematika sebagai suatu metode.

Terdapat tiga metode dalam metodologi matematika, yaitu metode deduksi, metode induksi dan metode dialektika. Metode deduksi adalah suatu metode berfikir yang menarik kesimpulan dari prinsip-prinsip umum yang kemudian diterapkan pada sesuatu yang bersifat khusus. Metode induksi sebaliknya, menarik kesimpulan dari prinsip-prinsip khusus kemudian diterapkan pada sesuatu yang bersifat khusus. Sedangkan metode dialektika adalah metode berfikir yang menarik kesimpulan melalui tiga tahap, tesis, antithesis, dan sintesis atau berdasarkan premis mayor dan premis minor untuk kemudian menghasilkan kesimpulan yang baru.

Pokok-pokok penting dalam metode matematika adalah aksioma, definisi dan teorema. Aksioma merupakan keterangan yang kebenarannya diterima tanpa pembuktian lebih lanjut dan menjadi dasar atau pegangan dalam sebuah perbincangan. Aksioma disebut juga postulat. Juga merupakan sebuah proposisi yang jelas dengan sendirinya dan yang menjelaskan hubungan niscaya antara bagian-bagian yang tidak jelas. Ilmu-ilmu aksioma matematis bersifat analitik. Definisi adalah sebuah proposisi yang mengantarkan pada hakikat dan kualitas sesuatu. Dapat berupa artian yang diberi batasan, sifat, pengertian atau hubungan yang bersumber dari pemikiran manusia. Adapun teorema adalah suatu penemuan bentuk, pola, atau rumus matematika yang baru, dan bisa dibuktikan berdasarkan aksioma-aksioma dan definisi-definisi secara logis.

5. Etnomathematics

Etnomathematics atau etnomatematika, adalah pembelajaran mengenai hubungan antara matematika dan budaya. Dapat juga didefinisikan sebagai matematika yang dipraktekkan bersama dengan kelompok budaya yang diidentifikasi. Tujuannya adalah untuk memberikan kontribusi terhadap mengerti budaya dan matematika, dan intinya mengarah pada suatu apresiasi tentang hubungan diantara keduanya.

Istilah "etnomathematics" dikenalkan oleh matematikawan dan pengajar Brazil Ubiratan D'Ambrosio pada tahun 1977 selama presentasi untuk *American Association for the Advancement of Science*.Terdapat empat bagian yang merupakan penyusun etnomatika, yaitu budaya, tradisi historis, akar sosial-budaya, dan matematika. Keempat unsur tersebut disatukan untuk mencari solusi abadi dari pertanyaan siswa terhadap matematika di mana saja. Bagaimana menghubungkan matematika dengan sosial budaya yang ada di tempat siswa belajar, dengan lingkungan sekitarnya.

6. Implikasi Filsafat Matematika dalam Pembelajaran Sekolah

Filsafat matematika akan mempengaruhi pola pikir seseorang (guru) dalam memandang matematika sehingga mempengaruhi cara guru membelajarkan matematika. Guru menganggap matematika hanya merupakan kumpulan angka-angka dan rumus belaka, maka sadar atau tidak ia telah menjadi pendukung kaum formalism (yang ekstrem). Guru tipe ini hanya mengajarkan matematika bukannya membelajarkan matematika. Selanjutnya, guru yang hanya mengandalkan logika atau akal sehat belaka tergolong guru logisis. Biasanya guru tipe ini sulit memahami atau menerima kebenaran-kebenaran matematika yang kelihatannya sulit diterima akal sehat atau mungkin bertentangan dengan akal sehat. Bila guru tersebut tidak memahami struktur matematika, bisa jadi ia akan terjerembab ke dalam miskonsepsi-miskonsepsi (kesalahan konsep) yang diajarkan kepada siswa.

Pola pikir intuitif ekstrem juga kurang baik dalam pembelajaran. Contoh yang kurang tepat dari guru dengan pola pikir intuitif ekstrem adalah dengan membiarkan siswa menemukan jalan penyelesaiannya sendiri atau menggunakan bahasanya sendiri. Guru intuitif hanya mementingkan hasilnya saja, asalkan benar maka tidak menjadi masalah. Seharusnya guru juga harus berperan sebagai fasilitator, yaitu mengarahkan siswa pada penalaran dan juga penulisan lambang formal.

E. Aktivitas Pembelajaran

Aktivitas 0: Mengidentifikasi Isi Bahan Ajar

Mengawali proses pembelajaran, diskusikan dengan percaya diri bersama rekan guru untuk mengidentifikasi hal-hal berikut:

1. Ada berapa aktivitas yang harus Anda ikuti dalam mempelajari bahan belajar ini? Sebutkan topik-topik untuk masing-masing aktivitas.
2. Kompetensi apa yang diharapkan tercapai setelah mempelajari bahan belajar ini? Sebutkan!
3. Anda saat ini mengikuti pelatihan dengan pola tatap muka. Apa saja yang harus Anda lakukan saat tatap muka?

Jawablah pertanyaan di atas dengan menggunakan LK 00

Aktivitas 1: Pengertian dan ruang lingkup filsafat

Dalam Aktivitas ini Anda akan mempelajari tentang Penemu Konsep-Konsep Dasar dalam Matematika. Jawablah pertanyaan di bawah ini dengan tepat menggunakan LK 01. Jika Anda kesulitan menjawab LK 01, disarankan untuk membaca dengan teliti bahan bacaan tentang Pengertian dan ruang lingkup filsafat.

1. Apa yang dimaksud dengan filsafat? Jelaskan!
2. Apakah mungkin suatu ilmu lahir tanpa adanya filsafat? Kemukakan pendapat Anda mengenai hal ini.
3. Sebutkan empat inti dari persoalan filsafat! Apa yang menjadi jawabannya? Beri juga contoh dari masing-masing persoalan tersebut.

Aktivitas 2: Filsafat matematika

Dalam Aktivitas ini Anda akan mempelajari tentang aliran-aliran dalam Filsafat Matematika. Jawablah pertanyaan di bawah ini dengan tepat menggunakan LK 02.

Jika Anda kesulitan menjawab LK 02, disarankan untuk membaca dengan teliti bahan bacaan tentang Filsafat matematika.

1. Sebutkan dan jelaskan tentang empat aliran besar dalam filsafat matematika!
2. Diskusikan dengan teman satu kelompok, bagaimana aliran-aliran filsafat matematika tersebut mempengaruhi pemikiran para ahli matematika modern!
3. Diskusikan konsep matematika apa saja yang termasuk ke dalam aliran formalisme, logisisme, intuisisme, dan platonisme.
4. Carilah aliran filsafat matematika lain dan presentasikan hasilnya di depan kelas.

Aktivitas 3: Epistemologi, ontologi, dan metodologi matematika

Dalam Aktivitas ini Anda akan mempelajari tentang hubungan antara epistemology, ontology, dan metodelogi matematika. Jawablah pertanyaan di bawah ini dengan percaya diri menggunakan LK 03. Jika Anda kesulitan menjawab LK 03, disarankan untuk membaca dengan teliti bahan bacaan tentang epistemologi, ontologi, dan metodologi matematika.

1. Menurut Anda, apakah terdapat hubungan antara ontologi, epistemologi dan metodologi matematika? Jelaskan!
2. Jelaskan apa yang dimaksud dengan teori korespondensi, teori koherensi dan teori pragmatisme, kaitannya dengan kebenaran dalam epistemologi matematika!
3. Bagaimana penerapan ontologi matematika dalam pembelajaran matematika di sekolah Anda?
4. Jelaskan tiga metode yang mendasari matematika! Berikan contoh konsep yang dapat dibuktikan kebenarannya menggunakan metode tersebut!

Aktivitas 4: *Etnomathematics*

Dalam Aktivitas ini Anda akan mempelajari tentang *Etnomathematics*. Jawablah pertanyaan di bawah ini dengan percaya diri menggunakan LK 04. Jika Anda kesulitan menjawab LK 04 disarankan untuk membaca dengan teliti bahan bacaan tentang *Etnomathematics*.

1. Apa saja yang menjadi dasar dari etnomatematika? Jelaskan!
2. Kumpulkan sumber lain tentang etnomatika yang berupa buku ataupun jurnal dan pelajarilah. Diskusikan dikelompok Anda tentang etnomatika tersebut.
3. Menurut pendapat Anda, apakah etnomatika diperlukan dalam pembelajaran matematika? Berikan alasannya!
4. Etnomatika didasarkan pada sejarah, sosial, dan budaya di mana siswa belajar matematika. Diskusikan dengan kritis bersama teman satu kelompok bagaimana etnomatika yang dapat diterapkan di tempat asal Anda. Presentasikan hasilnya dengan percaya diri di depan kelas dan kelompok lain memberi tanggapan tentang presentasi kelompok Anda.

Aktivitas 5: Penyusunan Instrumen Penilaian

Pada aktivitas ini anda diminta untuk berlatih menyusun instrument penilaian pada materi filsafat matematika dengan mengacu pada panduan penulisan dan penyusunan soal dari Puspendik. Diskusikan dengan rekan anda, Jika Anda kesulitan menjawab LK 05, disarankan untuk membaca dengan teliti bahan bacaan tentang Panduan Penilaian dari Puspendik.

1. Buatlah kisi-kisi penulisan soal mengenai materi sejarah matematika!
2. Buatlah 20 soal berupa 15 soal pilihan ganda dan 5 soal uraian sesuai dengan kisi-kisi yang sudah anda buat!

F. Rangkuman

1. Filsafat adalah ilmu pengetahuan yang menjadi pokok dan pangkal segala pengetahuan yang tercakup di dalamnya empat persoalan, yaitu:

   a. Apakah yang dapat kita ketahui?

   b. Apa yang seharusnya kita kerjakan?

   c. Sampai di manakan harapan kita?

   d. Apakah yang dinamakan manusia itu?

2. Filsafat matematika pada dasarnya merupakan pemikiran reflektif terhadap matematika. (Haryono, 2014: 47). Objek yang dikaji dan dipertimbangkan secara cermat dan penuh perhatian adalah matematika.

3. Terdapat tiga aliran besar filsafat matematika, yaitu aliran formalisme, logisisme, dan Intuisionisme.

4. Logisisme memandang bahwa matematika sebagai bagian dari logika. Oleh karena itu pengkajiannya juga harus menggunakan logika, sehingga matematika lebih logis untuk dipahami.

5. Formalisme menyatakan bahwa matematika merupakan sistem lambang yang digunakan dalam mewakili benda-benda yang ada atau menggunakan proses pengolahan terhadap lambang-lambang yang digunakan. Formalisme berpegang pada prinsip bahwa pernyataan matematik bisa diartikan sebagai pernyataan tentang konsekuensi dari aturan rangkaian manipulasi tertentu.

6. Intuisionisme Aliran ini memandang matematika sebagai hasil dari intuisi. Intuisi dijadikan andalan dalam mengkaji dan memahami matematika. Pengetahuan secara intuisi dapat dipergunakan sebagai hipotesa bagi analisis selanjutnya dalam menentukan benar tidaknya pernyataan yang dikemukakan.

7. Epistemologi mengatakan bahwa matematika sebagai ilmu. Epistemologi matematika merupakan cabang filsafat yang berhubungan dengan pengetahuan matematika. Hal-hal yang ditelaah dalam cabang filsafat ini adalah segi-segi dasar pengetahuan matematika, seperti sumber, hakikat,

batas-batas, dan kebenaran pengetahuan beserta ciri-ciri matematika yang meliputi abstraksi, ruang, waktu, besaran, simbolik, bentuk, dan pola.

8. Ontologi matematika merupakan cabang filsafat yang berhubungan dengan yang ada, sesuatu yang ada termasuk di dalamnya hal-hal metafisik di dalam pengetahuan matematika. Banyak hal yang dipersoalkan di dalam ontologi mtematika, diantaranya adalah cakupan dari pernyataan matematika yang berkaitan dengan dunia nyata (fakta) ataupun hanya dalam pikiran manusia. Matematika sebagai bahasa universal yang berlaku di seluruh dunia.

9. Metodologi matematika adalah kumpulan cara-cara, rumus-rumus dan kaidah-kaidah yang digunakan dalam matematika. Dapat juga diartikan sebagai cara penyusunan berbagai alur dan asas yang diterapkan pada matematika sebagai suatu metode. Pokok-pokok penting dalam metode matematika adalah aksioma, definisi dan teorema.

10. Aksioma merupakan keterangan yang kebenarannya diterima tanpa pembuktian lebih lanjut dan menjadi dasar atau pegangandalam sebuah perbincangan. Definisi adalah sebuah proposisi yang mengantarkan pada hakikat dan kualitas sesuatu. Teorema adalah suatu penemuan bentuk, pola, atau rumus matematika yang baru, dan bisa dibuktikan berdasarkan aksioma-aksioma dan definisi-definisi secara logis.

11. Etnomatematika adalah pembelajaran mengenai hubungan antara matematika dan budaya. Yang merupakan irisan dari empat hal, yaitu, budaya, tradisi historis, akar sosial-budaya, dan matematika.

G. Tes Formatif

1. Secara epistemologi, terbagi menjadi berapa kategorikah kebenaran matematika? Jelaskan!
2. Apa yang dimaksud dengan mengaksiomakan semua matematika secara lengkap dan konsisten?
3. Siapakah tokoh yang mendukung Aliran Intuisisme?
4. Apa inti dari aliran formalisme?
5. Apa yang dimaksud dengan aksioma, definisi, dan teorema?
6. Tuliskan perbedaan antara ontologi, epistemologi dan metodologi matematika!
7. Apa yang dimaksud dengan etnomatematika?

H. Kunci Jawaban

1. Berdasarkan perspektif epistemologi, kebenaran matematika terbagi dalam dua kategori, yaitu pandangan absolut dan pandangan fallibilis. Absolutis memandang kebenaran matematika secara absolut, bahwa „*mathematics is the one and perhaps the only realm of certain, unquestionable and objective knowledge*‟, *sedangkan menurut fallibilis mathematicak truth is corrigible, and can never regarded as being above revision and correction*‟ (Ernest, 1991).

2. Menciptakan suatu sistem matematika yang lengkap dan konsisten tertutup oleh teorema *incompleteness* Gödel kedua, yang menyatakan bahwa sistem aksioma konsisten yang cukup ekspresif tidak pernah dapat membuktikan kekonsistenan mereka sendiri. Karena setiap sistem aksioma akan berisi aritmetik yang hingga sebagai sebuah subsistem. Teorema Gödel telah mengartikan bahwa tidak mungkin aksioma membuktikan kekonsistenan sistem secara relatif (karena aksioma akan membuktikan kekonsistenan dirinya sendiri, dimana Gödel telah menunjukkan ketidakmungkinan). Jadi, untuk menunjukkan bahwa setiap sistem aksioma matematika sebenarnya konsisten, maka salah satunya adalah membutuhkan asumsi pertama kekonsistenan suatu sistem matematika yang dirasakan lebih kuat dari sistem yang telah terbukti konsisten.

3. Luitzen Egbertus Jan Brouwer.

4. Pernyataan matematik bisa diartikan sebagai pernyataan tentang konsekuensi dari aturan rangkaian manipulasi tertentu.

5. Aksioma merupakan keterangan yang kebenarannya diterima tanpa pembuktian lebih lanjut dan menjadi dasar atau pegangandalam sebuah perbincangan. Definisi adalah sebuah proposisi yang mengantarkan pada hakikat dan kualitas sesuatu. Teorema adalah suatu penemuan bentuk, pola, atau rumus matematika yang baru, dan bisa dibuktikan berdasarkan aksioma-aksioma dan definisi-definisi secara logis.

6. Epistemologi mengatakan bahwa matematika sebagai ilmu, ontologi mengatakan matematika sebagai alat untuk menyatukan manusia dengan simbol dan lambang yang telah disepakati, sedangkan metodologi matematika adalah kumpulan cara-cara, rumus-rumus dan kaidah-kaidah yang digunakan dalam matematika.

7. Etnomatematika adalah pembelajaran mengenai hubungan antara matematika dan budaya.

I. Umpan Balik dan Tindak Lanjut

Pada kegitan belajar 2 ini telah dibahas mengenai kompetensi berkaitan dengan filsafat Matematika. Kegiatan-kegiatan tersebut akan terbagi dalam beberapa topik, di antaranya adalah:

a. Pengertian dan ruang lingkup filsafat. Pada bagian ini Anda belajar tentang pengertian filsafat, apa yang menjadi pertanyaan mendasar dalam filsafat.

b. Filsafat matematika. Pada bagian ini Anda belajar tentang aliran-aliran dalam filsafat matematika.

c. Epistemologi, ontologi, dan metodologi matematika. Pada bagian ini Anda belajar tentang pengertian epistemologi matematika, ontologi matematika, dan metodologi matematika

d. Etnomathematics. Pada bagian ini Anda belajar tentang etnomatematika.

Cocokan jawaban Latihan dan Tugas pada Kegiatan Belajar 1 ini dengan kunci jawaban yang tersedia. Hitunglah jumlah skor jawaban Anda yang benar, dan gunakan rumus di bawah ini untuk mengetahui tingkat penguasaan materi kegiatan belajar ini.

$$\text{Tingkat Penguasaan} = \frac{\text{Jumlah skor jawaban benar}}{15} \times 100\%$$

Bila kebenaran jawab Anda mencapai ≥ 67%, Anda dapat meneruskan dengan kegiatan belajar selanjutnya. Akan tetapi bila kebenaran jawaban Anda belum mencapai 67%, hendanya anda mengulangi kegiatan belajar, terutama pada bagian yang Anda anggap rumit dan berdiskusilah dengan teman sejawat yang lainnya atau dengan narasumber/fasilitator.

Untuk mengembangkan materi yang lebih jauh Anda sebaiknya mempelajari materi Aljabar pada kegiatan belajar berikutnya. Lakukan tahapan kegiatan belajar materi selanjutnya dengan mengerjakan aktifitas kegiatannya dan mengerjakan lembar kerjanya. Ukurlah kemampuan pemahaman materi yang Anda pelajari dengan mengerjakan latihan soal-soalnya.

PENUTUP

Setelah menyelesaikan modul ini, peserta diklat berhak untuk mengikuti tes untuk menguji kompetensi yang telah dipelajari. Apabila peserta diklat dinyatakan memenuhi syarat kelulusan dari hasil evaluasi dalam modul ini, maka peserta berhak untuk melanjutkan ke topik/modul berikutnya.

Mintalah pada widyaiswara untuk uji kompetensi dengan sistem penilaian yang dilakukan langsung oleh pihak institusi atau asosiasi yang berkompeten apabila peserta telah menyelesaikan seluruh evaluasi dari setiap modul, maka hasil yang berupa nilai dari widyaiswara atau berupa portofolio dapat dijadikan bahan verifikasi oleh pihak institusi atau asosiasi profesi. Selanjutnya hasil tersebut dapat dijadikan sebagai penentu standar pemenuhan kompetensi dan bila memenuhi syarat peserta berhak mendapatkan sertifikat kompetensi yang dikeluarkan oleh institusi atau asosiasi profesi.

UJI KOMPETENSI

Pilihlah jawaban yang paling tepat diantara pilihan A, B, C, dan D

1. Rahasia matematika Mesir Kuno terungkap setelah ditemukannya...
   A. Papirus Rhind
   B. Papirus Moskow
   C. Batu Rosetta
   D. Papirus Golenischev
   E. Horus

2. Matematika Babilonia menggunakan bilangan berbasis...
   A. 10
   B. 20
   C. 30
   D. 40
   E. 60

3. Berikut adalah suatu konsep matematika yang terdapat dalam matematika India, kecuali...
   A. Bilangan prima
   B. Trigonometri
   C. Kombinatorik
   D. Bilangan rasional
   E. Persamaan linear

4. Ketika membuktikan logika matematika, maka sebenarnya kita sedang menggunakan aliran filsafat...
   A. Intuisisme
   B. Formalisme
   C. Logisisme
   D. Konstruktivisme
   E. Empirisisme

5. Marie Agnesi adalah penemu dari ...
   A. Integral
   B. Kalkulus
   C. Vektor
   D. Limit
   E. Diferensial

6. Tokoh yang bersilang pendapat dengan Newton tentang penemuan kalkulus adalah ...
   A. Luitzen Egbertus Jan Brouwer
   B. Leonardo da Pisa
   C. Gottfried Wilhem Leibniz
   D. Maria Gaetana Agnesi
   E. Karl Weierstrass

7. Aliran Intuisisme dapat digunakan ketika mempelajari ...
   A. Analisis Real
   B. Logika Matematika
   C. Aljabar
   D. Fungsi
   E. Matematika Diskrit

8. Tokoh berikut secara umum menganut pandangan logisisme, kecuali...
   A. Bernard Russell
   B. Immanuel Kant
   C. Gottlob Frege
   D. Rudolf Carnap
   E. Bob Hale

9. Cabang filsafat yang menyatakan bahwa matematika sebagai bagian dari *science* adalah...
   A. Ontologi matematika
   B. Epistemologi matematika
   C. Metodologi matematika
   D. Etnomatika
   E. Deduksi matematika

10. Konsep logika matematika secara metodologi termasuk ke dalam...
    A. Metode deduksi
    B. Metode induksi
    C. Metode dialektika
    D. Metode carrus
    E. Metode koherensi

11. Berikut adalah hal-hal yang menjadi dasar etnomatika, kecuali...
    A. Sosial-budaya
    B. Sejarah
    C. Ekonomi
    D. Matematika
    E. Budaya

12. Tokoh yang menyatakan bahwa bilangan-bilangan asli berasal dari Tuhan adalah...
    A. Leopold Kronecker
    B. L.E.J. Brouwer
    C. Paul Ernest
    D. David Hilbert
    E. Euclid

DAFTAR PUSTAKA

Bank Math info. Sejarah Matematika Babilonia. http://www.bangmath.info/2015/04/sejarah-matematika-babilonia.html.

Ernest, P. (1991). *The Philosophy of Mathematics Education*. London: The Falmer Press.

Haryono, Didi. (2014). *Filsafat Matematika (Suatu Tinjauan Epistemologi dan Filosofis)*. Bandung: Alfabeta.

Muhmidayeli. (2011). *Filsafat Pendidikan*. Bandung: Refika Aditama.

Prabowo, Agung. (2014). *Matematika Nisbah Emas*. Bandung: Alfabeta.

Saputra, H. http://hardymath.blogspot.co.id/2013/10/logisisme-formalisme-dan-fiksionalisme.html. [Online]. 30 November 2015.

Sumardyono. 2004. Karakteristik Matematika dan Implikasinya terhadap Pembelajaran Matematika. Seri Paket Pembinaan Penataran. Yogyakarta: Pusat Pengembangan Penataran Guru Matematika (PPPG Matematika)

Supu, S (2014). Sejarah Matematika Babilonia. https://sciencemathematicseducation.wordpress.com/2014/01/28/sejarah-matematika-babylonia/.[Online]. 30 November 2015.

Wahyudin, (2013). Hakikat, Sejarah dan Filsafat Matematika. Bandung: Mandiri.

Wikipedia.http://www-history.mcs.standrews.ac.uk/history/HistTopics/Egyptian_papyri.html [online]. 30 November 2015

Wikipedia. https://id.wikipedia.org/wiki/Sejarah_matematika. [Online]. 30 November 2015.

Wikipedia. https://id.wikipedia.org/wiki/Gottfried_Leibniz. [Online]. 30 November 2015.

Wikipedia. https://id.wikipedia.org/wiki/Matematika_Yunani. [Online]. 9 Desember 2015.

GLOSARIUM

Aksioma	:	Sebuah proposisi yang jelas dengan sendirinya
Definisi	:	Proposisi yang mengantarkan pada hakikat dan kualitas sesuatu
Epistemologi Matematika	:	Cabang filsafat yang berhubungan dengan pengetahuan matematika
Etnomatika	:	Pembelajaran mengenai hubungan antara matematika dan budaya
Formalisme	:	Suatu aliran filsafat yang mengedepankan lambang-lambang formal
Hieroglif	:	Tulisan Mesir kuno yang disimbolkan dengan gambar binatang
Intuisisme	:	Suatu aliran filsafat matematika yang mengandalkan intuisi dalam melakukan pembuktian matematis
Logisisme	:	Suatu aliran filsafat yang mengedepankan logika
Metodologi Matematika	:	Penelaahan terhadap metode yang khusus digunakan dalam matematika
Ontologi Matematika	:	Cabang filsafat yang berhubungan dengan yang ada; sesuatu yang ada termasuk di dalamnya hal-hal metafisik di dalam pengetahuan matematika
Papirus Moskow	:	Lembaran manuskrip tentang matematika mesir kuno yang sekarang ada di Moskow
Papirus Rhind	:	Lembaran manuskrip tentang matematika mesir kuno
Platonisme	:	Suatu aliran filsafat yang mengemukakan bahwa objek matematika bersifat abstrak

Teorema	:	Suatu penemuan bentuk, pola, atau rumus matematika yang baru, dan bisa dibuktikan berdasarkan aksioma-aksioma dan definisi-definisi secara logis
Tulisan Paku	:	Tulisan pada eadaban Babilonia yang menyerupai bentuk paku

LAMPIRAN

Lampiran 1 Sejarah Matematika

LK - 00

1. Ada berapa aktivitas yang harus Anda ikuti dalam mempelajari bahan belajar ini? Sebutkan topik-topik untuk masing-masing aktivitas.

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

2. Kompetensi apa yang diharapkan tercapai setelah mempelajari bahan belajar ini? Sebutkan!

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

3. Anda saat ini mengikuti pelatihan dengan pola tatap muka. Apa saja yang harus Anda lakukan saat tatap muka?

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

LK – 01a

1. Matematika di Mesir berawal dari dapat dibacanya papirus Rhind dengan perantaraan batu Rosetta. Jelaskan bagaimana alur penemuan papirus dan batu Rosetta hingga terpecahkannya matematika Mesir kuno!
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
2. Diskusikan dengan teman satu kelompok Anda apa saja persoalan yang terdapat pada Papirus Rhind. Cari sumber lain untuk melengkapi hasil diskusi Anda.
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
3. Diskusikan tentang penggunaan bilangan berbasis 60 pada matematika Babilonia! Berikan juga contoh penggunaannya dalam bidang kejuruan di jurusan Anda.
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
4. Temukanlah hubungan antara penemuan-penemuan matematika dari Mesir, Babilonia, Yunani, Cina, dan India!
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

5. Selain peradaban yang dibicarakan di atas, carilah peradaban lain yang memiliki sejarah tentang matematika!
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

LK – 01b

Jelaskanlah manfaat menyertakan sejarah matematika dalam pembelajaran matematika SMK!

Diskusikan pendapat Anda bersama guru lain.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

LK - 02

1. Jelaskan bagaimana alur penemuan konsep-konsep penting dalam matematika!
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
2. Carilah tokoh matematika lain yang menemukan konsep dasar matematika!
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
3. Menurut Anda, konsep matematika mana yang paling penting/sering dipakai di jurusan asal Anda? Berikan alasan mengapa konsep tersebut menurut Anda sangat penting dan beri contohnya!
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

LK - 03

1. Bagi kelas diklat menjadi 5 kelompok untuk mendirikan café.
2. Beri nama café kelompok Anda dengan nama yang menarik pengunjung.
3. Setiap café (seluruh anggota kelompok) agar menghidangkan menu spesial sebagaiberikut. Menu dapat berupa topik, konsep, atau tokoh yang dianggap penting danmenarik. (Manfaatkan spidol warna dan kertas *flipchart* untuk memvisualisasikanmenu semenarik mungkin sehingga pengunjung tertarik untuk bertanya)

   Kelompok 1. Tokoh Matematika Sebelum Abad ke-11 M.

   Kelompok 2. Tokoh Matematika Mulai Abad ke-11 M.

   Kelompok 3. Sejarah Bilangan

   Kelompok 4. Sejarah Geometri

   Kelompok 5. Sejarah Aljabar

   Kelompok 6. Sejarah Kalkulus dan Trigonometri

   Kelompok 7. Sejarah Teori Peluang dan Statistika

4. Tetapkan satu orang anggota kelompok sebagai host / tuan rumah / pemilik café, dananggota kelompok yang lain sebagai pengunjung.
5. Seluruh anggota kelompok, kecuali *host*, silahkan berkunjung ke *café* lain untuk menikmati menu yang disajikan oleh *hostcafé* yang dikunjungi.

   Host bertugas:

   - menjelaskan sajian menu dan memimpin diskusi/konsultasi/tanya jawab terkait menu yang disajikannya.
   - mengarahkan catatan yang diberikan setiap pengunjung agar tanggapannya fokus, singkat, dan relevan dengan menu sajian.
   - mencatat atau memberi memvisualisasikan tambahan pada pendapat atau tanggapan peserta di kertas *flipchart*.
6. Seluruh peserta wajib mengunjungi semua café (lainnya). Setiap pengunjung dapatmemberikan tanggapan dengan cara menulis pada bagian kosong pada menu yang telahdisajikan dan diakhiri dengan no.presensi dan/atau nama.
7. Masing-masing *host* dapat melakukan penilaian terhadap pengunjung sebagai berikut.

Kriteria	Nilai
Menambahkan lebih dari 3 ide yang relevan dengan menu *dan* belum ditambahkan pengunjung lain.	3
Menambahkan 2 ide yang relevan dengan menu dan belum ditambahkan kelompok lain	2
Menambahkan 1 ide yang relevan dengan menu dan belum ditambahkan kelompok lain	1
Tidak memberi kontribusi	0

8. Setiap pengunjung juga dapat memberikan penilaian terhadap *host* sebagai berikut.

Kriteria	Nilai
Penjelasan dan *performance* yang sangat baik	3
Penjelasan dan *performance* yang cukup baik	2
Penjelasan dan *performance* yang kurang baik.	1
Penjelasan dan *performance* yang tidak baik.	0

....
....
....
....
....
....
....

LK - 04

Pilihlah salah satu topik matematika di SMK, kemudian tuliskan ide Anda secara lengkap tentang bagaimana menggunakan sejarah untuk pembelajaran topik tersebut.

Anda dapat merujuk pada John Fauvel (Garner, 1996) tentang beberapa cara yang dapatditempuh dalam menggunakan sejarah dalam pembelajaran matematika di kelas.

....
....
....
....
....
....
....
....

Lampiran 2 Filsafat Matematika

LK - 00

1. Ada berapa aktivitas yang harus Anda ikuti dalam mempelajari bahan belajar ini? Sebutkan topik-topik untuk masing-masing aktivitas.

   ....
   ....
   ....
   ......

2. Kompetensi apa yang diharapkan tercapai setelah mempelajari bahan belajar ini? Sebutkan!

   ....
   ....
   ....
   ......

3. Anda saat ini mengikuti pelatihan dengan pola tatap muka. Apa saja yang harus Anda lakukan saat tatap muka?

   ....
   ....
   ....
   ....

LK - 01

1. Apa yang dimaksud dengan filsafat? Jelaskan!
   ....
   ....
   ....
2. Apakah mungkin suatu ilmu lahir tanpa adanya filsafat? Kemukakan pendapat Anda mengenai hal ini.
   ....
   ....
   ....
   ....
3. Sebutkan empat inti dari persoalan filsafat! Apa yang menjadi jawabannya? Beri juga contoh dari masing-masing persoalan tersebut.
   ....
   ....
   ....
   ....

LK - 02

1. Sebutkan dan jelaskan tentang tiga aliran besar dalam filsafat matematika!
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
2. Diskusikan dengan teman satu kelompok, bagaimana aliran-aliran filsafat matematika tersebut mempengaruhi pemikiran para ahli matematika modern!
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
3. Diskusikan konsep matematika apa saja yang termasuk ke dalam aliran formalisme, logisisme dan intuisisme!
   ....
   ....
   ....
4. Carilah aliran filsafat matematika lain dan presentasikan hasilnya di depan kelas.
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

LK - 03

1. Menurut Anda, apakah terdapat hubungan antara ontologi, epistemologi dan metodologi matematika? Jelaskan!
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
2. Jelaskan apa yang dimaksud dengan teori korespondensi, teori koherensi dan teori pragmatisme, kaitannya dengan kebenaran dalam epistemologi matematika!
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
3. Bagaimana penerapan ontologi matematika dalam pembelajaran matematika di sekolah Anda!
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
4. Jelaskan tiga metode yang mendasari matematika! Berikan contoh konsep yang dapat dibuktikan kebenarannya menggunakan metode tersebut!

LK - 04

1. Apa saja yang menjadi dasar dari etnomatika? Jelaskan!
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
2. Kumpulkan sumber lain tentang etnomatika yang berupa buku ataupun jurnal dan pelajarilah. Diskusikan dikelompok Anda tentang etnomatika tersebut.
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
3. Menurut pendapat Anda, apakah etnomatika diperlukan dalam pembelajaran matematika? Berikan alasannya!
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
4. Etnomatika didasarkan pada sejarah, sosial, dan budaya di mana siswa belajar matematika. Diskusikan dengan teman satu kelompok bagaimana etnomatika yang dapat diterapkan di tempat asal Anda. Presentasikan hasilnya di depan kelas dan kelompok lain memberi tanggapan tentang presentasi kelompok Anda.
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

MODUL
PENGEMBANGAN KEPROFESIAN BERKELANJUTAN

MATEMATIKA TEKNIK

SEKOLAH MENENGAH KEJURUAN (SMK)

EDISI REVISI 2018

I
Kelompok Kompetensi

Terintegrasi Penguatan Pendidikan Karakter dan
Pengembangan Soal Keterampilan Berpikir Aras Tinggi
(HOTS)

Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan
Direktorat Jenderal Guru dan Tenaga Kependidikan
2018

Jalan Jenderal Sudirman, Gedung D Lantai 12, Senayan, Jakarta 10270 Telefon / Fax: (021)57974108

http://gtk.kemdikbud.go.id/