

Modul

Pengembangan Keprofesian
Berkelanjutan



Kelompok Kompetensi

PROFESIONAL

TRIGONOMETRI

Edisi Revisi 2018



Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan
Direktorat Jenderal Guru dan Tenaga Kependidikan
2018

MODUL PENGEMBANGAN KEPROFESIAN BERKELANJUTAN

MATEMATIKA TEKNIK

SEKOLAH MENENGAH KEJURUAN (SMK)

**TERINTEGRASI PENGUATAN PENDIDIKAN KARAKTER DAN
PENGEMBANGAN SOAL KETERAMPILAN BERPIKIR ARAS TINGGI (HOTS)**

EDISI REVISI 2018

KELOMPOK KOMPETENSI H

PROFESIONAL:

Trigonometri

Penulis:

Wahyu Purnama, S.Si, M.Pd.

Maya Siti Rohmah, S.Si, M.Pd.

Penelaah:

Harry Dwi Putra, S.Pd., M.Pd.

Prof. Dr. Nanang Priatna, M.Pd.

Desain Grafis dan Ilustrasi:

Tim Desain Grafis

Copyright © 2018

Direktorat Jenderal Guru dan Tenaga Kependidikan
Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

Dilarang mengcopy sebagian atau keseluruhan isi buku ini untuk kepentingan komersial tanpa izin tertulis dari Kementerian Pendidikan
Kebudayaan



KATA SAMBUTAN

Peran guru profesional dalam proses pembelajaran sangat penting sebagai kunci keberhasilan belajar siswa. Guru profesional adalah guru yang kompeten membangun proses pembelajaran yang baik sehingga dapat menghasilkan pendidikan yang berkualitas dan berkarakter prima. Hal tersebut menjadikan guru sebagai komponen yang menjadi fokus perhatian pemerintah pusat maupun pemerintah daerah dalam peningkatan mutu pendidikan terutama menyangkut kompetensi guru.

Pengembangan profesionalitas guru melalui Program Pengembangan Keprofesian Berkelanjutan merupakan upaya Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan melalui Direktorat Jenderal Guru dan Tenaga Kependidikan dalam upaya peningkatan kompetensi guru. Sejalan dengan hal tersebut, pemetaan kompetensi guru telah dilakukan melalui Uji Kompetensi Guru (UKG) untuk kompetensi pedagogi dan profesional pada akhir tahun 2015. Peta profil hasil UKG menunjukkan kekuatan dan kelemahan kompetensi guru dalam penguasaan pengetahuan pedagogi dan profesional. Peta kompetensi guru tersebut dikelompokkan menjadi 10 (sepuluh) kelompok kompetensi. Tindak lanjut pelaksanaan UKG diwujudkan dalam bentuk pelatihan guru paska UKG sejak tahun 2016 dan akan dilanjutkan pada tahun 2018 ini dengan Program Pengembangan Keprofesian Berkelanjutan bagi Guru. Tujuannya adalah untuk meningkatkan kompetensi guru sebagai agen perubahan dan sumber belajar utama bagi peserta didik. Program Pengembangan Keprofesian Berkelanjutan bagi Guru dilaksanakan melalui Moda Tatap Muka.

Pusat Pengembangan dan Pemberdayaan Pendidik dan Tenaga Kependidikan (PPPPTK) dan, Lembaga Pengembangan dan Pemberdayaan Pendidik dan Tenaga Kependidikan Kelautan Perikanan Teknologi Informasi dan Komunikasi (LP3TK KPTK) merupakan Unit Pelaksana Teknis di lingkungan Direktorat Jenderal Guru dan Tenaga Kependidikan yang bertanggung jawab dalam mengembangkan perangkat dan melaksanakan peningkatan kompetensi guru sesuai bidangnya. Adapun perangkat pembelajaran yang dikembangkan tersebut



adalah modul Program Pengembangan Keprofesian Berkelanjutan melalui Pendidikan dan Pelatihan Guru moda tatap muka untuk semua mata pelajaran dan kelompok kompetensi. Dengan modul ini diharapkan program Pengembangan Keprofesian Berkelanjutan memberikan sumbangan yang sangat besar dalam peningkatan kualitas kompetensi guru.

Mari kita sukseskan Program Pengembangan Keprofesian Berkelanjutan melalui Pendidikan dan Pelatihan Guru ini untuk mewujudkan Guru Mulia karena Karya.

Jakarta, Juli 2018

Direktur Jenderal Guru
dan Tenaga Kependidikan,

Dr. Supriano, M.Ed.
NIP 196208161991031001



KATA PENGANTAR

Undang–Undang Republik Indonesia Nomor 14 Tahun 2005 tentang Guru dan Dosen mengamanatkan adanya pembinaan dan pengembangan profesi guru secara berkelanjutan sebagai aktualisasi dari profesi pendidik. Program Peningkatan Keprofesian Berkelanjutan dilaksanakan bagi semua guru, baik yang sudah bersertifikasi maupun belum bersertifikasi. Untuk melaksanakan Program Peningkatan Keprofesian Berkelanjutan bagi guru, pemetaan kompetensi telah dilakukan melalui Uji Kompetensi Guru (UKG) bagi semua guru di Indonesia. Dengan melihat hasil UKG dapat diketahui secara objektif kondisi guru saat ini, dan data tersebut dapat digunakan untuk meningkatkan kompetensi guru tersebut.

Modul ini disusun sebagai materi utama dalam program peningkatan kompetensi guru mulai tahun 2017 yang diberi nama Peningkatan Keprofesian Berkelanjutan (PKB). Program ini disesuaikan dengan mata pelajaran/paket keahlian yang diampu oleh guru dan kelompok kompetensi yang diindikasikan perlu untuk ditingkatkan. Untuk setiap mata pelajaran/paket keahlian telah dikembangkan sepuluh modul kelompok kompetensi yang mengacu pada Standar Kompetensi Guru (SKG) dan indikator pencapaian kompetensi (IPK) yang ada di dalamnya. Demikian pula soal-soal Uji Kompetensi Guru (UKG) telah terbagi atas 10 kelompok kompetensi. Sehingga program Peningkatan Keprofesian Berkelanjutan yang ditujukan bagi guru berdasarkan hasil UKG diharapkan dapat menjawab kebutuhan guru dalam peningkatan kompetensinya.

Sasaran program strategis pencapaian target RPJMN tahun 2015–2019 antara lain adalah meningkatnya kompetensi guru dilihat dari *Subject Knowledge* dan *Pedagogical Knowledge* yang diharapkan akan berdampak pada kualitas hasil belajar siswa. Oleh karena itu, materi di dalam modul dirancang meliputi kompetensi pedagogi yang disatukan dengan kompetensi profesional yang didalamnya terintegrasi penguatan pendidikan karakter dan pengembangan soal keterampilan berpikir aras tinggi (HOTS) sehingga diharapkan dapat mendorong peserta diklat agar dapat langsung menerapkan kompetensi pedagoginya dalam proses pembelajaran sesuai dengan substansi materi yang diampunya. Disamping



dalam bentuk *hard-copy*, modul ini dapat diperoleh juga dalam bentuk digital, sehingga guru dapat lebih mudah mengaksesnya kapan saja dan dimana saja meskipun tidak mengikuti diklat secara tatap muka.

Kepada semua pihak yang telah bekerja keras dalam penyusunan modul program Guru Pembelajar ini, kami sampaikan terima kasih yang sebesar-besarnya.

Cimahi, Juli 2018

Kepala PPPPTK BMTI,



Drs. Marthen Katte Patiung, M.M.

NIP. 19590416 198603 1 000



DAFTAR ISI

DAFTAR ISI	v
DAFTAR GAMBAR	vii
DAFTAR TABEL	viii
LAMPIRAN.....	viii
PENDAHULUAN.....	1
A. Latar Belakang	1
B. Tujuan	1
C. Peta Kompetensi.....	2
D. Ruang Lingkup	3
E. Saran Cara Penggunaan Modul	4
Kegiatan Belajar 1 Perbandingan Trigonometri.....	5
A. Pengantar.....	5
B. Tujuan	5
C. Indikator Pencapaian Kompetensi	6
D. Uraian Materi.....	6
E. Aktivitas Pembelajaran	29
F. Latihan dan Tugas.....	37
G. Rangkuman.....	39
H. Umpan Balik dan Tindak Lanjut.....	43
Kegiatan Belajar 2: Identitas Trigonometri dan Jumlah Selisih Dua Sudut	45
A. Pengantar.....	45
B. Tujuan	45
C. Indikator Pencapaian Kompetensi	46
D. Uraian Materi.....	46



E. Aktivitas Pembelajaran	59
F. Latihan dan Tugas.....	64
G. Rangkuman.....	66
H. Umpan Balik dan Tindak Lanjut.....	68
Kegiatan Belajar 3 Persamaan Trigonometri Dan Fungsi Trigonometri	69
A. Pengantar.....	69
B. Tujuan	69
C. Indikator Pencapaian Kompetensi	70
D. Uraian Materi.....	70
E. Aktivitas Pembelajaran	77
F. Latihan dan Tugas.....	80
G. Rangkuman.....	83
H. Umpan Balik dan Tindak Lanjut.....	85
PENUTUP	89
EVALUASI	90
GLOSARIUM	94
DAFTAR PUSTAKA	95
LAMPIRAN	96



DAFTAR GAMBAR

Gambar 1 Peta Kompetensi Profesional	2
Gambar 2 Segitiga Siku-siku	7
Gambar 3 Segitiga XYZ	8
Gambar 4 Segitiga Dengan Sudut Istimewa	9
Gambar 5 Pemilihan Mode pada Kalkulator.....	13
Gambar 6 Grafik Sinus	14
Gambar 7 Grafik Cosinus	14
Gambar 8 Grafik Tangen	14
Gambar 9 Kedudukan Titik P pada Koordinat Kartesius	16
Gambar 10 Segitiga pada Penurunan Aturan Sinus.....	19
Gambar 11 Segitiga ABC.....	20
Gambar 12 Segitiga ABC pada Penurunan Aturan Kosinus.....	22
Gambar 13 Segitiga ABC dengan Tinggi BD	24
Gambar 14 Segitiga MNO.....	25
Gambar 15 Segitiga ABC pada Penurunan Luas segitiga.....	26
Gambar 16 Segitiga Siku-Siku ABC, HIJ dan FGH	30
Gambar 17 Segitiga ABC.....	34
Gambar 18 Bangun ABCD.....	35
Gambar 19 Koordinat Kutub	48
Gambar 20 Segitiga ABC.....	54
Gambar 21 Segitiga BAC Rangkap dengan Segitiga BAD.....	62
Gambar 22 Grafik Fungsi $y = \sin x$	73
Gambar 23 Grafik Fungsi $y = \cos x$	74
Gambar 24 Grafik Fungsi $y = \tan x$	74
Gambar 25 Perbandingan Beberapa Fungsi Sinus	75
Gambar 26 Grafik $y = \frac{5}{2} \sin x$	79



DAFTAR TABEL

Tabel 1	Nilai Perbandingan Trigonometri Sudut Istimewa.....	9
Tabel 2	Tabel Trigonometri untuk $\sin 13^\circ$	11
Tabel 3	Tabel Trigonometri untuk $\cos 322^\circ$	12
Tabel 4	Tabel Trigonometri untuk $\tan 77^\circ$	12
Tabel 5	Perbandingan Sudut-Sudut yang Berelasi.....	15

LAMPIRAN

Lampiran 1	Perbandingan Trigonometri.....	96
Lampiran 2	Lembar Kerja Identitas Trigonometri dan Jumlah Selisi Dua Sudut	111
Lampiran 3	Lembar Kerja Persamaan Trigonometri Dan Fungsi Trigonometri	120
Lampiran 4	Tabel Trigonometri dari 0° sampai 360°	125



PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Pengembangan keprofesian berkelanjutan sebagai salah satu strategi pembinaan guru dan tenaga kependidikan diharapkan dapat menjamin guru dan tenaga kependidikan mampu secara terus menerus memelihara, meningkatkan, dan mengembangkan kompetensi sesuai dengan standar yang telah ditetapkan. Pelaksanaan kegiatan PKG akan mengurangi kesenjangan antara kompetensi yang dimiliki guru dan tenaga kependidikan dengan tuntutan profesional yang dipersyaratkan.

Guru dan tenaga kependidikan wajib melaksanakan PKG baik secara mandiri maupun kelompok. Khusus untuk PKG dalam bentuk diklat dilakukan oleh lembaga pelatihan sesuai dengan jenis kegiatan dan kebutuhan guru. Penyelenggaraan diklat PKG dilaksanakan oleh PPPPTK dan LPPPTK KPTK atau penyedia layanan diklat lainnya. Pelaksanaan diklat tersebut memerlukan modul sebagai salah satu sumber belajar bagi peserta diklat. Modul merupakan bahan ajar yang dirancang untuk dapat dipelajari secara mandiri oleh peserta diklat berisi materi, metode, batasan-batasan, dan cara mengevaluasi yang disajikan secara sistematis dan menarik untuk mencapai tingkatan kompetensi yang diharapkan sesuai dengan tingkat kompleksitasnya.

Untuk mempersiapkan kegiatan PKG dalam bentuk diklat bagi guru-guru matematika diperlukan adanya modul yang tepat sesuai dengan tuntutan dari Permendinas no. 16 Tahun 2007 tentang Standar Kualifikasi Akademik dan Kompetensi Guru. Dari permendiknas tersebut, standar kompetensi guru yang dikembangkan dari kompetensi profesional memuat tentang trigonometri.

B. Tujuan

Tujuan penyusunan modul ini adalah agar peserta diklat PKG dapat menguasai konsep trigonometri melalui kegiatan diskusi dengan percaya diri dan dapat menerapkannya dalam bidang keahlian masing-masing.



C. Peta Kompetensi

Pada Gambar 1 berikut dicantumkan daftar kompetensi profesional sesuai dengan Permendiknas Nomor 16 Tahun 2007 tentang Standar Kualifikasi Akademik dan Kompetensi Guru yang akan ditingkatkan melalui proses belajar dengan menggunakan modul ini.



Gambar 1 Peta Kompetensi Profesional



D. Ruang Lingkup

Ruang lingkup dari modul ini berisikan materi tentang:

1. Perbandingan Trigonometri
2. Aturan Sinus dan Kosinus
3. Luas Segitiga
4. Identitas Trigonometri
5. Jumlah dan Selisih Dua Sudut Trigonometri
6. Sudut Rangkap
7. Penjumlahan, Pengurangan dan Perkalian Sinus dan Kosinus
8. Persamaan Trigonometri dan Grafik Trigonometri
9. Nilai Maksimum atau minimum Fungsi Trigonometri



E. Saran Cara Penggunaan Modul

Untuk mempelajari modul ini, hal-hal yang perlu peserta diklat lakukan adalah sebagai berikut:

1. Baca dan pelajari semua materi yang disajikan dalam modul ini,
2. Kerjakan soal-soal latihan dan cocokkan jawabannya dengan Kunci Jawaban yang ada.
3. Jika ada bagian yang belum dipahami, diskusikanlah dengan rekan belajar Anda. Jika masih menemui kesulitan, mintalah petunjuk instruktur/widyaiswara.
4. Untuk mengukur tingkat penguasaan materi kerjakan soal-soal evaluasi di akhir bab dalam modul ini.



Kegiatan Belajar 1 Perbandingan Trigonometri

A. Pengantar

Dalam kegiatan ini Anda akan melakukan serangkaian kegiatan untuk mencapai kompetensi berkaitan dengan trigonometri. Kegiatan-kegiatan tersebut akan terbagi dalam beberapa topik, diantaranya adalah:

- a. Perbandingan trigonometri, pada bagian ini Anda akan belajar tentang nilai perbandingan trigonometri dalam sebuah segitiga siku-siku, nilai perbandingan trigonometri sudut-sudut istimewa, nilai trigonometri untuk sudut yang lain dengan menggunakan tabel matematika dan kalkulator, perbandingan trigonometri pada sudut-sudut yang berelasi dan hubungan antara koordinat kartesius dengan koordinat kutub.
- b. Aturan sinus dan kosinus, pada bagian ini Anda akan belajar tentang aturan sinus, aturan kosinus dan kapan aturan sinus dan kosinus ini dipergunakan.
- c. Luas segitiga, pada bagian ini Anda akan belajar tentang bagaimana cara mencari luas segitiga dengan menggunakan aturan trigonometri.

Setelah mempelajari kegiatan belajar ini, Anda diharapkan dapat mengidentifikasi permasalahan di dalam kehidupan sehari-hari yang berkaitan dengan pembelajaran tentang perbandingan trigonometri, aturan sinus dan kosinus dan luas segitiga

B. Tujuan

Tujuan dari penulisan modul ini adalah:

1. Melalui pengamatan secara kelompok maupun mandiri peserta diklat dapat menentukan ukuran suatu segitiga dengan menggunakan perbandingan trigonometri dengan benar dan penuh percaya diri.
2. Melalui diskusi kelompok peserta diklat dapat menentukan nilai perbandingan trigonometri suatu sudut dengan teliti.
3. Melalui diskusi kelompok peserta diklat dapat menggunakan aturan sinus atau kosinus untuk memecahkan masalah dengan cermat.
4. Melalui diskusi kelompok peserta diklat dapat menghitung Luas segitiga dengan benar dan penuh percaya diri.



C. Indikator Pencapaian Kompetensi

Indikator pencapaian kompetensi yang harus dikuasai setelah mengikuti kegiatan belajar ini adalah, peserta diklat dapat:

1. Menentukan ukuran suatu segitiga dengan menggunakan perbandingan trigonometri dengan benar dan penuh percaya diri
2. Menentukan nilai perbandingan trigonometri suatu sudut secara teliti
3. Menggunakan aturan sinus atau kosinus untuk memecahkan masalah.
4. Menghitung luas segitiga dengan benar dan penuh percaya diri

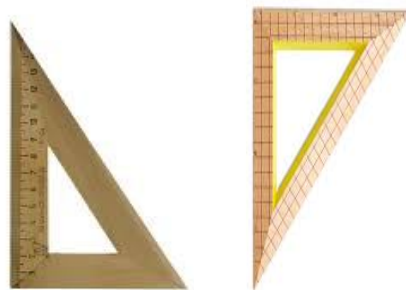
D. Uraian Materi

Pada kegiatan belajar ini akan dibahas mengenai perbandingan trigonometri, menentukan ukuran suatu segitiga menggunakan perbandingan trigonometri, aturan sinus, aturan kosinus, dan mengubah koordinat kartesius ke koordinat polar dan sebaliknya.

1. Perbandingan Trigonometri

Kata trigonometri berasal dari bahasa Yunani yaitu *trigonon* dan *metria*. *Trigonon* berarti segitiga dan *metria* berarti ukuran. Seperti juga arti kata trigonometri, telah kita ketahui bahwa rumus-rumus trigonometri berasal dari perbandingan pada suatu segitiga siku-siku.

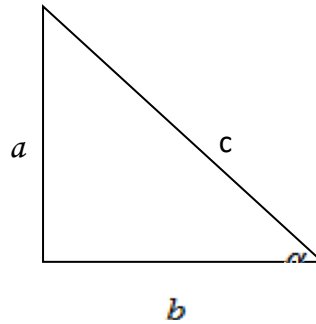
Pernahkan Anda melihat penggaris seperti gambar di bawah ini? Apabila pernah, apakah nama bangun datar yang menyerupai penggaris ini?



Gambar 1 Penggaris Segitiga



Sekedar mengingatkan kembali perbandingan trigonometri pada segitiga siku-siku, perhatikan gambar segitiga berikut.



Gambar 2 Segitiga Siku-siku

Di dalam segitiga siku-siku berlaku enam buah perbandingan trigonometri, yaitu

$$\text{Sinus } \alpha = \frac{a}{c}, \text{ ditulis } \sin \alpha$$

$$\text{Kosecan } \alpha = \frac{c}{a}, \text{ ditulis } \operatorname{cosec} \alpha$$

$$\text{Kosinus } \alpha = \frac{b}{c}, \text{ ditulis } \cos \alpha$$

$$\text{Secan } \alpha = \frac{c}{b}, \text{ ditulis } \sec \alpha$$

$$\text{Tangen } \alpha = \frac{a}{b}, \text{ ditulis } \tan \alpha$$

$$\text{Kotangen } \alpha = \frac{b}{a}, \text{ ditulis } \cot \alpha$$

Agar mudah diingat, sisi a dinamakan sisi depan, sisi b dinamakan sisi samping, dan sisi c dinamakan sisi miring, sehingga diperoleh perbandingan sebagai berikut:

$$\sin \alpha = \frac{\text{sisi depan}}{\text{sisi miring}} = \frac{a}{c}$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{\text{sisi miring}}{\text{sisi depan}} = \frac{c}{a}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{sisi samping}}{\text{sisi miring}} = \frac{b}{c}$$

$$\sec \alpha = \frac{\text{sisi miring}}{\text{sisi samping}} = \frac{c}{b}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{sisi depan}}{\text{sisi samping}} = \frac{a}{b}$$

$$\cot \alpha = \frac{\text{sisi samping}}{\text{sisi depan}} = \frac{b}{a}$$

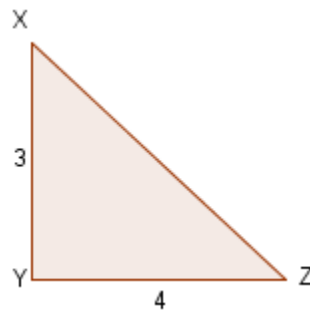
Contoh

Diberikan segitiga XYZ siku-siku di Y dengan XY=3 dan YZ=4. Tentukan nilai dari $\sin X$, $\cos X$, $\tan X$, $\sin Z$, $\cos Z$, $\tan Z$!



Jawab:

Perhatikan gambar segitiga XYZ berikut.



Gambar 3 Segitiga XYZ

Karena XYZ merupakan segitiga siku-siku, maka sisi XZ dapat dicari menggunakan Pythagoras

$$\begin{aligned}XZ^2 &= XY^2 + YZ^2 \\&= 3^2 + 4^2 \\&= 9 + 16 \\&= 25\end{aligned}$$

$$XZ = \sqrt{25}$$

$$XZ = 5$$

$$\sin X = \frac{YZ}{XZ} = \frac{4}{5}$$

$$\cos X = \frac{XY}{XZ} = \frac{3}{5}$$

$$\tan X = \frac{YZ}{XY} = \frac{4}{3}$$

$$\sin Z = \frac{XY}{XZ} = \frac{3}{5}$$

$$\cos Z = \frac{YZ}{XZ} = \frac{4}{5}$$

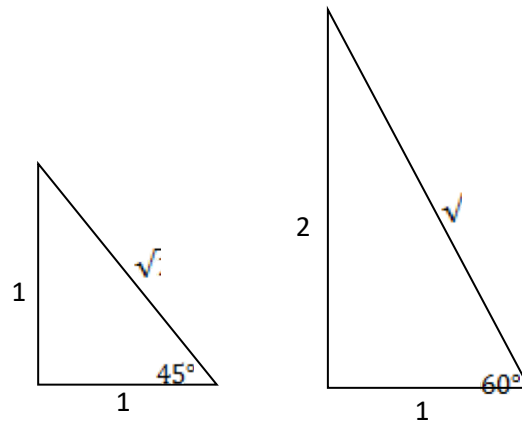
$$\tan Z = \frac{XY}{YZ} = \frac{3}{4}$$

a. Nilai Perbandingan Trigonometri untuk Sudut-sudut Istimewa

Sudut-sudut yang berukuran 0° , 30° , 45° , 60° , 90° dalam trigonometri disebut sudut istimewa, karena nilai sinus, cosinus dan tangen dari sudut-sudut tersebut dapat dengan mudah dicari.



Perhatikan gambar segitiga berikut ini.



Gambar 4 Segitiga Dengan Sudut Istimewa

Dari gambar 4, untuk sudut 45° nilai

$$\sin 45^\circ = \frac{\text{sisi depan}}{\text{sisi miring}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

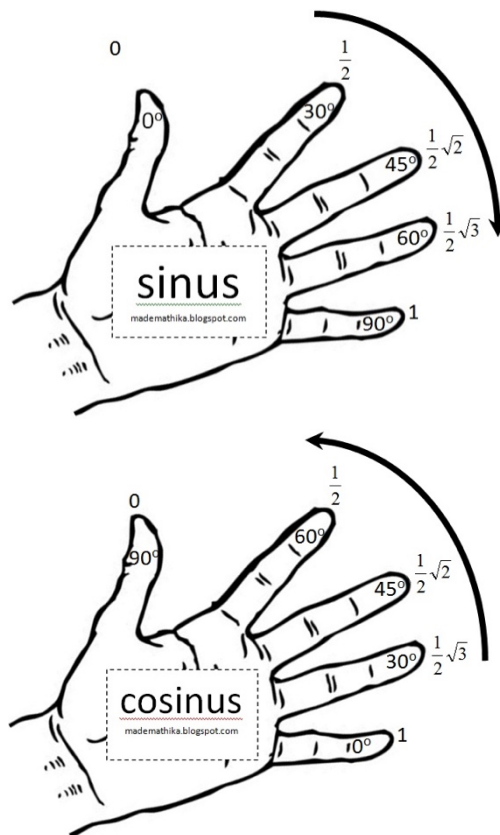
$$\cos 45^\circ = \frac{\text{sisi samping}}{\text{sisi miring}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

Dan seterusnya, hasil dapat dirangkum dalam tabel berikut.

Tabel 1 Nilai Perbandingan Trigonometri Sudut Istimewa

	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cos	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	~

Untuk memudahkan memahami konsep sudut istimewa kita dapat menggunakan jari-jari tangan seperti pada gambar berikut ini.



Anda telah memperoleh nilai sin dan cos, coba tentukan cara memperoleh nilai tan dari setiap sudut-sudut istimewa!

b. Nilai Trigonometri untuk Sudut Lain

Kadang kala dalam praktek di kehidupan nyata, kita dihadapkan pada pengukuran sudut lain yang tidak termasuk dalam sudut istimewa di atas. Sudut-sudut lain tersebut, nilai perbandingan trigonometrinya tidak dapat dihafal seperti halnya pada sudut istimewa. Ada dua cara yang dapat dilakukan untuk menentukan nilai perbandingan trigonometrinya. Cara pertama yaitu dengan menggunakan tabel matematika dan cara kedua adalah dengan mempergunakan kalkulator.

Cara pertama, yaitu menggunakan tabel matematika sangat mudah. Hal yang perlu dilakukan adalah mencari nilai sudut pada kolom pertama, lalu cari nilai sinus, kosinus atau tangen pada kolom selanjutnya. Tabel matematika dapat dilihat di lampiran 4.



Contoh

Dengan menggunakan tabel trigonometri, tentukanlah nilai perbandingan trigonometri di bawah ini!

- $\sin 13^\circ$
- $\cos 322^\circ$
- $\tan 77^\circ$

Jawab:

Nilai sinus, kosinus dan tangen di atas dicari dengan menggunakan tabel trigonometri.

a. $\sin 13^\circ = 0.2250$

Tabel 2 Tabel Trigonometri untuk $\sin 13^\circ$

sudut	sin x	cos x	tan x
0	0.0000	1.0000	0.0000
1	0.0175	0.9998	0.0175
2	0.0349	0.9994	0.0349
3	0.0523	0.9986	0.0524
4	0.0698	0.9976	0.0699
5	0.0872	0.9962	0.0875
6	0.1045	0.9945	0.1051
7	0.1219	0.9925	0.1228
8	0.1392	0.9903	0.1405
9	0.1564	0.9877	0.1584
10	0.1736	0.9848	0.1763
11	0.1908	0.9816	0.1944
12	0.2079	0.9781	0.2126
13	0.2250	0.9744	0.2309
14	0.2419	0.9703	0.2493
15	0.2588	0.9659	0.2679

b. $\cos 322^\circ = 0.7880$

**Tabel 3 Tabel Trigonometri untuk $\cos 322^\circ$**

sudut	sin x	cos x	tan x
316	-0.6947	0.7193	-0.9657
317	-0.6820	0.7314	-0.9325
318	-0.6691	0.7431	-0.9004
319	-0.6561	0.7547	-0.8693
320	-0.6428	0.7660	-0.8391
321	-0.6293	0.7771	-0.8098
322	-0.6157	0.7880	-0.7813
323	-0.6018	0.7986	-0.7536
324	-0.5878	0.8090	-0.7265
325	-0.5736	0.8192	-0.7002

c. $\tan 77^\circ = 1.2799$

Tabel 4 Tabel Trigonometri untuk $\tan 77^\circ$

sudut	sin x	cos x	tan x
45	0.7071	0.7071	1.0000
46	0.7193	0.6947	1.0355
47	0.7314	0.6820	1.0724
48	0.7431	0.6691	1.1106
49	0.7547	0.6561	1.1504
50	0.7660	0.6428	1.1918
51	0.7771	0.6293	1.2349
52	0.7880	0.6157	1.2799
53	0.7986	0.6018	1.3270
54	0.8090	0.5878	1.3764
55	0.8192	0.5736	1.4281

Cara yang kedua adalah dengan menggunakan kalkulator. Sebelum mencari nilai trigonometri suatu sudut dengan menggunakan kalkulator scientific, alangkah baiknya jika Anda mempelajari terlebih dahulu kalkulator yang Anda miliki.

Perhatikan gambar berikut ini untuk mengetahui mode yang biasa ada pada kalkulator scientific



Tekan **mode** kemudian tekan pilihan **•** , **1** , ... atau **9**

Keterangan :

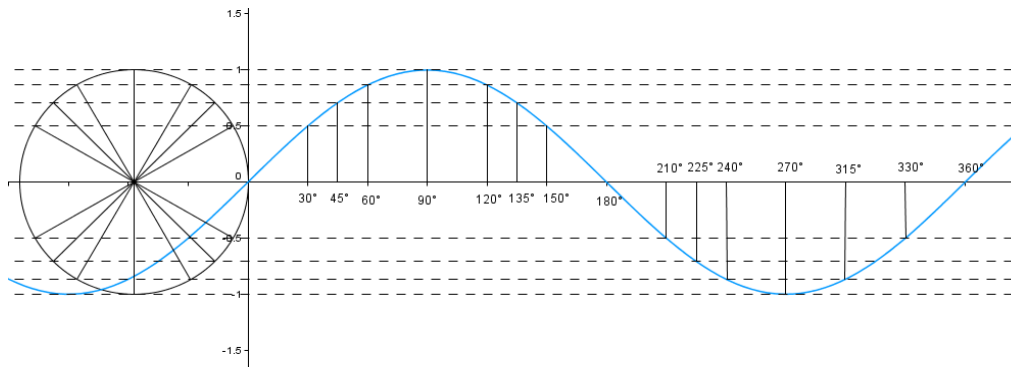
Mode •	: Digunakan untuk perhitungan biasa dan perhitungan yang terprogram dapat dieksekusi.
Mode 0	: Digunakan untuk menuliskan program pada layar ditampilkan "LRN".
Mode 1	: Digunakan untuk integral tertentu, pada layar ditampilkan " $\int dx$ ".
Mode 2	: Digunakan untuk analisis regresi, pada layar ditampilkan "LR"
Mode 3	: Digunakan untuk perhitungan statistik, pada layar ditampilkan "SD"
Mode 4	: Digunakan untuk perhitungan dengan menggunakan derajat sebagai satuan besarnya sudut, pada layar ditampilkan "DEG"
Mode 5	: Digunakan untuk perhitungan dengan menggunakan "radian" sebagai satuan besarnya sudut, pada layar ditampilkan "RAD"
Mode 6	: Digunakan untuk perhitungan dengan menggunakan "gradien" sebagai satuan besarnya sudut, pada layar ditampilkan "GRA"
Mode 7	: Digunakan untuk menetapkan banyaknya tempat desimal yang diperlukan. Misalnya : Mode 7 3 maka suatu bilangan akan dinyatakan dengan 3 tempat desimal.
Mode 8	: Bilangan dinyatakan dengan bentuk baku. Banyaknya angka signifikan yang dikehendaki dapat dilakukan dengan menekan angka setelah menekan Mode dan 8 (contoh : Mode 8 3)
Mode 9	: Untuk menormalkan kembali (release) dari penggunaan Mode 7 dan Mode 8

Gambar 5 Pemilihan Mode pada Kalkulator

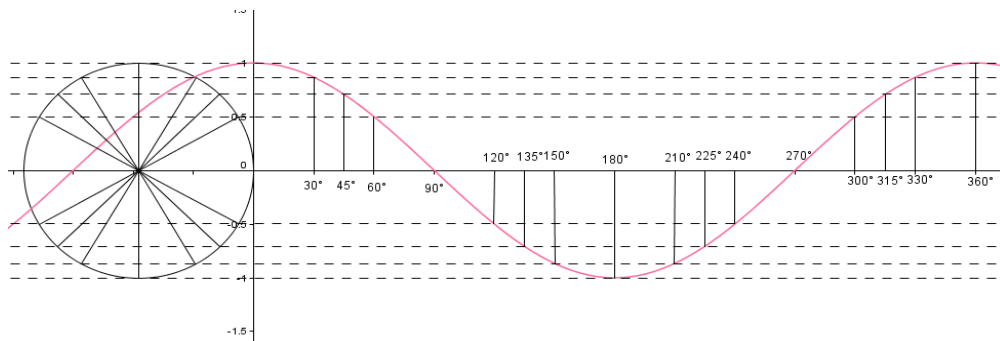
- 1) Untuk mencari nilai perbandingan, ketik sin, cos atau tan lalu ketikkan besar sudutnya atau sebaliknya, tergantung dari jenis kalkulator yang Anda miliki.
- 2) Untuk mencari besar sudut dari nilai perbandingan trigonometri, ketik shift diikuti dengan nilai sin, cos, atau tan. Maksud dari diketikkannya shift adalah mencari nilai balikan dari sin, cos atau tan yang dikenal dengan arcsin, arccos atau arctan (invers dari sin, cos atau tan).

c. Perbandingan Trigonometri Sudut yang Berelasi

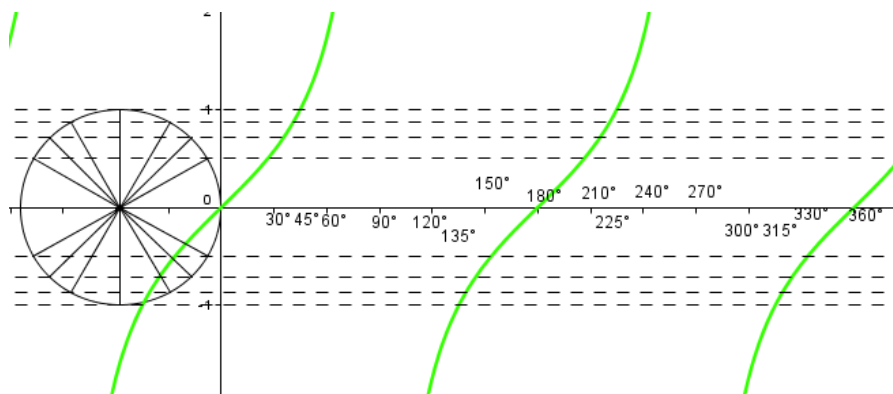
Sebelum membicarakan perbandingan trigonometri pada sudut yang berelasi, perhatikan terlebih dahulu gambar di bawah ini.



Gambar 6 Grafik Sinus



Gambar 7 Grafik Cosinus



Gambar 8 Grafik Tangen

Dari gambar grafik di atas, nilai sinus akan bernilai positif di kuadran I dan kuadran II, nilai cosinus akan bernilai positif di kuadran I dan kuadran IV, sedangkan nilai tangen akan bernilai positif di kuadran I dan kuadran III.

Adapun perbandingan trigonometri dari sudut yang berelasi dituliskan pada tabel berikut ini.

**Tabel 5 Perbandingan Sudut-Sudut yang Berelasi**

Kuadran I	$\sin(90 - \alpha)^\circ = \cos \alpha$	$\operatorname{cosec}(90 - \alpha)^\circ = \sec \alpha$
	$\cos(90 - \alpha)^\circ = \sin \alpha$	$\sec(90 - \alpha)^\circ = \operatorname{cosec} \alpha$
	$\tan(90 - \alpha)^\circ = \cot \alpha$	$\cot(90 - \alpha)^\circ = \tan \alpha$
Kuadran II	$\sin(90 + \alpha)^\circ = \cos \alpha$	$\operatorname{cosec}(90 + \alpha)^\circ = \sec \alpha$
	$\cos(90 + \alpha)^\circ = -\sin \alpha$	$\sec(90 + \alpha)^\circ = -\operatorname{cosec} \alpha$
	$\tan(90 + \alpha)^\circ = -\cot \alpha$	$\cot(90 + \alpha)^\circ = -\tan \alpha$
	$\sin(180 - \alpha)^\circ = \sin \alpha$	$\operatorname{cosec}(180 - \alpha)^\circ = \operatorname{cosec} \alpha$
	$\cos(180 - \alpha)^\circ = -\cos \alpha$	$\sec(180 - \alpha)^\circ = -\sec \alpha$
	$\tan(180 - \alpha)^\circ = -\tan \alpha$	$\cot(180 - \alpha)^\circ = -\cot \alpha$
Kuadran III	$\sin(180 + \alpha)^\circ = -\sin \alpha$	$\operatorname{cosec}(180 + \alpha)^\circ = -\operatorname{cosec} \alpha$
	$\cos(180 + \alpha)^\circ = -\cos \alpha$	$\sec(180 + \alpha)^\circ = -\sec \alpha$
	$\tan(180 + \alpha)^\circ = \tan \alpha$	$\cot(180 + \alpha)^\circ = \cot \alpha$
	$\sin(270 - \alpha)^\circ = -\cos \alpha$	$\operatorname{cosec}(270 - \alpha)^\circ = -\sec \alpha$
	$\cos(270 - \alpha)^\circ = -\sin \alpha$	$\sec(270 - \alpha)^\circ = -\operatorname{cosec} \alpha$
	$\tan(270 - \alpha)^\circ = \cot \alpha$	$\cot(270 - \alpha)^\circ = \tan \alpha$
Kuadran IV	$\sin(360 - \alpha)^\circ = -\sin \alpha$	$\operatorname{cosec}(360 - \alpha)^\circ = -\operatorname{cosec} \alpha$
	$\cos(360 - \alpha)^\circ = \cos \alpha$	$\sec(360 - \alpha)^\circ = \sec \alpha$
	$\tan(360 - \alpha)^\circ = -\tan \alpha$	$\cot(360 - \alpha)^\circ = -\cot \alpha$
	$\sin(270 + \alpha)^\circ = -\cos \alpha$	$\operatorname{cosec}(270 + \alpha)^\circ = -\sec \alpha$
	$\cos(270 + \alpha)^\circ = \sin \alpha$	$\sec(270 + \alpha)^\circ = \operatorname{cosec} \alpha$
	$\tan(270 + \alpha)^\circ = -\cot \alpha$	$\cot(270 + \alpha)^\circ = -\tan \alpha$
	$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$	$\operatorname{cosec}(-\alpha)^\circ = -\operatorname{cosec} \alpha$
	$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$	$\sec(-\alpha)^\circ = \sec \alpha$
	$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$	$\cot(-\alpha)^\circ = -\cot \alpha$

Jika kita perhatikan pada tabel di atas, terlihat sinus akan berubah menjadi cosinus, cosinus berubah menjadi sinus, dan tangen berubah menjadi cotangen bila sudut yang berelasi 90° atau 270° . Dan akan tetap jika sudut yang berelasi 180° atau 360° . Adapun nilai positif atau negatifnya tergantung dari berada di kuadran berapa sudut yang dicari. Sekarang kita coba contoh-contoh berikut ini.

Contoh

Kita akan menghitung nilai dari $\cos 145^\circ$. Pertama, perhatikan bahwa letak sudut 145° berada pada kuadran II, artinya cosinus bernilai negatif. Ada dua cara yang dapat kita lakukan.

$$1. \quad \cos 145^\circ = \cos(180 - 35)^\circ = -\cos 35^\circ$$



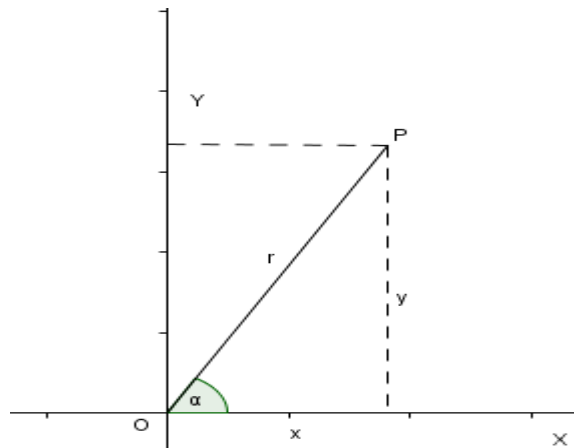
atau

$$2. \cos 145^\circ = \cos(90 + 55)^\circ = -\sin 55^\circ$$

Perhatikan bahwa nilai sinus dan nilai cosinus selalu berkebalikan pada dua sudut yang berjumlah 90° . Artinya, nilai $-\cos 35^\circ$ adalah sama dengan nilai $-\sin 55^\circ$

2. Hubungan Koordinat Kartesius dengan Koordinat Kutub

Suatu kedudukan titik pada koordinat kartesius, dapat dinyatakan juga dalam koordinat polar. Perhatikan gambar di bawah ini.



Gambar 9 Kedudukan Titik P pada Koordinat Kartesius

Titik P pada koordinat kartesius dinyatakan dengan $P(a,b)$ dengan a disebut absis dan b disebut ordinat. Sedangkan pada koordinat kutub, titik P dapat dinyatakan dengan $P(r,\alpha)$ dengan r disebut jari-jari dan α disebut sudut kutub.

a. Mengubah koordinat Kartesius menjadi Koordinat Polar

Berikut cara mengubah titik $P(a,b)$ menjadi $P(r, \alpha)$:

- 1) Cari nilai r dengan menggunakan teorema Pythagoras

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

- 2) Cari nilai α dengan menggunakan perbandingan trigonometri

$$\tan \alpha = \frac{b}{a}, \text{ nilai } \alpha \text{ didapat dengan cara mencari nilai balikan dari}$$

tangen (arc tan). Atau dapat juga dicari dengan menggunakan balikan dari nilai sinus atau kosinus dari sudut α .

**Contoh:**

Bagaimana cara merubah titik P(6,8) menjadi koordinat kutub? Jelaskan jawabanmu!

Jawab:

$$\triangleright x = a = 6$$

$$\triangleright y = b = 8$$

$$\triangleright r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$= \sqrt{6^2 + 8^2}$$

$$= \sqrt{36 + 64}$$

$$= \sqrt{100}$$

$$= 10$$

$$\triangleright \sin \alpha = \frac{a}{r}$$

$$= \frac{6}{10}$$

$$= \frac{3}{5}$$

$$\alpha = \arcsin \frac{3}{5}$$

$$\alpha = 37^\circ$$

Jadi koordinat kutub dari P(6,8) adalah P(10, 37°)

b. Mengubah Koordinat Polar menjadi Koordinat Kartesius

Berikut cara mengubah titik P(r, α) menjadi P(a,b):

- 1) Nilai a didapat dengan melihat perbandingan sudut trigonometri, yaitu

$$a = r \cos \alpha$$

- 2) Nilai b didapat dengan melihat perbandingan sudut trigonometri, yaitu

$$b = r \sin \alpha$$

Contoh:

Bagaimana cara merubah koordinat kutub P(2,120°) menjadi koordinat kartesius?

Jelaskan jawabanmu!

Jawab:

$$\triangleright r = 2$$

$$\triangleright \alpha = 120^\circ$$



$$\triangleright a = r \cos \alpha$$

$$= 2 \cos 120^\circ$$

$$= 2 \cos(180^\circ - 60^\circ)$$

$$= 2 \cdot (-\cos 60)$$

$$= 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= -1$$

$$\triangleright b = 2 \sin 120^\circ$$

$$= 2 \sin(180^\circ - 60^\circ)$$

$$= 2 \sin 60^\circ$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{3}$$

$$= \sqrt{3}$$

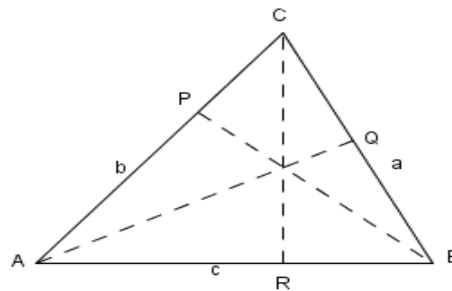
Jadi koordinat kartesius dari $P(2, 120^\circ)$ adalah $P(-1, \sqrt{3})$

3. Aturan Sinus dan Kosinus

Aturan Sinus dipergunakan untuk menentukan unsur-unsur dalam suatu segitiga apabila unsur yang lain telah diketahui. Kemungkinan unsur-unsur yang diketahui adalah sisi, sudut, sudut (ss, sd, sd), sudut, sisi, sudut (sd, ss, sd), atau sisi, sudut, sisi (ss, sd, ss). Sedangkan aturan Kosinus dipergunakan untuk menghitung panjang sisi suatu segitiga jika pada segitiga tersebut diketahui dua sisi yang lain dan besar sudut yang diapit oleh kedua sisi tersebut dan menentukan besar sudut dalam sebuah segitiga jika panjang ketiga sisinya diketahui.

a. Aturan Sinus

Untuk menurunkan aturan sinus, kita perhatikan gambar di bawah ini. Segitiga ABC merupakan segitiga lancip. Garis AQ merupakan garis tinggi pada sisi a, garis BP merupakan garis tinggi pada sisi b, dan garis CR merupakan garis tinggi pada sisi c.



Gambar 10 Segitiga pada Penurunan Aturan Sinus

Perhatikan segitiga ACR

$$\sin A = \frac{CR}{b} \Leftrightarrow CR = b \sin A \dots\dots\dots(1)$$

Lalu perhatikan segitiga BCR

$$\sin B = \frac{CR}{a} \Leftrightarrow CR = a \sin B \dots\dots\dots(2)$$

Persamaan (1) dan (2) diperoleh

$$b \sin A = a \sin B \Leftrightarrow \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \dots\dots\dots(3)$$

Sekarang perhatikan segitiga CAQ

$$\sin C = \frac{AQ}{b} \Leftrightarrow AQ = b \sin C \dots\dots\dots(4)$$

Pada segitiga BAQ

$$\sin B = \frac{AQ}{c} \Leftrightarrow AQ = c \sin B \dots\dots\dots(5)$$

Persamaan (4) dan (5) diperoleh

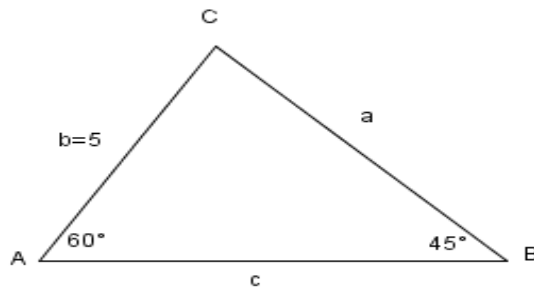
$$b \sin c = c \sin B \dots\dots\dots(6)$$

Maka dari persamaan (3) dan (6) diperoleh

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

**Contoh**

Perhatikan gambar segitiga di bawah ini!



Gambar 11 Segitiga ABC

Berdasarkan gambar di atas, coba Anda tentukan disertai penjelasan:

- a) Besar sudut C
- b) Panjang sisi a dan sisi c

Jawab:

- a. Jumlah besar sudut pada segitiga adalah 180° , maka besar sudut C didapat dari:

$$\begin{aligned}\angle C &= 180^\circ - (\angle A + \angle B) \\ \Leftrightarrow \angle C &= 180^\circ - (60^\circ + 45^\circ) \\ \Leftrightarrow \angle C &= 180^\circ - 105^\circ \\ \Leftrightarrow \angle C &= 75^\circ\end{aligned}$$

Jadi besar sudut c adalah 75°

- b. Panjang sisi a dan panjang sisi c dicari dengan menggunakan aturan sinus.

➤ Panjang sisi a



$$\begin{aligned}
 \frac{a}{\sin A} &= \frac{b}{\sin B} \\
 \Leftrightarrow \frac{a}{\sin 60^\circ} &= \frac{5}{\sin 45^\circ} \\
 \Leftrightarrow a &= \frac{5}{\sin 45^\circ} \sin 60^\circ \\
 \Leftrightarrow a &= \frac{5}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} \\
 \Leftrightarrow a &= \frac{5}{2}\sqrt{6}
 \end{aligned}$$

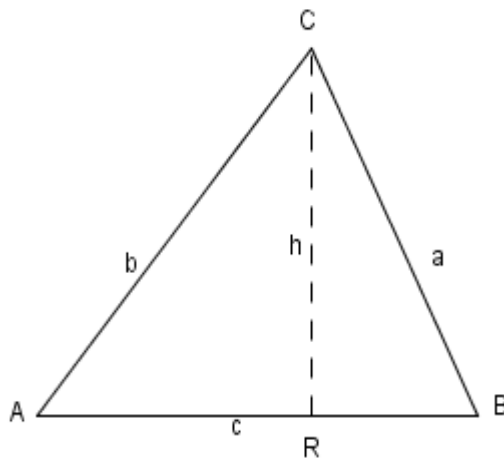
Jadi, panjang sisi $a = \frac{5}{2}\sqrt{6}$

➤ Panjang sisi c

$$\begin{aligned}
 \frac{b}{\sin B} &= \frac{c}{\sin C} \\
 \Leftrightarrow c &= \frac{b}{\sin B} \cdot \sin C \\
 \Leftrightarrow c &= \frac{5}{\sin 45^\circ} \cdot \sin 75^\circ \\
 \Leftrightarrow c &= \frac{5}{\sin 45^\circ} \cdot \sin(90^\circ - 15^\circ) \\
 \Leftrightarrow c &= \frac{5}{\sin 45^\circ} \cdot \cos 15^\circ \\
 \Leftrightarrow c &= \frac{5}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} \times 0,966 \\
 \Leftrightarrow c &= 6,831
 \end{aligned}$$

**b. Aturan Kosinus**

Aturan kosinus juga diturunkan dari segitiga. Perhatikan segitiga ABC di bawah ini, dimana garis CR adalah garis tinggi terhadap sisi c.



Gambar 12 Segitiga ABC pada Penurunan Aturan Kosinus

Perhatikan segitiga siku-siku BCR, dengan menggunakan teorema Pythagoras, diperoleh

$$a^2 = h^2 + BR^2 \dots\dots\dots(1)$$

Pada segitiga siku-siku ACR, diperoleh

$$h = b \sin A \dots\dots\dots(2)$$

dan

$$AR = b \cos A \dots\dots\dots(3)$$

Perhatikan bahwa

$$BR = AB - AR = c - b \cos A \dots\dots\dots(4)$$

Sehingga ketika (2) dan (4) disubstitusikan ke (1) akan diperoleh

$$a^2 = (b \sin A)^2 + (c - b \cos A)^2$$



$$\Leftrightarrow a^2 = b^2 \sin^2 A + c^2 - 2bc \cos A + b^2 \cos^2 A$$

$$\Leftrightarrow a^2 = b^2 (\sin^2 A + \cos^2 A) + c^2 - 2bc \cos A$$

$$\Leftrightarrow a^2 = b^2 \cdot 1 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$\Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

Dengan cara yang sama, diperoleh

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$$

Contoh

Diketahui segitiga ABC dengan panjang sisi $b = 5$, sisi $c = 6$ dan besar sudut $A = 53^\circ$. Hitunglah panjang sisi BC

Jawab:

Gunakan aturan kosinus untuk mencari panjang BC

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

$$\Leftrightarrow a^2 = 5^2 + 6^2 - 2(5)(6)\cos 53^\circ$$

$$\Leftrightarrow a^2 = 25 + 36 - (60) \cdot \frac{4}{5}$$

$$\Leftrightarrow a^2 = 13$$

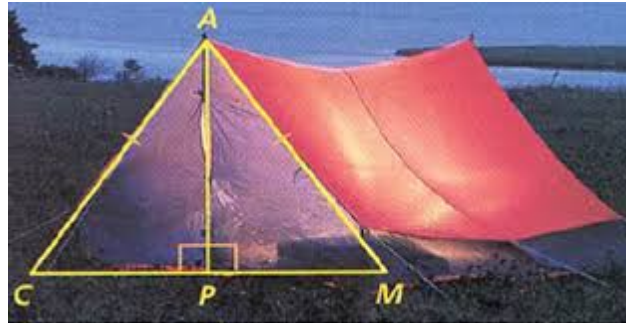
$$\Leftrightarrow a = \sqrt{13}$$

Jadi, panjang sisi a adalah $\sqrt{13}$



4. Luas Segitiga

Phatikan gambar tenda kemah berikut ini! Salah satu permukaan pada tenda kemah berbentuk segitiga.

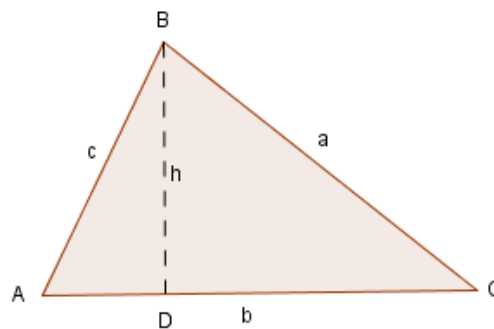


Dapatkah Anda menentukan cara memperoleh luas permukaan tenda kemah berbentuk segitiga tersebut menggunakan konsep trigonometri? Apabila Anda tidak dapat memperolehnya, silahkan pahami konsep Luas Segitiga berikut ini!

Luas segitiga dapat dicari dengan menggunakan trigonometri ketika dua sisi dan satu sudut yang diketahui atau ketiga sisinya diketahui.

a. Luas segitiga dengan dua sisi dan satu sudut diketahui

Untuk dapat menghitung luas segitiga dengan dua sisi dan satu sudut yang diketahui, perhatikan gambar segitiga di bawah ini



Gambar 13 Segitiga ABC dengan Tinggi BD

Segitiga ABC merupakan segitiga sembarang dengan tinggi BD.

$$\text{Luas segitiga ABC} = \frac{1}{2} \times \text{alas} \times \text{tinggi} = \frac{1}{2} \times AC \times BD$$

Perhatikan bahwa $BD = c \cdot \sin A$, sehingga didapat



$$Luas ABC = \frac{1}{2} \times AC \times c \cdot \sin A$$

$$Luas ABC = \frac{1}{2} \times b \times c \cdot \sin A$$

$$Luas ABC = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin A$$

Dengan cara yang sama, didapat

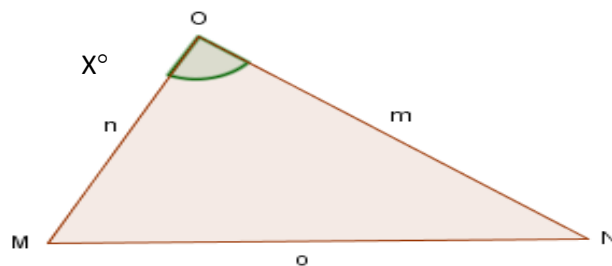
$$Luas ABC = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin C$$

Dan

$$Luas ABC = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin B$$

Contoh 4

Pada segitiga MNO, diketahui sisi $n = 6$ cm, $m = 10$ cm. apabila luas segitiga MNO adalah 24 cm^2 , bagaimana cara menentukan nilai $\sin x$? Berikan penjelasan dari jawabanmu!



Gambar 14 Segitiga MNO

Jawab:

$$luas\ segitiga\ MNO = \frac{1}{2} \cdot n \cdot m \cdot \sin x$$

$$24 = \frac{1}{2} \times 6 \times 10 \times \sin x^\circ$$

$$24 = 30 \times \sin x^\circ$$



$$\sin x^\circ = \frac{24}{30}$$

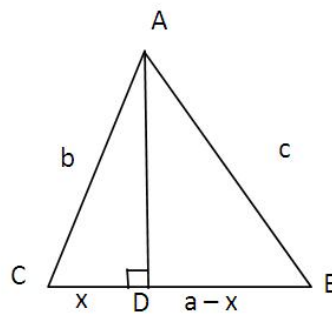
$$\sin x^\circ = 0,8$$

Jadi, $\sin x^\circ = 0,8$

b. Luas segitiga dengan ketiga sisi diketahui

Adapun untuk mencari luas segitiga yang panjang ketiga sisinya diketahui adalah dengan menggunakan rumus $L = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ yang didapat dari penurunan rumus sebagai berikut.

Perhatikan segitiga ABC berikut



Gambar 15 Segitiga ABC pada Penurunan Luas segitiga

Rumus Pythagoras pada segitiga ADC adalah

$$x^2 + t^2 = b^2 \quad \dots\dots (1)$$

Rumus Pythagoras pada segitiga ADB adalah

$$(a - x)^2 + t^2 = c^2$$

$$a^2 - 2ax + x^2 + t^2 = c^2 \quad \dots\dots (2)$$

Dengan mensubstitusi persamaan (1) ke persamaan (2) maka diperoleh

$$a^2 - 2ax + b^2 = c^2$$

$$2ax = a^2 + b^2 - c^2$$



$$x = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}$$

Dari persamaan (1) diperoleh

$$t^2 = b^2 - x^2$$

$$t^2 = b^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a} \right)^2$$

$$t^2 = \left(b + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a} \right) \left(b - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a} \right)$$

$$t^2 = \left(\frac{2ab + a^2 + b^2 - c^2}{2a} \right) \left(\frac{2ab - a^2 - b^2 + c^2}{2a} \right)$$

$$t^2 = \left(\frac{a^2 + 2ab + b^2 - c^2}{2a} \right) \left(\frac{c^2 - (a^2 - 2ab + b^2)}{2a} \right)$$

$$t^2 = \left(\frac{(a+b)^2 - c^2}{2a} \right) \left(\frac{c^2 - (a-b)^2}{2a} \right)$$

$$t^2 = \left(\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{2a} \right) \left(\frac{(c-a+b)(c+a-b)}{2a} \right)$$

$$t^2 = \frac{(a+b+c)(a+b-c)(c-a+b)(c+a-b)}{4a^2}$$

$$4a^2 t^2 = (a+b+c)(a+b-c)(c-a+b)(c+a-b)$$

$$4a^2 t^2 = (a+b+c)(a+b+c-2c)(a+b+c-2a)(a+b+c-2b)$$

Setengah keliling segitiga ABC adalah $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$, diperoleh

$$2s = a+b+c \text{ sehingga :}$$

$$4a^2 t^2 = 2s(2s-2c)(2s-2a)(2s-2b)$$

$$4a^2 t^2 = 16s(s-c)(s-a)(s-b)$$

$$a^2 t^2 = 4s(s-c)(s-a)(s-b)$$



$$a \cdot t = 2 \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$L = \frac{1}{2} a \cdot t = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$\text{Sehingga Luas segitiga} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Contoh 5

Suatu segitiga diketahui sisinya adalah 5 cm, 7cm dan 8 cm. Tentukan luas segitiga tersebut.

Jawab:

Pertama dicari dulu nilai s

$$s = \frac{1}{2}(a + b + c)$$

$$s = \frac{1}{2}(5 + 7 + 8)$$

$$s = \frac{1}{2}(20)$$

$$s = 10 \text{ cm}$$

Maka

$$\text{Luas segitiga} = \sqrt{10 \cdot (10 - 5) \cdot (10 - 7) \cdot (10 - 8)}$$

$$= \sqrt{10 \cdot (5) \cdot (3) \cdot (2)}$$

$$= \sqrt{300}$$

$$= 10\sqrt{3} \text{ cm}^2$$



E. Aktivitas Pembelajaran

1. Pengantar:

Dalam kegiatan ini Anda akan melakukan serangkaian aktivitas atau kegiatan untuk mencapai kompetensi berkaitan dengan perbandingan trigonometri, aturan sinus dan kosinus dan luas segitiga. Kegiatan-kegiatan tersebut akan terbagi dalam beberapa aktivitas atau topik, dan berhubungan dengan lembar kerja yang harus dilengkapi baik secara individu/mandiri maupun diskusi kelompok.

2. Aktifitas

Aktifitas 0: Mengidentifikasi Isi Bahan Ajar

Mengawali proses pembelajaran, diskusikan bersama rekan guru untuk mengidentifikasi hal-hal berikut:

1. Ada berapa aktivitas yang harus Anda ikuti dalam mempelajari bahan belajar ini? Sebutkan topik-topik untuk masing-masing aktivitas.
2. Dengan percaya diri, sebutkan/tuliskan kompetensi apa yang diharapkan tercapai setelah mempelajari bahan belajar ini?
3. Anda saat ini mengikuti pelatihan dengan pola tatap muka. Apa saja yang harus Anda lakukan saat tatap muka?

Jawablah pertanyaan di atas dengan menggunakan LK 00

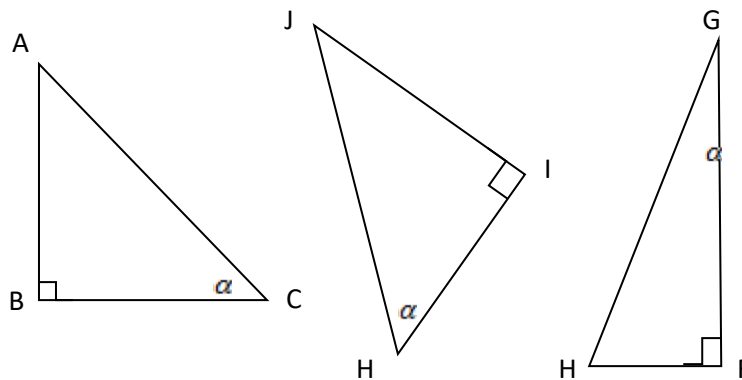
Aktivitas 1: Perbandingan Trigonometri

Trigonometri adalah ilmu ukur sudut yang berasal dari perbandingan suatu segitiga siku-siku. Dalam aktifitas ini Anda akan mempelajari tentang perbandingan trigonometri. Jawablah pertanyaan di bawah ini dengan menggunakan LK 01a, LK 01b, dan LK 01c. Jika Anda kesulitan menjawab LK 01a, LK 01b, dan LK 01c, disarankan untuk membaca bahan bacaan 01 tentang perbandingan trigonometri.



LK - 01a

1. Apa saja yang harus diketahui untuk bisa menentukan nilai sinus, kosinus dan tangen pada sebuah segitiga?
2. Dapatkah Anda mencari nilai sinus, kosinus dan tangen dari segitiga dengan ukuran triple pythagoras? Jika dapat, berilah beberapa contohnya!
3. Apa yang harus diperhatikan ketika akan mengubah nilai sinus, kosinus dan tangen dari suatu sudut yang bernilai besar agar menjadi nilai sinus, kosinus dan tangen pada sudut lancip?
4. Bagaimana cara menentukan nilai sinus, kosinus, dan tangen dari segitiga-segitiga di bawah ini? Berikan penjelasanmu!



Gambar 16 Segitiga Siku-Siku ABC, HIJ dan FGH

5. Diberikan perbandingan trigonometri berikut ini! Bagaimana cara menyatakan perbandingan ini ke dalam perbandingan trigonometri sudut lancip? Berikan penjelasanmu!
 - a. $\cos 151^\circ$
 - b. $\sin 268^\circ$
 - c. $\tan 784^\circ$
 - d. $\operatorname{cosec} 112^\circ$
 - e. $\cotan 205^\circ$
6. Pada sebuah segitiga, diketahui $\sin \alpha = \frac{3}{8}$. Bagaimana cara memperoleh nilai $\cos \alpha$, $\tan \alpha$ dan $\sec \alpha$ dari informasi di atas?



7. Jelaskan langkah-langkah dalam menentukan nilai fungsi trigonometri berikut ini! Periksa kembali kebenaran jawabanmu!

a. $\cos 150^\circ + \sin 45^\circ + \frac{1}{2} \cot (-330)^\circ$

b. $\sin 315^\circ - \frac{1}{3} \tan 300^\circ + \sec 180^\circ$

8. Dari persamaan trigonometri berikut ini, dapatkah Anda membuat segitiga beserta ukuran-ukurannya? Berikan penjelasanmu!

a. $\tan \beta = \frac{2}{5}$

b. $\cos \gamma = \frac{6}{4\sqrt{3}}$

c. $\sin \alpha = \frac{7}{25}$



LK - 01b

1. Bagaimana cara menentukan nilai sinus, kosinus, dan tangen dari sudut berikut ini dengan menggunakan tabel trigonometri. Berikan penjelasanmu!
 - a. $\cos 85^\circ$
 - b. $\sin 135^\circ$
 - c. $\tan 15^\circ$
 - d. $\cos 93^\circ$
 - e. $\sin 85^\circ$
2. Setelah Anda mendapatkan nilai dari sinus, kosinus dan tangen pada nomor 1 di atas, tentukan nilai dari sinus, kosinus dan tangen pada nomor 1 di atas dengan menggunakan kalkulator scientific yang Anda miliki.
3. Diskusikan dengan teman sekelompok Anda bagaimana nilai yang Anda dapatkan dari perhitungan dari tabel trigonometri dan hasil dari perhitungan kalkulator. Lalu coba Anda hitung nilai trigonometri tersebut dengan menggunakan analisis rumus trigonometri.



LK - 01c

1. Bagaimana cara merubah bentuk koordinat kartesius di bawah ini menjadi koordinat kutub? Berikan penjelasanmu!
 - a. $P(5,12)$
 - b. $P(1,1)$
 - c. $P(1,\sqrt{3})$
 - d. $P(3,2)$
 - e. $P(7,24)$

2. Bagaimana cara merubah bentuk koordinat kutub di bawah ini menjadi koordinat kartesius? Berikan penjelasanmu!
 - a. $P(6, 30^\circ)$
 - b. $P(10, 225^\circ)$
 - c. $P(8, 135^\circ)$
 - d. $P(12, 150^\circ)$
 - e. $P(3, 60^\circ)$

3. Suatu kapal nelayan yang sedang melaut bahan bakarnya habis. Nelayan tersebut meminta bantuan pada pelabuhan terdekat dengan menggunakan radio. Dilaporkan bahwa posisi perahu berada pada jarak 100km arah Barat Laut dari pelabuhan tersebut. Tentukan koordinat kedudukan perahu nelayan tersebut jika pelabuhan dianggap pusat kartesius!

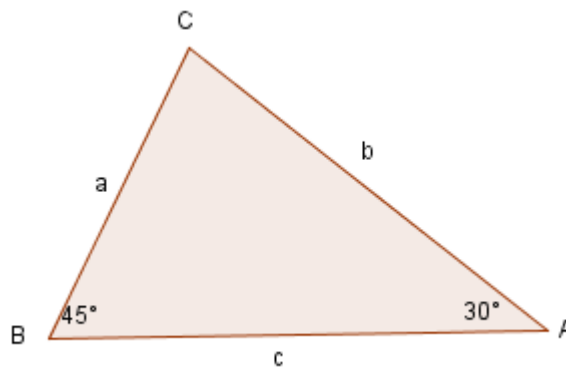


Aktivitas 2 : Aturan Sinus dan Kosinus

Dalam aktifitas ini Anda akan mempelajari tentang aturan Sinus dan kosinus. Jawablah pertanyaan di bawah ini dengan menggunakan LK 02. Jika Anda kesulitan menjawab LK 02, disarankan untuk membaca bahan bacaan 02 tentang aturan sinus dan kosinus.

1. Apa yang harus diperhatikan ketika akan menggunakan aturan sinus dan kosinus? Bagaimana cara Anda menerangkan tentang konsep aturan sinus dan aturan kosinus kepada siswa Anda? Diskusikan dengan teman satu kelompok dan presentasikan di depan kelas dengan penuh tanggung jawab dan percaya diri.
2. Pada segitiga ABC di bawah ini diketahui $a + b = 15$, $\angle A = 30^\circ$ dan $\angle B = 45^\circ$.

Hitunglah panjang sisi a



Gambar 17 Segitiga ABC

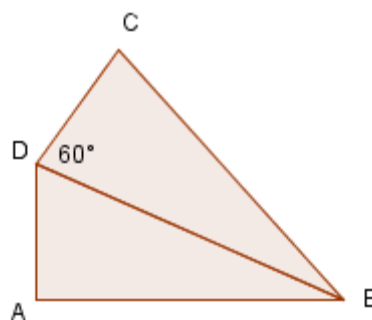
3. Seorang anak menaikkan layang-layang sehingga sudut yang dibentuk oleh benang dan arah mendatar adalah 37° . Hitung panjang benang yang dipakai untuk menaikkan layang-layang jika tinggi layang-layang dari permukaan tanah 5 meter.
4. Seseorang melihat sebuah terowongan dengan sudut penglihatan 45° . Jika jarak orang tersebut ke titik awal terowongan adalah a meter dan jarak orang tersebut ke titik akhir terowongan adalah $2a\sqrt{2}$ meter. Hitunglah panjang terowongan tersebut dalam a .
5. Sebuah kapal berlayar ke arah timur sejauh 40 mil. Kemudian kapal melanjutkan perjalanan dengan arah 45° sejauh 50 mil. Tentukan jarak kapal terhadap posisi saat kapal berangkat!



Aktivitas 3 : Luas segitiga

Dalam aktifitas ini Anda akan mempelajari tentang aturan Sinus dan kosinus. Jawablah pertanyaan di bawah ini dengan menggunakan LK 03. Jika Anda kesulitan menjawab LK 03, disarankan untuk membaca bahan bacaan 03 tentang luas segitiga.

1. Menurut Anda, Apa yang harus diketahui untuk mencari luas suatu segitiga dengan menggunakan aturan trigonometri?
2. Perhatikan gambar segiempat ABCD berikut ini.



Gambar 18 Bangun ABCD

$AB = 12$ cm, $AD = 5$ cm dan $DC = 10$ cm. Sudut $BDC = 60^\circ$, sudut BAD dan sudut BCD siku-siku. Hitunglah luas bangun ABCD tersebut!

3. Sebuah wadah kompresor akan dibuat berbentuk segitiga dengan panjang sisi 45 cm, 60 cm dan 80 cm. Berapakah luas permukaan bahan yang diperlukan untuk menutup salah satu sisi wadah kompresor tersebut?

Aktivitas 4 : Penerapan perbandingan Trigonometri, aturan sinus dan kosinus, dan luas segitiga menggunakan aturan trigonometri dalam pemecahan masalah kejuruan.

Anda telah mempelajari perbandingan Trigonometri, aturan sinus dan kosinus, dan luas segitiga menggunakan aturan trigonometri dalam aktivitas-aktivitas sebelumnya. Pada aktivitas ini diskusikan dengan teman sekelompok Anda (usahakan satu jurusan) dan jawablah pertanyaan berikut dengan menggunakan LK 04a, LK04b dan LK 04c. Lalu hasilnya presentasikan di depan kelas untuk dikritisi oleh widyaiswara dan peserta diklat lainnya.



LK – 04a

1. Bagaimana mengajarkan konsep perbandingan Trigonometri yang dapat Anda lakukan dalam pembelajaran? Berikan penjelasan disertai contoh!
2. Buatlah soal penerapan yang berkaitan dengan perbandingan Trigonometri yang Anda pahami, kemudian selesaikan persoalan tersebut!

LK – 04b

1. Bagaimana mengajarkan konsep aturan sinus dan kosinus yang dapat Anda lakukan dalam pembelajaran? Berikan penjelasan disertai contoh!
2. Buatlah soal penerapan yang berkaitan dengan aturan sinus dan kosinus yang Anda pahami, lalu selesaikan persoalan tersebut!

LK – 04c

1. Bagaimana mengajarkan konsep rumus luas segitiga menggunakan aturan trigonometri yang dapat Anda lakukan dalam pembelajaran?
2. Buatlah soal penerapan yang berkaitan dengan luas segitiga menggunakan aturan trigonometri yang Anda pahami, lalu selesaikan persoalan tersebut!

Aktivitas 5 : Penyusunan Instrumen Penilaian

Pada aktivitas ini, Anda diminta berlatih untuk menyusun instrument penilaian pada materi perbandingan Trigonometri, aturan sinus dan kosinus, dan luas segitiga dengan mengacu pada panduan teknik penulisan dan penyusunan soal dari Puspendik. Bacalah terlebih dahulu bahan bacaan mengenai panduan teknik penulisan dan penyusunan soal dari puspendik tersebut. Kerjakan dengan penuh tanggung jawab, cermat, dan percaya diri. Diskusikan dengan rekan guru jika mengalami kendala dalam menyusun instrument penilaian.

1. Buatlah kisi-kisi soal mengenai materi perbandingan trigonometri, aturan sinus dan kosinus, dan luas segitiga.
2. Buatlah 20 soal yang terdiri dari 15 soal pilihan ganda dan 5 soal uraian sesuai dengan kisi-kisi yang sudah dibuat pada nomor 1.



F. Latihan dan Tugas

a. Pilihan Banyak

Pilihlah salah satu jawaban yang benar!

1. Segitiga ABC siku-siku di C dan α menyatakan besar sudut A. Panjang AB = 3 cm dan panjang AC = 1 cm. Nilai sinus α adalah...

A. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ C. $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ E. $\frac{2}{3}\sqrt{2}$
 B. $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ D. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$

2. Sudut θ berada di kuadran IV dan nilai $\cos \theta = \frac{1}{a}$, nilai $\sin \theta$ adalah...

A. $-\sqrt{1-a^2}$ C. $-\frac{1}{\sqrt{a^2-1}}$ E. $-\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}$
 B. $-\sqrt{a^2-1}$ D. $\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}$

3. Nilai dari $\sin 150^\circ$ adalah...

A. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ E. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$
 B. $-\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$

4. Nilai dari $\cos 315^\circ$ adalah...

A. $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ C. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ E. 1
 B. $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ D. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$

5. Nilai $\sin(-150^\circ) + \cos(-150^\circ) + \tan(-150^\circ)$ adalah...

A. $-\frac{1}{2}(3+\sqrt{3})$ C. $-\frac{1}{2}(2+\sqrt{3})$ E. $\frac{1}{6}(3+\sqrt{3})$
 B. $\frac{1}{2}(3+\sqrt{3})$ D. $-\frac{1}{6}(3+\sqrt{3})$

6. Diketahui sebuah kapal pesiar berada di 10 km arah Tenggara pantai. Kedudukan kapal tersebut dalam koordinat kartesius adalah...



$$\text{A. } R(-5\sqrt{2}, 5\sqrt{2}) \qquad \text{C. } R(5\sqrt{2}, -5\sqrt{2}) \qquad R(-5\sqrt{2}, -5\sqrt{2})$$

$$\text{B. } R(-5\sqrt{2}, -5\sqrt{2}) \qquad \text{D. } R(5\sqrt{3}, -5\sqrt{3})$$

7. Pada segitiga PQR diketahui panjang sisi PQ = 25 cm, sudut P = 45° , dan sudut Q = 60° . Panjang sisi QR dan sisi PR berturut-turut adalah...
- A. 18,03 dan 22,14 C. 22,41 dan 18,30 E. 22, 14 dan 18,30
B. 18,30 dan 22,41 D. 22,41 dan 18,03
8. Sebuah kerangka kawat berbentuk segitiga dengan panjang sisi yang bersebelahan berturut-turut 12 cm dan 17 cm, dan besar sudut yang diapit kedua sisi tersebut adalah 45° . Panjang sisi lain pada rangka tersebut adalah...
- A. $(433\sqrt{3} - 204)$ cm D. $(433 - 204\sqrt{3})$ cm
B. $(433 + 204\sqrt{3})$ cm E. $(433 - 204\sqrt{2})$ cm
C. $(433 + 204\sqrt{2})$ cm
9. Diketahui sebuah belah ketupat dengan sisi 18 cm dan salah satu sudutnya 30° . Luas belah ketupat tersebut adalah...
- A. 162 cm^2 C. 108 cm^2 E. 360 cm^2
B. 324 cm^2 D. 216 cm^2
10. Diketahui segitiga ABC dengan panjang sisi a = 4 cm, sisi b = 6 cm, dan sisi c = 8 cm. Luas segitiga ABC adalah...
- A. $6\sqrt{15}$ C. $4\sqrt{15}$ E. $2\sqrt{15}$
B. $5\sqrt{15}$ D. $3\sqrt{15}$

b. Uraian

1. Sebuah tiang listrik berdiri di atas tanah mendatar dengan tinggi 4 meter dihubungkan oleh kawat dengan sebuah tonggak besi di tanah. Jarak antara ujung tiang listrik dengan tonggak adalah 3 m. Hitunglah:
- Sudut antara kawat dan tanah
 - Panjang kawat yang menghubungkan ujung atas tiang listrik dengan tonggak besi.
2. Jelaskan cara menyatakan sudut-sudut di bawah ini dalam perbandingan trigonometri sudut lancip. Berikan penjelasan Anda!
- $\sin 188^\circ$
 - $\cos 210^\circ$



- c. $\tan 300^\circ$
- d. $\sec 220^\circ$
- e. $\cot 310^\circ$
- f. $\operatorname{cosec} 195^\circ$

3. Apabila diketahui dalam segitiga ABC panjang sisi $a = 4$, sisi $b = 6$, dan sudut $B = 53^\circ$. Bagaimana cara menentukan besar sudut A? Konsep apa yang Anda gunakan? Berikan penjelasan dari jawaban Anda!
4. Dalam segitiga ABC berlaku $a^2 = b^2 + c^2 - \sqrt{2}bc$. Bagaimana cara menentukan besar sudut A = 45° . Berikan penjelasan Anda!
5. Segitiga PQR memiliki panjang $PQ = 9\text{ cm}$, $QR = 2\text{ cm}$, dan $\angle PRQ = 35^\circ$. Tentukan langkah-langkah untuk memperoleh luas segitiga PQR tersebut!

G. Rangkuman

1. Di dalam segitiga siku-siku berlaku:

$$\sin \alpha = \frac{\text{sisi depan}}{\text{sisi miring}} = \frac{a}{c}$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{\text{sisi miring}}{\text{sisi depan}} = \frac{c}{a}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{sisi samping}}{\text{sisi miring}} = \frac{b}{c}$$

$$\sec \alpha = \frac{\text{sisi miring}}{\text{sisi samping}} = \frac{c}{b}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{sisi depan}}{\text{sisi samping}} = \frac{a}{b}$$

$$\cot \alpha = \frac{\text{sisi samping}}{\text{sisi depan}} = \frac{b}{a}$$

2. Nilai Perbandingan Trigonometri Sudut Istimewa

	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cos	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞



3. Perbandingan Sudut-sudut yang berelasi

Pada kuadran I

$$\sin(90 - \alpha)^\circ = \cos \alpha$$

$$\cos(90 - \alpha)^\circ = \sin \alpha$$

$$\tan(90 - \alpha)^\circ = \cot \alpha$$

$$\operatorname{cosec}(90 - \alpha)^\circ = \sec \alpha$$

$$\sec(90 - \alpha)^\circ = \operatorname{cosec} \alpha$$

$$\cot(90 - \alpha)^\circ = \tan \alpha$$

Pada kuadran II

$$\sin(90 + \alpha)^\circ = \cos \alpha$$

$$\cos(90 + \alpha)^\circ = -\sin \alpha$$

$$\tan(90 + \alpha)^\circ = -\cot \alpha$$

$$\sin(180 - \alpha)^\circ = \sin \alpha$$

$$\cos(180 - \alpha)^\circ = -\cos \alpha$$

$$\tan(180 - \alpha)^\circ = -\tan \alpha$$

$$\operatorname{cosec}(90 + \alpha)^\circ = \sec \alpha$$

$$\sec(90 + \alpha)^\circ = -\operatorname{cosec} \alpha$$

$$\cot(90 + \alpha)^\circ = -\tan \alpha$$

$$\operatorname{cosec}(180 - \alpha)^\circ = \operatorname{cosec} \alpha$$

$$\sec(180 - \alpha)^\circ = -\sec \alpha$$

$$\cot(180 - \alpha)^\circ = -\cot \alpha$$

Pada kuadran III

$$\sin(180 + \alpha)^\circ = -\sin \alpha$$

$$\cos(180 + \alpha)^\circ = -\cos \alpha$$

$$\tan(180 + \alpha)^\circ = \tan \alpha$$

$$\sin(270 - \alpha)^\circ = -\cos \alpha$$

$$\cos(270 - \alpha)^\circ = -\sin \alpha$$

$$\tan(270 - \alpha)^\circ = \cot \alpha$$

$$\operatorname{cosec}(180 + \alpha)^\circ = -\operatorname{cosec} \alpha$$

$$\sec(180 + \alpha)^\circ = -\sec \alpha$$

$$\cot(180 + \alpha)^\circ = \cot \alpha$$

$$\operatorname{cosec}(270 - \alpha)^\circ = -\sec \alpha$$

$$\sec(270 - \alpha)^\circ = -\operatorname{cosec} \alpha$$

$$\cot(270 - \alpha)^\circ = \tan \alpha$$



Pada kuadran IV

$$\sin(360 - \alpha)^\circ = -\sin \alpha$$

$$\cos(360 - \alpha)^\circ = \cos \alpha$$

$$\tan(360 - \alpha)^\circ = -\tan \alpha$$

$$\sin(270 + \alpha)^\circ = -\cos \alpha$$

$$\cos(270 + \alpha)^\circ = \sin \alpha$$

$$\tan(270 + \alpha)^\circ = -\cot \alpha$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$$

$$\operatorname{cosec}(360 - \alpha)^\circ = -\operatorname{cosec} \alpha$$

$$\sec(360 - \alpha)^\circ = \sec \alpha$$

$$\cot(360 - \alpha)^\circ = -\cot \alpha$$

$$\operatorname{cosec}(270 + \alpha)^\circ = -\sec \alpha$$

$$\sec(270 + \alpha)^\circ = \operatorname{cosec} \alpha$$

$$\cot(270 + \alpha)^\circ = -\tan \alpha$$

$$\operatorname{cosec}(-\alpha)^\circ = -\operatorname{cosec} \alpha$$

$$\sec(-\alpha)^\circ = \sec \alpha$$

$$\cot(-\alpha)^\circ = -\cot \alpha$$

4. Koordinat kartesius ke koordinat kutub

$$P(a,b) \rightarrow r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\tan \alpha = \frac{b}{a}$$

5. Koordinat kutub ke koordinat polar

$$P(r, \alpha) \rightarrow a = r \cos \alpha$$

$$b = r \sin \alpha$$

6. Aturan Sinus

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

7. Aturan kosinus

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$$



8. Rumus luas segitiga dengan menggunakan aturan trigonometri

Jika diketahui dua sisi dan satu sudut

$$\text{Luas segitiga} = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin \gamma$$

$$\text{Luas segitiga} = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin \alpha$$

$$\text{Luas segitiga} = \frac{1}{2} c \cdot a \cdot \sin \beta$$

Jika diketahui tiga sisi maka:

$$\text{Luas segitiga} = \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - c) \cdot (s - b)}$$



H. Umpan Balik dan Tindak Lanjut

Pada Kegiatan Belajar 1 ini Anda telah mempelajari:

1. Perbandingan trigonometri, yang meliputi nilai perbandingan trigonometri dalam sebuah segitiga siku-siku, nilai perbandingan trigonometri sudut-sudut istimewa, nilai trigonometri untuk sudut yang lain dengan menggunakan tabel matematika dan kalkulator, dan perbandingan trigonometri pada sudut-sudut yang berelasi.
2. Aturan sinus dan kosinus, yang meliputi aturan sinus, aturan kosinus dan penggunaan aturan sinus dan kosinus.
3. Mencari luas segitiga dengan menggunakan aturan trigonometri.
4. Mengubah koordinat kartesius ke dalam koordinat kutub dan sebaliknya.

Pengembangan yang diharapkan setelah mempelajari perbandingan trigonometri, aturan sinus dan kosinus, luas segitiga dengan menggunakan aturan trigonometri dan mengubah koordinat kutub menjadi koordinat polar (dan sebaliknya) adalah Anda dapat mengidentifikasi permasalahan di dalam kehidupan sehari-hari yang berkaitan dengan pembelajaran tentang perbandingan trigonometri.

Ukurlah kemampuan Anda dengan mencocokkan latihan yang ada pada kegiatan belajar 1 dengan kunci jawaban. Hitunglah tingkat penguasaan Anda dengan menggunakan rumus di bawah ini:

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{jumlah soal benar}}{15}$$

Bila tingkat penguasaan Anda mencapai $\geq 67\%$, Anda dapat meneruskan dengan kegiatan belajar selanjutnya. Akan tetapi bila kebenaran jawaban Anda belum mencapai 67%, hendaknya anda mengulangi kegiatan belajar, terutama pada bagian yang Anda anggap rumit dan berdiskusilah dengan teman sejawat yang lainnya atau dengan narasumber/fasilitator.



Untuk mengembangkan materi yang lebih jauh Anda sebaiknya mempelajari materi Trigonometri pada kegiatan belajar berikutnya. Lakukan tahapan kegiatan belajar materi selanjutnya dengan mengerjakan aktifitas kegiatannya dan mengerjakan lembar kerjanya. Ukurlah kemampuan pemahaman materi yang Anda pelajari dengan mengerjakan latihan soal-soalnya.

Selanjutnya Anda akan mempelajari tentang Identitas Trigonometri pada Kegiatan Belajar 2. Materi yang akan dipelajari meliputi pembuktian identitas trigonometri dan penerapan rumus trigonometri jumlah dan selisih dua sudut.



Kegiatan Belajar 2: Identitas Trigonometri dan Jumlah Selisih Dua Sudut

A. Pengantar

Dalam kegiatan ini Anda akan melakukan serangkaian kegiatan untuk mencapai kompetensi berkaitan dengan Trigonometri. Kegiatan-kegiatan tersebut akan terbagi dalam beberapa topik, di antaranya adalah:

- Identitas trigonometri, pada bagian ini Anda akan belajar tentang Identitas Trigonometri dasar yang merupakan hubungan kebalikan, Identitas Trigonometri dasar yang merupakan hubungan perbandingan, Identitas Trigonometri dasar yang diperoleh dari teorema Pythagoras
- Rumus Jumlah dan Selisih Dua Sudut, pada bagian ini Anda akan belajar tentang Rumus untuk $\cos(\alpha \pm \beta)$, Rumus untuk $\sin(\alpha \pm \beta)$, Rumus untuk $\tan(\alpha \pm \beta)$
- Rumus Trigonometri Sudut Rangkap
- Perkalian, Penjumlahan dan Pengurangan Sinus dan Kosinus.

Setelah mempelajari kegiatan belajar ini, Anda diharapkan dapat mengidentifikasi permasalahan di dalam kehidupan sehari-hari yang berkaitan dengan pembelajaran tentang identitas trigonometri, jumlah selisih dua sudut, sudut rangkap dan perkalian, penjumlahan dan pengurangan sinus dan kosinus

B. Tujuan

Tujuan dari penulisan modul ini adalah:

- Melalui diskusi kelompok maupun mandiri peserta diklat dapat membuktikan suatu identitas trigonometri dengan cermat dan penuh percaya diri.
- Melalui diskusi kelompok peserta diklat dapat menerapkan rumus trigonometri jumlah dan selisih dua sudut dengan cermat.
- Melalui diskusi kelompok peserta diklat dapat menerapkan rumus trigonometri sudut rangkap dengan cermat.
- Melalui diskusi kelompok peserta diklat dapat menerapkan rumus trigonometri penjumlahan, pengurangan dan perkalian sinus dan kosinus dengan cermat.



C. Indikator Pencapaian Kompetensi

Indikator pencapaian kompetensi yang harus dikuasai setelah mengikuti kegiatan belajar ini adalah, peserta diklat dapat:

1. Membuktikan suatu identitas trigonometri.
2. Menerapkan rumus trigonometri jumlah dan selisih dua sudut.
3. Menerapkan rumus trigonometri sudut rangkap.
4. Menerapkan rumus trigonometri penjumlahan dan pengurangan dan perkalian sinus dan kosinus.

D. Uraian Materi

1. Identitas Trigonometri

Identitas trigonometri merupakan suatu bentuk trigonometri yang dinyatakan dalam bentuk trigonometri yang lain. Identitas trigonometri dasar merupakan hubungan kebalikan, perbandingan dan teorema Pythagoras.

a. Identitas Trigonometri dasar yang merupakan hubungan kebalikan

$$1) \quad \sin \alpha = \frac{1}{\operatorname{cosec} \alpha}$$

$$2) \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sec \alpha}$$

$$3) \quad \tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha}$$

b. Identitas Trigonometri dasar yang merupakan hubungan perbandingan

$$1) \quad \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$2) \quad \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

c. Identitas Trigonometri dasar yang diperoleh dari teorema Pythagoras

- 1) Coba Anda perhatikan Gambar 2.2.1 pada point 1. Berdasarkan gambar

tersebut $\sin \alpha = \frac{a}{c}$ dan $\cos \alpha = \frac{b}{c}$.



Oleh karena itu:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1$$

Karena pada gambar tersebut berlaku hubungan Pythagoras $a^2 + b^2 = c^2$

Jadi, identitas trigonometri dari teorema Pythagoras adalah $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

Identitas lainnya adalah

$$2) \quad 1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha$$

Rumus ini didapat dengan membagi identitas $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ dengan $\cos^2 \alpha$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha$$

$$3) \quad 1 + \cot^2 \alpha = \operatorname{cosec}^2 \alpha$$

2. Rumus Jumlah dan Selisih Dua Sudut

a. Rumus untuk $\cos(\alpha \pm \beta)$

Perhatikan Gambar 2.3.1

Dari gambar diperoleh

$$OC = OB = OA = OD = r$$

koordinat titik A, B, C, dan D berturut-turut adalah

$$(r, 0), (r \cos \alpha, r \sin \alpha),$$

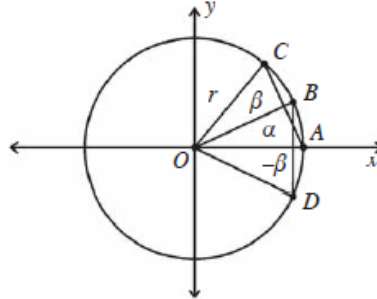
$$(r \cos(\alpha + \beta), r \sin(\alpha + \beta)), \text{ dan}$$

$$(r \cos \beta, r \sin(-\beta))$$

Dengan menggunakan rumus jarak antara dua titik, diperoleh



$$d^2_{AB} = (AB)^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$



Gambar 19 Koordinat Kutub

Sehingga didapat

$$\begin{aligned}(AC)^2 &= [(r \cos(\alpha + \beta)) - r]^2 + ((r \sin(\alpha + \beta)) - 0)^2 \\(AC)^2 &= r^2 \cos^2(\alpha + \beta) - 2r^2 \cos(\alpha + \beta) + r^2 + r^2 \sin^2(\alpha + \beta) \\(AC)^2 &= r^2 [\cos^2(\alpha + \beta) + \sin^2(\alpha + \beta)] - 2r^2 \cos(\alpha + \beta) + r^2 \\(AC)^2 &= r^2 \cdot 1 + r^2 - 2r^2 \cos(\alpha + \beta) \\(AC)^2 &= 2r^2 - 2r^2 \cos(\alpha + \beta)\end{aligned}$$

Dan

$$\begin{aligned}(DB)^2 &= (r \cos \alpha - r \cos \beta)^2 + (r \sin \alpha + r \sin \beta)^2 \\(DB)^2 &= r^2 \cos^2 \alpha - 2r^2 \cos \alpha \cos \beta + r^2 \cos^2 \beta + r^2 \sin^2 \alpha \\&\quad + 2r^2 \sin \alpha \sin \beta + r^2 \sin^2 \beta \\(DB)^2 &= r^2 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + r^2 (\cos^2 \beta + \sin^2 \beta) \\&\quad + 2r^2 \sin \alpha \sin \beta - 2r^2 \cos \alpha \cos \beta \\(DB)^2 &= r^2 + r^2 + 2r^2 \sin \alpha \sin \beta - 2r^2 \cos \alpha \cos \beta \\(DB)^2 &= 2r^2 + 2r^2 \sin \alpha \sin \beta - 2r^2 \cos \alpha \cos \beta\end{aligned}$$

Karena segitiga OCA dan segitiga ODB kongruen, maka

$$\begin{aligned}AC^2 &= DB^2 \\2r^2 - 2r^2 \cos(\alpha + \beta) &= 2r^2 + 2r^2 \sin \alpha \sin \beta - 2r^2 \cos \alpha \cos \beta \\-2r^2 \cos(\alpha + \beta) &= -2r^2 (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta)\end{aligned}$$



$$\cos(\alpha + \beta) = (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta)$$

Rumus untuk $\cos(\alpha - \beta)$ dapat diturunkan dari $\cos(\alpha + \beta)$, didapat

$$\cos(\alpha - \beta) = (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta)$$

b. Rumus untuk $\sin(\alpha \pm \beta)$

Rumus untuk $\sin(\alpha + \beta)$ didapat dari rumus perbandingan dua sudut yang berkomplemen. Ingat bahwa $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$ dan $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos[90^\circ - (\alpha + \beta)]$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos[90^\circ - \alpha - \beta]$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos[(90^\circ - \alpha) - \beta]$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos(90^\circ - \alpha)\cos \beta + \sin(90^\circ - \alpha)\sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

Jadi

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

Rumus untuk $\sin(\alpha - \beta)$ diturunkan dari $\sin(\alpha + \beta)$ dengan mengganti β dengan $-\beta$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha + (-\beta))$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos(-\beta) + \cos \alpha \sin(-\beta)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

Jadi

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

c. Rumus untuk $\tan(\alpha \pm \beta)$

Rumus untuk $\tan(\alpha + \beta)$ diturunkan dari rumus $\sin(\alpha + \beta)$ dan $\cos(\alpha + \beta)$



$$\begin{aligned}\Leftrightarrow \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} \\ \Leftrightarrow \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} \\ \Leftrightarrow \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} \times \frac{\frac{1}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{1}{\cos \alpha \cos \beta}} \\ \Leftrightarrow \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} \\ \Leftrightarrow \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta}}{1 - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} \\ \Leftrightarrow \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}\end{aligned}$$

Rumus untuk $\tan(\alpha - \beta)$ dapat diturunkan dari $\tan(\alpha + \beta)$, didapat

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

Contoh 1

Hitunglah nilai dari $\sin 15^\circ$

Jawab

$$\begin{aligned}\sin 15^\circ &= \sin(45^\circ - 30^\circ) \\ &= \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\end{aligned}$$



$$= \frac{1}{4}\sqrt{6} - \frac{1}{4}\sqrt{2}$$

$$= \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$$

Contoh 2

Jelaskan cara membuktikan $\frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} = 1 - \tan \alpha \tan \beta$? Konsep apa yang digunakan untuk membuktikan persamaan trigonometri tersebut?

Jawab:

Untuk membuktikan persamaan trigonometri tersebut digunakan konsep:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

Sehingga diperoleh:

$$\Leftrightarrow \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} = \frac{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} = \frac{\cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} = 1 - \tan \alpha \tan \beta \text{ (terbukti)}$$

3. Rumus Trigonometri Sudut Rangkap

Dari materi sebelumnya, diketahui bahwa rumus jumlah dua sudut untuk kosinus adalah

$$\cos(\alpha + \beta) = (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta)$$

Jika sudutnya kita ganti menjadi α diperoleh



$$\cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha$$

$$\cos(\alpha + \alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

Jadi

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

Perhatikan bahwa

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Maka

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha)$$

$$\cos(2\alpha) = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

dan

$$\cos(2\alpha) = (1 - \sin^2 \alpha) - \sin^2 \alpha$$

$$\cos(2\alpha) = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

Rumus untuk jumlah dua sudut pada sinus

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

Jika sudutnya kita ganti menjadi α didapat

$$\sin(\alpha + \alpha) = \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha$$

$$\sin(\alpha + \alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

Jadi

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

Lalu rumus untuk jumlah dua sudut pada tangen

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

ganti $\beta = \alpha$ sehingga didapat

$$\tan(\alpha + \alpha) = \frac{\tan \alpha + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha \tan \alpha}$$



$$\tan(\alpha + \alpha) = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

Jadi

$$\tan(2\alpha) = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

Sekarang untuk $\sin \frac{1}{2} \alpha$, perhatikan $\cos(2\alpha) = 1 - 2 \sin^2 \alpha$

$$2 \sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}}$$

Substitusikan $\alpha = \frac{1}{2} \beta$, didapat

$$\sin \frac{1}{2} \beta = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 2 \cdot \frac{1}{2} \beta}{2}}$$

$$\sin \frac{1}{2} \beta = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \beta}{2}}$$

Dengan cara yang sama didapat rumus untuk

$$\cos \frac{1}{2} \alpha = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \text{ dan}$$

$$\tan \frac{1}{2} \alpha = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}$$

Contoh 3

Apabila diketahui $\sin A = \frac{9}{15}$ dengan $0 < A < \frac{1}{2} \pi$. Bagaimana cara memperoleh nilai dari fungsi trigonometri berikut ini. Berikan penjelasan yang mendasari jawabanmu!

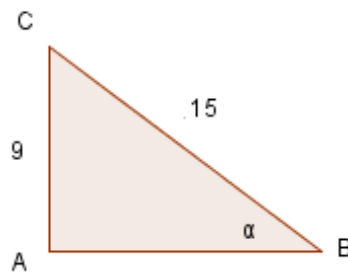


- a) $\sin 2A$
- b) $\cos 2A$
- c) $\tan 2A$

Jawab:

$\sin A = \frac{9}{15}$ dengan $0 < A < \frac{1}{2}\pi$, artinya A ada di kuadran I maka baik itu sinus, kosinus maupun tangen bernilai positif.

Perhatikan segitiga di bawah ini.



Gambar 20 Segitiga ABC

$$\sin A = \frac{9}{15} = \frac{\text{sisi depan}}{\text{sisi miring}}$$

Sisi alas dicari dengan menggunakan aturan pythagoras

$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

$$\Leftrightarrow AB^2 + 9^2 = 15^2$$

$$\Leftrightarrow AB^2 = 15^2 - 9^2$$

$$\Leftrightarrow AB^2 = 225 - 81$$

$$\Leftrightarrow AB^2 = 144$$

$$\Leftrightarrow AB = \sqrt{144}$$

$$\Leftrightarrow AB = 12$$

Sehingga diperoleh



$$\cos A = \frac{\text{sisi samping}}{\text{sisi miring}} = \frac{AB}{BC} = \frac{12}{15}$$

$$\tan A = \frac{\text{sisi depan}}{\text{sisi samping}} = \frac{AC}{AB} = \frac{9}{12}$$

Maka

$$\text{a) } \sin 2A = 2 \sin A \cos A$$

$$\Leftrightarrow \sin 2A = 2 \sin A \cos A$$

$$\Leftrightarrow \sin 2A = 2 \left(\frac{9}{12} \right) \left(\frac{12}{15} \right)$$

$$\Leftrightarrow \sin 2A = \frac{18}{15}$$

$$\Leftrightarrow \sin 2A = \frac{6}{5}$$

$$\text{b) } \cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$$

$$\Leftrightarrow \cos 2A = \left(\frac{12}{15} \right)^2 - \left(\frac{9}{15} \right)^2$$

$$\Leftrightarrow \cos 2A = \left(\frac{144}{225} \right) - \left(\frac{81}{225} \right)$$

$$\Leftrightarrow \cos 2A = \frac{63}{225}$$

$$\Leftrightarrow \cos 2A = \frac{63}{225}$$

$$\Leftrightarrow \cos 2A = \frac{7}{25}$$

$$\text{c) } \tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$$

$$\Leftrightarrow \tan 2A = \frac{2 \left(\frac{9}{12} \right)}{1 - \left(\frac{9}{12} \right)^2}$$



$$\Leftrightarrow \tan 2A = \frac{\frac{9}{6}}{1 - \left(\frac{81}{144}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \tan 2A = \frac{\frac{9}{6}}{\frac{63}{144}}$$

$$\Leftrightarrow \tan 2A = \frac{24}{7}$$

4. Perkalian Sinus dan Kosinus

Sebelumnya sudah dipelajari rumus jumlah dan selisih dua sudut, yaitu

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta\end{aligned}$$

Rumus perkalian kosinus diperoleh dengan menjumlahkan

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \\ \hline \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) &= 2 \cos \alpha \cos \beta \\ 2 \cos \alpha \cos \beta &= \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \\ \cos \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)) \dots\dots\dots*)\end{aligned}$$

Rumus perkalian sinus diperoleh dengan mengurangkan

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \\ \hline \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) &= -2 \sin \alpha \sin \beta \\ -2 \sin \alpha \sin \beta &= \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) \\ \sin \alpha \sin \beta &= -\frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)) \dots\dots\dots**)\end{aligned}$$



Rumus perkalian sinus dan kosinus diperoleh dengan menjumlahkan

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \\ \hline \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) &= 2 \sin \alpha \cos \beta \\ 2 \sin \alpha \cos \beta &= \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \\ \sin \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)) \dots\dots\dots ***\end{aligned}$$

Rumus perkalian sinus dan kosinus diperoleh dengan mengurangi

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \\ \hline \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) &= 2 \cos \alpha \sin \beta \\ 2 \cos \alpha \sin \beta &= \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) \\ \cos \alpha \sin \beta &= \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)) \dots\dots\dots ****\end{aligned}$$

Contoh 4

Hitunglah nilai dari $\cos 75^\circ \sin 15^\circ$

Jawab:

$$\begin{aligned}\cos 75^\circ \sin 15^\circ &= \frac{1}{2} (\sin(75^\circ + 15^\circ) - \sin(75^\circ - 15^\circ)) \\ &= \frac{1}{2} (\sin(90^\circ) - \sin(60^\circ)) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} \sqrt{3} \right) \\ &= \frac{1}{4} (2 - \sqrt{3})\end{aligned}$$

5. Penjumlahan dan Pengurangan Sinus

Sebelumnya sudah dibahas mengenai perkalian sinus dan kosinus, didapat rumus-rumus berikut ini



$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$$

$$\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta))$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$$

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta))$$

Sekarang misalkan $\alpha + \beta = r$ dan $\alpha - \beta = s$

$$\text{Didapat } r + s = (\alpha + \beta) + (\alpha - \beta) = 2\alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2}(r + s)$$

$$\text{Dan } r - s = (\alpha + \beta) - (\alpha - \beta) = 2\beta \Leftrightarrow \beta = \frac{1}{2}(r - s)$$

Ketika nilai-nilai ini disubstitusikan ke persamaan di atas, diperoleh

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$$

$$\Leftrightarrow \cos \frac{1}{2}(r + s) \cos \frac{1}{2}(r - s) = \frac{1}{2}(\cos r + \cos s)$$

$$\Leftrightarrow \cos r + \cos s = 2 \left(\cos \frac{1}{2}(r + s) \cos \frac{1}{2}(r - s) \right) \dots *)$$

$$\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta))$$

$$\Leftrightarrow \sin \frac{1}{2}(r + s) \sin \frac{1}{2}(r - s) = -\frac{1}{2}(\cos r - \cos s)$$

$$\Leftrightarrow \cos r - \cos s = -2 \left(\sin \frac{1}{2}(r + s) \sin \frac{1}{2}(r - s) \right) \dots **)$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$$

$$\Leftrightarrow \sin \frac{1}{2}(r + s) \cos \frac{1}{2}(r - s) = \frac{1}{2}(\sin r + \sin s)$$



$$\Leftrightarrow \sin r + \sin s = 2 \left(\sin \frac{1}{2}(r+s) \cos \frac{1}{2}(r-s) \right) \dots \dots \dots (***)$$

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta))$$

$$\Leftrightarrow \cos \frac{1}{2}(r+s) \sin \frac{1}{2}(r-s) = \frac{1}{2} (\sin r - \sin s)$$

$$\Leftrightarrow \sin r - \sin s = 2 \left(\cos \frac{1}{2}(r+s) \sin \frac{1}{2}(r-s) \right) \dots \dots \dots (***)$$

Contoh 5

Hitunglah nilai dari $\cos 75^\circ + \cos 15^\circ$

Jawab:

$$\begin{aligned} \cos 75^\circ + \cos 15^\circ &= 2 \left(\cos \frac{1}{2}(75^\circ + 15^\circ) \cos \frac{1}{2}(75^\circ - 15^\circ) \right) \\ &= 2 \left(\cos \frac{1}{2}(90^\circ) \cos \frac{1}{2}(60^\circ) \right) \\ &= 2(\cos 45^\circ \cos 30^\circ) \\ &= 2 \left(\left(\frac{1}{2} \sqrt{2} \right) \left(\frac{1}{2} \sqrt{3} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{6} \end{aligned}$$

E. Aktivitas Pembelajaran

1. Pengantar:

Dalam kegiatan ini Anda akan melakukan serangkaian aktivitas atau kegiatan untuk mencapai kompetensi berkaitan dengan identitas trigonometri, jumlah dan selisih dua sudut, sudut rangkap dan penjumlahan, pengurangan dan perkalian sinus dan kosinus. Kegiatan-kegiatan tersebut akan terbagi dalam beberapa aktivitas atau topik,



dan berhubungan dengan lembar kerja yang harus dilengkapi baik secara individu/mandiri maupun diskusi kelompok

2. Aktivitas

Aktivitas 0: Mengidentifikasi Isi Bahan Ajar

Mengawali proses pembelajaran, diskusikan bersama rekan guru untuk mengidentifikasi hal-hal berikut:

1. Ada berapa aktivitas yang harus Anda ikuti dalam mempelajari bahan belajar ini? Sebutkan topik-topik untuk masing-masing aktivitas.
2. Kompetensi apa yang diharapkan tercapai setelah mempelajari bahan belajar ini? Sebutkan!
3. Anda saat ini mengikuti pelatihan dengan pola tatap muka. Apa saja yang harus Anda lakukan saat tatap muka?

Jawablah pertanyaan di atas dengan menggunakan LK 00

Aktivitas 1: Identitas trigonometri

Dalam aktifitas ini Anda akan mempelajari tentang Identitas trigonometri. Jawablah pertanyaan di bawah ini dengan menggunakan LK 01. Jika Anda kesulitan menjawab LK 01, disarankan untuk membaca bahan bacaan 01 tentang Identitas trigonometri.

1. Jelaskan mengenai identitas trigonometri menurut pemahamanmu?
2. Jelaskan hal-hal apa yang harus diperhatikan ketika membuktikan suatu identitas trigonometri?
3. Bagaimana cara menemukan suatu rumus identitas trigonometri? Berikan penjelasan Anda!
4. Dapatkah Anda menyusun langkah-langkah pembuktian identitas trigonometri dengan menggunakan rumus-rumus trigonometri? Berikan penjelasanmu!
5. Apa yang akan Anda lakukan ketika menghadapi kesulitan dalam membuktikan persamaan pada identitas trigonometri? Mengapa? Berikan penjelasan Anda!

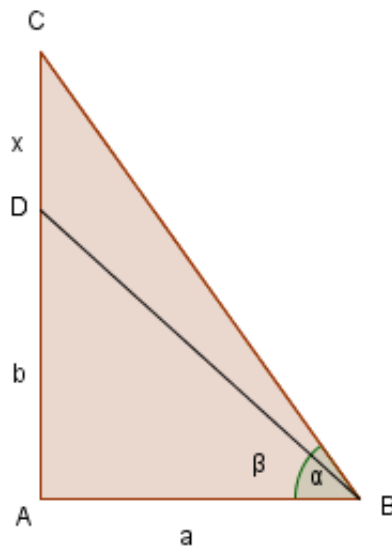


6. Bagaimana cara Anda menerangkan pada siswa perihal pembuktian rumus-rumus identitas trigonometri?
7. Buktikan bahwa $1 + \cot^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$
8. Buktikan bahwa $\tan^2 x + \operatorname{cosec}^2 x - \cot^2 x = \sec^2 x$
9. Buktikan bahwa $\tan^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cot^2 \alpha \sin^2 \alpha = 1$
10. Sederhanakan $\frac{\sin \phi \cos \phi}{1 - \sin^2 \phi}$

Aktivitas 2: Rumus Jumlah dan Selisih Dua Sudut

Dalam aktifitas ini Anda akan mempelajari tentang Rumus Jumlah dan Selisih Dua Sudut. Jawablah pertanyaan di bawah ini dengan menggunakan LK 02. Jika Anda kesulitan menjawab LK 02, disarankan untuk membaca bahan bacaan 02 tentang Rumus Jumlah dan Selisih Dua Sudut.

1. Bagaimana cara Anda menjelaskan penurunan rumus jumlah dan selisih trigonometri pada siswa? Diskusikan dengan teman satu kelompok lalu presentasikan di depan kelas dengan penuh tanggung jawab dan percaya diri!
2. Bagaimana penerapan rumus jumlah dan selisih trigonometri yang dapat Anda lakukan dalam pembelajaran? Jelaskan kegunaan rumus tersebut untuk menyelesaikan permasalahan yang Anda hadapi? Beri contohnya!
3. Segitiga ABC dengan sisi $AB = a$, $BC = c$, $AC = b + x$ dimana $AD = b$ dan $DC = x$. Sudut ABC adalah α dan sudut ABD adalah β . Tentukan nilai BD!
Perhatikan gambar di bawah ini



Gambar 21 Segitiga BAC Rangkap dengan Segitiga BAD

4. Percepatan yang dialami silinder pejal yang ditempatkan pada bidang miring dengan sudut kemiringan α dirumuskan sebagai berikut:
- $a = g \sin \alpha$ jika tidak ada gesekan antara silinder dan bidang miring
 - $a = \frac{3}{4} g \sin \alpha$ jika silinder menggelinding

Jika sudut kemiringan adalah 15° tentukan kecepatan silinder ketika

- tidak ada gesekan antara silinder dan bidang miring
- silinder menggelinding

Aktivitas 3: Rumus Trigonometri Sudut Rangkap

Dalam aktifitas ini Anda akan mempelajari tentang Rumus Trigonometri Sudut Rangkap. Jawablah pertanyaan di bawah ini dengan menggunakan LK 03. Jika Anda kesulitan menjawab LK 03, disarankan untuk membaca bahan bacaan 03 tentang Rumus Trigonometri Sudut Rangkap.

1. Bagaimana cara Anda menjelaskan penurunan Rumus Trigonometri Sudut Rangkap pada siswa? Diskusikan dengan teman satu kelompok lalu presentasikan di depan kelas dengan penuh percaya diri !



2. Diketahui $\sin P = \frac{12}{20}$, dengan $0 < P < 180^\circ$. Hitunglah $\sin 2P$, $\cos 2P$, dan $\tan 2P$!
3. Buatlah soal tentang penerapan rumus trigonometri sudut rangkap di jurusan Anda. Diskusikan dengan teman satu kelompok (satu kelompok terdiri dari guru jurusan yang sama), lalu presentasikan di depan kelas dengan penuh percaya diri.

Aktivitas 4: Perkalian, Penjumlahan dan Pengurangan Sinus dan Kosinus

Dalam aktifitas ini Anda akan mempelajari tentang Perkalian Sinus dan Kosinus. Jawablah pertanyaan di bawah ini dengan menggunakan LK 04. Jika Anda kesulitan menjawab LK 04, disarankan untuk membaca bahan bacaan 04 tentang Perkalian Sinus dan Kosinus.

1. Bagaimana cara Anda menjelaskan penurunan Rumus Trigonometri Sudut Rangkap pada siswa? Diskusikan dengan teman satu kelompok lalu presentasikan di depan kelas dengan penuh percaya diri !
2. Bagaimana cara menyelesaikan soal-soal di bawah ini! Konsep apa yang Anda gunakan? Berikan penjelasan Anda!
 - a. $\cos 105^\circ \cos 15^\circ$
 - b. $2 \cos 75^\circ \sin 45^\circ$
 - c. $\sin 75^\circ - \sin 45^\circ$
 - d. $\cos 105^\circ + \cos 15^\circ$
 - e. $\cos 1220^\circ + \cos 100^\circ + \cos 20^\circ$
 - f. $\cos 105^\circ \cos 15^\circ + \cos 20^\circ$
3. Buatlah soal tentang penerapan Perkalian, Penjumlahan dan Pengurangan Sinus dan Kosinus di jurusan Anda. Diskusikan dengan teman satu kelompok (satu kelompok terdiri dari guru jurusan yang sama), lalu presentasikan di depan kelas dengan penuh percaya diri.

Aktivitas 5 : Penyusunan Instrumen Penilaian

Pada aktivitas ini, Anda diminta berlatih untuk menyusun instrument penilaian pada materi identitas trigonometri, jumlah dan selisih dua sudut dan penjumlahan, pengurangan dan perkalian sinus dan kosinus dengan mengacu pada panduan penulisan dan penyusunan soal dari Puspendik. Bacalah terlebih dahulu bahan



bacaan mengenai panduan teknik penulisan dan penyusunan soal dari puspendik tersebut. Kerjakan dengan penuh tanggung jawab, cermat, dan percaya diri. Diskusikan dengan rekan guru jika mengalami kendala dalam menyusun instrument penilaian.

LK - 05

1. Buatlah kisi-kisi soal mengenai materi identitas trigonometri, jumlah dan selisih dua sudut dan pejumlahan, pengurangan dan perkalian sinus dan kosinus.
2. Buatlah 20 soal yang terdiri dari 15 soal pilihan ganda dan 5 soal uraian sesuai dengan kisi-kisi yang sudah dibuat pada nomor 1.

F. Latihan dan Tugas**a. Pilihan Banyak**

Pilihlah salah satu jawaban yang benar!

1. Nilai dari $\cos 120^\circ \sin 60^\circ$ adalah...
A. $\frac{1}{4}\sqrt{3}$ C. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ E. $\frac{1}{6}\sqrt{3}$
B. $-\frac{1}{4}\sqrt{3}$ D. $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$
2. Jika $2\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, maka nilai $\sin x$ adalah...
A. 0 C. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ E. 1
B. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$
3. Jika diketahui nilai $\sin A = -\frac{3}{5}$, dan A terletak di kuadran III, maka nilai $\cos 2A$ adalah...
A. $\frac{11}{25}$ C. $\frac{7}{25}$ E. $\frac{3}{25}$
B. $\frac{9}{25}$ D. $\frac{5}{25}$

- 65



B. $-\frac{4}{9}$

D. $-\frac{5}{9}$

b. Uraian

1. Tentukan nilai dari $\cos 25^\circ$ (misalkan $\cos 5^\circ = p$ dan $\sin 5^\circ = q$)2. Tentukan nilai dari $\cos(60^\circ - b) - \cos(60^\circ + b)$ 3. Jika α di kuadran I dan β di kuadran III dan nilai $\tan \alpha = \frac{3}{4}$, $\tan \beta = \frac{7}{24}$ Tentukan nilai dari $\sin(\alpha + \beta)$ 4. Buktikan $\sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}$ 5. Buktikan $\sin 80^\circ + \sin 40^\circ = \sqrt{3} \cos 20^\circ$

G. Rangkuman

1. Identitas Trigonometri dasar yang merupakan hubungan kebalikan

a. $\sin \alpha = \frac{1}{\operatorname{cosec} \alpha}$

b. $\cos \alpha = \frac{1}{\sec \alpha}$

c. $\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha}$

2. Identitas Trigonometri dasar yang merupakan hubungan perbandingan

a. $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

b. $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$

3. Identitas Trigonometri dasar yang diperoleh dari teorema Pythagoras

a. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

b. $1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha$

c. $1 + \cot^2 \alpha = \operatorname{cosec}^2 \alpha$

4. Rumus untuk $\cos(\alpha \pm \beta)$

a. $\cos(\alpha + \beta) = (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta)$

b. $\cos(\alpha - \beta) = (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta)$



5. Rumus untuk $\sin(\alpha \pm \beta)$

a. $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$

b. $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$

6. Rumus untuk $\tan(\alpha \pm \beta)$

a. $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$

b. $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$

7. Sudut Rangkap

a. $\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$

b. $\cos(2\alpha) = 2 \cos^2 \alpha - 1$

c. $\cos(2\alpha) = 1 - 2 \sin^2 \alpha$

d. $\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$

e. $\tan(2\alpha) = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$

8. Perkalian Sinus dan Kosinus

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$$

$$\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta))$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$$

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta))$$

9. Penjumlahan dan Pengurangan Sinus dan Kosinus

$$\cos r + \cos s = 2 \left(\cos \frac{1}{2}(r + s) \cos \frac{1}{2}(r - s) \right)$$

$$\cos r - \cos s = -2 \left(\sin \frac{1}{2}(r + s) \sin \frac{1}{2}(r - s) \right)$$

$$\sin r + \sin s = 2 \left(\sin \frac{1}{2}(r + s) \cos \frac{1}{2}(r - s) \right)$$

$$\sin r - \sin s = 2 \left(\cos \frac{1}{2}(r + s) \sin \frac{1}{2}(r - s) \right)$$



H. Umpan Balik dan Tindak Lanjut

Pada Kegiatan Belajar 2 ini Anda telah mempelajari:

1. Pembuktian identitas trigonometri.
2. Penerapan rumus trigonometri, yaitu rumus jumlah dan selisih dua sudut.

Pengembangan yang diharapkan setelah mempelajari identitas trigonometri, dan rumus jumlah dan selisih adalah Anda dapat mengidentifikasi permasalahan di dalam kehidupan sehari-hari yang berkaitan dengan pembelajaran tentang identitas trigonometri, jumlah dan selisih dua sudut, sudut rangkap dan penjumlahan, pengurangan dan perkalian sinus dan kosinus.

Ukurlah kemampuan Anda dengan mencocokkan latihan yang ada pada kegiatan belajar 1 dengan kunci jawaban. Hitunglah tingkat penguasaan Anda dengan menggunakan rumus di bawah ini:

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{jumlah soal benar}}{15}$$

Bila tingkat penguasaan Anda mencapai $\geq 67\%$, Anda dapat meneruskan dengan kegiatan belajar selanjutnya. Akan tetapi bila kebenaran jawaban Anda belum mencapai 67%, hendaknya anda mengulangi kegiatan belajar, terutama pada bagian yang Anda anggap rumit dan berdiskusilah dengan teman sejawat yang lainnya atau dengan narasumber/fasilitator.

Untuk mengembangkan materi yang lebih jauh Anda sebaiknya mempelajari materi Trigonometri pada kegiatan belajar berikutnya. Lakukan tahapan kegiatan belajar materi selanjutnya dengan mengerjakan aktifitas kegiatannya dan mengerjakan lembar kerjanya. Ukurlah kemampuan pemahaman materi yang Anda pelajari dengan mengerjakan latihan soal-soalnya.

Selanjutnya Anda akan mempelajari tentang Persamaan dan Grafik Trigonometri pada Kegiatan Belajar 3. Materi yang akan dipelajari meliputi persamaan trigonometri dan penerapan nilai maksimum dan minimum suatu grafik fungsi trigonometri dalam menyelesaikan masalah.



Kegiatan Belajar 3 Persamaan Trigonometri Dan Fungsi Trigonometri

A. Pengantar

Dalam kegiatan ini Anda akan melakukan serangkaian kegiatan untuk mencapai kompetensi berkaitan dengan Trigonometri. Kegiatan-kegiatan tersebut akan terbagi dalam beberapa topik, di antaranya adalah:

- Persamaan Trigonometri, pada bagian ini Anda akan belajar tentang nilai Penyelesaian Persamaan $\sin x = \sin \alpha$ ($x \in R$), Penyelesaian persamaan $\cos x = \cos \alpha$, ($x \in R$), dan Penyelesaian persamaan $\tan x = \tan \alpha$, $x \in R$.
- Grafik Fungsi Trigonometri, pada bagian ini Anda akan belajar tentang bagaimana cara melukis grafik trigonometri dan interpretasi dari grafik tersebut.
- Menentukan nilai maksimum dan minimum dari suatu fungsi trigonometri

Setelah mempelajari kegiatan belajar ini, Anda diharapkan dapat mengidentifikasi permasalahan di dalam kehidupan sehari-hari yang berkaitan dengan pembelajaran tentang persamaan dan fungsi trigonometri.

B. Tujuan

Tujuan dari penulisan modul ini adalah:

- Melalui diskusi kelompok peserta dapat menyelesaikan persamaan trigonometri dengan tepat dan penuh percaya diri.
- Melalui diskusi kelompok maupun mandiri peserta dapat melukis grafik trigonometri dan interpretasi dari grafik tersebut
- Melalui pengamatan peserta dapat menggunakan nilai maksimum fungsi trigonometri dalam menyelesaikan masalah dengan teliti.



C. Indikator Pencapaian Kompetensi

Indikator pencapaian kompetensi yang harus dikuasai setelah mengikuti kegiatan belajar ini adalah, peserta diklat dapat:

1. Menyelesaikan persamaan trigonometri.
2. Membuat grafik trigonometri dan interpretasi dari grafik tersebut
3. Menggunakan nilai maksimum fungsi trigonometri dalam menyelesaikan masalah.

D. Uraian Materi

1. Persamaan Trigonometri

Persamaan trigonometri adalah persamaan yang memuat perbandingan trigonometri dengan variabel sudut x (dalam ukuran derajat atau radian). Persamaan ini diselesaikan dengan menentukan nilai pengganti x yang disebut akar dari persamaan trigonometri.

a. Penyelesaian Persamaan $\sin x = \sin \alpha$, ($x \in R$)

Penyelesaian persamaan berbentuk $\sin x = \sin \alpha$ adalah

$$x_1 = \alpha + k \cdot 360^\circ$$

atau

$$x_2 = (180^\circ - \alpha) + k \cdot 360^\circ$$

dengan k elemen bilangan bulat

Contoh 1

Tentukan penyelesaian dari persamaan $\sin x^\circ = \sin 40^\circ$

Jawab:

$$\sin x^\circ = \sin 40^\circ$$

$$\text{diperoleh } x = 40 + k \cdot 360 \text{ atau } x = (180 - 40) + k \cdot 360$$

jadi, penyelesaian umum persamaan $\sin x^\circ = \sin 40^\circ$ adalah

$$x = 40 + k \cdot 360 \text{ atau } x = (180 - 40) + k \cdot 360$$



Contoh 2

Tentukan himpunan penyelesaian dari persamaan $\sin x^\circ = \sin 14^\circ$,
 $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$

Jawab:

$\sin x^\circ = \sin 14^\circ$, maka diperoleh

$$x = 40 + k \cdot 360$$

$$k = 0 \rightarrow x = 40$$

$$k = 1 \rightarrow x = 40 + 1 \cdot 360 = 400 \text{ (tidak memenuhi)}$$

atau

$$x = (180 - 40) + k \cdot 360$$

$$k = 0 \rightarrow x = (180 - 40) = 140$$

$$k = 1 \rightarrow x = (180 - 40) + 1 \cdot 360 = 500 \text{ (tidak memenuhi)}$$

Jadi, himpunan penyelesaian dari $\sin x^\circ = \sin 14^\circ$ adalah $HP = \{40, 140\}$

b. Penyelesaian persamaan $\cos x = \cos \alpha$, ($x \in R$)

Penyelesaian persamaan berbentuk $\cos x = \cos \alpha$ adalah

$$x_1 = \alpha + k \cdot 360^\circ$$

Atau

$$x_2 = -\alpha + k \cdot 360^\circ$$

Dengan k elemen bilangan bulat

Contoh 3

Tentukan himpunan penyelesaian dari persamaan
 $\cos x = \cos 56^\circ$, $-180 \leq x \leq 180$

Jawab :

$$\cos x = \cos 56^\circ, \quad -180 \leq x \leq 180$$

Maka diperoleh

$$x = 56 + k \cdot 360$$

$$k = 0 \rightarrow x = 56$$

$$k = 1 \rightarrow x = 56 + 1 \cdot 360 = 416 \text{ (tidak memenuhi)}$$



Atau

$$k = 0 \rightarrow x = -56 \quad x = -56 + k \cdot 360$$

$$k = 1 \rightarrow x = -56 + 1 \cdot 360 = 304 \text{ (tidak memenuhi)}$$

Jadi himpunan penyelesaian dari persamaan $\cos x = \cos 56^\circ$ adalah

$$HP = \{-56, 56\}$$

c. Penyelesaian persamaan $\tan x = \tan \alpha$, ($x \in R$)

Penyelesaian persamaan berbentuk $\tan x = \tan \alpha$ adalah

$$x = \alpha + k \cdot 180^\circ, \text{ dengan } k \text{ elemen bilangan bulat}$$

Contoh 4

Tentukan penyelesaian dari persamaan $\tan x = \tan 44^\circ$, $0 \leq x \leq 360^\circ$

Jawab:

$$\tan x = \tan 44^\circ$$

Maka diperoleh

$$x = 44 + k \cdot 180$$

$$k = 0 \rightarrow x = 44$$

$$k = 1 \rightarrow x = 44 + 1 \cdot 180 = 224$$

$$k = 2 \rightarrow x = 44 + 2 \cdot 180 = 404 \text{ (Tidak Memenuhi)}$$

Mengapa pada tiap mencari penyelesaian dari persamaan trigonometri harus dikalikan dengan $k \cdot 360^\circ$ untuk persamaan sinus dan kosinus, kemudian dikalikan dengan $k \cdot 180^\circ$ untuk persamaan tangen?

Jawabannya adalah karena fungsi sinus, kosinus dan tangen merupakan fungsi periodik yang akan terus berulang pada suatu periode tertentu. Yaitu 360° untuk fungsi sinus dan fungsi kosinus dan 180° untuk fungsi tangen. Oleh karena itu, nilai x pada suatu persamaan sinus akan berulang berdasarkan periode dari fungsi sinus. Begitu pula untuk fungsi kosinus dan fungsi tangen.

Fungsi tangen pada contoh 4 dicari nilai x nya pada interval $0 \leq x \leq 360$ artinya, fungsi tangen berulang sebanyak dua kali pada periode tersebut. Oleh karenanya, nilai x untuk $k = 0$ dan $k = 1$ memenuhi karena masih berada pada selang $0 \leq x \leq 360$.



2. Grafik Fungsi Trigonometri

a. Periode dan Amplitudo

Fungsi periodik adalah suatu fungsi yang grafiknya berulang secara terus-menerus dalam setiap periode tertentu. Suatu fungsi $f(x)$ disebut fungsi periodik dengan periode p , jika memenuhi $f(x+p)=f(x)$.

Fungsi trigonometri merupakan fungsi periodik. Grafik baku fungsi trigonometri merupakan grafik paling sederhana pada fungsi trigonometri, yaitu untuk fungsi $f(x)=\sin x$, $f(x)=\cos x$, dan $f(x)=\tan x$. Salah satu hal penting yang harus kita ketahui dalam grafik fungsi trigonometri adalah periode dan Amplitudo.

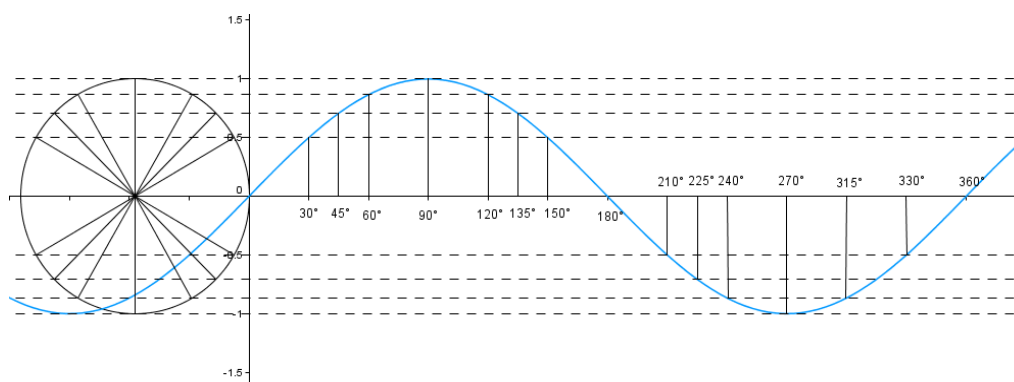
Periode adalah jarak terjadinya pengulangan grafik fungsi trigonometri dari titik acuan awal ke titik pengulangan yang pertama. Satu periode pada fungsi trigonometri khususnya fungsi $y=\sin x$ dan $\cos x$ biasanya terdiri dari satu lembah dan satu bukit.

Amplitudo adalah simpangan terjauh titik pada suatu grafik fungsi trigonometri terhadap garis horizontalnya (misalkan sumbu X).

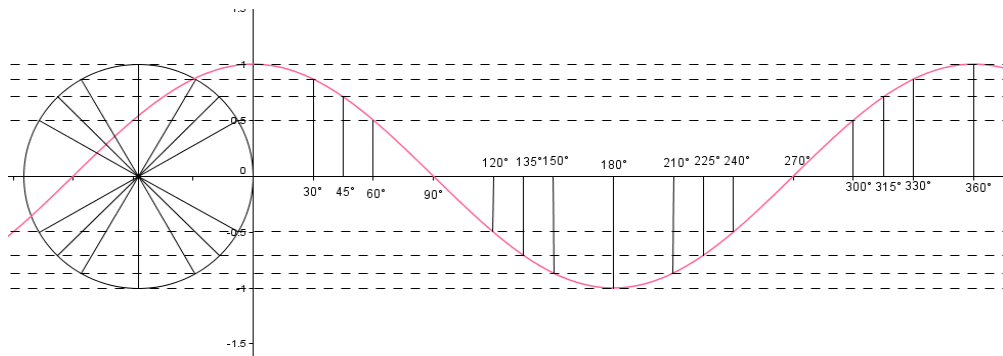
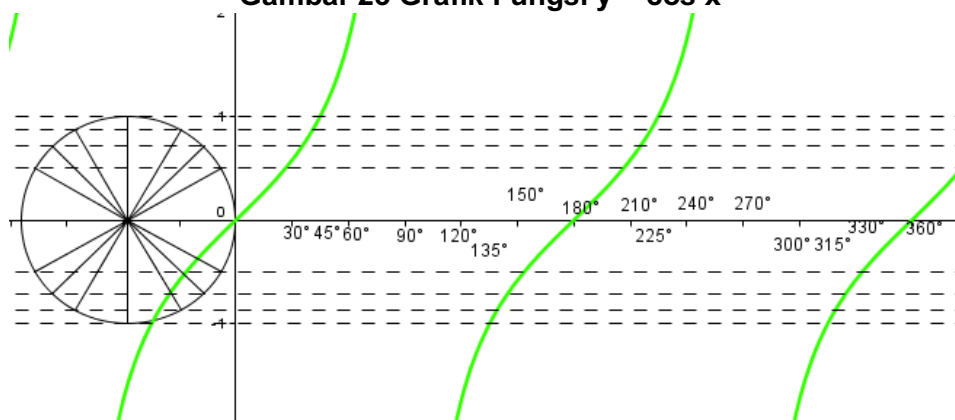
- $f(x) = a \sin k(x \pm b) \pm c \rightarrow \text{Periode} = \frac{2\pi}{k}$, amplitudo = $|a|$
- $f(x) = a \cos k(x \pm b) \pm c \rightarrow \text{Periode} = \frac{2\pi}{k}$, amplitudo = $|a|$
- $f(x) = a \tan k(x \pm b) \pm c \rightarrow \text{Periode} = \frac{\pi}{k}$

dengan nilai $\pi = 180^\circ$

Perhatikan gambar grafik di bawah ini



Gambar 22 Grafik Fungsi $y = \sin x$

**Gambar 23 Grafik Fungsi $y = \cos x$** **Gambar 24 Grafik Fungsi $y = \tan x$**

Gambar di atas berturut-turut merupakan grafik fungsi $y = \sin x$, $y = \cos x$, dan $y = \tan x$. Terlihat bahwa fungsi trigonometri sinus, kosinus dan tangen merupakan fungsi berkala atau fungsi periodik yang berulang untuk periode tertentu. Sinus dan kosinus periodenya 360° , sedangkan tangen periodenya 180° . Adapun pada grafik tangen, tidak memiliki nilai maksimum ataupun nilai minimum. Untuk x mendekati 90° atau 270° dari arah kanan, nilai tangen x menuju ke negatif tak terhingga, sedangkan untuk x mendekati 90° atau 270° dari arah kiri, nilai tangen x menuju ke positif tak terhingga. Di mana garis $x=90^\circ$ dan $x=270^\circ$ disebut garis asintot.

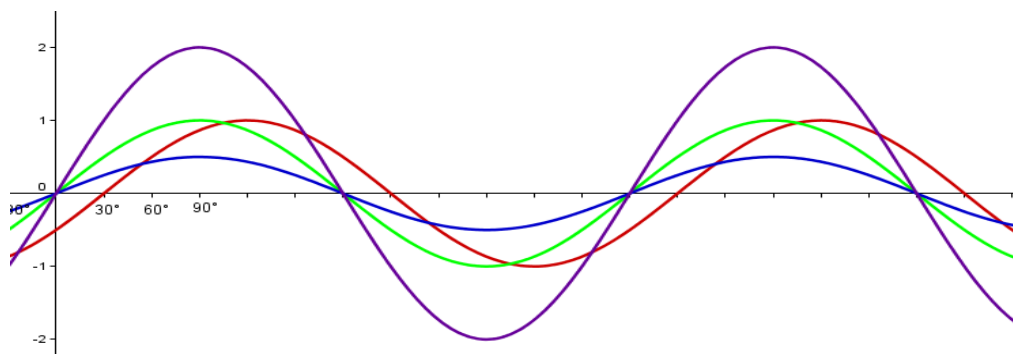
b. Langkah-langkah dalam membuat grafik fungsi trigonometri

- 1) Gambar grafik baku fungsi $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$, dan $f(x) = \tan x$.
- 2) Gambar grafik fungsi $f(x) = a \sin x$, $f(x) = a \cos x$, dan $f(x) = a \tan x$, dengan mengubah amplitudonya menjadi sebesar a . Jika nilai a negatif, maka cerminkan grafik baku terhadap sumbu X .



- 3) Ubah periode fungsi sesuai rumus besar periode masing-masing sehingga diperoleh grafik fungsi $f(x) = a \sin kx$, $f(x) = a \cos kx$, dan $f(x) = a \tan kx$.
- 4) Gambar grafik fungsi $f(x) = a \sin k(x \pm b)$, $f(x) = a \cos k(x \pm b)$, dan $f(x) = a \tan k(x \pm b)$ dengan cara menggeser grafik nomor 3 di atas sejauh b . Jika tandanya positif $(x + b)$ maka geser kekiri sejauh b dan jika tandanya negatif $(x - b)$ maka geser kekana sejauh b .
- 5) Gambar grafik fungsi $f(x) = a \sin k(x \pm b) \pm c$, $f(x) = a \cos k(x \pm b) \pm c$, dan $f(x) = a \tan k(x \pm b) \pm c$ dengan cara menggeser grafik nomor 4 di atas sejauh c . Jika tandanya positif $(+c)$ maka geser ke atas sejauh c dan jika tandanya negatif $(-c)$ maka geser ke bawah sejauh c .

Perhatikan gambar 25 berikut ini.



Gambar 25 Perbandingan Beberapa Fungsi Sinus

Grafik dengan warna hijau adalah grafik dari fungsi $y = \sin x$. Anggap ini adalah acuan untuk menentukan bagaimana grafik-grafik yang lainnya. Grafik dengan warna merah adalah grafik dari fungsi $y = \sin(x - 30^\circ)$. Artinya, $y = \sin(x - 30^\circ)$ adalah fungsi $y = \sin x$ yang digeser ke arah kanan sejauh 30° . Sekarang perhatikan grafik dengan warna biru dan ungu. Grafik biru adalah grafik $y = \frac{1}{2} \sin x$ sedangkan grafik ungu adalah grafik $y = 2 \sin x$.

c. Nilai Maksimum dan Minimum Fungsi Trigonometri

Untuk fungsi sin dan cos, cara menentukan nilai maksimum dan minimumnya adalah sama. Sementara untuk fungsi tan memiliki nilai maksimum tak hingga (∞) dan nilai minimum negatif tak hingga $(-\infty)$. Sebenarnya untuk menentukan nilai maksimum



dan minimum suatu fungsi trigonometri dapat menggunakan metode grafik, maksudnya kita gambar dulu grafiknya, titik puncak pada bukit adalah nilai maksimumnya dan titik terendah pada lembahnya adalah nilai minimum. Hanya saja akan butuh waktu yang lama jika kita harus menggambar grafiknya terlebih dahulu. Kali ini kita akan menentukan nilai maksimum dan minimumnya dengan rumus.

Misalkan fungsi $f(x) = a \sin g(x) + c$ dan $f(x) = a \cos g(x) + c$,
Nilai maksimum = $|a| + c$

Nilai Minimum = $-|a| + c$

Nilai maksimum dan minimumnya dapat digunakan untuk menentukan nilai amplitudonya. Amplitudo = 12 (nilai maksimum – nilai minimum).

Perhatikan gambar 22 dan 23 grafik fungsi sinus dan kosinus. Pada gambar 22 dan 23, nilai maksimum untuk grafik fungsi sinus dan kosinus adalah 1, dan nilai minimumnya adalah -1.

Perhatikan gambar 25, pada grafik biru, nilai maksimum $\frac{1}{2}$ dan nilai minimumnya $-\frac{1}{2}$. Sedangkan untuk grafik berwarna ungu nilai maksimumnya 2 dan nilai minimumnya -2.

Perbedaan pada nilai maksimum, nilai minimum, atau pergeseran pada grafik fungsi sinus yang ditunjukkan pada gambar 24 juga akan berlaku untuk grafik dari fungsi kosinus dan fungsi tangen.



E. Aktivitas Pembelajaran

1. Pengantar

Dalam kegiatan ini Anda akan melakukan serangkaian aktivitas atau kegiatan untuk mencapai kompetensi berkaitan dengan persamaan trigonometri, fungsi trigonometri. Kegiatan-kegiatan tersebut akan terbagi dalam beberapa aktivitas atau topik, dan berhubungan dengan lembar kerja yang harus dilengkapi baik secara individu/mandiri maupun diskusi kelompok.

2. Aktifitas

Aktifitas 0: Mengidentifikasi Isi Bahan Ajar

Mengawali proses pembelajaran, diskusikan bersama rekan guru untuk mengidentifikasi hal-hal berikut:

1. Ada berapa aktivitas yang harus Anda ikuti dalam mempelajari bahan belajar ini? Sebutkan topik-topik untuk masing-masing aktivitas.
2. Kompetensi apa yang diharapkan tercapai setelah mempelajari bahan belajar ini? Sebutkan!
3. Anda saat ini mengikuti pelatihan dengan pola tatap muka. Apa saja yang harus Anda lakukan saat tatap muka?

Jawablah pertanyaan di atas dengan menggunakan LK 00

Aktivitas 1: Persamaan Trigonometri

Dalam aktifitas ini Anda akan mempelajari tentang persamaan trigonometri. Jawablah pertanyaan di bawah ini dengan menggunakan LK 01. Jika Anda kesulitan menjawab LK 01, disarankan untuk membaca bahan bacaan tentang persamaan trigonometri..

1. Apa yang dimaksud dengan persamaan trigonometri?
2. Apa saja yang harus diperhatikan di dalam mengerjakan suatu persamaan trigonometri?

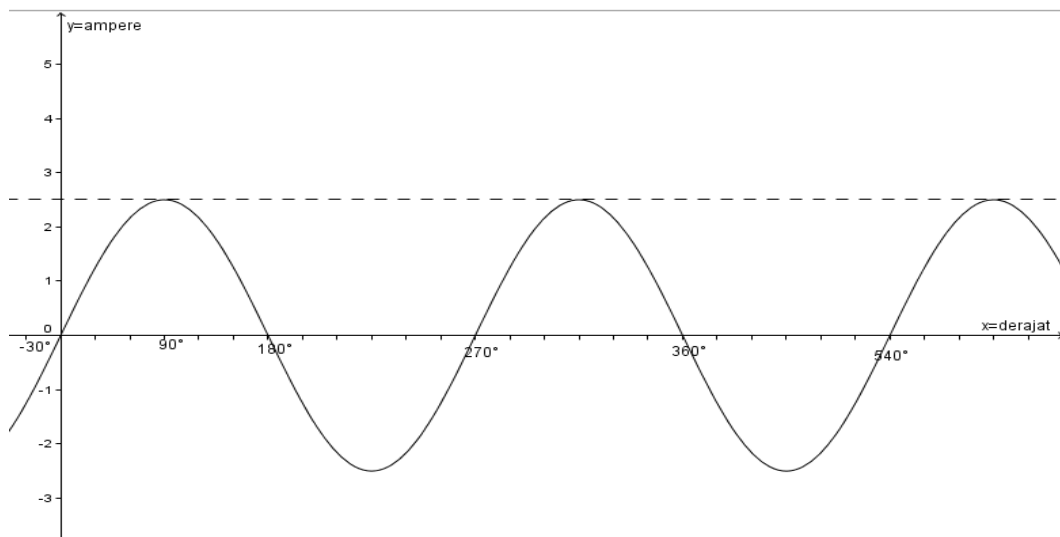


3. Bagaimana cara Anda menerangkan konsep persamaan trigonometri pada siswa dalam pembelajaran?
4. Apabila terdapat persamaan $\cos 2x + \sin x = 0$ untuk $0 < x < 2\pi$, bagaimana cara menentukan himpunan penyelesaiannya? Sertakan langkah-langkah pengerjaan yang Anda lakukan!
5. Buatlah soal penerapan persamaan trigonometri yang Anda pahami. Diskusikan dengan teman sekelompok Anda dan presentasikan di depan kelas dengan penuh tanggung jawab dan percaya diri.

Aktivitas 2: Grafik Fungsi Trigonometri

Dalam aktifitas ini Anda akan mempelajari tentang grafik fungsi trigonometri. jawablah pertanyaan di bawah ini dengan menggunakan LK 02. Jika Anda kesulitan menjawab LK 02, disarankan untuk membaca bahan bacaan tentang persamaan dan grafik fungsi trigonometri.

1. Apa yang dimaksud dengan grafik fungsi trigonometri?
2. Sebutkan persamaan dan perbedaan antara grafik fungsi sinus, grafik fungsi kosinus dan grafik fungsi tangen.
3. Tuliskan bagaimana Anda menerangkan kepada siswa langkah-langkah menggambar grafik fungsi trigonometri. Diskusikan cara apa yang menurut Anda paling mudah dimengerti oleh siswa?
4. Bagaimana cara menentukan nilai y maksimal pada persamaan $y = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{2} + 2\frac{1}{2}$. Konsep apa yang Anda gunakan? Berikan penjelasan yang mendasari jawaban Anda!
5. Buatlah langkah-langkah dalam menggambar grafik dari persamaan $y = 2 \sin(x)$. Apa yang dapat Anda simpulkan dari grafik tersebut?
6. Diketahui arus listrik yang keluar dari sebuah dinamo AC mengikuti grafik fungsi sinus berikut ini.



Gambar 26 Grafik $y = \frac{5}{2} \sin x$

Berapa ampere arus listrik maksimum yang dapat dikeluarkan dinamo tersebut?

7. Diketahui suatu alat listrik mengeluarkan energi mengikuti persamaan kosinus $y = 3\cos(x + 15^\circ)$ kapankah energi yang dikeluarkan alat tersebut maksimal dan kapan energi yang dikeluarkan akan minimal jika alat tersebut dioperasikan selama satu jam?
8. Buatlah soal tentang penerapan rumus trigonometri sudut rangkap di jurusan Anda. Diskusikan dengan teman satu kelompok (satu kelompok terdiri dari guru jurusan yang sama), lalu presentasikan di depan kelas.

Aktivitas 3 : Penyusunan Instrumen Penilaian

Pada aktivitas ini, Anda diminta berlatih untuk menyusun instrument penilaian pada materi persamaan dan grafik fungsi trigonometri dengan mengacu pada panduan penulisan dan penyusunan soal dari Puspendik. Bacalah terlebih dahulu bahan bacaan mengenai panduan teknik penulisan dan penyusunan soal dari puspendik tersebut. Kerjakan dengan penuh tanggung jawab, cermat, dan percaya diri. Diskusikan dengan rekan guru jika mengalami kendala dalam menyusun instrument penilaian.



LK – 05

1. Buatlah kisi-kisi soal mengenai materi persamaan dan grafik fungsi trigonometri.
2. Buatlah 20 soal yang terdiri dari 15 soal pilihan ganda dan 5 soal uraian sesuai dengan kisi-kisi yang sudah dibuat pada nomer 1.

F. Latihan dan Tugas

a. Pilihan Banyak

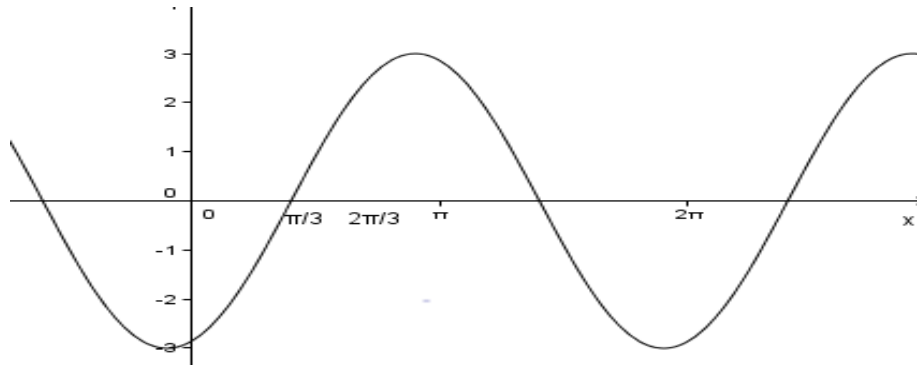
1. Himpunan penyelesaian dari $\sin x = -\frac{1}{2}$ untuk $0 \leq x \leq 360^\circ$ adalah...
A. $\{30^\circ, 150^\circ\}$ D. $\{30^\circ, 150^\circ, 210^\circ\}$
B. $\{150^\circ, 330^\circ\}$ E. $\{30^\circ, 150^\circ, 210^\circ, 330^\circ\}$
C. $\{210^\circ, 330^\circ\}$
2. Himpunan penyelesaian dari $\cos 3x = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ untuk $0 \leq x \leq 90^\circ$ adalah...
A. $\{50^\circ, 80^\circ\}$ C. $\{40^\circ, 80^\circ\}$ E. $\{70^\circ, 80^\circ\}$
B. $\{40^\circ, 70^\circ\}$ D. $\{50^\circ, 70^\circ\}$
3. Himpunan penyelesaian dari $\sin 2x + \sin x = 0$ untuk $0 \leq x \leq 360^\circ$ adalah...
A. $\{0^\circ, 120^\circ, 180^\circ, 240^\circ, 360^\circ\}$ D. $\{0^\circ, 120^\circ\}$
B. $\{0^\circ, 120^\circ, 180^\circ, 360^\circ\}$ E. $\{0^\circ\}$
C. $\{0^\circ, 180^\circ, 360^\circ\}$
4. Jika $0 \leq x \leq 180^\circ$ dan x memenuhi persamaan $\tan^2 x - \tan x - 6 = 0$, maka himpunan nilai $\sin x$ adalah...
A. $\left\{\frac{3\sqrt{10}}{10}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right\}$ D. $\left\{-\frac{\sqrt{10}}{10}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right\}$

E. $\left\{ \frac{\sqrt{10}}{10}, \frac{2\sqrt{5}}{5} \right\}$



E. 7 ampere dan 5 ampere

10. Persamaan untuk grafik di bawah adalah....



A. $y = 3 \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

D. $y = 3 \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$

B. $y = 3 \cos\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$

E. $y = 3 \cos\left(x - \frac{5\pi}{6}\right)$

C. $y = 3 \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

b. Uraian

1. Bagaimana cara menentukan nilai p agar persamaan $\sin x - \cos x = p$ mempunyai nilai? Konsep apa yang digunakan? Berikan penjelasanmu!
2. Apakah persamaan $\cos 4x + 3 \sin 2x = -1$ untuk $0 < x < 180^\circ$ memiliki penyelesaian? Mengapa? Berikan penjelasan yang mendasari jawabanmu!
3. Tentukan nilai x yang memenuhi $2\cos(x - 30^\circ) = \sqrt{2}$ untuk $0 \leq x \leq 360^\circ$
4. Gambarlah grafik dari fungsi $y = 4 \sin(x + 45^\circ)$
5. Tentukan berapa nilai maksimal dari fungsi-fungsi berikut ini.

a. $y = \frac{1}{2} \sin(x - 45^\circ)$

b. $y = 4 \cos x - 1$

c. $y = 2 \sin(x + 5^\circ)$



G. Rangkuman

1. Persamaan Trigonometri

a. $\sin x = \sin \alpha$

$$x_1 = \alpha \pm k \cdot 360^\circ$$

$$x_2 = (180^\circ - \alpha) \pm k \cdot 360^\circ$$

b. $\cos x = \cos \alpha$

$$x_{1,2} = \pm \alpha \pm k \cdot 360^\circ$$

c. $\tan x = \tan \alpha$

$$x = \alpha \pm k \cdot 180^\circ$$

2. Grafik Fungsi Trigonometri

a. Periode dan Amplitudo

- $f(x) = a \sin k(x \pm b) \pm c \rightarrow \text{Periode} = \frac{2\pi}{k}, \text{ amplitudo} = |a|$

- $f(x) = a \cos k(x \pm b) \pm c \rightarrow \text{Periode} = \frac{2\pi}{k}, \text{ amplitudo} = |a|$

- $f(x) = a \tan k(x \pm b) \pm c \rightarrow \text{Periode} = \frac{\pi}{k}$

b. Fungsi $f(x) = a \sin(x \pm b) + c$, $f(x) = a \cos(x \pm b) + c$ dan $f(x) = a \tan(x \pm b) + c$

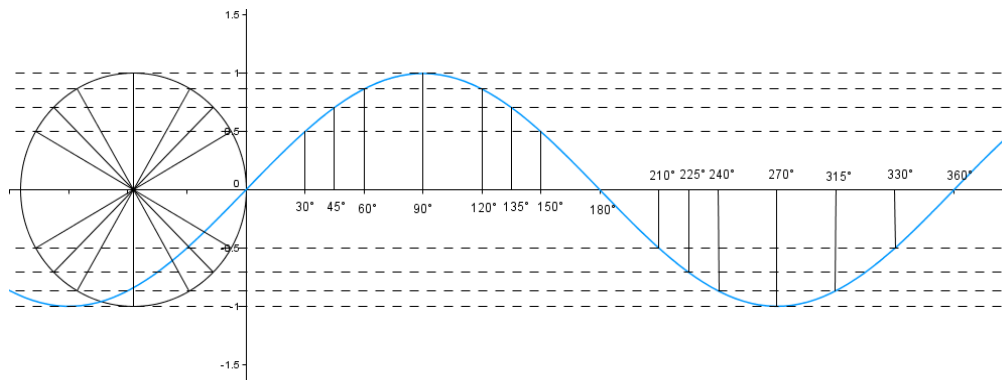
- Jika tandanya positif ($x + b$) maka geser kekiri sejauh b dan jika tandanya negatif ($x - b$) maka geser kekana sejauh b
- Jika tandanya positif ($+c$) maka geser ke atas sejauh c dan jika tandanya negatif ($-c$) maka geser ke bawah sejauh c

c. Misalkan fungsi $f(x) = a \sin g(x) + c$ dan $f(x) = a \cos g(x) + c$,

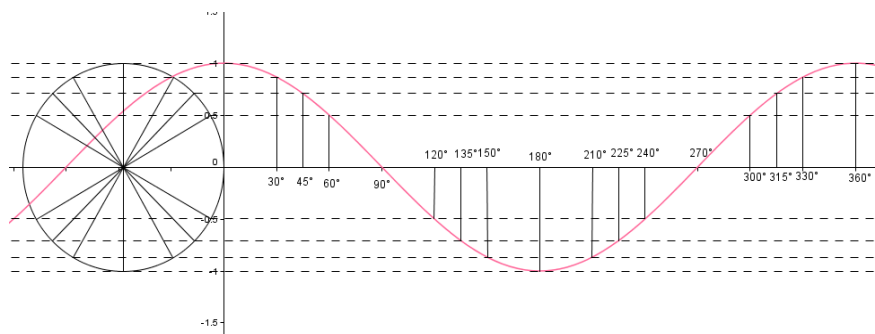


- Nilai maksimum = $|a| + c$
- Nilai Minimum = $-|a| + c$

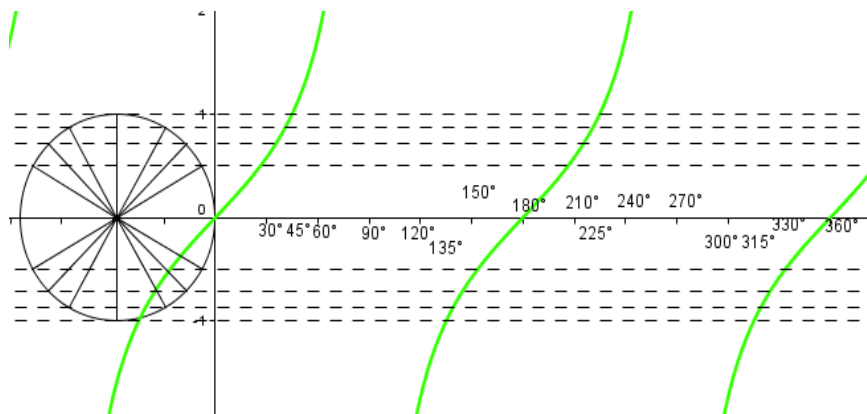
Grafik Sinus $y = \sin x$



Grafik Kosinus $y = \cos x$



Grafik Tangen $y = \tan x$





H. Umpan Balik dan Tindak Lanjut

Pada Kegiatan Belajar 3 ini Anda telah mempelajari:

1. Persamaan trigonometri
2. Penerapan nilai maksimum dan minimum fungsi grafik trigonometri dalam menyelesaikan masalah.

Pengembangan yang diharapkan setelah mempelajari persamaan dan grafik trigonometri, adalah Anda dapat mengidentifikasi permasalahan di dalam kehidupan sehari-hari yang berkaitan dengan pembelajaran tentang persamaan dan grafik trigonometri.

Ukurlah kemampuan Anda dengan mencocokkan latihan yang ada pada kegiatan belajar 3 dengan kunci jawaban. Hitunglah tingkat penguasaan Anda dengan menggunakan rumus di bawah ini:

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{jumlah soal benar}}{15}$$

Bila tingkat penguasaan Anda mencapai $\geq 67\%$, Anda dapat meneruskan dengan kegiatan belajar selanjutnya. Akan tetapi bila kebenaran jawaban Anda belum mencapai 67%, hendaknya anda mengulangi kegiatan belajar, terutama pada bagian yang Anda anggap rumit dan berdiskusilah dengan teman sejawat yang lainnya atau dengan narasumber/fasilitator.

Untuk mengembangkan materi yang lebih jauh Anda sebaiknya mempelajari materi Pada Modul berikutnya. Lakukan tahapan kegiatan belajar materi selanjutnya dengan mengerjakan aktifitas kegiatannya dan mengerjakan lembar kerjanya. Ukurlah kemampuan pemahaman materi yang Anda pelajari dengan mengerjakan latihan soal-soalnya.



Kegiatan Belajar 1

a. Pilihan Banyak

- | | |
|------|-------|
| 1. E | 6. C |
| 2. E | 7. B |
| 3. A | 8. E |
| 4. C | 9. A |
| 5. D | 10. D |

b. Uraian

1. a. 53°
b. 5 meter
2. a. $-\sin 8^\circ$ atau $-\cos 82^\circ$
b. $-\sin 60^\circ$ atau $-\cos 30^\circ$
c. $-\tan 60^\circ$ atau $-\cot 30^\circ$
d. $-\operatorname{cosec} 50^\circ$ atau $-\sec 40^\circ$
e. $-\tan 40^\circ$ atau $-\cot 50^\circ$
f. $-\operatorname{cosec} 15^\circ$ atau $-\sec 75^\circ$
3. sudut $A = 32,1^\circ$
4. memakai aturan kosinus, $\cos 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
5. 6.06 cm^2



Kegiatan Belajar 2

a. Pilihan Banyak

- | | |
|------|-------|
| 1. B | 6. D |
| 2. A | 7. C |
| 3. C | 8. B |
| 4. E | 9. A |
| 5. C | 10. E |

b. Uraian

$$1. \frac{1}{2}(p\sqrt{3} + q)$$

$$2. \sqrt{3} \sin b$$

$$3. -\frac{100}{125}$$

$$4. \sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}$$

$$5. \sin 80^\circ + \sin 40^\circ = 2\left(\sin \frac{1}{2}(80^\circ + 40^\circ) \cdot \cos \frac{1}{2}(80^\circ - 40^\circ)\right)$$

$$= 2(\sin 60^\circ \cdot \cos 20^\circ)$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \cos 20^\circ\right)$$

$$= \sqrt{3} \cos 20^\circ$$



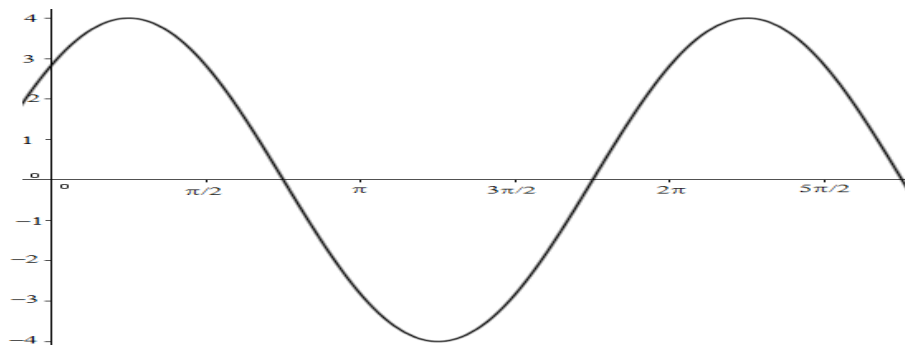
Kegiatan Belajar 3

1. Pilihan Banyak

- | | |
|------|-------|
| 1. C | 6. D |
| 2. D | 7. B |
| 3. A | 8. B |
| 4. B | 9. E |
| 5. D | 10. E |

2. Uraian

1. $-\sqrt{2} \leq p \leq \sqrt{2}$
2. $\{105^\circ, 165^\circ\}$
3. $\{75^\circ, 345^\circ\}$
4. Gambar



5. a. $\frac{1}{2}$
b. 3
c. 2



PENUTUP

Setelah menyelesaikan modul ini, peserta diklat berhak untuk mengikuti tes untuk menguji kompetensi yang telah dipelajari. Apabila peserta diklat dinyatakan memenuhi syarat kelulusan dari hasil evaluasi dalam modul ini, maka peserta berhak untuk melanjutkan ke topik/modul berikutnya.

Mintalah pada widyaiswara untuk uji kompetensi dengan sistem penilaian yang dilakukan langsung oleh pihak institusi atau asosiasi yang berkompeten apabila peserta telah menyelesaikan seluruh evaluasi dari setiap modul, maka hasil yang berupa nilai dari widyaiswara atau berupa portofolio dapat dijadikan bahan verifikasi oleh pihak institusi atau asosiasi profesi. Selanjutnya hasil tersebut dapat dijadikan sebagai penentu standar pemenuhan kompetensi dan bila memenuhi syarat peserta berhak mendapatkan sertifikat kompetensi yang dikeluarkan oleh institusi atau asosiasi profesi.



EVALUASI

Pilihlah jawaban yang paling tepat diantara pilihan A, B, C, dan D.

1. Diketahui nilai $\sin x = \frac{1}{3}$, dimana $90^\circ < x < 180^\circ$. Maka $\tan x = \dots$

A. $2\sqrt{2}$

C. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$

E. $-\frac{3}{2}\sqrt{2}$

B. $\frac{2}{3}\sqrt{2}$

D. $-\frac{1}{4}\sqrt{2}$

2. Diberikan segitiga ABC siku-siku di C. Jika $\cos (A + C) = k$, maka nilai $\sin A + \cos B$ adalah

A. $-\frac{1}{2}k$

C. k

E. $-2k$

B. $\frac{1}{2}k$

D. $2k$

3. Nilai dari $\sin 120^\circ + \sin 420^\circ$ adalah...

A. $-\sqrt{3}$

C. 0

E. $\sqrt{3}$

B. -1

D. 1

4. Nilai dari $\frac{\sin 75^\circ + \sin 15^\circ}{\cos 105^\circ + \cos 15^\circ}$ adalah...

A. $\sqrt{3}$

C. $\frac{1}{3}\sqrt{3}$

E. $-\sqrt{3}$

B. $\sqrt{2}$

D. $-\sqrt{2}$



5. Posisi pesawat udara berada pada koordinat $(15, 5\sqrt{3})$. Posisi pesawat pada koordinat kutub adalah...

A. $(10\sqrt{3}, 60^\circ)$

C. $(10\sqrt{3}, 30^\circ)$

E. $(10\sqrt{3}, 10^\circ)$

B. $(10\sqrt{3}, 45^\circ)$

D. $(10\sqrt{3}, 15^\circ)$

6. Diberikan segitiga ABC dengan panjang sisi $AB = 3$ dan sisi $AC = 4$, sedangkan sudut $A = 60^\circ$. Nilai dari kosinus C adalah...

A. $\frac{5}{26}\sqrt{13}$

C. $\frac{5}{42}\sqrt{13}$

E. $\frac{1}{5}\sqrt{13}$

B. $\frac{5}{29}\sqrt{13}$

D. $\frac{5}{52}\sqrt{13}$

7. Pada segitiga ABC dengan sisi a, b , dan c berlaku $a^2 - b^2 = c^2 - bc$. Maka besar sudut A adalah

A. 15°

C. 45°

E. 75°

B. 30°

D. 60°

8. Jika $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ dan $\tan \beta = \frac{4}{3}$, α dan β merupakan sudut lancip, maka nilai $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$ adalah...

A. $\frac{32}{25}$

C. $\frac{18}{25}$

E. $\frac{4}{25}$

B. 1

D. $\frac{11}{25}$



9. $\frac{\tan 140^\circ + \tan 70^\circ}{1 - \tan 140^\circ \tan 70^\circ} = \dots$

A. $-\sqrt{3}$

C. $\frac{3-\sqrt{3}}{3}$

E. $\sqrt{3}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

D. $\frac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$

10. $(1 - \sin^2 x) \tan^2 x$ sama dengan ...

A. $2\sin^2 x - 1$

C. $1 - \cos^2 x$

E. $\sin^2 x + 2$

B. $\sin^2 x + \cos^2 x$

D. $1 - \sin^2 x$

11. Jika $\cos 2x = \frac{1-a^2}{1+a^2}$ maka $\tan x = \dots$

A. $-a$

C. $\pm a$

E. a^2

B. $-2a$

D. a

12. $\sin 4x \sin 3x - \cos 4x \cos 3x = \dots$

A. $\sin x$

C. $-\cos x$

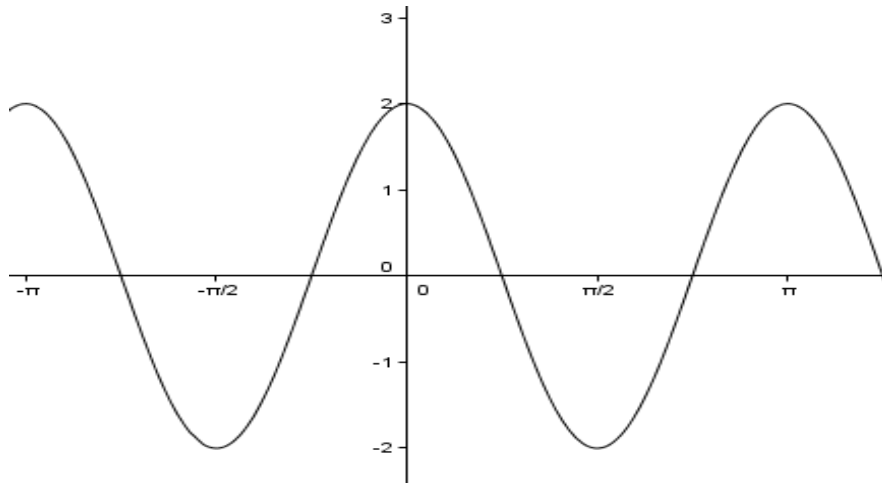
E. $-\cos 7x$

B. $\cos(-x)$

D. $\cos 7x$



13. Persamaan dari grafik berikut adalah ...



- A. $y = 2 \sin\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)$ D. $y = -2 \sin\left(\frac{1}{2}\pi + x\right)$
 B. $y = 2 \sin\left(\frac{1}{2}\pi - x\right)$ E. $y = -2 \sin\left(2x - \frac{1}{2}\pi\right)$
 C. $y = 2 \sin\left(2x + \frac{1}{2}\pi\right)$

14. Penyelesaian persamaan $\sin x + \cos x = 0$ dengan $0^\circ < x < 360^\circ$ adalah ...

- A. 45° dan 135° D. 225° dan 315°
 B. 135° dan 315° E. $45^\circ, 135^\circ, 225^\circ$, dan 315°
 C. 45° dan 225°

15. Diketahui grafik fungsi $y = \frac{2}{5} \sin(x + 30^\circ)$. Amplitudo dari fungsi tersebut adalah ...

- A. 1 C. 30° E. 5
 B. $\frac{2}{5}$ D. 2



GLOSARIUM

Amplitudo	: simpangan terjauh titik pada suatu grafik fungsi trigonometri terhadap garis horizontalnya
Grafik	: Lukisan pasang surut suatu keadaan dengan garis atau gambar
Kosecan	: Perbandingan antara sisi miring dengan sisi depan pada suatu segitiga siku-siku. Bisa juga disebut kebalikan dari sinus.
Kosinus	: Perbandingan antara sisi samping dengan sisi miring pada suatu segitiga siku-siku
Kotangen	: Perbandingan antara sisi samping dengan sisi depan pada suatu segitiga siku-siku. Bisa juga disebut kebalikan dari tangen.
Periode	: Jarak dimana suatu grafik akan kembali ke nilai awal
Puspendik	: Pusat Penilaian Pendidikan
Secan	: Perbandingan antara sisi miring dengan sisi samping pada suatu segitiga siku-siku. Bisa juga disebut kebalikan dari kosinus.
Sinus	: Perbandingan antara sisi depan dengan sisi miring pada suatu segitiga siku-siku
Tangen	: Perbandingan antara sisi depan dengan sisi miring pada suatu segitiga siku-siku
Trigonometri	: Ilmu ukur tentang sudut dan sepadan segitiga



DAFTAR PUSTAKA

Djumanta, W & Sudrajat, R. (2008). *Mahir Mengembangkan Kemampuan Matematika untuk kelas XI SMA/MA Program IPA*. Jakarta: Pusat Perbukuan Departemen Pendidikan Nasional.

Hidayat, T & Kadarusman, K. (1994). *Matematika Dasar plus Matematika IPA*. Bandung: Penguin Sakti.

Kasmina & Kusna, A. (2002). *Seri Pendalaman Materi Matematika SMK dan MAK. Program Keahlian Teknologi, Kesehatan dan Pertanian*. Jakarta: Erlangga.

Khoiroh, N. (2013). *100 Soal dan Pembahasan Trigonometri*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

Wirodikromo, S. (2006). *Matematika untuk SMA Kelas X Semester 2*. Jakarta: Erlangga.



LAMPIRAN

Lampiran 1 Perbandingan Trigonometri

LK - 00

1. Ada berapa aktivitas yang harus Anda ikuti dalam mempelajari bahan belajar ini? Sebutkan topik-topik untuk masing-masing aktivitas.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. Dengan percaya diri, sebutkan/tuliskan kompetensi apa yang diharapkan tercapai setelah mempelajari bahan belajar ini?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. Anda saat ini mengikuti pelatihan dengan pola tatap muka. Apa saja yang harus Anda lakukan saat tatap muka?

.....

.....

.....

.....

.....

.....



LK - 01a

1. Apa saja yang harus diketahui untuk bisa menentukan nilai sinus, kosinus dan tangen pada sebuah segitiga?

.....

.....

.....

.....

.....

2. Dapatkah Anda mencari nilai sinus, kosinus dan tangen dari segitiga dengan ukuran triple pythagoras? Jika dapat berilah beberapa contohnya.

.....

.....

.....

.....

.....

3. Apa yang harus diperhatikan ketika akan mengubah nilai sinus, kosinus dan tangen dari suatu sudut yang bernilai besar agar menjadi nilai sinus, kosinus dan tangen pada sudut lancip?

.....

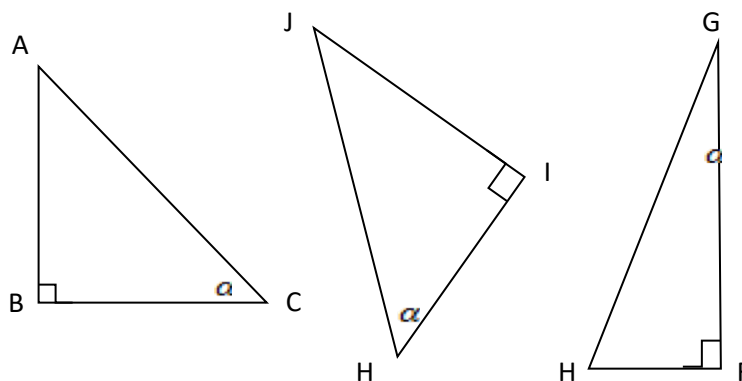
.....

.....

.....

.....

4. Tentukan nilai sinus, kosinus, dan tangen dari segitiga-segitiga di bawah ini



.....



.....
.....
.....

5. Nyatakan perbandingan trigonometri berikut ini dalam perbandingan trigonometri sudut lancip.

a. $\cos 151^\circ$

.....
.....
.....
.....

b. $\sin 268^\circ$

.....
.....
.....
.....
.....

c. $\tan 784^\circ$

.....
.....
.....
.....
.....

d. $\operatorname{cosec} 112^\circ$

.....
.....
.....
.....
.....

e. $\cotan 205^\circ$

.....
.....
.....
.....
.....

6. Pada sebuah segitiga, diketahui $\sin \alpha = \frac{3}{8}$. Tentukan nilai $\cos \alpha$, $\tan \alpha$ dan $\sec \alpha$

.....
.....
.....
.....
.....



9. Tentukan nilai dari

a. $\cos 150^\circ + \sin 45^\circ + \frac{1}{2} \cot (-330)^\circ$

.....

b. $\sin 315^\circ - \frac{1}{3} \tan 300^\circ + \sec 180^\circ$

.....

10. Tentukan ukuran segitiga jika diketahui

a. $\tan \beta = \frac{2}{5}$

.....

b. $\cos \gamma = \frac{6}{4\sqrt{3}}$

.....

c. $\sin \alpha = \frac{7}{25}$

.....



LK - 01b

1. Tentukan nilai sinus, kosinus, dan tangen dari sudut berikut ini dengan menggunakan tabel trigonometri.

a. $\cos 85^\circ$

.....
.....
.....

b. $\sin 135^\circ$

.....
.....
.....

c. $\tan 15^\circ$

.....
.....
.....

d. $\cos 93^\circ$

.....
.....
.....

e. $\sin 85^\circ$

.....
.....
.....

2. Setelah Anda mendapatkan nilai dari sinus, kosinus dan tangen pada nomor 1 di atas, tentukan nilai dari sinus, kosinus dan tangen pada nomor 1 di atas dengan menggunakan kalkulator scientific yang Anda miliki.

a. $\cos 85^\circ$

.....
.....
.....

b. $\sin 135^\circ$

.....
.....
.....

c. $\tan 15^\circ$

.....
.....
.....



d. $\cos 93^\circ$

.....

e. $\sin 85^\circ$

.....

3. Diskusikan dengan teman sekelompok Anda bagaimana nilai yang Anda dapatkan dari perhitungan dari tabel trigonometri dan hasil dari perhitungan kalkulator. Lalu coba Anda hitung nilai trigonometri tersebut dengan menggunakan analisis rumus trigonometri.

a. $\cos 85^\circ$

.....

b. $\sin 135^\circ$

.....

c. $\tan 15^\circ$

.....

d. $\cos 93^\circ$

.....

e. $\sin 85^\circ$

.....



LK - 01c

1. Ubahlah bentuk koordinat kartesius di bawah ini menjadi koordinat kutub

a. $P(5,12)$

.....
.....
.....
.....

b. $P(1,1)$

.....
.....
.....
.....

c. $P(1, \sqrt{3})$

.....
.....
.....
.....

d. $P(3,2)$

.....
.....
.....
.....

e. $P(7,24)$

.....
.....
.....
.....

2. Ubahlah bentuk koordinat kutub di bawah ini menjadi koordinat kartesius

a. $P(6, 30^\circ)$

.....
.....
.....
.....

b. $P(10, 225^\circ)$

.....
.....
.....
.....



c. $P(8, 135^\circ)$

.....

d. $P(12, 150^\circ)$

.....

e. $P(3, 60^\circ)$

.....

3. Suatu kapal nelayan yang sedang melaut bahan bakarnya habis. Nelayan tersebut meminta bantuan pada pelabuhan terdekat dengan menggunakan radio. Dilaporkan bahwa posisi perahu berada pada jarak 100km arah Barat Laut dari pelabuhan tersebut. Tentukan koordinat kedudukan perahu nelayan tersebut jika pelabuhan dianggap pusat kartesius!

.....



LK - 02

1. Apa yang harus diperhatikan ketika akan menggunakan aturan sinus dan kosinus? Bagaimana cara Anda menerangkan tentang konsep aturan sinus dan aturan kosinus kepada siswa Anda? Diskusikan dengan teman satu kelompok dan presentasikan di depan kelas dengan penuh tanggung jawab dan percaya diri..

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

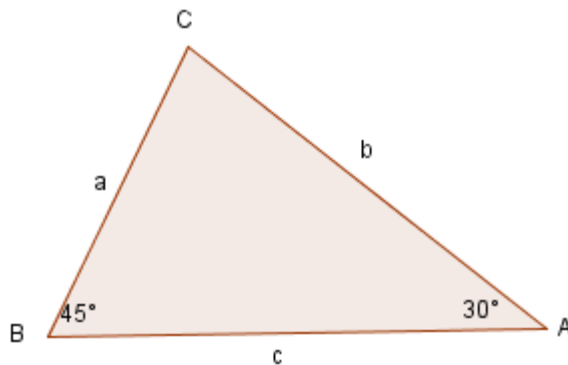
.....

.....

.....

.....

2. Pada segitiga ABC di bawah ini diketahui $a + b = 15$, $\angle A = 30^\circ$ dan $\angle B = 45^\circ$.
Hitunglah panjang sisi a



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



3. Seorang anak menaikkan layang-layang sehingga sudut yang dibentuk oleh benang dan arah mendatar adalah 37° . Hitung panjang benang yang dipakai untuk menaikkan layang-layang jika tinggi layang-layang dari permukaan tanah 5 meter.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4. Seseorang melihat sebuah terowongan dengan sudut penglihatan 45° . Jika jarak orang tersebut ke titik awal terowongan adalah a meter dan jarak orang tersebut ke titik akhir terowongan adalah $2a\sqrt{2}$ meter. Hitunglah panjang terowongan tersebut dalam a .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

5. Sebuah kapal berlayar ke arah timur sejauh 40 mil. Kemudian kapal melanjutkan perjalanan dengan arah 45° sejauh 50 mil. Tentukan jarak kapal terhadap posisi saat kapal berangkat.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



LK - 03

1. Apa yang harus diketahui untuk mencari luas suatu segitiga dengan menggunakan aturan trigonometri?

.....

.....

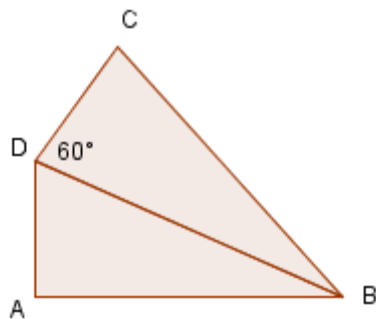
.....

.....

.....

.....

2. Perhatikan gambar segiempat ABCD berikut ini.



AB = 12 cm, AD = 5 cm dan DC = 10 cm. Sudut BDC = 60° , sudut BAD dan sudut BCD siku-siku. Hitunglah luas bangun ABCD tersebut!

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. Sebuah wadah kompresor akan dibuat berbentuk segitiga dengan panjang sisi 45 cm, 60 cm dan 80 cm. Berapakah luas permukaan bahan yang diperlukan untuk menutup salah satu sisi wadah kompresor tersebut?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



LK - 04a

1. Menurut Anda, bagaimana penggunaan perbandingan Trigonometri di jurusan Anda?

.....

.....

.....

.....

.....

2. Buatlah soal penerapan yang berkaitan dengan perbandingan Trigonometri pada jurusan Anda, lalu selesaikan persoalan tersebut!

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



LK - 04b

1. Menurut Anda, bagaimana penggunaan aturan sinus dan kosinus di jurusan Anda?

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

2. Buatlah soal penerapan yang berkaitan dengan aturan sinus dan kosinus pada jurusan Anda, lalu selesaikan persoalan tersebut!

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....



LK - 04c

1. Menurut Anda, bagaimana penggunaan rumus luas segitiga dengan menggunakan aturan trigonometri di jurusan Anda?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. Buatlah soal penerapan yang berkaitan dengan luas segitiga menggunakan aturan trigonometri pada jurusan Anda, lalu selesaikan persoalan tersebut!

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



LK - 5

1. Buatlah kisi-kisi soal mengenai materi perbandingan Trigonometri, aturan sinus dan kosinus, dan luas segitiga.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. Buatlah 20 soal yang terdiri dari 15 soal pilihan ganda dan 5 soal uraian sesuai dengan kisi-kisi yang sudah dibuat pada nomor 1.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Lampiran 2 Lembar Kerja Identitas Trigonometri dan Jumlah Selisih Dua Sudut

LK - 00

1. Ada berapa aktivitas yang harus Anda ikuti dalam mempelajari bahan belajar ini? Sebutkan topik-topik untuk masing-masing aktivitas.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. Kompetensi apa yang diharapkan tercapai setelah mempelajari bahan belajar ini? Sebutkan!

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. Anda saat ini mengikuti pelatihan dengan pola tatap muka. Apa saja yang harus Anda lakukan saat tatap muka?

.....

.....

.....

.....

.....



LK - 01

1. Apa saja yang dimaksud dengan identitas trigonometri?

.....
.....
.....
.....
.....

2. Apa yang harus diperhatikan ketika membuktikan suatu identitas trigonometri?

.....
.....
.....
.....
.....

3. Apa yang harus diketahui untuk menemukan suatu rumus identitas trigonometri?

.....
.....
.....
.....
.....

4. Bagaimana cara Anda menyusun langkah pembuktian sebuah identitas trigonometri dengan menggunakan rumus-rumus trigonometri?

.....
.....
.....
.....
.....

5. Apa yang akan Anda lakukan ketika di dalam pembuktian yang sedang Anda kerjakan ternyata jalan yang Anda tempuh dirasakan buntu?

.....
.....
.....
.....
.....



6. Bagaimana cara Anda menerangkan pada siswa perihal pembuktian rumus-rumus identitas trigonometri?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

7. Buktikan bahwa $1 + \cot^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

8. Buktikan bahwa $\tan^2 x + \operatorname{cosec}^2 x - \cot^2 x = \sec^2 x$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

9. Buktikan bahwa $\tan^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cot^2 \alpha \sin^2 \alpha = 1$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

10. Sederhanakan $\frac{\sin \phi \cos \phi}{1 - \sin^2 \phi}$

.....

.....

.....

.....

.....



LK - 02

1. Bagaimana cara Anda menjelaskan penurunan rumus jumlah dan selisih trigonometri pada siswa? Diskusikan dengan teman satu kelompok lalu presentasikan di depan kelas dengan penuh tanggung jawab dan percaya diri!

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. Menurut Anda bagaimana penerapan rumus jumlah dan selisih trigonometri di jurusan Anda? Bergunakah rumus tersebut untuk memecahkan permasalahan yang ada di jurusan Anda? Beri contohnya!

.....

.....

.....

.....

.....

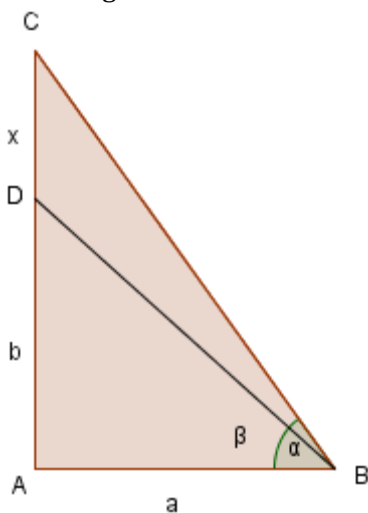
.....

.....

.....

3. Segitiga ABC dengan sisi $AB=a$, $BC=c$, $AC=b+x$ dimana $AD=b$ dan $DC=x$. Sudut ABC adalah α dan sudut ABD adalah β . Tentukan nilai !

Perhatikan gambar di bawah ini





Segitiga ABC dengan sisi $AB=a$, $BC=c$, $AC=b+x$ dimana $AD=b$ dan $DC=x$. Sudut ABC adalah α dan sudut ABD adalah β . Tentukan nilai BD !

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4. Percepatan yang dialami silinder pejal yang ditempatkan pada bidang miring dengan sudut kemiringan α dirumuskan sebagai berikut:

a. $a = g \sin \alpha$ jika tidak ada gesekan antara silinder dan bidang miring

b. $a = \frac{3}{4} g \sin \alpha$ jika silinder menggelinding

Jika sudut kemiringan adalah 15° tentukan kecepatan silinder ketika

- a. tidak ada gesekan antara silinder dan bidang miring

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- b. silinder menggelinding

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



LK - 03

1. Bagaimana cara Anda menjelaskan penurunan Rumus Trigonometri Sudut Rangkap pada siswa? Diskusikan dengan teman satu kelompok lalu presentasikan di depan kelas dengan penuh percaya diri !

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. Diketahui $\sin P = \frac{12}{20}$, dengan $0 < P < 180^\circ$. Hitunglah $\sin 2P$, $\cos 2P$, dan $\tan 2P$!

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. Buatlah soal tentang penerapan rumus trigonometri sudut rangkap di jurusan Anda. Diskusikan dengan teman satu kelompok (satu kelompok terdiri dari guru jurusan yang sama), lalu presentasikan di depan kelas dengan penuh percaya diri.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



LK - 04

1. Bagaimana cara Anda menjelaskan penurunan Rumus Trigonometri Sudut Rangkap pada siswa? Diskusikan dengan teman satu kelompok lalu presentasikan di depan kelas dengan penuh percaya diri !

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. Selesaikanlah soal-soal di bawah ini!

a. $\cos 105^\circ \cos 15^\circ$

.....

.....

.....

.....

b. $2 \cos 75^\circ \sin 45^\circ$

.....

.....

.....

.....

c. $\sin 75^\circ - \sin 45^\circ$

.....

.....

.....

.....

d. $\cos 105^\circ + \cos 15^\circ$

.....

.....

.....

.....

.....

e. $\cos 1220^\circ + \cos 100^\circ + \cos 20^\circ$

.....

.....

.....

.....



```
*****
*****
*****
*****
```

- [illegible]



LK - 5

1. Buatlah kisi-kisi soal mengenai materi perbandingan Trigonometri, aturan sinus dan kosinus, dan luas segitiga.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. Buatlah 20 soal yang terdiri dari 15 soal pilihan ganda dan 5 soal uraian sesuai dengan kisi-kisi yang sudah dibuat pada nomor 1.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Lampiran 3 Lembar Kerja Persamaan Trigonometri Dan Fungsi Trigonometri

LK - 00

1. Ada berapa aktivitas yang harus Anda ikuti dalam mempelajari bahan belajar ini? Sebutkan topik-topik untuk masing-masing aktivitas.

.....

.....

.....

.....

.....

2. Kompetensi apa yang diharapkan tercapai setelah mempelajari bahan belajar ini? Sebutkan!

.....

.....

.....

.....

.....

3. Anda saat ini mengikuti pelatihan dengan pola tatap muka. Apa saja yang harus Anda lakukan saat tatap muka?

.....

.....

.....

.....

.....

LK - 01

1. Apa yang dimasuk dengan persamaan trigonometri?

.....

.....

.....

.....

.....

2. Apa saja yang harus diperhatikan di dalam mengerjakan suatu persamaan trigonometri?

.....

.....

.....

.....

.....



3. Bagaimana cara Anda menerangkan tentang persamaan trigonometri kepada siswa Anda di sekolah?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4. Tentukan himpunan penyelesaian persamaan $\cos 2x + \sin x = 0$ untuk $0 < x < 2\pi$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

5. Buatlah soal penerapan persamaan trigonometri pada jurusan Anda. Diskusikan dengan teman sekelompok Anda dan presentasikan di depan kelas dengan penuh percaya diri.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

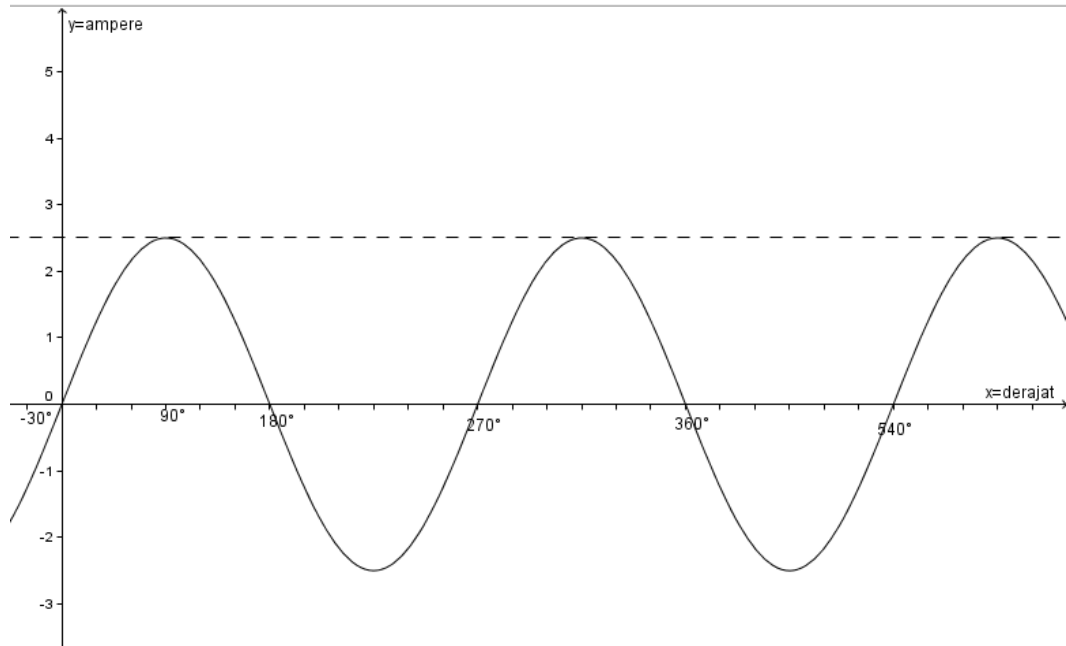


LK - 02

1. Apa yang dimaksud dengan grafik fungsi trigonometri?
.....
.....
.....
.....
.....
.....
2. Sebutkan persamaan dan perbedaan antara grafik fungsi sinus, grafik fungsi kosinus dan grafik fungsi tangen.
.....
.....
.....
.....
.....
.....
3. Tuliskan bagaimana Anda menerangkan kepada siswa cara langkah-langkah menggambar grafik fungsi trigonometri. Diskusikan cara apa yang menurut Anda paling mudah dimengerti oleh siswa?
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
4. Tentukan nilai y maksimal pada persamaan $y = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{2} + 2\frac{1}{2}$
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
5. Gambarkan grafik dari persamaan $y = 2\sin(x)$
.....
.....
.....
.....
.....
.....



6. Diketahui arus listrik yang keluar dari sebuah dinamo AC mengikuti grafik fungsi sinus berikut ini.



Berapa ampere arus listrik maksimum yang dapat dikeluarkan dinamo tersebut?

.....

.....

.....

.....

.....

7. Diketahui suatu alat listrik mengeluarkan energi mengikuti persamaan kosinus $y = 3 \cos(x + 15^\circ)$ kapankah energi yang dikeluarkan alat tersebut maksimal dan kapan energi yang diekluarkan akan minimal jika alat tersebut dioperasikan selama satu jam?

.....

.....

.....

.....

.....

8. Buatlah soal tentang penerapan rumus trigonometri sudut rangkap di jurusan Anda. Diskusikan dengan teman satu kelompok (satu kelompok terdiri dari guru jurusan yang sama), lalu presentasikan di depan kelas.

.....

.....

.....

.....



LK - 3

1. Buatlah kisi-kisi soal mengenai materi persamaan dan fungsi trigonometri.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. Buatlah 20 soal yang terdiri dari 15 soal pilihan ganda dan 5 soal uraian sesuai dengan kisi-kisi yang sudah dibuat pada nomor 1.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Lampiran 4 Tabel Trigonometri dari 0° sampai 360°

sudut	sin x	cos x	tan x	sudut	sin x	cos x	tan x
0	0,0000	1,0000	0,0000	36	0,5878	0,8090	0,7265
1	0,0175	0,9998	0,0175	37	0,6018	0,7986	0,7536
2	0,0349	0,9994	0,0349	38	0,6157	0,7880	0,7813
3	0,0523	0,9986	0,0524	39	0,6293	0,7771	0,8098
4	0,0698	0,9976	0,0699	40	0,6428	0,7660	0,8391
5	0,0872	0,9962	0,0875	41	0,6561	0,7547	0,8693
6	0,1045	0,9945	0,1051	42	0,6691	0,7431	0,9004
7	0,1219	0,9925	0,1228	43	0,6820	0,7314	0,9325
8	0,1392	0,9903	0,1405	44	0,6947	0,7193	0,9657
9	0,1564	0,9877	0,1584	45	0,7071	0,7071	1,0000
10	0,1736	0,9848	0,1763	46	0,7193	0,6947	1,0355
11	0,1908	0,9816	0,1944	47	0,7314	0,6820	1,0724
12	0,2079	0,9781	0,2126	48	0,7431	0,6691	1,1106
13	0,2250	0,9744	0,2309	49	0,7547	0,6561	1,1504
14	0,2419	0,9703	0,2493	50	0,7660	0,6428	1,1918
15	0,2588	0,9659	0,2679	51	0,7771	0,6293	1,2349
16	0,2756	0,9613	0,2867	52	0,7880	0,6157	1,2799
17	0,2924	0,9563	0,3057	53	0,7986	0,6018	1,3270
18	0,3090	0,9511	0,3249	54	0,8090	0,5878	1,3764
19	0,3256	0,9455	0,3443	55	0,8192	0,5736	1,4281
20	0,3420	0,9397	0,3640	56	0,8290	0,5592	1,4826
21	0,3584	0,9336	0,3839	57	0,8387	0,5446	1,5399
22	0,3746	0,9272	0,4040	58	0,8480	0,5299	1,6003
23	0,3907	0,9205	0,4245	59	0,8572	0,5150	1,6643
24	0,4067	0,9135	0,4452	60	0,8660	0,5000	1,7321
25	0,4226	0,9063	0,4663	61	0,8746	0,4848	1,8040
26	0,4384	0,8988	0,4877	62	0,8829	0,4695	1,8807
27	0,4540	0,8910	0,5095	63	0,8910	0,4540	1,9626
28	0,4695	0,8829	0,5317	64	0,8988	0,4384	2,0503
29	0,4848	0,8746	0,5543	65	0,9063	0,4226	2,1445
30	0,5000	0,8660	0,5774	66	0,9135	0,4067	2,2460
31	0,5150	0,8572	0,6009	67	0,9205	0,3907	2,3559
32	0,5299	0,8480	0,6249	68	0,9272	0,3746	2,4751
33	0,5446	0,8387	0,6494	69	0,9336	0,3584	2,6051
34	0,5592	0,8290	0,6745	70	0,9397	0,3420	2,7475
35	0,5736	0,8192	0,7002	71	0,9455	0,3256	2,9042
36	0,5878	0,8090	0,7265	72	0,9511	0,3090	3,0777



sudut	sin x	cos x	tan x	sudut	sin x	cos x	tan x
72	0,9511	0,3090	3,0777	108	0,9511	-0,3090	-3,0777
73	0,9563	0,2924	3,2709	109	0,9455	-0,3256	-2,9042
74	0,9613	0,2756	3,4874	110	0,9397	-0,3420	-2,7475
75	0,9659	0,2588	3,7321	111	0,9336	-0,3584	-2,6051
76	0,9703	0,2419	4,0108	112	0,9272	-0,3746	-2,4751
77	0,9744	0,2250	4,3315	113	0,9205	-0,3907	-2,3559
78	0,9781	0,2079	4,7046	114	0,9135	-0,4067	-2,2460
79	0,9816	0,1908	5,1446	115	0,9063	-0,4226	-2,1445
80	0,9848	0,1736	5,6713	116	0,8988	-0,4384	-2,0503
81	0,9877	0,1564	6,3138	117	0,8910	-0,4540	-1,9626
82	0,9903	0,1392	7,1154	118	0,8829	-0,4695	-1,8807
83	0,9925	0,1219	8,1443	119	0,8746	-0,4848	-1,8040
84	0,9945	0,1045	9,5144	120	0,8660	-0,5000	-1,7321
85	0,9962	0,0872	11,4301	121	0,8572	-0,5150	-1,6643
86	0,9976	0,0698	14,3007	122	0,8480	-0,5299	-1,6003
87	0,9986	0,0523	19,0811	123	0,8387	-0,5446	-1,5399
88	0,9994	0,0349	28,6363	124	0,8290	-0,5592	-1,4826
89	0,9998	0,0175	57,2900	125	0,8192	-0,5736	-1,4281
90	1,0000	0,0000	~	126	0,8090	-0,5878	-1,3764
91	0,9998	-0,0175	-57,2900	127	0,7986	-0,6018	-1,3270
92	0,9994	-0,0349	-28,6363	128	0,7880	-0,6157	-1,2799
93	0,9986	-0,0523	-19,0811	129	0,7771	-0,6293	-1,2349
94	0,9976	-0,0698	-14,3007	130	0,7660	-0,6428	-1,1918
95	0,9962	-0,0872	-11,4301	131	0,7547	-0,6561	-1,1504
96	0,9945	-0,1045	-9,5144	132	0,7431	-0,6691	-1,1106
97	0,9925	-0,1219	-8,1443	133	0,7314	-0,6820	-1,0724
98	0,9903	-0,1392	-7,1154	134	0,7193	-0,6947	-1,0355
99	0,9877	-0,1564	-6,3138	135	0,7071	-0,7071	-1,0000
100	0,9848	-0,1736	-5,6713	136	0,6947	-0,7193	-0,9657
101	0,9816	-0,1908	-5,1446	137	0,6820	-0,7314	-0,9325
102	0,9781	-0,2079	-4,7046	138	0,6691	-0,7431	-0,9004
103	0,9744	-0,2250	-4,3315	139	0,6561	-0,7547	-0,8693
104	0,9703	-0,2419	-4,0108	140	0,6428	-0,7660	-0,8391
105	0,9659	-0,2588	-3,7321	141	0,6293	-0,7771	-0,8098
106	0,9613	-0,2756	-3,4874	142	0,6157	-0,7880	-0,7813
107	0,9563	-0,2924	-3,2709	143	0,6018	-0,7986	-0,7536
108	0,9511	-0,3090	-3,0777	144	0,5878	-0,8090	-0,7265



sudut	sin x	cos x	tan x	sudut	sin x	cos x	tan x
144	0,5878	-0,8090	-0,7265	180	0,0000	-1,0000	0,0000
145	0,5736	-0,8192	-0,7002	181	-0,0175	-0,9998	0,0175
146	0,5592	-0,8290	-0,6745	182	-0,0349	-0,9994	0,0349
147	0,5446	-0,8387	-0,6494	183	-0,0523	-0,9986	0,0524
148	0,5299	-0,8480	-0,6249	184	-0,0698	-0,9976	0,0699
149	0,5150	-0,8572	-0,6009	185	-0,0872	-0,9962	0,0875
150	0,5000	-0,8660	-0,5774	186	-0,1045	-0,9945	0,1051
151	0,4848	-0,8746	-0,5543	187	-0,1219	-0,9925	0,1228
152	0,4695	-0,8829	-0,5317	188	-0,1392	-0,9903	0,1405
153	0,4540	-0,8910	-0,5095	189	-0,1564	-0,9877	0,1584
154	0,4384	-0,8988	-0,4877	190	-0,1736	-0,9848	0,1763
155	0,4226	-0,9063	-0,4663	191	-0,1908	-0,9816	0,1944
156	0,4067	-0,9135	-0,4452	192	-0,2079	-0,9781	0,2126
157	0,3907	-0,9205	-0,4245	193	-0,2250	-0,9744	0,2309
158	0,3746	-0,9272	-0,4040	194	-0,2419	-0,9703	0,2493
159	0,3584	-0,9336	-0,3839	195	-0,2588	-0,9659	0,2679
160	0,3420	-0,9397	-0,3640	196	-0,2756	-0,9613	0,2867
161	0,3256	-0,9455	-0,3443	197	-0,2924	-0,9563	0,3057
162	0,3090	-0,9511	-0,3249	198	-0,3090	-0,9511	0,3249
163	0,2924	-0,9563	-0,3057	199	-0,3256	-0,9455	0,3443
164	0,2756	-0,9613	-0,2867	200	-0,3420	-0,9397	0,3640
165	0,2588	-0,9659	-0,2679	201	-0,3584	-0,9336	0,3839
166	0,2419	-0,9703	-0,2493	202	-0,3746	-0,9272	0,4040
167	0,2250	-0,9744	-0,2309	203	-0,3907	-0,9205	0,4245
168	0,2079	-0,9781	-0,2126	204	-0,4067	-0,9135	0,4452
169	0,1908	-0,9816	-0,1944	205	-0,4226	-0,9063	0,4663
170	0,1736	-0,9848	-0,1763	206	-0,4384	-0,8988	0,4877
171	0,1564	-0,9877	-0,1584	207	-0,4540	-0,8910	0,5095
172	0,1392	-0,9903	-0,1405	208	-0,4695	-0,8829	0,5317
173	0,1219	-0,9925	-0,1228	209	-0,4848	-0,8746	0,5543
174	0,1045	-0,9945	-0,1051	210	-0,5000	-0,8660	0,5774
175	0,0872	-0,9962	-0,0875	211	-0,5150	-0,8572	0,6009
176	0,0698	-0,9976	-0,0699	212	-0,5299	-0,8480	0,6249
177	0,0523	-0,9986	-0,0524	213	-0,5446	-0,8387	0,6494
178	0,0349	-0,9994	-0,0349	214	-0,5592	-0,8290	0,6745
179	0,0175	-0,9998	-0,0175	215	-0,5736	-0,8192	0,7002
180	0,0000	-1,0000	0,0000	216	-0,5878	-0,8090	0,7265



sudut	sin x	cos x	tan x	sudut	sin x	cos x	tan x
216	-0,5878	-0,8090	0,7265	252	-0,9511	-0,3090	3,0777
217	-0,6018	-0,7986	0,7536	253	-0,9563	-0,2924	3,2709
218	-0,6157	-0,7880	0,7813	254	-0,9613	-0,2756	3,4874
219	-0,6293	-0,7771	0,8098	255	-0,9659	-0,2588	3,7321
220	-0,6428	-0,7660	0,8391	256	-0,9703	-0,2419	4,0108
221	-0,6561	-0,7547	0,8693	257	-0,9744	-0,2250	4,3315
222	-0,6691	-0,7431	0,9004	258	-0,9781	-0,2079	4,7046
223	-0,6820	-0,7314	0,9325	259	-0,9816	-0,1908	5,1446
224	-0,6947	-0,7193	0,9657	260	-0,9848	-0,1736	5,6713
225	-0,7071	-0,7071	1,0000	261	-0,9877	-0,1564	6,3138
226	-0,7193	-0,6947	1,0355	262	-0,9903	-0,1392	7,1154
227	-0,7314	-0,6820	1,0724	263	-0,9925	-0,1219	8,1443
228	-0,7431	-0,6691	1,1106	264	-0,9945	-0,1045	9,5144
229	-0,7547	-0,6561	1,1504	265	-0,9962	-0,0872	11,4301
230	-0,7660	-0,6428	1,1918	266	-0,9976	-0,0698	14,3007
231	-0,7771	-0,6293	1,2349	267	-0,9986	-0,0523	19,0811
232	-0,7880	-0,6157	1,2799	268	-0,9994	-0,0349	28,6363
233	-0,7986	-0,6018	1,3270	269	-0,9998	-0,0175	57,2900
234	-0,8090	-0,5878	1,3764	270	-1,0000	0,0000	— ~
235	-0,8192	-0,5736	1,4281	271	-0,9998	0,0175	-57,2900
236	-0,8290	-0,5592	1,4826	272	-0,9994	0,0349	-28,6363
237	-0,8387	-0,5446	1,5399	273	-0,9986	0,0523	-19,0811
238	-0,8480	-0,5299	1,6003	274	-0,9976	0,0698	-14,3007
239	-0,8572	-0,5150	1,6643	275	-0,9962	0,0872	-11,4301
240	-0,8660	-0,5000	1,7321	276	-0,9945	0,1045	-9,5144
241	-0,8746	-0,4848	1,8040	277	-0,9925	0,1219	-8,1443
242	-0,8829	-0,4695	1,8807	278	-0,9903	0,1392	-7,1154
243	-0,8910	-0,4540	1,9626	279	-0,9877	0,1564	-6,3138
244	-0,8988	-0,4384	2,0503	280	-0,9848	0,1736	-5,6713
245	-0,9063	-0,4226	2,1445	281	-0,9816	0,1908	-5,1446
246	-0,9135	-0,4067	2,2460	282	-0,9781	0,2079	-4,7046
247	-0,9205	-0,3907	2,3559	283	-0,9744	0,2250	-4,3315
248	-0,9272	-0,3746	2,4751	284	-0,9703	0,2419	-4,0108
249	-0,9336	-0,3584	2,6051	285	-0,9659	0,2588	-3,7321
250	-0,9397	-0,3420	2,7475	286	-0,9613	0,2756	-3,4874
251	-0,9455	-0,3256	2,9042	287	-0,9563	0,2924	-3,2709
252	-0,9511	-0,3090	3,0777	288	-0,9511	0,3090	-3,0777



sudut	sin x	cos x	tan x	sudut	sin x	cos x	tan x
288	-0,9511	0,3090	-3,0777	324	-0,5878	0,8090	-0,7265
289	-0,9455	0,3256	-2,9042	325	-0,5736	0,8192	-0,7002
290	-0,9397	0,3420	-2,7475	326	-0,5592	0,8290	-0,6745
291	-0,9336	0,3584	-2,6051	327	-0,5446	0,8387	-0,6494
292	-0,9272	0,3746	-2,4751	328	-0,5299	0,8480	-0,6249
293	-0,9205	0,3907	-2,3559	329	-0,5150	0,8572	-0,6009
294	-0,9135	0,4067	-2,2460	330	-0,5000	0,8660	-0,5774
295	-0,9063	0,4226	-2,1445	331	-0,4848	0,8746	-0,5543
296	-0,8988	0,4384	-2,0503	332	-0,4695	0,8829	-0,5317
297	-0,8910	0,4540	-1,9626	333	-0,4540	0,8910	-0,5095
298	-0,8829	0,4695	-1,8807	334	-0,4384	0,8988	-0,4877
299	-0,8746	0,4848	-1,8040	335	-0,4226	0,9063	-0,4663
300	-0,8660	0,5000	-1,7321	336	-0,4067	0,9135	-0,4452
301	-0,8572	0,5150	-1,6643	337	-0,3907	0,9205	-0,4245
302	-0,8480	0,5299	-1,6003	338	-0,3746	0,9272	-0,4040
303	-0,8387	0,5446	-1,5399	339	-0,3584	0,9336	-0,3839
304	-0,8290	0,5592	-1,4826	340	-0,3420	0,9397	-0,3640
305	-0,8192	0,5736	-1,4281	341	-0,3256	0,9455	-0,3443
306	-0,8090	0,5878	-1,3764	342	-0,3090	0,9511	-0,3249
307	-0,7986	0,6018	-1,3270	343	-0,2924	0,9563	-0,3057
308	-0,7880	0,6157	-1,2799	344	-0,2756	0,9613	-0,2867
309	-0,7771	0,6293	-1,2349	345	-0,2588	0,9659	-0,2679
310	-0,7660	0,6428	-1,1918	346	-0,2419	0,9703	-0,2493
311	-0,7547	0,6561	-1,1504	347	-0,2250	0,9744	-0,2309
312	-0,7431	0,6691	-1,1106	348	-0,2079	0,9781	-0,2126
313	-0,7314	0,6820	-1,0724	349	-0,1908	0,9816	-0,1944
314	-0,7193	0,6947	-1,0355	350	-0,1736	0,9848	-0,1763
315	-0,7071	0,7071	-1,0000	351	-0,1564	0,9877	-0,1584
316	-0,6947	0,7193	-0,9657	352	-0,1392	0,9903	-0,1405
317	-0,6820	0,7314	-0,9325	353	-0,1219	0,9925	-0,1228
318	-0,6691	0,7431	-0,9004	354	-0,1045	0,9945	-0,1051
319	-0,6561	0,7547	-0,8693	355	-0,0872	0,9962	-0,0875
320	-0,6428	0,7660	-0,8391	356	-0,0698	0,9976	-0,0699
321	-0,6293	0,7771	-0,8098	357	-0,0523	0,9986	-0,0524
322	-0,6157	0,7880	-0,7813	358	-0,0349	0,9994	-0,0349
323	-0,6018	0,7986	-0,7536	359	-0,0175	0,9998	-0,0175
324	-0,5878	0,8090	-0,7265	360	0,0000	1,0000	0,0000

MODUL

PENGEMBANGAN KEPROFESIAN BERKELANJUTAN

MATEMATIKA TEKNIK

SEKOLAH MENENGAH KEJURUAN (SMK)

EDISI REVISI 2018

Terintegrasi Penguatan Pendidikan Karakter dan
Pengembangan Soal Keterampilan Berpikir Aras Tinggi
(HOTS)



Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan
Direktorat Jenderal Guru dan Tenaga Kependidikan
2018

Jalan Jenderal Sudirman, Gedung D Lantai 12, Senayan, Jakarta 10270 Telefon / Fax: (021)57974108

<http://gtk.kemdikbud.go.id/>