Modul

Pengembangan Keprofesian Berkelanjutan

F

Kelompok Kompetensi

PROFESIONAL

KALKULUS DAN GEOMETRI ANALITIK

Edisi Revisi 2018

Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan
Direktorat Jenderal Guru dan Tenaga Kependidikan
2018

MODUL PENGEMBANGAN KEPROFESIAN BERKELANJUTAN

MATEMATIKA TEKNIK
SEKOLAH MENENGAH KEJURUAN (SMK)

TERINTEGRASI PENGUATAN PENDIDIKAN KARAKTER DAN PENGEMBANGAN SOAL KETERAMPILAN BERPIKIR ARAS TINGGI (HOTS)

EDISI REVISI 2018

KELOMPOK KOMPETENSI F

PROFESIONAL:

Kalkulus dan Geometri Analitik

Penulis:
Dr. Yanto Permana, M.Pd.
Eva Dwi Minarti, M.Pd.
Penalaah:
Harry Dwi Putra, S.Pd., M.Pd.
Prof. Dr. Nanang Priatna, M.Pd.

Desain Grafis dan Ilustrasi:
Tim Desain Grafis

Copyright © 2018

Direktorat Jenderal Guru dan Tenaga Kependidikan
Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
Dilarang mengcopy sebagian atau keseluruhan isi buku ini untuk kepentingan komersial tanpa izin tertulis dari Kementerian Pendidikan Kebudayaan

KATA SAMBUTAN

Peran guru profesional dalam proses pembelajaran sangat penting sebagai kunci keberhasilan belajar siswa. Guru profesional adalah guru yang kompeten membangun proses pembelajaran yang baik sehingga dapat menghasilkan pendidikan yang berkualitas dan berkarakter prima. Hal tersebut menjadikan guru sebagai komponen yang menjadi fokus perhatian pemerintah pusat maupun pemerintah daerah dalam peningkatan mutu pendidikan terutama menyangkut kompetensi guru.

Pengembangan profesionalitas guru melalui Program Pengembangan Keprofesian Berkelanjutan merupakan upaya Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan melalui Direktorat Jenderal Guru dan Tenaga Kependidikan dalam upaya peningkatan kompetensi guru. Sejalan dengan hal tersebut, pemetaan kompetensi guru telah dilakukan melalui Uji Kompetensi Guru (UKG) untuk kompetensi pedagogi dan profesional pada akhir tahun 2015. Peta profil hasil UKG menunjukkan kekuatan dan kelemahan kompetensi guru dalam penguasaan pengetahuan pedagogi dan profesional. Peta kompetensi guru tersebut dikelompokkan menjadi 10 (sepuluh) kelompok kompetensi. Tindak lanjut pelaksanaan UKG diwujudkan dalam bentuk pelatihan guru paska UKG sejak tahun 2016 dan akan dilanjutkan pada tahun 2018 ini dengan Program Pengembangan Keprofesian Berkelanjutan bagi Guru. Tujuannya adalah untuk meningkatkan kompetensi guru sebagai agen perubahan dan sumber belajar utama bagi peserta didik. Program Pengembangan Keprofesian Berkelanjutan bagi Guru dilaksanakan melalui Moda Tatap Muka.

Pusat Pengembangan dan Pemberdayaan Pendidik dan Tenaga Kependidikan (PPPPTK) dan, Lembaga Pengembangan dan Pemberdayaan Pendidik dan Tenaga Kependidikan Kelautan Perikanan Teknologi Informasi dan Komunikasi (LP3TK KPTK) merupakan Unit Pelaksanana Teknis di lingkungan Direktorat Jenderal Guru dan Tenaga Kependidikan yang bertanggung jawab dalam mengembangkan perangkat dan melaksanakan peningkatan kompetensi guru sesuai bidangnya. Adapun perangkat pembelajaran yang dikembangkan tersebut adalah modul Program Pengembangan Keprofesian Berkelanjutan melalui Pendidikan dan Pelatihan Guru moda tatap muka untuk semua mata pelajaran dan kelompok kompetensi. Dengan modul ini diharapkan program Pengembangan Keprofesian Berkelanjutan memberikan sumbangan yang sangat besar dalam peningkatan kualitas kompetensi guru.

Mari kita sukseskan Program Pengembangan Keprofesian Berkelanjutan melalui Pendidikan dan Pelatihan Guru ini untuk mewujudkan Guru Mulia karena Karya

Jakarta, Juli 2018

Direktur Jenderal Guru
dan Tenaga Kependidikan,

Dr. Supriano, M.Ed.
NIP. 196208161991031001

KATA PENGANTAR

Undang–Undang Republik Indonesia Nomor 14 Tahun 2005 tentang Guru dan Dosen mengamanatkan adanya pembinaan dan pengembangan profesi guru secara berkelanjutan sebagai aktualisasi dari profesi pendidik. Program Peningkatan Keprofesian Berkelanjutan dilaksanakan bagi semua guru, baik yang sudah bersertifikasi maupun belum bersertifikasi. Untuk melaksanakan Program Peningkatan Keprofesian Berkelanjutan bagi guru, pemetaan kompetensi telah dilakukan melalui Uji Kompetensi Guru (UKG) bagi semua guru di di Indonesia. Dengan melihat hasil UKG dapat diketahui secara objektif kondisi guru saat ini, dan data tersebut dapat digunakan untuk meningkatan kompetensi guru tersebut.

Modul ini disusun sebagai materi utama dalam program peningkatan kompetensi guru mulai tahun 2017 yang diberi nama Peningkatan Keprofesian Berkelanjutan (PKB). Program ini disesuaikan dengan mata pelajaran/paket keahlian yang diampu oleh guru dan kelompok kompetensi yang diindikasi perlu untuk ditingkatkan. Untuk setiap mata pelajaran/paket keahlian telah dikembangkan sepuluh modul kelompok kompetensi yang mengacu pada Standar Kompetensi Guru (SKG) dan indikator pencapaian kompetensi (IPK) yang ada di dalamnya. Demikian pula soal-soal Uji Kompetensi Guru (UKG) telah terbagi atas 10 kelompok kompetensi. Sehingga program Peningkatan Keprofesian Berkelanjutan yang ditujukan bagi guru berdasarkan hasil UKG diharapkan dapat menjawab kebutuhan guru dalam peningkatan kompetensinya.

Sasaran program strategis pencapaian target RPJMN tahun 2015–2019 antara lain adalah meningkatnya kompetensi guru dilihat dari *Subject Knowledge* dan *Pedagogical Knowledge* yang diharapkan akan berdampak pada kualitas hasil belajar siswa. Oleh karena itu, materi di dalam modul dirancang meliputi kompetensi pedagogi yang disatukan dengan kompetensi profesional yang didalamnya terintegrasi penguatan pendidikan karakter dan pengembangan soal keterampilan berpikir aras tinggi (HOTS) sehingga diharapkan dapat mendorong peserta diklat agar dapat langsung menerapkan kompetensi pedagoginya dalam proses pembelajaran sesuai dengan substansi materi yang diampunya. Disamping dalam bentuk *hard-copy*, modul ini dapat diperoleh juga dalam bentuk digital, sehingga guru dapat lebih mudah mengaksesnya kapan saja dan dimana saja meskipun tidak mengikuti diklat secara tatap muka.
Kepada semua pihak yang telah bekerja keras dalam penyusunan modul program Guru Pembelajar ini, kami sampaikan terima kasih yang sebesar-besarnya.

Cimahi, Juli 2018
Kepala PPPPTK BMTI,

Drs. Marthen Katte Patiung, M.M.
NIP. 19590416 198603 1 000

DAFTAR ISI

KATA SAMBUTAN i
KATA PENGANTAR ii
DAFTAR ISI iii
DAFTAR GAMBAR vii
DAFTAR TABEL x
LAMPIRAN x
PENDAHULUAN 1
A. Latar Belakang 1
B. Tujuan 2
C. Peta Kompetensi 2
Peta Kompetensi Pedagogi 2
Peta Kompetensi Profesional 1 3
Peta Kompetensi Profesional 2 3
D. Ruang Lingkup 4
E. Saran Cara Penggunaan Modul 4
KEGIATAN PEMBELAJARAN 1 5
A. Tujuan 5
B. Indikator Pencapaian Kompetensi 5
C. Uraian Materi 6
Grafik Fungsi f(x) = 1x2 12
Ilustrasi Limit Trigonometri 16
Ilustrasi Kontinuitas 20
Ilustrasi Fungsi Naik dan Fungsi Turun 31
Nilai Stasioner Fungsi 33
Luas Daerah Antar Kurva 45
Ilustrasi Benda Putar 47
D. Aktivitas Pembelajaran 51
Aktivitas 1: 51
Aktivitas 2: 52

Aktivitas 3: **53**
Aktivitas 4: **53**
Aktivitas 5: **54**
Aktivitas 6: **55**
E. Rangkuman 57
F. Tes Formatif 64
G. Kunci Jawaban 65
KEGIATAN PEMBELAJARAN 2 ..... **69**
A. Tujuan 69
B. Indikator Pencapaian Kompetensi 69
C. Uraian Materi 70
lingkaran yang berpusat di $C(h, k)$ **71**
kuasa lingkaran **75**
keluarga lingkaran **79**
keluarga lingkaran yang menyinggung sumbu koordinat **80**
berkas lingkaran **80**
garis singgung lingkaran **82**
garis singgung yang melalui titik di Luar lingkaran **84**
garis singgung lingkaran dengan kemiringan tertentu **86**
Parabola **88**
parabola bentuk baku **89**
Kosntruksi Geometri Parabola **90**
Kosntruksi Geometri Parabola terbuka ke kiri **91**
Aplikasi Parabola **92**
Antena Parabola **93**
Parabola terbuka ke kanan **95**
Parabola terbuka ke kiri/kanan **95**
Ellips **104**
Ellips bentuk baku **106**
Karakteristik Ellips **107**
Grafik Ellips **109**

Lengkung Ellips **111**
Konstruksi Mekanik Ellips **111**
grafik ellips 2 ..... **113**
grafik ellips 4 ..... **118**
Terapan Ellips **120**
Hiperbola 1 ..... **121**
Hiperbola 2 ..... **123**
Hiperbola 3 ..... **125**
Hiperbola 5 ..... **125**
Ilustrasi Vektor **127**
Ilustrasi Vektor pada Bidang datar R^2 ..... **127**
Cara Grafis Vektor **130**
Penjumlahan jajar Genjang **130**
Penjumlahan Banyak Vektor **131**
Pengurangan Vektor **131**
Perkalian Vektor **132**
Vektor di R^3 ..... **134**
Ilustrasi Matriks **141**
D. Aktivitas Pembelajaran 150
Aktivitas 1: **150**
Aktivitas 2: **150**
Aktivitas 3: **151**
Aktivitas 4: **152**
Tentukan persamaan garis singgung pada lingkaran $x^2+ y^2= 25$ di titik (3,-4)! **152**
Aktivitas5: **152**
Aktivitas 6: **153**
Aktivitas 7: **154**
Aktivitas 8: **154**
Aktivitas 12: **158**
Tentukan persamaan garis singgung dengan gradien 2 pada parabola $y^2 = 8x$! **158**
Aktivitas 13: **158**

Aktivitas 14: **159**
Aktivitas 15: **159**
Aktivitas 16: **160**
Aktivitas17: **161**
Aktivitas18: **162**
Aktivitas19: **164**
Aktivitas20: **165**
E. Rangkuman 172
F. Tes Formatif 177
G. Kunci Jawaban **178**
Grafik Persamaan Parabola **179**
PENUTUP **181**
UJI KOMPETENSI **182**
GLOSARIUM **186**
DAFTAR PUSTAKA **187**

DAFTAR GAMBAR

Gambar 1.1 Peta Kompetensi Pedagogi....2

Gambar 1.2 Peta Kompetensi Profesional 1....3

Gambar 1.2 Peta Kompetensi Profesional 2....3

Gambar 2.2.1 Augustin Louis Cauchy (1789-1857)....7

Gambar 2.2.2 Luasan berbentuk persegi....8

Gambar 2.2.3 Grafik Fungsi f(x) = $\frac{x^2-4}{x-2}$....9

Gambar 2.2.5 Grafik Fungsi f(x) = $\frac{1}{x^2}$....12

Gambar 2.2.6 Ilustrasi Limit Trigonometri....16

Gambar 2.2.7 Ilustrasi Kontinuitas....20

Gambar 2.2.8 Ilustrasi Fungsi Naik dan Fungsi Turun....31

Gambar 2.2.9 Nilai Stasioner Fungsi....33

Gambar 2.2.10 Luas Daerah Antar Kurva....45

Gambar 2.2.11 Ilustrasi Benda Putar....48

Gambar 2.3.1 lingkaran yang berpusat di C(h, k)....70

Gambar 2.3.2 kuasa lingkaran....74

Gambar 2.3.3 keluarga lingkaran....78

Gambar 2.3.4 keluarga lingkaran yang menyinggung sumbu koordinat....79

Gambar 2.3.5 berkas lingkaran....79

Gambar 2.3.6 garis singgung lingkaran....81

Gambar 2.3.7 garis singgung yang melalui titik di Luar lingkaran 83

Gambar 2.3.8 garis singgung lingkaran dengan kemiringan tertentu 85

Gambar 2.3.9 parabola 87

Gambar 2.3.10 parabola bentuk baku 88

Gambar 2.3.11 Kosntruksi Geometri Parabola 89

Gambar 2.3.12 Kosntruksi Geometri Parabola terbuka ke kiri 90

Gambar 2.3.13 Aplikasi Parabola 91

Gambar 2.3.14 Antena Parabola 92

Gambar 2.3.15 Parabola terbuka ke kanan 94

Gambar 2.3.16 Parabola terbuka ke kiri/kanan 94

Gambar 2.3.17 Ellips 103

Gambar 2.3.21 Ellips bentuk baku 105

Gambar 2.3.22 Karakteristik Ellips 106

Gambar 2.3.22 Grafik Ellips 108

Gambar 2.3.21 Lengkung Ellips 109

Gambar 2.3.22 Konstruksi Mekanik Ellips 110

Gambar 2.3.23 grafik ellips 2 112

Gambar 2.3.24 grafik ellips 4 117

Gambar 2.3.25 Terapan Ellips 119

Gambar 2.3.26 Hiperbola 1 120

Gambar 2.3.27 Hiperbola 2 122

Gambar 2.3.28 Hiperbola 3 123

Gambar 2.3.29 Hiperbola 5.....124

Gambar 2.3.30 Ilustrasi Vektor.....125

Gambar 2.3.31 Ilustrasi Vektor pada Bidang datar R^2 126

Gambar 2.3.32 Cara Grafis Vektor.....129

Gambar 2.3.33 Penjumlahan jajar Genjang.....129

Gambar 2.3.34 Penjumlahan Banyak Vektor.....129

Gambar 2.3.35 Pengurangan Vektor.....130

Gambar 2.3.36 Perkalian Vektor.....131

Gambar 2.3.37 Vektor di R^3.....133

Gambar 2.3.38 Ilustrasi Matriks.....140

Gambar 2.3.50Besaran Vektor.....256

Gambar 2.3.51 Modulus Vektor.....257

Gambar 2.3.52 Kesamaan Dua Vektor.....258

Gambar 2.3.53 Grafik Persamaan Parabola.....264

DAFTAR TABEL

Tabel 2.2.1 fungsi f(x) = $\frac{x^2-4}{x-2}$ 9

LAMPIRAN

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Pengembangan keprofesian berkelanjutan sebagai salah satu strategi pembinaan guru dan tenaga kependidikan diharapkan dapat menjamin guru dan tenaga kependidikan mampu secara terus menerus memelihara, meningkatkan, dan mengembangkan kompetensi sesuai dengan standar yang telah ditetapkan. Pelaksanaan kegiatan PKB akan mengurangi kesenjangan antara kompetensi yang dimiliki guru dan tenaga kependidikan dengan tuntutan profesional yang dipersyaratkan.

Guru wajib melaksanakan PKB baik secara mandiri maupun kelompok. Khusus untuk PKB dalam bentuk diklat dilakukan oleh lembaga pelatihan sesuai dengan jenis kegiatan dan kebutuhan guru. Penyelenggaraan diklat PKB dilaksanakan oleh PPPPTK dan LPPPTK KPTK atau penyedia layanan diklat lainnya. Pelaksanaan diklat tersebut memerlukan modul sebagai salah satu sumber belajar bagi peserta diklat. Modul merupakan bahan ajar yang dirancang untuk dapat dipelajari secara mandiri oleh peserta diklat berisi materi, metode, batasan-batasan, dan cara mengevaluasi yang disajikan secara sistematis dan menarik untuk mencapai tingkatan kompetensi yang diharapkan sesuai dengan tingkat kompleksitasnya.

Untuk mempersiapkan kegiatan PKB dalam bentuk diklat bagi guru-guru matematika diperlukan adanya modul yang tepat sesuai dengan tuntutan dari Permendinas no. 16 Tahun 2007 tentang Standar Kualifikasi Akademik dan Kompetensi Guru. Dari permendiknas tersebut, standar kompetensi guru yang dikembangkan dari kompetensi pedagogi memuat sepuluh kompetensi inti guru yang diantaranya memuat tentang penguasaan konsep pengembangan ektrakurikuler untuk aktualisasi diri peserta dan dari kompetensi profesional memuat tentang konsep kalkulus dan geometri analitik.

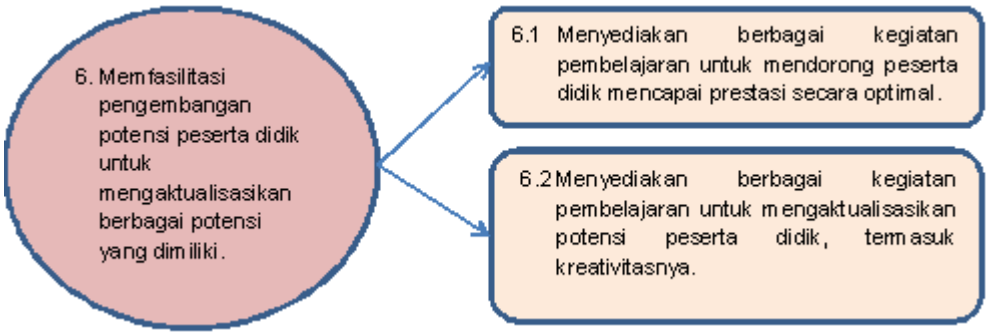
B. Tujuan

Tujuan penyusunan modul ini adalah agar peserta diklat PKB dapat mengembangkan ektrakurikuler untuk aktualisasi diri peserta serta menggunakan konsep kalkulus dan geometri analitik melalui kegiatan diskusi dengan percaya diri.

C. Peta Kompetensi

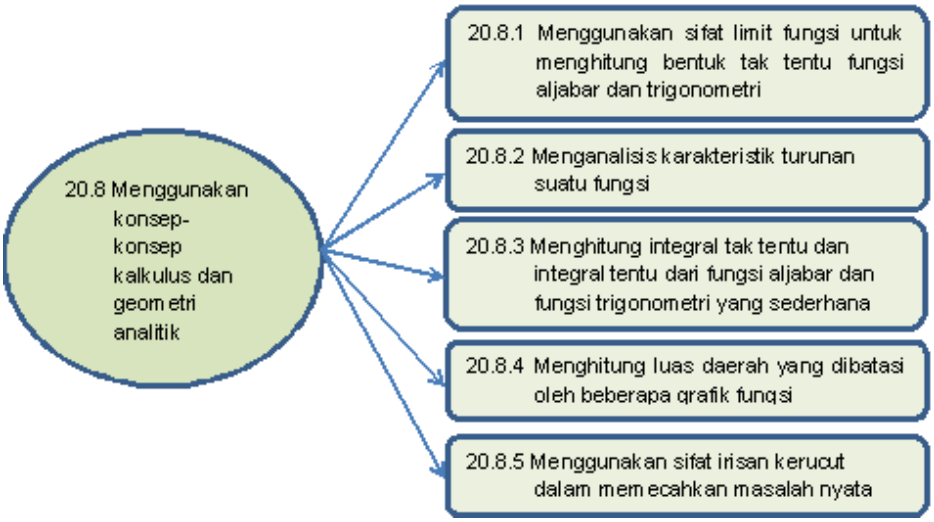
Pada Gambar 1 berikut dicantumkan daftar kompetensi pedagogi sesuai dengan Permendiknas Nomor 16 Tahun 2007 tentang Standar Kualifikasi Akademik dan Kompetensi Guru yang akan ditingkatkan melalui proses belajar dengan menggunakan modul ini.

Gambar 1.1 **Peta Kompetensi Pedagogi**



Pada Gambar 1.2 dan Gambar 1.3 berikut dicantumkan daftar kompetensi profesional sesuai dengan Permendiknas Nomor 16 Tahun 2007 tentang Standar Kualifikasi Akademik dan Kompetensi Guru yang akan ditingkatkan melalui proses belajar dengan menggunakan modul ini.

Gambar 1.2 **Peta Kompetensi Profesional 1**



Gambar 1.3 **Peta Kompetensi Profesional 2**

D. Ruang Lingkup

Ruang lingkup dari modul ini berisikan kegiatan belajar untuk pengembangan kompetensi pedagogi dan pengembangan kompetensi profesional. Secara rinci ruang lingkup dari modul ini adalah sebagai berikut.

Tabel 1.1 Ruang Lingkup Isi Modul

No	Kegiatan Belajar	Uraian Materi
1	Kegiatan Belajar 2	Berisikan materi tentang Kalkulus, yang meliputi: Limit Fungsi, Turunan, dan Integral
2	Kegiatan Belajar 3	Beriskan materi tentang Geometri Analitik, yang meliputi: Irisan Kerucut, Vektor, dan Matriks

E. Saran Cara Penggunaan Modul

Untuk mempelajari modul ini, hal-hal yang perlu peserta diklat lakukan adalah sebagai berikut:

1. Baca dan pelajari semua materi yang disajikan dalam modul ini,
2. Kerjakan soal-soal tes formatif dan cocokkan jawabannya dengan Kunci Jawaban yang ada.
3. Jika ada bagian yang belum dipahami, diskusikanlah dengan rekan belajar Anda. Jika masih menemui kesulitan, mintalah petunjuk instruktor/widyaiswara.
4. Untuk mengukur tingkat penguasaan materi Kerjakan soal-soal Uji Kompetensi di akhir bab dalam modul ini.

BAB II

KEGIATAN PEMBELAJARAN 1

Kegiatan Belajar 1: Kalkulus

A. Tujuan

Tujuan dari penulisan modul ini adalah:

1. Melalui simulasi peserta diklat dapat menyediakan berbagai kegiatan pembelajaran untuk mendorong peserta didik mencapai prestasi secara optimal dengan penuh tanggungjawab.
2. Melalui diskusi kelompok peserta diklat dapat menggunakan sifat limit fungsi untuk menghitung bentuk tak tentu fungsi aljabar dan trigonometri dengan tepat.
3. Melalui membacapeserta diklat dapat menganalisis karakteristik turunan suatu fungsi dengan cermat.
4. Melalui eksperimenpeserta diklat dapat menghitung integral tak tentu dan integral tentu dari fungsi aljabar dan fungsi trigonometri yang sederhana dengan percaya diri.
5. Melalui kegiatan praktek peserta diklat dapat menghitung luas daerah yang dibatasi oleh beberapa grafik fungsi dengan teliti

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

Indikator pencapaian kompetensi yang harus dikuasai setelah mengikuti kegiatan belajar ini adalah, peserta diklat dapat:

1. Menggunakan sifat limit fungsi untuk menghitung bentuk tak tentu fungsi aljabar dan trigonometri
2. Menganalisis karakteristik turunan suatu fungsi
3. Menentukan integral tak tentu dan integral tentu dari fungsi aljabar dan fungsi trigonometri yang sederhana
4. Menghitung integral tak tentu dan integral tentu dari fungsi aljabar dan fungsi trigonometri yang sederhana
5. Menerapkan integral tentu dalam menyelesaikan permasalahan nyata

C. Uraian Materi

Kalkulus merupakan sebuah cabang ilmu dari Matematika yang sangat dibutuhkan untuk pengembangan ilmu pengetahuan terutama bagi fisika atau keteknikan. Dalam aspek fisika, kalkulus berperan dalam konsep kecepatan dan percepatan serta usaha.

Kalkulus (Bahasa Latin: *calculus*, artinya "batu kecil", untuk menghitung) adalah cabang ilmu matematika yang mencakup limit,turunan, integral, dan deret takterhingga. Kalkulus adalah ilmu yang mempelajari perubahan, sebagaimana geometri yang mempelajari bentuk dan aljabar yang mempelajari operasi dan penerapannya untuk memecahkan persamaan. Kalkulus memiliki aplikasi yang luas dalam bidang-bidang sains, ekonomi, dan teknik; serta dapat memecahkan berbagai masalah yang tidak dapat dipecahkan dengan aljabar elementer.

Pada kegiatan belajar ini akan dibahas tiga pokok bahasan utama dari kalkulus yakni limit fungsi, diferensial fungsi dan integral fungsi. Sebenarnya ada dua cabang dalam kalkulus itu sendiri, yakni kalkulus diferensial dan kalkulus integral yang saling berhubungan melalui teorema dasar kalkulus. Contoh cabang kalkulus yang lain adalah kalkulus proposisional, kalkulus variasi, kalkulus lambda, dan kalkulus proses. Pelajaran kalkulus adalah pintu gerbang menuju pelajaran matematika lainnya yang lebih tinggi, yang khusus mempelajari fungsi dan limit, yang secara umum dinamakan analisis matematika.

Jika diperhatikan inti dari pelajaran kalkulus adalah memakai dan menentukan limit suatu fungsi. Bahkan secara ekstrim kalkulus dapat didefinisikan sebagai pengkajian tentang limit. Oleh karena itu pemahaman tentang konsep dan macam-macam fungsi diberbagai cabang ilmu pengetahuan serta sifat-sifat dan operasi limit suatu fungsi merupakan syarat mutlak untuk memahami kalkulus diferensial dan kalkulus integral

1. Limit Fungsi Aljabar

a. Pengertian Limit Fungsi:

Untuk memberi motivasi agar siswa lebih tertarik untuk mempelajari kalkulus, maka perlu diceriterakan sejarah dari Augustin Louis Cauchy

(1789 – 1857), sesorang yang sangat besar jasanya dalam pengembangan kalulus. Menyangkut definisi limit yang kita kenal sekarang ini adalah salah satu dari hasil yang andil dari Cauchy.

Gambar 2.2.1	Augustin Louis Cauchy (1789-1857)

Augustin Louis Cauchy lahir di Paris, dan mengenyam pendidikan di Ecole Polytechnique. Karena kesehatannya yang buruk maka dia dinasehati untuk memusatkan pikirannya pada matematika. Salah satu penemuannya adalah kalkulus. Secara historis kalkulus telah ditemukan pada abad ke tujuh belas, namun demikian sampai pada masa Cauchy dirasa bahwa landasan kalkulus dirasa belum mantap. Berkat upaya yang dilakukan oleh Cauchy dan para sahabatnya seperti Gauss, Abel dan Bolzano maka dapat ditentukan ketelitian baku.Kepada Cauchy kita patut berterima kasih atas andilnya meletakkan landasan yang kokoh untuk pengembangan kalkulus yakni definisi konsep limit secara formal yang fundamental.

Untuk dapat memahami konsep limit dengan baik, perlu kiranya kita renungkan suatu paradox yang dikemukan oleh Zeno (495 – 435 SM), sebagai berikut.

Berdasar mitologi Yunani, diceriterakan pahlawan Perang Troya yang terkenal,yakni Achilles. Jago lari ini berlomba lari dengan seekor kura-kura, yang telah menempati posisi separo dari jarak yang meski ditempuh oleh Achilles. Katakan pada posisi start Achilles 0 km dari titik start, maka kura-kura berada pada posisi 1 km di depan, dan dengan kecepatan Achilles dua kali kecepatan kura-kura.

Begitu Achilles sampai 1 km, maka kura-kura telah sampai pada posisi 1,5 km, dan pada saat Achilles mencapai 1,5 km, maka kura-kura telah sampai pada posisi 1,75 km, begitu Achilles sampai di posisi 1,75 km, kura-kura telah sampai pada posisi 1,875 km. Pertanyaannya kapan Achilles dapat menyusul kura-kura?. Kalau kegiatan ini diteruskan secara terus menerus maka Achilles bagaimanapun juga tidak akan pernah dapat menyusul kura-kura!. Aneh bukan?. Namun semua orang tahu bahwa dalam dunia nyata Achilles pasti mampu menyusul kura-kura. Paradox yang diketengahkan oleh Zeno ini, dapat dijadikan ladaasan pemikiran untuk memahami

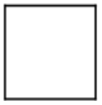
konsep tentang limit fungsi, yang menjadi landasan dari kalkulus baik kalkulus diferensial, maupun kalkulus integral.

b. Memahami Limit Fungsi Secara Intuitif

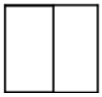
1) Menggunakan persegi yang sisinya a

Kegiatan awal yang dapat digunakan untuk mengawali memahami konsep limit, adalah sebagai berikut.
Pandaanglah suatu luasan berbentuk persegi yang sisinya 1 satuan

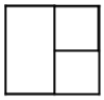
Gambar 2.2.2 Luasan berbentuk persegi



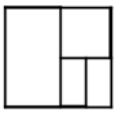
Suatu persegi yang sisinya 1 satuan, sehingga luasnya 1 satuan luas.



Luas bagian persegi yang diarsir tebal ½ satuan
Perlihatkan arsirannya !



Luas bagian persegi yang diarsir tebal ½ + ¼ satuan



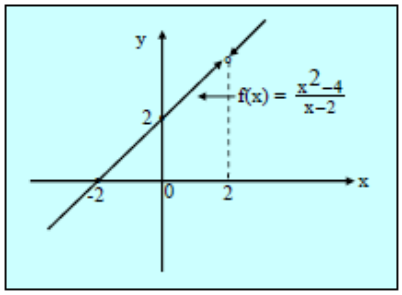
Luas bagian persegi yang diarsir tebal ½ + ¼ + $\frac{1}{8}$satuan

Jika kegiatan ini kita lakukan terus-menerus maka jumlah luas bagian persegi yang diarsir tebal adalah mendekati 1 satuan luas. Jadi hasil penjumlahan dari ½ + ¼ + $\frac{1}{8}$ + $\frac{1}{16}$ + $\frac{1}{32}$ + ... adalah **mendekati 1**. Pengertian limit secara intuitif adalah berangkat dari pengertian **mendekati** di atas.

2) Limit Fungsi secara Intuitif dengan Ilustrasi Grafik

Perhatikan contoh di bawah ini

Gambar 2.2.3 Grafik Fungsi f(x) = $\frac{x^2-4}{x-2}$



Pandaanglah fungsi f(x) = $\frac{x^2-4}{x-2}$ dengan domain Df = {x | x ∈ R, x ≠2} untuk x = 2, jika dicari nilai fungsi f(2) = $\frac{0}{0}$= tidak tentu. Kita cari nilai-nilai f(x) untuk x mendekati 2. Kita dapat memperhatikan nilai fungsi f(x) di sekitar x = 2 seperti tampak pada tabel beikut.

Tabel 2.2.4 fungsi f(x) = $\frac{x^2-4}{x-2}$

X	1, 90	1,99	1,999	1,999	...	2	...	2,001	2,01	2,1
f (x)	3, 90	3,99	3,999	3,999	...		...	4,001	4,01	4,1

Dari tabel di atas dapat disimpulkan bahwa untuk x mendekati 2 baik dari kiri maupun dari kanan, nilai fungsi tersebut makin mendekati 4, dan dari sini dikatakan bahwa limit f(x) untuk x mendekati 2 sama dengan 4, dan ditulis

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$$

Dari pengertian inilah yang disebut pengertian limit secara intuitif, sehingga :

Definisi limit secara intuitif, bahwa yang dimaksud dengan $\lim_{x\to c} f(x) = L$ adalah bilamana x dekat tetapi berlainan dari c, maka f(x) dekat ke L.

3) Limit Fungsi Secara Formal

Secara matematis dapat dimaklumi bahwa banyak yang berkeberatan dengan definisi limit secara intuitif di atas, yaitu penggunaan istilah "dekat". Apa sebenarnya makna dekat itu ?. Seberapa dekat itu dapat dikatakan "dekat" ?. Untuk mengatasi masalah di atas Augustine Louis Cauchy berhasil menyusun definisi tentang limit seperti di bawah ini yang masih kita gunakan sampai sekarang. Pengertian limit secara intuitif di atas jika diberi definisi formal adalah sebagai berikut:

Definisi :

Dikatakan $\lim_{x\to c} f(x) = L$, adalah bahwa untuk setiap $\varepsilon > 0$ yang diberikan berapapun kecilya, terdapat $\delta > 0$ yang berpadanan sedemikian hingga $|f(x) - L| < \varepsilon$ untuk setiap $0 < |x - c| < \delta$.

Dengan menggunakan definisi limit di atas dapat dibuktikan teorema-teorema pokok tentang limit suatu fungsi sebagai berikut :

1. $\lim_{x\to c} k = k$, jika k suatu konstanta.
2. $\lim_{x\to c} (ax + b) = ac + b$
3. $\lim_{x\to c} k\,f(x) = k \lim_{x\to c} f(x)$
4. $\lim_{x\to c} f(x) \pm g(x) = \lim_{x\to c} f(x) \pm \lim_{x\to c} g(x)$
5. $\lim_{x\to c} f(x).g(x) = \lim_{x\to c} f(x). \lim_{x\to c} g(x)$
6. Hukum substitusi :
   Jika $\lim_{x\to c} g(x) = L$ dan $\lim_{x\to c} f(x) = f(L)$, maka $\lim_{x\to c} f(g(x)) = f(L)$
7. $\lim_{x\to c} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{L}$ jika $\lim_{x\to c} g(x) = L$ dan $L \neq 0$.
8. $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}$, jika $\lim_{x\to c} g(x) \neq 0$.
9. Teorema Apit :
   Misalkan $f(x) \le g(x) \le h(x)$ pada setiap interval yang memuat c dan dipenuhi :
   $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} h(x) = L$ maka $\lim_{x\to c} g(x) = L$.

Bukti-bukti dari teorema-teorema limit utama di atas di antaranya adalah

Buktikan $\lim_{x\to c} k = k$

Bukti :

Untuk setiap bilangan positif $\varepsilon > 0$ berapapun kecilnya akan didapat $\delta > 0$ sedemikian untuk setiap x pada I x-cI < δ dipenuhi Ik-kI < ε. Dari Ik-KI = 0. Maka berapapun nilai δ>0 yang diambil yang menyebabkan Ix-cI< δ akan berakibat Ik-kI < ε.

2. Buktikan $\lim_{x \to c} (ax + b) = ac + b$.

Bukti :

Untuk membuktikan teorema ini, berarti jika diberikan suatu $\varepsilon > 0$ betapapun kecilnya, akan ditemukan $\delta > 0$ sedemikian hingga $0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |(ax + b) - (ac + b)| < \varepsilon$.

Sekarang dari $|(ax + b) - (ac + b)| = |ax - ac| = |a(x - x)| \leq |a| |x - c|$.

Kelihatan bahwa $\delta = \frac{\varepsilon}{|a|}$ akan memenuhi persyaratan di atas.

Sehingga jika diberikan $\varepsilon > 0$ betapapun kecilnya dan dipilih $\delta = \frac{\varepsilon}{|a|}$ maka

Contoh

Tentukan nilai $\lim_{x \to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$

Penyelesaian :

Cara i

$$\lim_{x \to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} = \lim_{x \to 4} \frac{(\sqrt{x})^2 - 2^2}{\sqrt{4}-2}$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}-2} \quad \text{karena } x \neq 4$$

$$= \lim_{x \to 4} (\sqrt{x}+2)$$

$$= \sqrt{4} + 2 = 4$$

Cara ii: misalkan $\sqrt{x}$ = y $\rightarrow$x = y^2

untuk x $\rightarrow$4 maka y $\rightarrow$ 2, sehingga soal di atas menjadi

$$\lim_{x \to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} = \lim_{y \to 2} \frac{y^2-4}{y-2}$$

$$= \lim_{y \to 2} \frac{(y+2)(y-2)}{(y-2)}$$

$$= 2 + 2 = 4$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}=\lim_{y\to 2}\frac{y^2-4}{y-2}$$
$$=\lim_{y\to 2}\frac{(y+2)(y-2)}{(y-2)}$$
$$=2+2=4$$

Tentukan nilai dari $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2x}}{x-2}$

Penyelesaian :

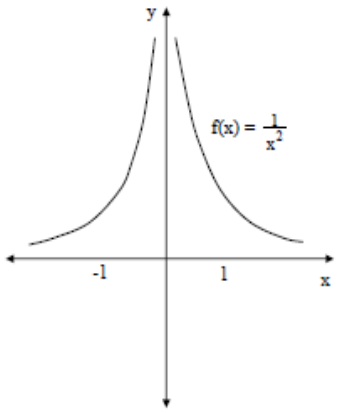
$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2x}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{2+x}-\sqrt{2x})}{(x-2)}\cdot\frac{(\sqrt{2+x}+\sqrt{2x}}{(\sqrt{2+x}+\sqrt{2x})}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{(2+x)-(2x)}{(x-2)(\sqrt{2+x}+\sqrt{2x})}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{2-x}{(x-2)(\sqrt{2+x}+\sqrt{2x})}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{-1}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2x}}$$
$$=\frac{-1}{\sqrt{4}+\sqrt{4}}=-\frac{1}{4}$$

4) Pengertian Limit di Tak Hingga.

Gambar 2.2.5 **Grafik Fungsi f(x) = $\frac{1}{x^2}$**

Perhatikan fungsi $f(x)=\frac{1}{x^2}$, $x\neq 0$ yang domainnya semua bilangan real yang tidak nol. Jika kita cari nilai-nilai fungsi dekat dengan 0.

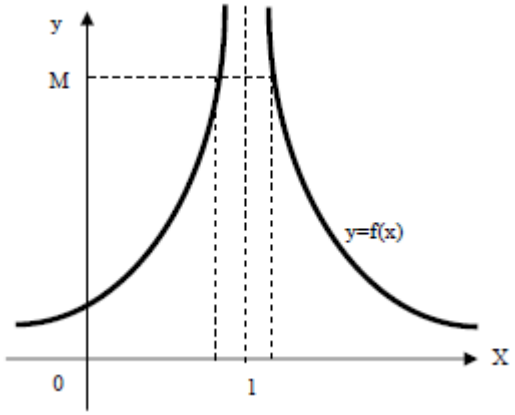
x	$\frac{1}{x^2}$
1	1
0,1	100
0,01	10.000
0,001	1000 10^6
0,0001	10.000 10^8
↓	↓
0	besar sekali disebut tak hingga
↑	↑
-0,0001	10.000 10^8
-0,001	1000 10^6
-0,01	100 10.000
-0,1	10 100
-1	1



Apabila x suatu bilangan baik positip maupun negatif yang sangat kecil maka nilai $\frac{1}{x^2}$ menjadi sangat besar, semakin dekat x dengan nol, maka nilai $\frac{1}{x^2}$ menjadi semakin besar sekali, sehingga dikatakan $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$.

Definisi :

Fungsi f(x) mendekati tak hingga untuk $x \to c$ apabila untuk setiap bilangan positip M betapapun besarnya, adalah mungkin menemukan bilangan $\delta > 0$ sedemikian hingga untuk setiap x selain c jika dipenuhi $|x - c| < \delta$ akan berakibat $|f(x)| > M$ dan ditulis $\lim_{x\to c} f(x) = \infty$



Contoh 1 :
Buktikan bahwa $\lim_{x\to 1} \frac{1}{(1-x)^2} = +\infty$
Bukti :
Untuk membuktikan itu berarti untuk setiap $M > 0$ yang diberikan betapapun besarnya adalah mungkin menemukan $\delta > 0$ sedemikian hingga untuk setiap x yang memenuhi $|x - 1| < \delta$ akan diperoleh $\frac{1}{(1-x)^2} > M$.

Dari $\frac{1}{(1-x)^2} > M$. berarti $(1-x)^2 < \frac{1}{M}$.

Sehingga $|1-x| < \frac{1}{\sqrt{M}}$.

Jika diambil $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$, berarti untuk setiap x pada $|x-1| < \frac{1}{\sqrt{M}}$ akan dipenuhi

$\Leftrightarrow (x-1)^2 < \frac{1}{M}$

$\Leftrightarrow (1-x)^2 < \frac{1}{M}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{(1-x)^2} > M.$

Dari pertidaksamaan terakhir ini menunjukkan bahwa $\lim_{x\to 1} \frac{1}{(1-x)^2} = +\infty$

Contoh 2.

Tentukan $\lim_{x\to 1} \frac{x}{x-1}$

Jawab : Secara intuitif jika x dekat dengan 1 maka x – 1 akan mendekati 0, sehingga dapat difahami (secara intuitif) bila $\lim_{x\to 1} \frac{x}{x-1} = \infty$

Dan jika ingin dibuktikan secara formal berarti untuk setiap bilangan $M > 0$ betapapun besarnya, adalah mungkin ditemukan $\delta > 0$, sedemikian hingga untuk setiap x pada $|x-1| < \delta$ akan dipenuhi $\left|\frac{x}{x-1}\right| > M.$

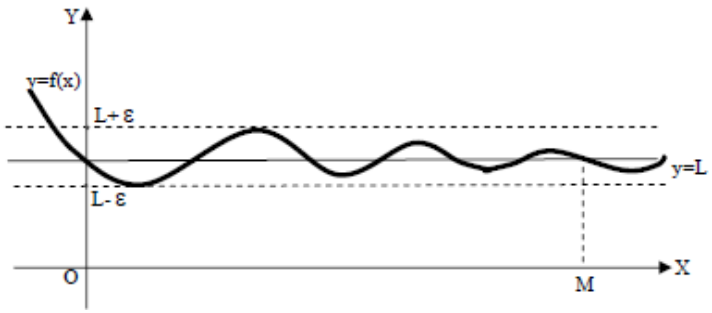
Sedangkan limit fungsi untuk x yang bernilai besar dapat didefinisikan sebagai berikut :

Definisi :

Jika f(x) terdefinisi untuk x yang bernilai besar, kita katakan bahwa f(x) mendekati L sebagai limit untuk x mendekati tak hingga, dan ditulis :

$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$, bahwa apabila diberikan $\varepsilon > 0$ maka akan ditemukan suatu bilangan M sedemikian hingga dipenuhi $|f(x) - L| < \varepsilon$ apabila $x > M$.

Ilustrasi geometris dari pengertian di atas adalah sebagai berikut :



Limit Mendekati Tak Berhingga untuk Fungsi Polinom

$\lim_{x\to\infty} \frac{ax^n + bx^{n-1} + \ldots}{cx^m + dx^{m-1} + \ldots}$ **= p , dimana:**

p = $\frac{a}{c}$ **, jika m = n**

p = 0, jika n < m

p = ∞, jika n > m

Selain bentuk fungsi polinom permasalahan limit tak hingga sering ditemukan pula untuk fungsi akar

Contoh

Tentukan $\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 + 3x})$

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+3x}) = \lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+3x})(\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+3x})}{(\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+3x})}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+2x)-(x^2+3x)}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+3x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{-x}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+3x}}$$

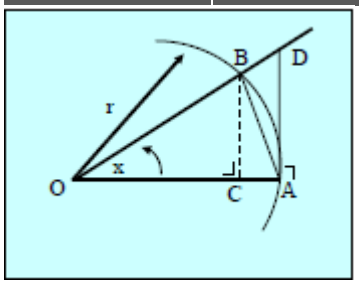
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1+\frac{3}{x}}}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1+0}}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

5) Limit Fungsi Trigonometri

Gambar 2.2.6 **Ilustrasi Limit Trigonometri**



Sehingga luas sektor $\odot$ AOB $= \frac{x}{2\pi}.\pi r^2 = \frac{1}{2}r^2x$

Dari bangun di atas diperoleh :

Luas Δ AOB < luas juring AOB < luas Δ AOD

$\frac{1}{2}$. OA . BC < $\frac{1}{2}r^2x$ < $\frac{1}{2}$. OA . AD

$\frac{1}{2}$. r . r sin x < $\frac{1}{2}r^2x$ < $\frac{1}{2}$. r . r tan x

$\frac{1}{2}r^2 \sin x < \frac{1}{2}r^2x < \frac{1}{2}r^2 \tan x$

$\sin x < x < \tan x$ ..... (i)

Dari (i) diperoleh :

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

$$\lim_{x\to 0} 1 \le \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} \le \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x}$$

$$1 \le \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} \le \frac{1}{1} = 1$$

Jadi $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$

Dari sini dapat dikembangkan :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{x}{\sin x}} = \frac{1}{1} = 1$$

Dan untuk $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x.\cos x}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} . \frac{1}{\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} . \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x}$$

$$= 1.1 = 1$$

Demikian juga dengan mudah dapat ditunjukkan bahwa $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\tan x} = 1$

Rumus Limit

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	3. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$
2. $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$	4. $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\tan x} = 1$

Contoh

Hitunglah :

a. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x}$ b. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{5x}$ c. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan 3x}{\sin 5x}$

Penyelesaian :

a. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2}\left(\frac{\sin x}{x}\right)$

$= \frac{1}{2}.1 = \frac{1}{2}$

b. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{2x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right).\frac{3}{5}$

$= 1.\frac{3}{5} = \frac{3}{5}$

c. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan 3x}{\sin 5x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan 3x}{3x}\right)\left(\frac{5x}{\sin 5x}\right).\frac{3}{5}$

$= 1.1.\frac{3}{5}$

$= \frac{3}{5}.$

6) Limit Fungsi Eksponensial

Nilai limit ini disebut bilangan e atau bilangan Euler (diambil nama sang penemu yaitu Leonard Euler matematikawan Austria 1707 – 1783).

Logaritma yang mengambil e sebagai bilangan pokok disebut logaritma naturalis atau logaritma Napier, dan ditulis dengan notasi "ln", sehingga $\ln x = {}^{e}\log x$.

Dari $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$, maka ${}^{a}\log\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right) = {}^{a}\log e$

$$\lim_{x\to 0} {}^{a}\log(1+x)^{\frac{1}{x}} = {}^{a}\log e$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{{}^{a}\log(1+x)}{x} = \frac{\ln e}{\ln a}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{{}^{a}\log(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a} \quad \ldots\ldots\ldots (i)$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e$$

Limit ini dapat dikembangkan untuk setiap $x \in R$ dipenuhi

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e}$$

Jika disubstitusikan $u = \frac{1}{x}$ maka diperoleh rumus

$$\boxed{\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e}$$

Contoh tentukan $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x+3}$

Jawab : $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x+3} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}\cdot\left(1+\frac{2}{x}\right)^{3}$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}\cdot 2}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{3}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right)^{2}\cdot\left(1+\frac{2}{x}\right)^{3}$$

$$= e^{2}\cdot(1+0)^{3}$$

$$= e^{2}.$$

Logaritma yang mengambil e sebagai bilangan pokok disebut logaritma naturalis atau logaritma Napier, dan ditulis dengan notasi "ln", sehingga $\ln x = {}^{e}\log x$.

Dari $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$, maka ${}^{a}\log\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right) = {}^{a}\log e$

$$\lim_{x\to 0} {}^{a}\log(1+x)^{\frac{1}{x}} = {}^{a}\log e$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{{}^{a}\log(1+x)}{x} = \frac{\ln e}{\ln a}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{{}^{a}\log(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a} \quad \text{..... (i)}$$

Misalkan ${}^{a}\log(1+x) = y$

$1 + x = a^{y} \rightarrow x = a^{y} - 1$

Untuk $x \rightarrow 0$, maka $a^{y} \rightarrow 1$ yang berarti $y \rightarrow 0$, sehingga persamaan (i)

$$\lim_{x\to 0} \frac{y}{a^{y}-1} = \frac{1}{\ln a}$$

Sehingga : $\lim_{y\to 0} \frac{a^{y}-1}{y} = \ln a$

Atau secara umum : $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{a^{x}-1}{x} = \ln a}$

Jika disubstitusikan a dengan e

$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x}-1}{x} = \ln e$ atau $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{e^{x}-1}{x} = 1}$

Contoh : Tentukan $\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$

Jawab : $\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax}-e^{bx}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{ax}-1-e^{bx}+1}{x}$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{a^{ax}-1}{x} - \frac{e^{bx}-1}{x}\right)$$

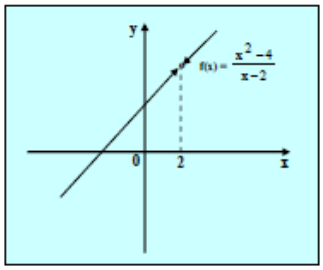
$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{ax}-1}{ax}.a - \frac{e^{bx}-1}{bx}.b\right)$$

$$= 1 \,.\, a - 1 \,.\, b$$

$$= a - b$$

7) Kontiunitas

Gambar 2.2.7	Ilustrasi Kontinuitas



Perhatikan fungsi pada bilangan real $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ seperti pada grafik di samping.

Untuk $x = 2$ diperoleh $f(2) = \frac{0}{0}$ (tak tentu)

sehingga grafiknya terputus di $x = 2$ dalam hal ini dikatakan f(x) diskontinu di $x = 2$.

Sedangkan untuk interval {x|x < 2, x ∈R} dan interval {x|x > 2, x ∈R} grafiknya berkesinambungan, dalam hal ini dikatakan f(x) kontinu di x ≠ 2.

Secara formal suatu fungsi dikatakan kontinu di $x = c$, jika dipenuhi :

a. $\lim_{x\to c} f(x)$ ada

b. $f(c)$ ada

c. $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$

Jika pada suatu fungsi f(x) diskontinu di $x = c$, maka dapat dibuat sedemikian hingga $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$, maka dikatakan diskontuinitas di $x = c$ ini dapat dihapuskan.

Contoh :

Tentukan diskontuinitas fungsi pada bilangan real $f(x) = \frac{x^3-8}{x^2-4}$.

Jawab : fungsi rasional di atas akan diskontinu jika penyebutnya nol atau

$$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-2) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = -2 \text{ atau } x = 2$$

Sehingga f(x) diskontinu di $x = -2$ atau $x = 2$.

Selanjutnya untuk $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x+2)(x-2)}$

$$= \frac{12}{4} = 3$$

Diskontinu di x = 2 dapat dihapuskan dengan menetapkan definisi f(2) = 3.
Selanjutnya untuk x = -2 diperoleh

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4} = \lim_{x \to -2} \frac{x^2 + 2x + 4}{x + 2}$$

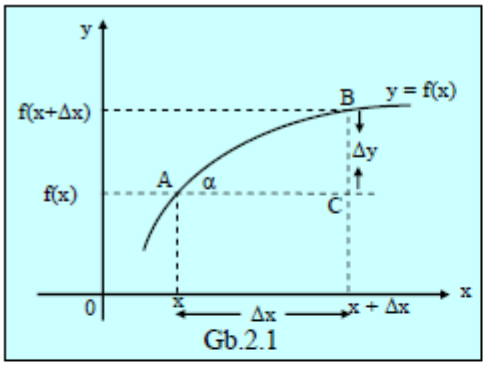
$$= \frac{\to 4}{\to 0} = \infty, \text{ sedangkan } f(-2) = \frac{(-2)^3 - 8}{(-2)^2 - 4} = \frac{-16}{0} \text{ tidak terdefinisi.}$$

Sehingga diskontinu di x = -2 tidak dapat dihapuskan.

2. Turunan Suatu Fungsi

a. Turunan Fungsi Aljabar

Studi tentang garis singgung dan penentuan kecepatan benda bergerak yang dirintis oleh Archimedes (287 – 212 SM), Kepler (1571 – 1630), Galileo (1564 – 1642), Newton (1642 – 1727) dan Leibniz (1646 – 1716) dapat dipandang sebagai peletak dasar dari kalkulus diferensial ini. Namun para ahli berpendapat bahwa Newton dan Leibniz-lah dua orang yang paling banyak andilnya pada pertumbuhan kalkulus. Konsep dasar dari turunan suatu fungsi adalah laju perubahan nilai fungsi.



Gb.2.1

Perhatikan fungsi y = f(x) pada domain (x, x + Δx) nilai fungsi berubah dari f(x) pada x sampai dengan f(x + Δx) pada x + Δx.

y + Δy = f(x + Δx)

y = f(x)

Δy = f(x + Δx) – f(x)

Δy : disebut diferensi antara f(x + Δx) dengan f(x)

Δx : disebut diferensi x

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ disebut hasil basi diferensi.

Jika B bergerak sepanjang kurva y = f(x) mendekati A, maka diperoleh limit :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Nilai limit ini disebut derivatif f (turunan, laju perubahan nilai fungsi, hasil bagi diferensial) dari y = f(x), dan biasa ditulis dengan notasi $\frac{dy}{dx}$ atau y'. (Notasi $\frac{dy}{dx}$ dan dibaca "dy dx" inilah yang kita kenal dengan istilah notasi Leibniz)

Jadi : $\frac{dy}{dx} = y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

Secara geometris, kita lihat bahwa perbandingan diferensi $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ adalah gradien tali busur AB = tan α. Jika $\Delta x \to 0$ maka tali busur AB akan menjadi garis singgung di A sehingga :

$\frac{dy}{dx} = y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ adalah gradien garis singgung pada kurva y = f(x) di (x, f(x)).

Contoh 1

Diketahui kurva dengan persamaan $y = x^2 + 2x$.

Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dan persamaan garis singgung kurva di x = 1.

Jawab :

$$y = x^2 + 2x$$

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 + 2(x + \Delta x)$$

$$= x^2 + 2x.\Delta x + (\Delta x)^2 + 2x + 2\Delta x$$

$$\Delta y = (2x + 2)\,\Delta x + \Delta x^2$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(2x+2)\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \frac{(2x+2) + \Delta x^2}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2x+2)\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} ((2x+2) + \Delta x)$$

$$= 2x + 2$$

Untuk $x = 1 \rightarrow$ gradien garis singgung $m = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=1} = 2.1 + 2 = 4$

$x = 1 \rightarrow y = 1^2 + 2.1 = 3 \rightarrow$ titik singgung (1, 3).

Sehingga persamaan garis singgungnya :

$$y - 3 = 4(x - 1)$$

$$y = 4x - 1$$

Rumus-rumus turunan (derivatif) fungsi y = f(x).

1) Fungsi konstanta $y = f(x) = c$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x) + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c - c}{\Delta x} = 0$$

$$\boxed{f(x) = c \rightarrow f'(x) = 0}$$

2) Derivatif $f(x) = x^n$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x^n + nx^{n-1}.\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}(\Delta x)^2 + ... + (\Delta x)^n) - x^n}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}.\Delta x + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^{n-3}.\Delta x^2 + ... + (\Delta x)^{n-1} \right)$$

$= nx^{n-1}$.

$$\boxed{f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}}$$

3) Jika c suatu konstanta dan $y = c\,f(x)$, maka

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{cf(x+\Delta x) - cf(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right.$$

$$= c.f'(x) = c.\frac{dy}{dx}$$

Contoh 2 : $y = 4x^5 \Rightarrow y' = 4.\frac{dy}{dx}(x^5) = y.5x^4 = 20x^4$.

4) Jika $u = f(x)$ dan $v = g(x)$, maka turunan fungsi $y = f(x) \pm g(x)$ dapat dicari sebagai berikut :

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x)-(f(x)+g(x))}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} + \frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right.$$
$$= f'(x) + g'(x).$$

Dengan jalan yang sama dapat ditunjukkan bahwa

$y = f(x) - g(x) \rightarrow y' = f'(x) - g'(x)$

Jadi :

$$\boxed{y = f(x) \pm g(x) \Rightarrow y' = f'(x) \pm g'(x)}$$

5) Jika $u = f(x)$ dan $v = g(x)$ dan $y = u.v$ maka

$y = u.v = f(x) \,.\, g(x)$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x).g(x+\Delta x)-f(x).g(x)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x).g(x+\Delta x)-f(x).g(x+\Delta x)+f(x).g(x+\Delta x)-f(x).g(x)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\left(\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right)g(x+\Delta x)+f(x)\left(\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right)\right.$$
$$= f'(x).g(x) + f(x) \,.\, g'(x)$$
$$= u'v + uv'$$

Jadi $y = uv \Rightarrow y' = u'v + uv'$

6) Jika $u = f(x)$ dan $v = g(x)$, sedemikian hingga $g(x) \neq 0$ pada intervalnya dan $y = \frac{u}{v} = \frac{f(x)}{g(x)}$, maka

$$y' = \lim_{\Delta x \to x} \frac{\left(\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}\right)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to x} \frac{f(x+\Delta x).g(x)-f(x).g(x+\Delta x)}{\Delta x.g(x+\Delta x).g(x)}$$
$$y' = \lim_{\Delta x \to x} \frac{f(x+\Delta x).g(x)-f(x).g(x)-f(x).g(x+\Delta x)+f(x).g(x)}{\Delta x.g(x+\Delta x).g(x)}$$
$$= \lim_{\Delta x \to x} \frac{\left(\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right).g(x) - f(x)\left(\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right.}{g(x+\Delta x).g(x)}$$
$$= \frac{f'(x).g(x)-f(x).g'(x)}{(g(x))^2} = \frac{u'v-uv'}{v^2}$$

Jadi $y = \frac{u}{v} \Rightarrow y' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$

Contoh 3

Tentukan $f'(x)$ untuk $f(x) = \dfrac{2x+3}{x^2}$

Jawab : $f(x) = \dfrac{2x+3}{x^2}$ maka mengingat $(\dfrac{u}{v})' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ diperoleh

$$f(x) = \frac{2.x^2 - (2x+3).2x}{(x^2)^2}$$

$$= \frac{2x^2 - 4x^2 - 6x}{x^4}$$

$$= \frac{-2x^2 - 6x}{x^4}$$

b. Turunan Fungsi Trigonometri

$$y = \sin x \Rightarrow y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \sin \frac{x+\Delta x - x}{2} \cos \frac{x+\Delta x + x}{2}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \right) \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2} \right)$$

$$= 1.\cos(x + 0) = \cos x$$

Analog $y = \cos x \Rightarrow y' = -\sin x$.

Rumus untuk turunan Fungsi Trigonometri adalah:

$y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x$	$y = \cot x \Rightarrow y' = -\csc^2 x$
$y = \cos x \Rightarrow y' = -\sin x$	$y = \sec x \Rightarrow y' = \sec x \tan x$
$y = \tan x \Rightarrow y' = \sec^2 x$	$y = \text{cosec } x \Rightarrow y' = -\csc x \cot x.$

c. Turunan Fungsi Tersusun (Fungsi Komposisi)

Misalkan y = f(x) di mana u = g(x), menentukan fungsi tersusun y = (f o g)(x) = f(g(x)) dan apabila g mempunyai turunan di x, dan f mempunyai turunan di u = g(x) maka turunan fungsi komposisi (f o g)(x) ditentukan dengan rumus :

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)).g'(x)$$

atau dengan notasi Leibniz :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$$

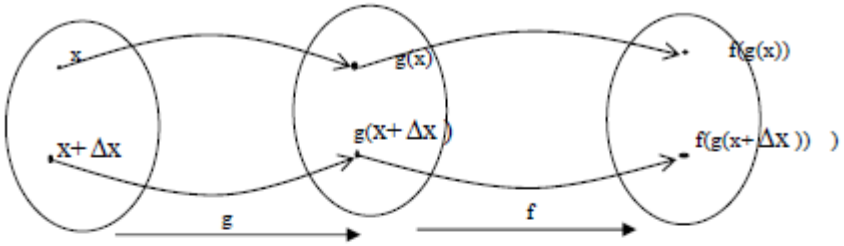
Rumus ini dikenal dengan nama "aturan rantai".

Aturan rantai tersebut dapat dibuktikan sebagai berikut :

Bukti :

Misalkan y = f(u) dan u = g(x); g mempunyai turunan di x dan f mempunyai turunan di u = g(x). Apabila variabel x bertambah dengan Δx yang berubah

menjadi (x + Δx), maka u = g(x) bertambah menjadi g(x + Δx) dan y = f(g(x)) bertambah menjadi f(g(x + Δx)), sebagaimana diagram di bawah ini :



Pertambahan untuk $u = g(x)$ adalah $g(x+\Delta x) = g(x) + \Delta g(x)$, dan dari hubungan ini akan diperoleh $\Delta g(x) \to 0$ apabila $\Delta x \to 0$

$\Rightarrow \Delta f(g(x)) = f(g(x + \Delta x)) - f(g(x))$

Berdasar definisi umum turunan fungsi, maka turunan dari fungsi komposisi :

$$(fog)'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(f \circ g)(x + \Delta x) - (f \circ g)(x))}{\Delta x}$$

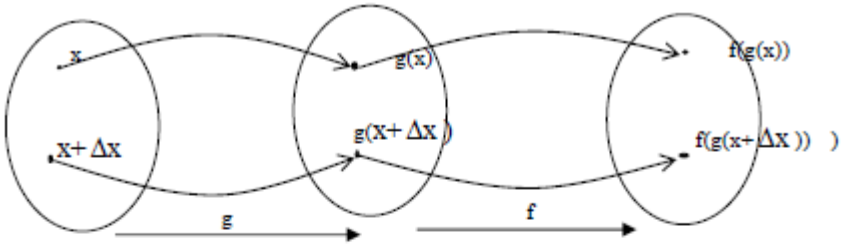
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x + \Delta x) - f(g(x))}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x) - \Delta g(x)) - f(g(x))}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x) + \Delta g(x)) - f(g(x))}{\Delta g(x)} \bullet \frac{\Delta g(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta g(x) \to 0} \frac{f(g(x) - \Delta g(x))}{\Delta g(x)} \bullet \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

$= f'(g(x)).g'(x)$ (terbukti)



Pertambahan untuk $u = g(x)$ adalah $g(x+\Delta x) = g(x) + \Delta g(x)$, dan dari hubungan ini akan diperoleh $\Delta g(x) \to 0$ apabila $\Delta x \to 0$

$\Rightarrow \Delta f(g(x)) = f(g(x + \Delta x)) - f(g(x))$

Berdasar definisi umum turunan fungsi, maka turunan dari fungsi komposisi :

$$(fog)'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(f \circ g)(x+\Delta x) - (f \circ g)(x))}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x+\Delta x) - f(g(x))}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x) - \Delta g(x)) - f(g(x))}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x) + \Delta g(x)) - f(g(x))}{\Delta g(x)} \bullet \frac{\Delta g(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta g(x) \to 0} \frac{f(g(x) - \Delta g(x))}{\Delta g(x)} \bullet \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

$= f'(g(x)).g'(x)$ (terbukti)

Dan apabila aturan rantai di atas kita tulis dengan notasi Leibniz akan diperoleh :

Jika $y = f(x)$ dan $u = g(x)$ maka

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Dalil Rantai di atas dapat dikembangkan lebih lanjut.
Jika $y = f(u)$, $u = g(v)$ dan $v = h(x)$, maka

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)).g'(x)$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{d}{dv}.\frac{dv}{dx}}$$

Begitu dan seterusnya.

Contoh 4

Jika $f(x) = \sin^3(2x - 5)$, maka tentukan $f'(x)$.

Jawab :

Misal $u = \sin(2x - 5)$ dan $v = 2x - 5$, sehingga

$$v = 2x - 5 \rightarrow \frac{dv}{dx} = 2$$

$$u = \sin v \rightarrow \frac{du}{dv} = \cos v$$

$$y = u^3 \rightarrow \frac{dy}{du} = 3u^2$$

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{df(x)}{du}.\frac{du}{dv}.\frac{dv}{dx}$$

$$= 3 \,.\, u^2 \,.\, \cos v \,.\, 2$$

$$= 6 \sin^2(2x - 5) \,.\, \cos(2x - 5)$$

d. Turunan Fungsi Logaritma

1) Pandanglah fungsi $f(x) = \ln x$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\ln(x + \Delta x)}{\Delta x}}{x.\frac{\Delta x}{x}}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x}.1 = \frac{1}{x}$$

Jadi $\boxed{f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}}$

2) Jka $f(x) = {}^a\log x$, maka

$$f(x) = \frac{\ln x}{\ln a} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$$

Jadi $\boxed{f(x) = {}^a\log x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \ln a}}$

e. Turunan Fungsi Eksponensial

Jika $f(x) = e^{g(x)}$, maka

$\ln f(x) = \ln e^{g(x)} = g(x) \cdot \ln e$

$\ln f(x) = g(x)$ jika kedua ruas diturunkan

$\frac{1}{f(x)} f'(x) = g'(x)$, sehingga $f'(x) = f(x) \cdot g'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x)$

Jadi $\boxed{f(x) = e^{g(x)} \Rightarrow f'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x)}$

Contoh 5

Jika $y = e^x$, maka $y' = e^x \cdot 1 = e^x$

Sehingga $y = e^x \Rightarrow y' = e^x$

b. Untuk fungsi eksponensial $y = a^{g(x)}$, maka

$\ln y = \ln a^{g(x)}$

$\ln y = g(x) \cdot \ln a$ jika kedua ruas diturunkan, maka

$\frac{1}{y} y' = g'(x) \cdot \ln a \Rightarrow y' = y \cdot g'(x) \cdot \ln a$

$= a^{g(x)} \cdot g'(x) \cdot \ln a$

Jadi $y = a^{g(x)} \Rightarrow y' = a^{g(x)} \cdot g'(x) \cdot \ln a$

Contoh 6

Jika $y = 2^{2x^3-3}$, maka $y' = 2^{2x^3-3}.6x.\ln 2$

$= 6x \cdot 2^{2x^3-3}.\ln 2$

f. Turunan Fungsi Implisit

Jika y = f(x), maka turunan fungsi implisit F(x,y) = c adalah dengan memandang y fungsi dari x.

Contoh 7

Tentukan y' jika $x^2 + 3xy + y^2 = 4$

Jawab :

$\frac{d}{dx}(x^2 + 3xy + y^2) = \frac{d}{dx}(4)$

$2x + 3y + 3xy' + 2y \cdot y' = 0$

$(3x + 2y)y' = -2x - 3y$

$y' = -\frac{3x+3y}{3x+2y}$

g. Turunan Jenis Lebih Tinggi

Andaikan fungsi turunan pertama f'(x) atau $\frac{df(x)}{dx}$ dari suatu fungsi adalah suatu fungsi yang dapat didiferensialkan pada x, maka turunan dari turunan pertama ini, disebut turunan kedua, dan ditulis dengan notasi $f''(x) = \frac{d^2f(x)}{dx^2}$.

Demikian juga andaikan turunan kedua ini fungsi yang dapat didiferensialkan, maka turunan dari turunan kedua ini disebut turunan ketiga dan ditulis dengan notasi $f'''(x) = \frac{d^3f(x)}{dx^3}$.

Begitu dan seterusnya turunan dari turunan ke n-1 disebut turunan ke-n dan ditulis dengan notasi $f^{(n)}(x) = \frac{d^nf(x)}{dx^n}$.

Contoh

Tentukan $\frac{d^3f(x)}{dx^3}$ jika $f(x) = x^5 - 5x^2$

Jawab :

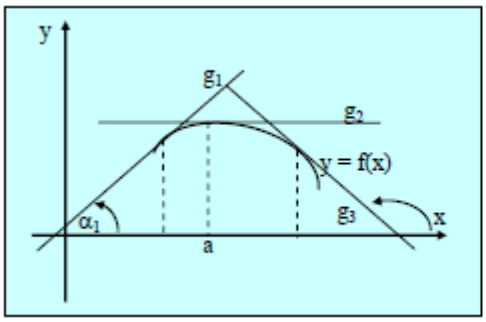
$f(x) = x^5 - 5x^2 \Rightarrow f'(x) = 5x^4 - 10x$

$f''(x) = 20x^3 - 10$

$f'''(x) = 60x^2$

h. Fungsi Naik dan Fungsi Turun

Gambar 2.2.8 **Ilustrasi Fungsi Naik dan Fungsi Turun**



Misalkan kurva disamping menyajikan grafik fungsi y = f(x), sehingga terlihat bahwa untuk x < a, diperoleh f'(x) > 0, dikatakan f naik pada interval itu, karena gradien garis-garis singgung selalu positip di interval tersebut. Untuk x > 0, gradien garis singgung-garis singgung selalu negatif sehingga f'(x) < 0 dikatakan f turunan pada interval tersebut.

Sedang untuk x = a, gradien garis singgung dititik tersebut = 0, garis singgungnya sejajar sumbu x, sehingga f′(x) = 0, dalam hal ini f tidak naik dan tidak turun dan dikatakan f stasioner di x = a.

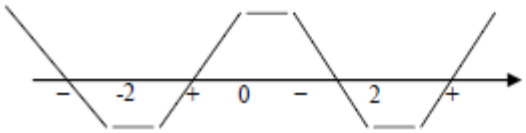
Sehingga kurva y = f(x) akan :
(i) naik jika f'(x) > 0
(ii) turun jika f'(x) < 0
(iii) stasioner jika f'(x) = 0.

Contoh

Tentukan internal dimana fungsi $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 7$ naik atau turun.

Jawab :

$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 7 \rightarrow f'(x) = x^3 - 4x = x\,(x+2)(x-2)$



$x(x+2)(x-2)$

Melihat nilai positip dan negatifnya amsing-masing interval, dapat disimpulkan bahwa pada fungsi $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 7$ kurvanya

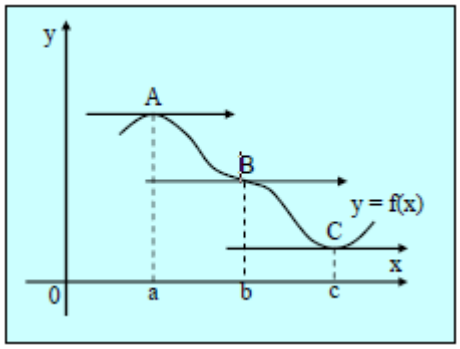
naik pada interval $-2 < x < 0$ atau $x > 2$
turun pada interval $x < -2$ atau $0 < x < 2$.

i. Nilai Stasioner Fungsi

Misal grafik fungsi y = f(x) seperti tersaji dalam diagram di bawah ini:

Pada ketiga titik A, B dan C diperoleh f'(a) = f'(b) = f'(c) = 0 ketiga garis singgungnya sejajar sumbu x, dan f stasioner pada ketiga titik tersebut. Untuk titik A, f' (x) berubah tanda dari positip – nol - negatif, dikatakan f mempunyai - nilai balik maksimum f(a) pada x = 0.

Gambar 2.2.9 **Nilai Stasioner Fungsi**



Untuk titik B, f'(x) berubah tanda dari negatif - nol - negatif, dikatakan f mempunyai nilai belok hozontal f(b) pada x = b.

Untuk titik C, f'(x) berubah tanda dari negatif - nol - positif, dikatakan f mempunyai nilai balik negatif f(c) pada x = c.

Kesimpulan :

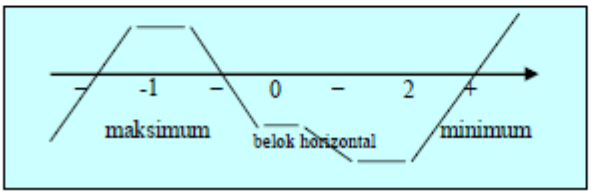
> Jika $f'(c) = 0$, maka $f(c)$ disebut nilai stasioner (kritis) dari f pada $x = c$, dan nilai stasioner mungkin berupa nilai balik maksimum, nilai balik minimum atau nilai belok horizontal.

Contoh

Tentukan nilai stasioner fungsi $f(x) = 3x^5 - 5x^3$ dan tentukan pula macamnya.

Jawab :

$f'(x) = 15x^4 - 15x^2 = 15x^2(x + 1)(x - 1)$.



Stasioner dicapai untuk $f'(x) = 0 \Rightarrow 15x^2(x + 1)(x - 1) = 0$

$x = 0$ atau $x = -1$ atau $x = 1$.

Untuk $x = 0 \Rightarrow f(0) = 3.0^5 - 5.0^3 = 0$ maka $f(0) = 0$ adalah nilai belok horizontal.

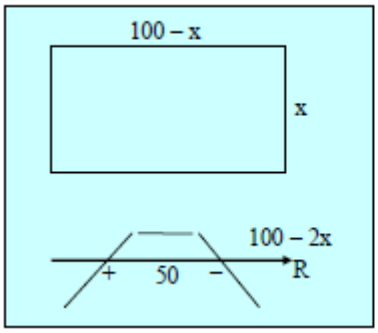
Untuk $x = 1 \Rightarrow f(1) = 3.1^5 - 5.1^3 = -2$ maka $f(1) = -2$ adalah nilai balik minimum.

Untuk $x = -1 \Rightarrow f(-1) = 3.(-1)^5 - 5.(-1)^3 = 2$ maka $f(-1) = 2$ adalah nilai balik maksimum.

Contoh

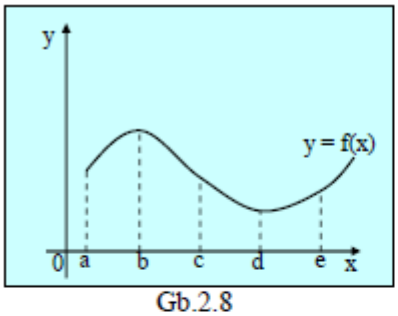
Dengan menggunakan kawat sepanjang 200 meter akan dibangun suatu kandang ayam yang berbentuk persegi panjang. Tentukan ukuran kandang agar luas kandang ayam tersebut maksimum.

Jawab :



Misalkan sisi panjang adalah x dan 100 – x maka luas kandangnya.
$L(x) = x(100 - x) = 100x - x^2$
$L'(x) = 100 - 2x$.
Nilai stasioner dicapai jika $L'(x) = 0$
$\Rightarrow 100 - 2x = 0 \Rightarrow x = 50$.
Jadi agar luas kandang maksimum, ukurannya panjang satu sisi 50 m sedang sisi satunya (100 – 50) meter = 50 meter. Sehingga bentuk kandangnya persegi.

j. Penentuan Maksimum dan Minimum dengan Menggunakan Turunan Kedua



Gb.2.8

Misalkan kurva $y = f(x)$ seperti pada gambar disamping, dikatakan kurva $y = f(x)$ terbuka ke bawah untuk $a < x < c$ dan kurva $y = f(x)$ terbuka ke atas untuk $c < x < e$.
Untuk kurva yang terbuka ke atas, pada setiap titiknya nilai $f'(x)$ atau gradien garis singgungnya bertanda sama dan naik atau berubah tanda dari negatif ke positif.

Hal ini menunjukkan bahwa fungsi turunan pertama $f'(x)$ adalah fungsi yang naik, yang berarti $f''(x) > 0$. Sedangkan untuk kurva yang terbuka ke bawah, pada setiap titiknya nilai $f'(x)$ atau gradien garis singgungnya bertanda sama dan turun atau berubah tanda dari positif ke negatif. Hal ini menunjukkan bahwa fungsi turunan pertama $f'(x)$ adalah fungsi yang turun, yang berarti $f''(x) < 0$. Dari kecembungan atau kecekungan kurva di atas dapat ditarik kesimpulan.

Jika f(a) adalah nilai stasioner maka
(i) f(a) adalah nilai balik maksimum bila $f'(a) = 0$ dan $f''(a) < 0$
(ii) f(a) adalah nilai balik minimum bila $f'(a) = 0$ dan $f''(a) > 0$.

Contoh
Tentukan nilai maksimum dan minimum dari $f(x) = x(12 - 2x)^2$ dengan metoda derivatif kedua.

Jawab :

$f(x) = x(12-2x)^2 = 4x^3-48x^2+144x$

$f'(x) = 12x^2-96x+144 = 12(x-2)(x-6)$

$f''(x) = 24x-96 = 24(x-4)$

Titik Stationer jika $f'(x) = 0$ yaitu untuk $x = 2$ atau $x = 6$

Untuk $x = 2$, $f(2) = 2(12-2.2)^2 = 128$ dan $f''(2) = 24(2-4) = -48$ (negatif)

Untuk $x = 6$, $f(6) = 6(12-2.6)^2 = 0$ dan $f''(6) = 24(6-4) = 48$ (positif).

Jadi 0 adalah nilai baik minimum untuk $x = 2$ dan 128 adalah nilai balik maksimum untuk $x = 6$.

k. Penerapan Diferensial dalam Bidang Ekonomi

Banyak masalah-masalah hubungan perekonomian merupakan hubungan fungsi, oleh karena itu Diferensial fungsi juga banyak diterapkan dalam bidang perekonomian. Berikut adalah beberapa penggunaan diferensial dalam bidang perekonomian yang bersifat sederhana.

1) Elastisitas Permintaan.

Seperti diketahui di dalam hukum permintaan bahwa naik/turunnya harga mempengaruhi naik/turunnya permintaan.

Jika harga suatu barang berubah, maka permintaan akan barang tersebut juga berubah. Elastisitas permintaan suatu barang terhadap harga adalah rasio antara perubahan relatif barang yang diminta terhadap perubahan relatif harga barang tersebut.

Misalnya harga suat barang turun a% dan mengakibatkan naiknya permintaan b%, maka elastisitas permintaan akan barang tersebut adalah = $\frac{b\%}{a\%}$.

Secara matematis :

Jika fungsi permintaan adalah $Q_D = f(P)$ maka

$$e_D = \frac{E_{Q_D}}{E_P} = \lim_{\Delta P \to 0} \frac{\left[\frac{\Delta Q_D}{Q_D}\right]}{\left[\frac{\Delta P}{P}\right]} = \frac{dQ_D}{dP} \cdot \frac{P}{Q_D}$$

di mana : e_D = elastisitas permintaan

E_{Q_D} = persentase perubahan permintaan

E_P = persentase perubahan harga.

Secara umum :

Elastisitas fungsi $y = f(x)$ adalah $e = \frac{Ey}{Ex}$ di mana :

$$e = \frac{Ey}{Ex} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\frac{\Delta y}{y}\right)}{\left[\frac{\Delta x}{x}\right]} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y}$$

Contoh

Fungsi permintaan akan suatu barang adalah : $Q_D = 40 - 2p^2$

Hitunglah elastisitas barang pada tingka harga P = 5

Jawab :

$$Q_D = 40 - 2P^2$$

$$Q'_D = -4P$$

$$Q_D = \frac{dQ_D}{dP}.\frac{P}{Q_D} = -4P.\frac{P}{40 - 2P^2}$$

Elastisitas permintaan pada tingkat harga : P = 5 adalah :

$$e_D = -4.5.\frac{5}{40 - 2.5^2} = 10$$

Dengan cara yang sama kita dapat menentukan elastisitas penawaran dan elastisitas produkai dengan menggunakan rumus :

Jika **fungsi penawaran** : $Q_S = f(P)$

maka $$\boxed{e_S = \frac{\%\Delta Q_S}{\%\Delta P} = \frac{E_{Q_S}}{E_P} = \lim_{\Delta P \to 0} \frac{\left(\frac{\Delta Q_s}{Q_S}\right)}{\left(\frac{\Delta P}{P}\right)} = \frac{dQ_S}{dP}.\frac{P}{Q_S}}$$

Jika **fungsi produksi :** P = f(x), P = out put dan x = input

maka :

$$e_P = \frac{\%\Delta Q_p}{\%\Delta P} = \frac{E_P}{E_x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\frac{\Delta P}{P}\right)}{\left(\frac{\Delta x}{x}\right)} = \frac{dP}{dx}.\frac{x}{P}$$

$$\boxed{e_P = \frac{dP}{dx}.\frac{x}{P}}$$

Contoh

Fungsi produksi suatu komoditi adalah $P = 2x - 3x^2$

Hitunglah elastisitas produksinya pada tingkat penggunaan input sebanyak 4 unit dan 9 unit.

Jawab :

$$P = 2x - 3x^2 \Rightarrow P' = 2 - 6x$$

$$e_P = \frac{dP}{dx}.\frac{x}{P} = (2 - 6x).\frac{x}{2x - 3x^2}$$

Pada $x = 4 \longrightarrow e_P = (2 - 6.4).\frac{4}{2.4 - 3.4^2}$

$$e_P = -22.\frac{4}{-40} = 2{,}2$$

$$\text{Pada } x = 9 \longrightarrow e_P = (2 - 6.9).\frac{6}{(2.6 - 3.6^2)}$$

$$= -52.\frac{6}{-96} = 3{,}25$$

2) Analisis Marginal

Dalam ekonomi istilah marginal adalah istilah yang digunakan pada laju perubahan atau turunan fungsi.

Jika C(x) = biaya total untuk memproduksi x unit suatu produk.

R(x) = pendapatan total dari penjualan x unit produk

P(x) = keuntungan total yang diperoleh dari penjualan x unit produk.

Dari sini kita dapatkan hubungan :

$$\boxed{P(x) = R(x) - C(x)}$$

sehingga :

$$P'(x) = R'(x) - C'(x)$$

P′(x), R′(x) dan C′(x) berturut-turut menunjukkan laju perubahan dari keuntungan, pendapatan dan biaya dari produksi dan penjualan x unit produksi. Dalam istilah ekonomi :

P′(x) = disebut **keuntungan marginal**.
(suatu keuntungan tambahan berkenaan dengan tambahan satu unit output)

R′(x) = disebut **penerimaan marginal**
(keuntungan tambahan berkenaan satu unit berkenaan dengan adanya satu unit tambahan output yang diproduksi atau dijual)

C′(x) = disebut **biaya marginal**
(biaya tambahan yang dikeluarkan untuk menghasilkan satu unit out put)

Catatan :

Jika biaya total c = f(x), maka biaya marginal c′ = MC = f''(x), dan rata-rata c′ = MC = f′(x) dan biaya rata-rata (ACD) = $\frac{C}{X}$

Contoh 1

Jika diketahui bahwa fungsi biaya total untuk memproduksi suatu barang komoditi adalah $c = 4 + 2x + x^2$

Tentukan :

a. Biaya marginal

b. Biaya rata-rata, dan biaya rata-rata marginal.

Jawab :

a. $C = 4 + 2x + x^2$

$C' = 2 + 2x$

b. Biaya rata-rata (AC) $= \frac{C}{x} = \frac{4 + 2x + x^2}{x} = \frac{4}{x} + 2 + x$

$AC = \frac{4}{x} + 2 + x$

$$AC' = -\frac{4}{x^2} + 1$$

Contoh 2

Suatu perusahaan pharmasi memproduksi suatu jenis obat dengan harga Rp 200,00 per unit. Jika biaya totalnya adalah :

$C(x) = 5000.000 + 80x + 0{,}003x^2$

dan kapasitas produksi adalah 30.000 unit, berapakah unit produk yang harus dijual agar mendapatkan keuntungan yang sebesar-besarnya?

Jawab :

Banyaknya produk yang terjual misalnya x buah, maka $R(x) = 200x$.

Keuntungan $P(x) = R(x) - C(x) = 200x - (5000.000 + 80x + 0{,}003x^2)$.

Karena kapasitas produksi adalah 30.000, maka interval x : (0, 30.000).

$\frac{dP}{dx} = 200 - (80 + 0{,}006x) = 120 - 0{,}006x$

Keuntungan maksimum diperoleh untuk $\frac{dP}{dx} = 0$,

$120 - 0{,}006x = 0 \Rightarrow x = 20.000$

x	0	20.000	30.000
P(x)	-500.000	700.000	400.000

∴ Keuntungan maksimum diperoleh ketika barang produksinya terjual 20.000 unit.

3. Kalkulus Integral

Untuk mengetahui pengertian integral, akan lebih mudah jika kita pahami dulu materi turunan yang telah dipelajari sebelumnya.

Definisi :

Integral merupakan antiturunan, sehingga jika terdapat fungsi F(x) yang kontinu pada interval [*a, b*] diperoleh $\frac{d(F(x))}{dx}$ = F'(*x*) = *f*(*x*). Antiturunan dari *f*(*x*) adalah mencari fungsi yang turunannya adalah *f* (*x*), ditulis ∫*f*(*x*) d*x*
Secara umum dapat kita tuliskan :

$$\int f(x)\,dx = \int F'(x)\,dx = F(x) + C$$

Catatan:

∫*f*(*x*) d*x* : disebut unsur integrasi, dibaca " integral *f*(*x*) terhadap *x*"
f(*x*) : disebut integran (yang diitegralkan)
F(*x*) : disebut fungsi asal (fungsi primitive, fungsi pokok)
C : disebut konstanta / tetapan integrasi

Integral fungsi aljabar

1. $\int k\,dx = k\,x + C$
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,$ bila n ≠ -1
3. $\int ax^n dx = \frac{a}{n+1`} x^{n+1`} + c,$ dengan n ≠ −1
4. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
5. $\int a.f(x)dx = a\int f(x)dx,$ dimana a konstanta sebarang
6. $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$

Integral fungsi trigonometri

1. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
2. $\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$
3. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$
4. $\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$

Contoh soal :

1. $\int x^5 \, dx = \frac{x^6}{6} + C$

2. $\int \sin^2 x dx = \int \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$

1) Kegunaan integral tak tentu

Kegunaan integral tak tentu cukup banyak, diantaranya adalah untuk menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan kecepatan, jarak, dan waktu.

Perhatikan contoh berikut :

Sebuah molekul bergerak sepanjang suatu garis koordinat dengan persamaan percepatan a(t)= -12t + 24 m/detik. Jika kecepatannya pada t = 0 adalah 20 m/detik. Tentukan persamaan kecepatan molekul tersebut !

Penyelesaian:

Percepatan molekul $a(t) = -12t + 24$

Sehingga : $v = \int a \, dt$

$$v = \int (-12t + 24) \, dt$$

$$v = -6t^2 + 24t + C$$

pada t=0, v_o = 20 m/detik, maka 20 = 0 + 0 + C, C = 20

Jadi, persamaan kecepatannya adalah $v = -6t^2 + 24t + 20$

a. Integral Tertentu

Integral tertentu dinotasikan dengan

$$\int f(x) \, dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

Keterangan:
$f(x)$ adalah integran, yaitu $f(x) = F'(x)$
a, b adalah batas-batas pengintegralan
[a, b] adalah interval pengintegralan

Contoh soal:

$$\int_0^{\frac{\eta}{2}} \cos^2 x \ dx = \int_0^{\frac{\eta}{2}} \frac{1}{2}(1+\cos 2x) \ dx = \left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\frac{\eta}{2}}$$

$$= \left[\frac{1}{2}.\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\sin 2(\frac{\pi}{2})\right]$$

$$= \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} - 0) + \frac{1}{4}(0-0) = \frac{\pi}{4}$$

b. Teknik Pengintegralan

1) Integral Substitusi

Pada bagian ini akan dibahas teknik integrasi yang disebut metode substitusi. Konsep dasar dari metode ini adalah dengan mengubah integral yang kompleks menjadi bentuk yang lebih sederhana.

Bentuk umum integral substitusi adalah sebagai berikut.

$$\int [f(u)\frac{du}{dx}]dx = \int f(u)du$$

Contoh soal :

Tentukan $\int \sin^3 x.\cos x \, dx$!

Penyelesaian:

Misalkan $u = \sin x$, maka $\frac{du}{dx} = \cos x$ atau $dx = \frac{du}{\cos x}$

Sehingga diperoleh, $\int \sin^3 x.\cos x \, dx = \int u^3 \cos x \frac{du}{\cos x}$

$= \int u^3 du$

$= \frac{1}{4}u^4 + C$

$= \frac{1}{4}\sin^4 x + C$

2) Integral Parsial

Teknik integral parsial ini digunakan bila suatu integral tidak dapat diselesaikan dengan cara biasa maupun dengan cara substitusi. Prinsip dasar integral parsial adalah sebagai berikut.

$y = u.v \rightarrow dy = du.v + u.dv$

$\int dy = \int v\, du + \int u\, dv$

$y = \int v\, du + \int u\, dv$

$u.v = \int v\, du + \int u\, dv$

$\int u\, dv = u.v - \int v\, du$

Contoh soal :

Tentukan $\int x^2 \sin x \; dx$!

Penyelesaian:

Cara 1: dengan menggunakan rumus $\int u\, dv = uv - \int v\, du$

Misal : $u = x^2, \rightarrow du = 2xdx$

$dv = \sin x \, dx \rightarrow v = \int \sin x dx = -\cos x$

sehingga diperoleh, $\int x^2 \sin x \, dx = x^2.(-\cos x) - \int (-\cos x) 2x dx$

$= x^2.(-\cos x) + \int \cos x . 2x dx$

$= -x^2.\cos x + 2(x.\sin x - \int \sin x dx)$

$= -x^2.\cos x + 2x.\sin x + 2\cos x + C$

Selain cara di atas, dapat pula diselesaikan dengan cara sebagai berikut : untuk menentukan integral parsial bentuk $\int udv$, yang turunan ke-k dari u adalah 0 dan integral ke- k dari v selalu ada.

Cara 2:

Tanda	Diturunkan	Diintegralkan
+	x^2	$\int \sin x$
-	2x	-cos x
+	2	-sin x
-	0	cos x

Didiferensialkan sampai bernilai nol

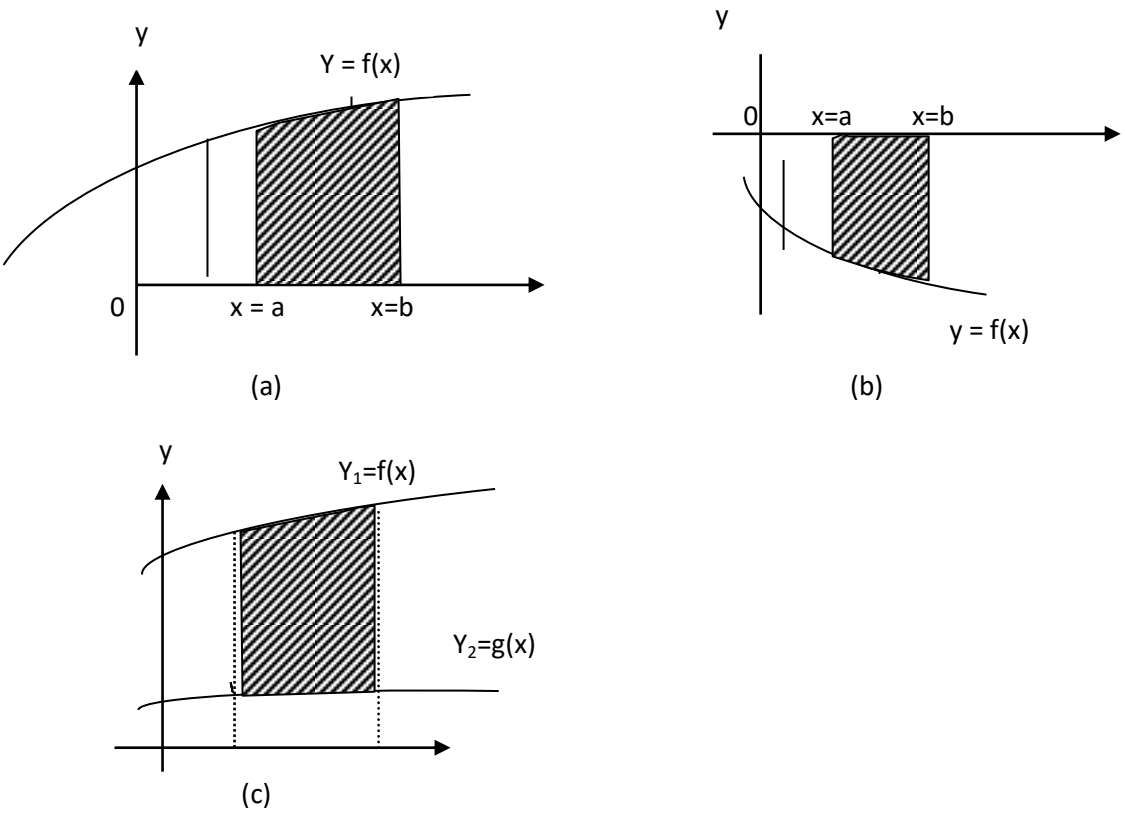
Sehingga diperoleh, $\int x^2 \cdot \sin x dx = -x^2.\cos x + 2x.\sin x + 2\cos x + C$

d. Penggunaan Integral Tertentu.

1) Penggunaan Integral Tertentu, untuk menghitung Luas Daerah.

Luas daerah antara kurva dengan sumbu X atau sumbu Y

Gambar 2.2.10 Luas Daerah Antar Kurva



(a) Luas daerah di atas sumbu x

(b) Luas daerah di bawah sumbu x

(c) Luas daerah dibatasi oleh dua kurva

Dari gambar diatas luas daerah yang diarsir :

$$L_A = \int_a^b f(x)\,dx \qquad L_B = -\int_a^b f(x)dx = \int_b^a f(x)dx \qquad L_C = \int_a^b (y_1 - y_2)dx$$

Contoh soal :

Hitunglah luas daerah yang dibatasi oleh:

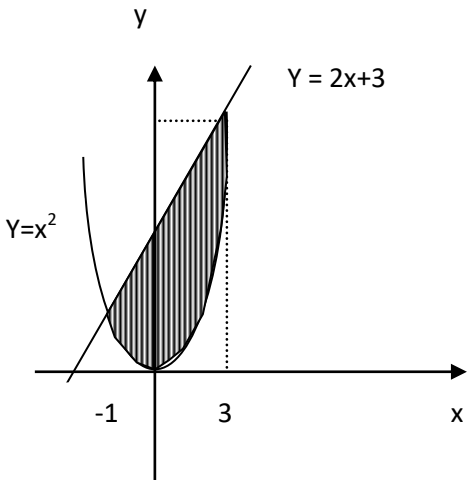
1. $y_1 = x^2$ dan $y_2 = 2x + 3$

2. $y = \cos x$, untuk $\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}$

Penyelesaian:

1. $y_1 = x^2$ dan $y_2 = 2x + 3$

Gambar dibawah memperlihatkan daerah yang dibatasi oleh kurva . $y_1 = x^2$ dan $y_2 = 2x + 3$



Menentukan batas-batasnya:

$y_1 - y_2 = 0$

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$(x + 1)(x - 3) = 0$, jadi diperoleh

$X_1 = -1$ dan $x_2 = 3$

-1 sebagai batas bawah dan 3 sebagai batas atas

$$L = \int_{-1}^{3} (2x + 3) - x^2 \, dx$$

$$= \left[x^2 + 3x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-1}^{3} = \left[3^2 + 3.3 - \frac{1}{3}.3^3 \right] - \left[-1^2 + 3.(-1) - \frac{1}{3}.(-1^3) \right]$$

$$= \left[9 - (1 - 3 + \frac{1}{3}) \right]$$

$$= 10\frac{2}{3} \text{ satuan luas}$$

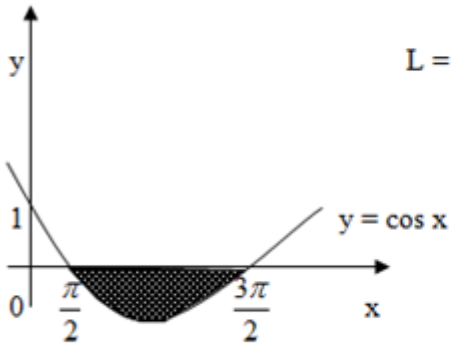
atau dengan menggunakan cara cepat (khusus untuk luas yang dibatasi oleh dua kurva yang belum diketahui batas-batasnya).

$$L = \frac{D\sqrt{D}}{6a^2}$$

Sehingga luas menjadi : $y = 2x + 3 - x^2$, $D = b^2-4.a.c = 4- 4.(-1).3 =16$

$$L = \frac{16\sqrt{16}}{6.(-1^2)} = \frac{64}{6} = 10\frac{2}{3} \text{ satuan luas}$$

$2\ y = \cos x$



$$L = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x dx = -\left[\sin x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = -(\sin \frac{3\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{2})$$

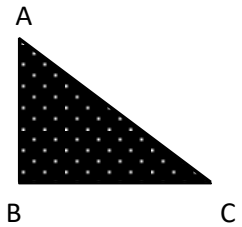
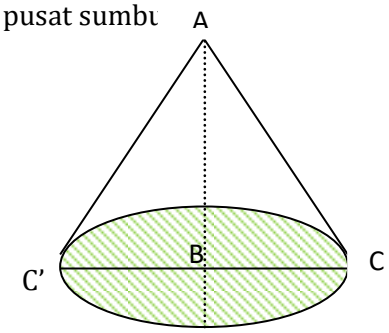
$= -(-1 - 1)$

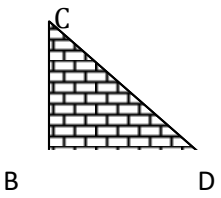
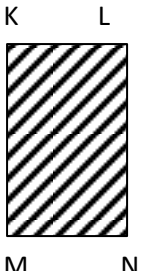
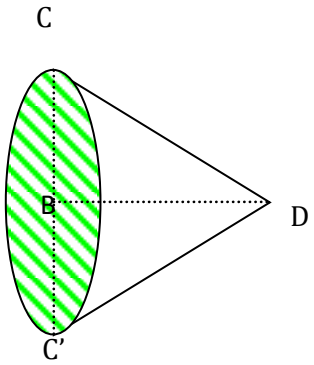
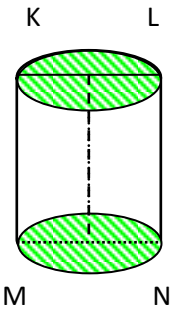
$= 2$ satuan luas

2) Penggunaan integral tertentu, untuk menghitung volume benda putar.

Pengertian benda putar adalah suatu bentuk bidang datar yang diputar sejauh 360^o, terhadap suatu garis pada bidang datar tersebut sebagai sumbu putarannya perhatikan gambar berikut:

Gambar 2.2.11 **Ilustrasi Benda Putar**

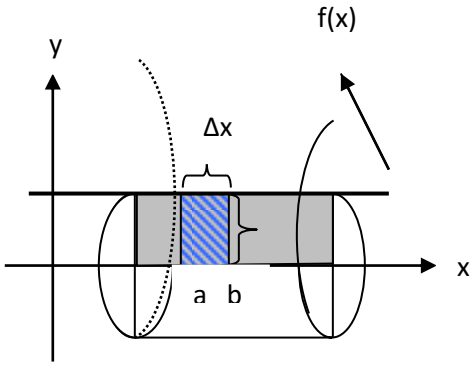
1.  	1. ▲ABC diputar dengan A sebagai pusat sumbu 

2.  3. 	2. ▲BCD, diputar dengan BD Sebagai pusat sumbu putar.  3. Persegi panjang KLMN diputar dengan KM sebagai pusat sumbu putar. 

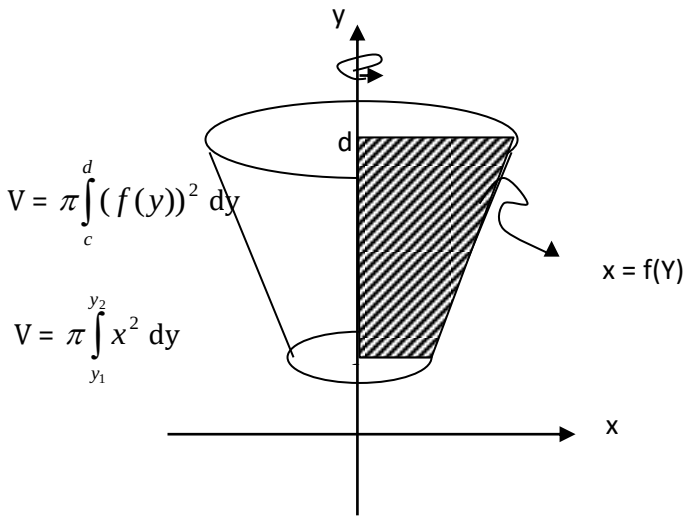
1. Volume benda putar ,mengelilingi sumbu x

$$V = \pi \int_a^b (f(x)^2 \, dx$$

$$V = \pi \int_{x_2}^{x_1} y^2 \, dx$$



2. Volume benda putar , mengelilingi sumbu y



$$V = \pi \int_{c}^{d} (f(y))^2 \, dy$$

$$V = \pi \int_{y_1}^{y_2} x^2 \, dy$$

3. Volume benda putar yang dibatasi oleh dua kurva.

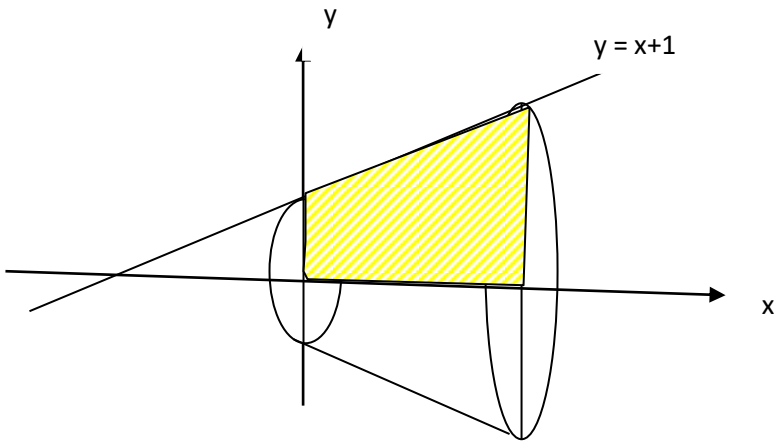
$$V = \pi \int_{a}^{b} \{(f_1(x)^2 - (f_2(x)^2\} \, dx$$ dengan $f_1(x) > f_2(x)$, yang mana $a < x < b$

$$V = \pi \int_{x_1}^{x_2} (y^2{}_1 - y^2{}_2) \, dx$$

Contoh soal :

Hitunglah volume benda putar yang terjadi, jika yang daerah dibatasi kurva y = x + 1, x = 0 , x = 2, dan sumbu x diputar mengelilingi sumbu x sejauh 360^o

Penyelesaian :



$$V = \pi \int_0^2 f^2(x)\,dx = \pi \int_0^2 (x+)^2\,dx = \pi \int_0^2 (x^2 + 2x + 1)dx$$

$$= \pi\left[\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x\right]_0^2 = \pi\left[(\frac{1}{3}.2^3 + 2^2 + 2) - (\frac{1}{3.}0^3 + 0^2 + 0)\right] = \pi(\frac{26}{3})$$

$$= \frac{26}{3}\pi \text{ satuan volume}$$

D. Aktivitas Pembelajaran

1. Pengantar

Dalam kegiatan ini peserta akan melakukan serangkaian kegiatan untuk meraih kompetensi berkaitan dengan kalkulus. Pada bagian kalkulus ini akan dibahas 3 bagian yaitu limit dengan fokus pada pengertian dan strategi sederhana penyelesaiaannya, turunan yang difokuskan pada grafik turunan suatu fungsi dan integral dengan fokus menentukan luas daerah dengan integral.

2. Aktivitas

Aktivitas 1:

Bacalah tulisan di bawah ini kemudian kerjakan tugas pada pada LK 1. Jika mengalami kesulitan Saudara disarankan untuk membaca uraian topik limit, turunan dan Integral pada modul atau sumber bacaan lainnya dan lakukanlah diskusi dengan rekan Saudara dan percaya dirilah bahwa Saudara pasti bisa.

Kita sudah sangat kenal dengan istilah suhu mutlak dengan satuan K (Kelvin), dimana 0 K = -273,15^{o}C. Artinya di dunia ini suhu paling rendah yang dapat dicapai adalah 0K. Pada uji laboratorium orang hanya bisa mampu mengkondisikan suhu sampai mendekati 0K. Kenyataan di alam pun suhu tidak pernah sama dengan 0K. Berarti 0K (= -273,15^{o}C) merupakan batas bawah suhu di alam. Dalam bahasa limit, suhu di alam hanya bisa mendekati 0K dan tidak akan sama dengan 0K. Bisakah Saudara menjelaskan situasi tersebut melalui konsep limit? Jelaskan!

LK 1: Penjelasan

Aktivitas 2:

Bacalah tulisan di bawah ini kemudian kerjakan tugas pada pada LK 2. Jika mengalami kesulitan Saudara disarankan untuk membaca uraian topik limit, turunan dan Integral pada modul atau sumber bacaan lainnya dan lakukanlah diskusi dengan rekan Saudara dan percaya dirilah bahwa Saudara pasti bisa.

Dalam menyelesaikan permasalahan limit seringkali guru maupun siswa menggunakan proses berikut

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{1.(x+2)}{1}$$

$$= \lim_{x\to 2}(x+2)$$

$$= 4$$

Mengapa proses pencoretan (x – 2) boleh dilakukan? Jelaskan pada LK 2.

LK 2: Penjelasan

Aktivitas 3:

Bacalah tulisan di bawah ini kemudian kerjakan tugas pada pada LK 3. Jika mengalami kesulitan Saudara disarankan untuk membaca uraian topik limit, turunan dan Integral pada modul atau sumber bacaan lainnya dan lakukanlah diskusi dengan rekan Saudara dan percaya dirilah bahwa Saudara pasti bisa.

Seringkali kita memberikan pengertian $\lim_{x \to c} f(x) = L$ langsung dengan definisi formal. Coba sekarang jelaskan pengertian $\lim_{x \to c} f(x) = L$ menggunakan bahasa sederhana (bukan definisiformal). Tuliskan di LK 3.

LK 3: Penjelasan

Aktivitas 4:

Bacalah tulisan di bawah ini kemudian kerjakan tugas pada pada LK 4. Jika mengalami kesulitan Saudara disarankan untuk membaca uraian topik limit, turunan dan Integral pada modul atau sumber bacaan lainnya dan lakukanlah diskusi dengan rekan Saudara dan percaya dirilah bahwa Saudara pasti bisa.

Apakah ada perbedaan atau kesaman dua penyajian (i) dan (ii) berikut ini?

Apakah ada perbedaan atau kesaman dua penyajian (i) dan (ii) berikut ini?

(i) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots=1$

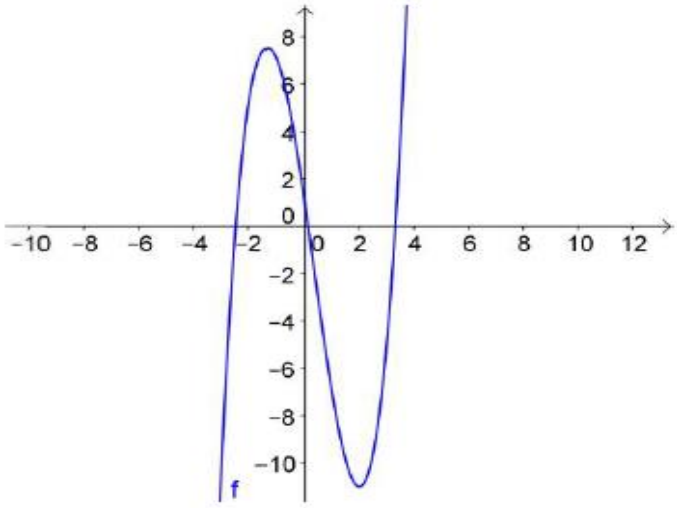
(ii) $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^i}$

LK 4: Pengerjaan

Aktivitas 5:

Bacalah tulisan di bawah ini kemudian kerjakan tugas pada pada LK 5. Jika mengalami kesulitan Saudara disarankan untuk membaca uraian topik limit, turunan dan Integral pada modul atau sumber bacaan lainnya dan lakukanlah diskusi dengan rekan Saudara dan percaya dirilah bahwa Saudara pasti bisa.

1. Perhatikan fungsi f berikut. Lakukan sketsa grafik fungsi turunannya pada LK.5



2. Dengan menggunakan limit fungsi tentukan tuunan dari y = $\frac{3}{x^3}$
3. Dengan menggunakan limit fungsi dan rumus turunan tentukan turunan dari y = cos x dan y = tan x

LK 5: Pengerjaan

Aktivitas 6:

Bacalah tulisan di bawah ini kemudian kerjakan tugas pada pada LK 6. Jika mengalami kesulitan Saudara disarankan untuk membaca uraian topik limit, turunan dan Integral pada modul atau sumber bacaan lainnya dan

lakukanlah diskusi dengan rekan Saudara dan percaya dirilah bahwa Saudara pasti bisa.

1. Tentukan $\int \frac{3}{\sqrt{x}}$ - x dx!
2. Tentukan $\int \sin(6x-5)\cos(6x-5)dx$!
3. Tentukan $\int \frac{6x}{x^2-5}$ dx!
4. Hitunglah luas daerah yang dibatasi oleh grafik y =2x - 2, untuk 0 $\leq x \leq 2$!
5. Hitunglah luas daerah yang dibatasi kurva f (x) = 4 – x^2 dan f(x) = x – 2!

LK 6: Pengerjaan

Aktivitas 7:

Pada Aktivitas 7 ini Saudara diminta untuk menyusun instrumen penilaian pada materi Limit, turunan dan Integral dengan mengacu pada panduan teknik penulisan soal dari puspendik. Diskusikan dengan rekan Saudara jika mengalami kendala dalam menyelesaikan LEMBAR KERJA 07. Dan percaya dirilah bahwa Saudara pasti bisa

1. Buatlah kisi-kisi penulisan soal mengenai materi Limit, Turunan dan Integral!
2. Buatlah 20 soal berupa 15 soal Pilihan Ganda dan 5 soal uraian sesuai kisi-kisi yang telah Saudara buat!

LK 7: Pengerjaan

E. Rangkuman

1. Jika $\frac{f(a)}{g(a)} = \frac{0}{0}$, maka $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ diselesaikan dengan cara sebagai berikut:

a) Difaktorkan, jika f(x) dan g(x) bisa difaktorkan

b) Dikalikan dengan sekawan pembilang atau penyebut jika f(x) atau g(x) berbentuk akar

c) Menggunakan dalil L'Hospital jika f(x) dan g(x) bisa di turunkan

- $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$

1. Limit fungsi trigonometri

a) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{bx} = \lim_{x \to 0} \frac{ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}$

b) $\lim_{x \to 0} \frac{\tan ax}{bx} = \lim_{x \to 0} \frac{ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}$

2. Limit Mendekati Tak Berhingga

a) $\lim_{x \to \infty} \frac{ax^n + bx^{n-1} + \ldots}{cx^m + dx^{m-1} + \cdots} = p$, dimana:

1) $p = \frac{a}{c}$, jika m = n
2) p = 0, jika n < m
3) p = ∞, jika n > m

b) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{ax+b} \pm \sqrt{cx+d}\right) = q$, dimana:

1) q = ∞, bila a > c
2) q = 0, bila a = c
3) q = −∞, bila a < c

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{ax^2+bx+c} - \sqrt{ax^2+qx+r}\right) = \frac{b-q}{2\sqrt{a}}$$

3. Kecepatan Rata-Rata

a) Kecepatan Rata^2 Dari Gerak Suatu Benda

$$V \text{ Rata}^2 = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

b) Kecepatan Rata^2 Dalam Interval Waktu T_1 Sampai T_1+H

$$V \text{ Rata}^2 = \frac{f(t_1+h)-f(t_1)}{h}$$

4. Kecepatan Sesaat

Kecepatan Sesaat Pada Waktu $T=T_1$

$$V(T\text{-}T_1)=\lim_{h\to 0} V \text{ rata} - \text{rata} = \lim_{h\to 0}\frac{f(t_1+h)-f(t_1)}{h}$$

5. Fungsi Turunan

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

6. Turunan Fungsi Aljabar

$F(X) = Ax^n \rightarrow F'(X)=N.A.X^{n-1}$

7. Sifat-Sifat Yang Berlaku Untuk Fungsi Turunan:

a) F(X) = C.G(X) Maka F'(X) = C.G'(X), Di Mana C Adalah Konstanta.

b) F(X) = G(X)±H(X) Maka F'(X) = G'(X)±H(X).

8. Turunan Fungsi Trigonometri

a) F(X) = Sin X→ F'(X) = Cos X

b) F(X) = Cos X→F'(X) = -Sin X

c) $F(X) = Tg\ X \rightarrow F'(X) = Sec2x$

d) $F(X) = Sec\ X \rightarrow F'(X) = Sec\ X.Tan\ X$

e) $F(X) = Cosec(X) \rightarrow F'(X) = -Cotan\ X.Cosec\ X$

f) $F(X) = Ctg\ X \rightarrow F'(X) = -Cosec2\ X$

g) $F(X) = U(X).V(X) \rightarrow F'(X) = U'(X).V(X)+U(X).V'(X)$

h) $F(X) = \frac{u(x)}{v(x)} \rightarrow F'(X) = \frac{u'(x).v(x)-u(x).v'(x)}{v'(x)}$

9. Menentukan Turunan Fungsi Majemuk

Teorema (Dalil) Rantai Untuk Penurunan

$$F'(X) = \frac{d}{dx} F(\ldots) = F'(\ldots) \times \frac{dy}{dx}(\ldots)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{du} \times \frac{du}{dx}$$

10. Garis Singgung Pada Suatu Kurva

a) $F'(X) = Y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ Gradien Garis Singgung Pada Titik P(X,Y) Pada Kurva Y=F(X)

b) $Y-Y_1 = \frac{dy}{dx}(X-X_1)$ Atau $Y-Y_1 = M\ (X-X_1)$

11. Menggambar Grafik Fungsi

Suatu Fungsi Dikatakan :

a) Naik, Jika $F'(X) > 0$

b) Turun, Jika $F'(X)<0$

c) Stasioner, Jika $F(X) = 0$

12. Integral Baku. Integrasi merupakan kebalikan dari diferensiasi. Bentuk umum :$Y = \int f(x)dx$ dinamakan integral tak tentu dari fungsi f(x).

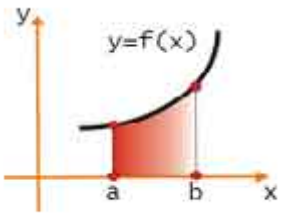
13. Ringkasan rumus integral baku

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$\int \sinh x dx = \cosh x + c$
$\int \frac{dx}{x} = \ln x + c$	$\int \cosh x dx = \sinh x + c$
$\int e^x dx = e^x + c$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$
$\int e^{kx} dx = \frac{e^{kx}}{k} + c$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc tg } x + c$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \text{arc sinh } x +$
$\int \sin x dx = -\cos x + c$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \text{arc cosh } x + c$
$\int \cos x dx = \sin x + c$	$\int \frac{dx}{1-x^2} = \text{arc tgh } x + c$
$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \text{tg } x + c$	
$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\text{cotg } x + c$	

14. Integral Substitusi. Pada permasalahan integral terkadang ditemukan turunan fungsi yang satu merupakan fungsi yang lain. Ini dinamakan integral substitusi. Bentuk umum : $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$ dan $\int f(x).f'(x)dx$.

15. Integral Parsial. Jika integral perkalian fungsi tetapi masing-masing fungsi bukan merupakan diferensial fungsi yang lain maka proses integral dilakukan perbagian. Ini dinamakan integral parsial.

    Bentuk umum : $\int u.dv = uv - \int v.du$

16. Integrasi dengan Pecahan Parsial. Integral yang melibatkan pembagian fungsi yang kompleks dapat dikerjakan dengan mengubah kebentuk pecahan parsial yang lebih sederhana
17. Ketentuan yang harus diingat dalam pecahan parsial :
    a. Derajat pembilang harus lebih rendah dari penyebut.
    b. Faktorkan penyebut karena dari sini akan ditentukan bentuk pecahan parsial.
        - ✓ Faktor (ax + b) pecahan parsial $\frac{A}{ax+b}$
        - ✓ Faktor $(ax + b)^2$ pecahan parsial $\frac{A}{(ax+b)} + \frac{B}{(ax+b)^2}$
        - ✓ Faktor $(ax + b)^3$ pecahan parsial $\frac{A}{(ax+b)} + \frac{B}{(ax+b)^2} + \frac{C}{(ax+b)^3}$
        - ✓ Faktor (ax^2+bx+c)pecahan parsial $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$
18. Integral Tertentu. Integral dengan batas atas dan batas bawah dinamakan integtral tertentu. Bentuk umum : $\int_b^a f(x)dx$. Huruf a dan b menyatakan batas atas dan batas bawah integrasi.
19. Luas Kurva. Luas kurva dapat dihitung dengan metode integrasi tertentu (berbatas) asal diketahui fungsi dari kurva yang bersangkutan serta nilai batas atas dan batas bawah.
20. 

    Luas kurva yang dibatasi f(x) yang berada di bawah sumbu x =0 yang dihitung dengan metode integral berbatas akan bertanda minus. Ini akan

rancu bila ada sebagian luasan yang berada di bawah sumbu dan diatas sumbu x=0.

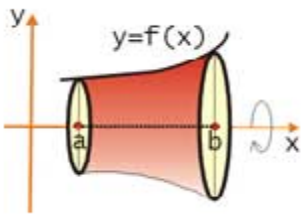
21. Persamaan Parametrik. Persamaan parametrik merupakan persamaan dimana baik y maupun x merupakan fungsi variabel lain yang dinamakan parameter.

22. Langkah pengintegrasian persamaan parametrik adalah :

Prosedur Integrasi :
1) Nyatakan x dan y dalam persamaan parametrik
2) Ubah variable yang bersesuaian
3) Sisipkan batas-atas parameter

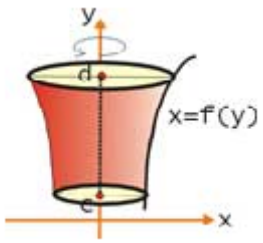
23. Nilai rerata (mean). Untuk menghitung nilai rerata fungsi f(x) di antara x = a dan x = b dapat dilakukan dengan membagi luasan daerah tersebut dengan selisih b dan a.

24. Volume Benda Putar. Jika bentuk bidang yang dibatasi oleh kurva y = f(x) sumbu x dan x = a dan x = b diputarkan penuh terhadap sumbu x maka akan diperoleh volume benda putar terhadap sumbu x. Demikian pula jika bentuk bidang yang dibatasi oleh kurva y = f(x) sumbu x dan x = a dan x = b diputarkan penuh terhadap sumbu y maka akan diperoleh volume benda putar terhadap sumbu y.

25. 

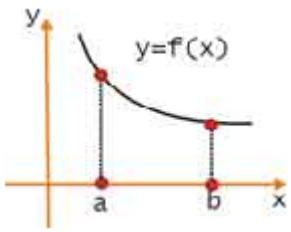
Rumus untuk menghitung volume benda putar (sumbu x): V = $\int_a^b \pi\, y^2 dx$.

26.



Rumus untuk menghitung volume benda putar (sumbu y): V = $\int_a^b 2\pi\, xy\, dx$

27.



Panjang kurva. Jika diketahui sebuah fungsi f(x) maka dapat dihitung panjang kurva mulai dari ordinat x =a sampai dengan ordinat x=b. Rumus untuk menghitung panjang kurva :

$$s = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx.$$

F. Tes Formatif

1. Tentukan nilai $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3}$!
2. Tentukan nilai $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-3x+2}{\sqrt{x-2}}$!
3. Tentukan nilai $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{3x-2}-\sqrt{4x-3}}{x-1}$!
4. Jika y = x^3 sin x tentukan y'!
5. Jika y = $\frac{\sin x}{\cos x}$ tentukan y'!
6. Jika y = sin (3x + 5) tentukan y'!
7. Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dari $x^2 + y^2 = 25$ (**persamaan lingkaran bejari-jari 5**)
8. Tentukan nilai dari $\int \frac{2x+3}{x^2+3x-5} dx$!
9. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva y = x^2 -6x +5 ,sumbu x mulai dari x=1 dan x=3!
10. Carilah volume benda putar yang dibatasi y = 5 cos 2x sumbu x dan ordinat pada x=0 dan x = ¼ phi diputar satu putaran penuh mengelilingi sumbu x!

G. Kunci Jawaban

1. Jika x = 3 kita subtitusikan maka f (3) = $\frac{3^2-9}{3-3}=\frac{0}{0}$.Kita telah mengetahui bahwa semua bilangan yang dibagi dengan 0 tidak terdefinisi. Ini berarti untuk menentukan nilai $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$, kita harus mencari fungsi yang baru sehingga tidak terjadi pembagian dengan nol. Untuk menentukan fungsi yang baru itu, kita tinggal menfaktorkan fungsi f (x) sehingga menjadi:

$$\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)}=(x+3).\left(\frac{x-3}{x-3}\right)=1$$

Jadi, $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)}$

$=\lim_{x\to 3}(x+3)$

$= 3 + 3 = 6$

2. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{\sqrt{x-2}}$

$=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{\sqrt{x-2}}.\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}}$

$=\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-3x+2)(\sqrt{x-2})}{(\sqrt{x-2})^2}$

$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-1)(x-2)(\sqrt{x-2})}{(x-2)}$

$=\lim_{x\to 2}(x-1)\sqrt{x-2}$

$=(2-1).\sqrt{2-2}$

$= 1 . 0$

$= 0$

3. $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{3x-2}-\sqrt{4x-3}}{x-1}$

$= \lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{3x-2}-\sqrt{4x-3}}{x-1} \cdot \dfrac{\sqrt{3x-2}+\sqrt{4x-3}}{\sqrt{3x-2}+\sqrt{4x-3}}$

$= \lim_{x\to 1} \dfrac{\left(\sqrt{3x-2}\right)^2-\left(\sqrt{4x-3}\right)^2}{(x-1)\left(\sqrt{3x-2}+\sqrt{4x-3}\right)}$

$= \lim_{x\to 1} \dfrac{-x+1}{(x-1)\left(\sqrt{3x-2}+\sqrt{4x-3}\right)}$

$= \lim_{x\to 1} \dfrac{-(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{3x-2}+\sqrt{4x-3}\right)}$

$= \lim_{x\to 1} \dfrac{-1}{\sqrt{3x-2}+\sqrt{4x-3}}$

$= \dfrac{-1}{\sqrt{3.1-2}+\sqrt{4.1-3}}$

$= \dfrac{-1}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = \dfrac{-1}{1+1} = -\dfrac{1}{2}$

4. $y = f(x) = x^3$ dan $g(x) = \sin x$ sehingga $f'(x) = 3x^2$ dan $g'(x) = \cos x$ maka y' $= f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$

$y' = 3x^2.\sin x + x^3 \cos x$

5. f(x) = sin x f'(x) = cos x g(x) = cos x g'(x) = -sin x

$$y' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

6. Misal u = 3x +5 u' = 3

Jadi y' = u'.y'= 3 cos (3x +5)

7. Dengan tetap mengingat bahwa y adalah fungsi x maka

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2y\frac{dy}{dx} = -2x$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

8. $\int \frac{2x+3}{x^2+3x-5}dx = \int \frac{d(x^2+3x-5)}{x^2+3x-5} = \ln(x^2 + 3x - 5) + c$

9. Luas $= \int_a^b y\,dx = \int_1^3 (x2-6x+5)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}-3x^2+5x\right]_1^3 =$ -5 1/3 satuan

10. V $= \int_a^b \pi y^2 dx = 25\prod \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2x\,dx = 25\prod \int_0^{\pi/4} (1+\cos 4x)dx = \frac{25\pi^2}{8}$

KEGIATAN PEMBELAJARAN 2

Kegiatan Belajar 2: Geometri Analitik

A. Tujuan

Tujuan dari penulisan modul ini adalah:

1. Melalui penugasan peserta diklat dapat menggunakan sifat irisan kerucut dalam memecahkan masalah nyata dengan cermat
2. Melalui *brainstorming* peserta diklat dapat melakukan operasi pada vektordengan benar.
3. Melalui diskusi peserta diklat dapat menggunakan konsep proyeksi vektor dalam menentukan sudut dengan teliti.
4. Melalui membaca peserta diklat dapat menerapkan konsep vektor pada bangun ruang dengan percaya diri
5. Melalui tanya jawab peserta diklat dapat melakukan operasi hitung perkalian pada matriks dengan tekun
6. Melalui contoh soal peserta diklat dapat menentukan determinan suatu matriks ordo 2 x 2 atau 3 x 3 dengan penuh tanggung jawab
7. Melalui simulasi peserta diklat dapat menerapkan konsep matriks pada bidang kejuruan dengan tepat

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

Indikator pencapaian kompetensi yang harus dikuasai setelah mengikuti kegiatan belajar ini adalah, peserta diklat dapat:

1. Menggunakan sifat irisan kerucut dalam memecahkan masalah nyata
2. Melakukan operasi pada vektor
3. Menggunakan konsep proyeksi vektor dalam menentukan sudut
4. Menerapkan konsep vektor pada bangun ruang
5. Melakukan operasi hitung perkalian pada matriks
6. Menentukan determinan suatu matriks ordo 2x2 atau 3x3
7. Menentukan invers matriks ordo 2x2 dan 3x3

8. Menerapkan konsep matriks dalam menyelesaikan masalah sistem persamaan linier

   Menerapkan konsep matriks pada bidang kejuruan

C. Uraian Materi

Geometri Analitik

Geometri analitik adalah suatu cabang ilmu matematika yang merupakan kombinasi antara aljabar dan geometri. Dengan membuat korespondensi antara persamaan matematika secara aljabar dengan tempat kedudukan secara geometrik diperoleh suatu metoda pemecahan masalah geometri yang lebih sistematik dan lebih tegas. Masalah-masalah geometri akan diselesaikan secara aljabar (atau secara analitik). Sebaliknya gambar geometri sering memberikan pemahaman yang lebih jelas pada pengertian hasil secara aljabar. Dalam hal ini juga memungkinkan menyelesaikan masalah aljabar secara geometri, tetapi model bentuk geometri jauh lebih penting daripada sekedar penyelesaian, khususnya jika bilangan dikaitkan dengan konsep pokok geometri. Sebagai contoh, panjang suatu segmen garis atau sudut antara dua garis. Jika garis dan titik secara geometrik diketahui, maka bilangan yang menyatakan panjang atau besar sudut antara dua garis pada hakekatnya hanyalah nilai pendekatan dari suatu pengukuran. Tetapi metoda aljabar memSaudarang bilangan itu sebagai perhitungan yang eksak (bukan pendekatan).

Cakupan materi geometri analitik meliputi: Kurva di bidang datar, atau yang lebih dikenal sebagai irisan kerucut, vektor di bidang datar maupun ruang, ditambah dengan beberapa kurva-kurva sederhana dalam ruang terutama garis lurus dan bidang datar. Dalam modul ini akan dibahas 3 materi geometri analitik yaitu Irisan Kerucut, Vektor, dan Matriks.

1. Irisan Kerucut

a. Lingkaran

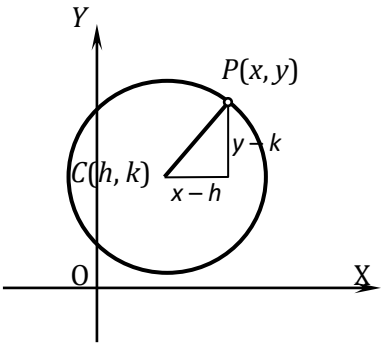
1) Persamaan Lingkaran Bentuk Baku

Lingkaran adalah tempat kedudukan titik-titik pada bidang yang berjarak tetap dari suatu titik tetap. Titik tetap dari lingkaran disebut **pusat lingkaran**, dan jarak tetap dari lingkaran disebut **jari-jari (radius).** Jadi suatu lingkaran ditentukan oleh dua parameter yaitu titik pusat dan jari-jari lingkaran.

Misalnya kita perhatikan lingkaran yang berpusat di $C(h, k)$ dan dengan jari-jari r (lihat gambar 2.3.1). Jika $P(x, y)$ adalah sembarang titik pada lingkaran, maka jarak dari titik pusat $C(h, k)$ ke titik $P(x, y)$ adalah r, akibatnya

Gambar 2.3.1 **lingkaran yang berpusat di $C(h, k)$**

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \qquad (1)$$



Persamaan (1) di atas disebut persamaan lingkaran **bentuk baku** dari suatu lingkaran yang diketahui letak titik pusat dan jari-jarinya. Koordinat sembarang titik pada lingkaran akan memenuhi persamaan (1), sedangkan koordinat titik-titik di luar lingkaran tidak akan memenuhi persamaan tersebut.

Secara khusus, jika pusat lingkaran adalah titik asal maka persamaan lingkaran yang berjari-jari r adalah

$$x^2 + y^2 = r^2. \qquad (2)$$

2) Persamaan Lingkaran Bentuk Umum

Meskipun bentuk (1) mudah digunakan untuk melihat pusat dan jari-jari suatu lingkaran, tetapi ada bentuk persamaan lain yang sering digunakan untuk menyatakan sebuah lingkaran yang dinyatakan dalam teorema berikut.

Jika persamaan (1) dijabarkan akan diperoleh bentuk

$$x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 = r^2,$$

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + (h^2 + k^2 - r^2) = 0.$$

Ini merupakan bentuk dari

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0. \qquad (3)$$

di mana

$$A = -2h, B = -2k\ , C = h^2 + k^2 - r^2 \qquad (4)$$

Persamaan (3) disebut persamaan lingkaran **bentuk umum**. Bentuk ini lebih bermanfaat untuk suatu keperluan dari pada bentuk (1).

Mudah menjabarkan persamaan lingkaran bentuk baku ke bentuk umum. Sebaliknya jika diketahui suatu lingkaran yang berbentuk umum maka juga dapat diturunkan menjadi bentuk baku. Tetapi tidak semua persamaan yang berbentuk $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ akan merepresentasikan suatu lingkaran.

Untuk mengetahui karakteristik persamaan (3) secara umum, kita ubah persamaan tersebut dalam bentuk baku persamaan lingkaran. Jika diketahui persamaan $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$, maka

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + Ax + y^2 + By = -C$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + Ax + (\tfrac{1}{2}A)^2 + y^2 + By + (\tfrac{1}{2}B)^2 = (\tfrac{1}{2}A)^2 + (\tfrac{1}{2}B)^2 - C$$

$$\Leftrightarrow \quad (x + \tfrac{1}{2}A)^2 + (y + \tfrac{1}{2}B)^2 = \tfrac{1}{4}(A^2 + B^2 - 4C) \qquad (5)$$

Jika $\tfrac{1}{4}(A^2 + B^2 - 4C) > 0$ maka merepresentasikan (3) adalah sebuah lingkaran dengan pusat $(-\tfrac{1}{2}A, -\tfrac{1}{2}B)$ dan berjari-jari $\frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 - 4C}$.

Jika $\tfrac{1}{4}(A^2 + B^2 - 4C) = 0$ maka (3) merepresentasikan sebuah lingkaran yang berpusat di titik $(-\tfrac{1}{2}A, -\tfrac{1}{2}B)$ dan jari-jarinya nol. Pada kasus ini (3) menyatakan **lingkaran titik** dengan kata lain suatu lingkaran yang hanya terdiri dari satu titik yaitu titik pusat itu sendiri.

Jika $\frac{1}{4}(A^2 + B^2 - 4C) < 0$ maka (3) tidak memberikan kurva real. Dalam hal ini (3) dikatakan mempresentasikan sebuah **lingkaran imajiner**.

Jadi setiap persamaan yang berbentuk $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ merepresentasikan sebuah lingkaran, sebuah titik atau lingkaran titik, atau lingkaran imajiner.

Contoh 1 :

Nyatakan dalam bentuk baku dari $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 13 = 0$ dan tentukan persamaan merepresentasikan apa!

Jawab:

Dengan persamaan (3) diperoleh $A = 4$, $B = -6$, $C = 13$, sehingga dengan persamaan (5) diperoleh bentuk baku

$$(x + \tfrac{1}{2}A)^2 + (y + \tfrac{1}{2}B)^2 = \tfrac{1}{4}[A^2 + B^2 - 4C]$$

$$(x + \tfrac{1}{2}\cdot 4)^2 + (y + \tfrac{1}{2}\cdot(-6))^2 = \tfrac{1}{4}\cdot[4^2 + (-6)^2 - 4\cdot 13]$$

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 0$$

Karena dua ekspresi di ruas kiri di persamaan terakhir tidak dapat negatif, maka jumlahnya adalah nol hanya jika kedua ekspresi bernilai nol. Hal ini hanya mungkin untuk $x = -2$ dan $y = 3$. Jadi hanya titik $(-2, 3)$ dalam bidang yang memenuhi persamaan asal atau dengan kata lain persamaan itu menyatakan sebuah persamaan lingkaran titik.

Contoh 2:

Nyatakan dalam bentuk baku dari $x^2 + y^2 + 2x + 8y + 19 = 0$ dan tentukan persamaan merepresentasikan apa!

Jawab:

Dengan persamaan (3) diperoleh $A = 2$, $B = 8$, $C = 19$, sehingga dengan persamaan (5) diperoleh bentuk baku

$$(x + \tfrac{1}{2}A)^2 + (y + \tfrac{1}{2}B)^2 = \tfrac{1}{4}[A^2 + B^2 - 4\cdot C]$$

$$(x + ½\cdot 2)^2 + (y + ½\cdot 8)^2 = ¼\cdot[2^2 + 8^2 - 4\cdot 19]$$

$$(x + 1)^2 + (y + 4)^2 = -2$$

Karena dua ekspresi di ruas kiri di persamaan terakhir tidak dapat negatif, maka jumlahnya tidak mungkin negatif, sehingga tidak ada titik di bidang yang memenuhi persamaan itu. Jadi ini merupakan persamaan lingkaran imajiner.

3) Lingkaran yang ditentukan oleh Tiga Syarat

Perhatikan bahwa pada persamaan lingkaran baik yang berbentuk baku maupun yang berbentuk umum yaitu

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2, \qquad (1)$$

atau

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \qquad (2)$$

memuat tiga konstanta sembarang. Akibatnya adalah memungkinkan untuk menentukan tiga syarat pada lingkaran.

Contoh :

Tentukan persamaan lingkaran yang menyinggung sumbu-x, mempunyai pusat pada garis $x + y = 7$, dan melalui titik (5, 4)!

Jawab:

Andaikan lingkaran yang dicari berpusat di (h, k) dan berjari-jari r dan oleh karena itu persamaan lingkaran berbentuk

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2. \qquad (1)$$

Oleh karena diketahui lingkaran menyinggung sumbu-x maka

$$r = k. \qquad (2)$$

Karena titik pusat lingkaran (h, k) berada pada garis $x + y = 7$, maka koordinat titik itu harus memenuhi persamaan garis sehingga:

$$h + k = 7 \qquad (3)$$

Terakhir diketahui pula lingkaran memuat titik (5, 4), sehingga diperoleh persamaan:

$$(5- h)^2 + (4 - k)^2 = r^2. \qquad (4)$$

Persamaan (3) akan ekuivalen dengan

$$h = 7 - k \qquad (5)$$

Jika (2) dan (5) disubstitusikan ke (4) akan diperoleh:

$$(5 - (7 - k))^2 + (4 - k)^2 = k^2$$

$$\Leftrightarrow \quad k^2 - 12k + 20 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad k = 2 \text{ atau } k = 10$$

Jika $k = 2$ maka $h = 5$ dan $r = 2$.

Jika $k = 10$ maka $h = -3$ dan $r = 10$.

Dalam hal ini penyelesaian persamaan simultan (2), (3), dan (4) adalah $h = 5, k = 2, r = 2$ atau $h = -3, k = 10, r = 10$.

Jadi ada dua lingkaran yang memenuhi syarat-syarat yang diberikan yaitu:

$(x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 4$ atau $x^2 + y^2 - 10x - 4y - 25 = 0$, dan

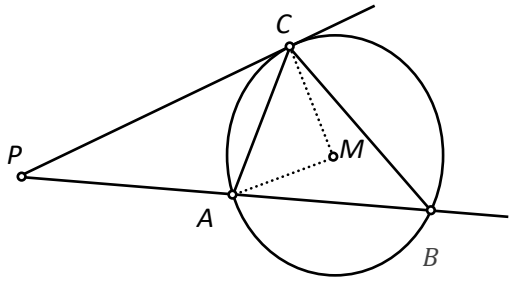
$(x + 3)^2 + (y - 10)^2 = 100$ atau $x^2 + y^2 + 6x - 20y - 9 = 0$.

4) Kuasa Lingkaran

a) Kuasa Titik terhadap Lingkaran

Jika diketahui sebuah titik P dan lingkaran L yang berpusat di M dan sembarang garis yang melalui P dan memotong lingkaran di A dan B maka yang dimaksud dengan **kuasa titik *P*** terhadap lingkaran L adalah perkalian panjang PA dengan panjang PB.

Gambar 2.3.2	kuasa lingkaran



Perhatikan di atas menurut definisi maka kuasa titik P ditulis $K(P)$ atau K_P adalah

$$K_P = PA \cdot PB \qquad (1)$$

Misalkan C adalah titik singgung garis yang melalui P. Perhatikan segitiga PBC dan segitiga PCA. Terlihat bahwa :

$$\angle BPC = \angle CPA \qquad (2)$$

$$\text{dan } \angle PAC = \angle PCB = \tfrac{1}{2} \angle AMC \qquad (3)$$

Oleh karena dua segitiga PAC dan PCB mempunyai dua pasang sudut yang berukuran sama, maka kedua segitiga tersebut adalah sebangun. Akibatnya terdapat hubungan perbandingan:

$$\frac{PA}{PC} = \frac{PC}{PB}$$

$$\text{atau} \quad PA \cdot PB = PC^2 \qquad (4)$$

Jika (4) disubstitusikan ke (1) maka diperoleh

$$K_P = PC^2 \qquad (5)$$

Perhatikan bahwa PC merupakan panjang garis singgung dari titik P ke titik singgung di lingkaran. Jadi kuasa titik P terhadap lingkaran L sebenarnya adalah kuadrat panjang garis singgung lingkaran dari titik P ke titik singgungnya.

Selanjutnya perhatikan bahwa segitiga PCM adalah siku-siku di C, karena PC adalah garis singgung. Menurut dalil Pythagoras terdapat hubungan

$$PM^2 = PC^2 + CM^2 \text{ atau } PC^2 = PM^2 - CM^2 \qquad (6)$$

Apabila koordinat titik P adalah (x_1, y_1) dan lingkaran L mempunyai persamaan yang berbentuk $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$, maka

$$PM^2 = (x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2 \text{ dan } CM^2 = r^2 \qquad (7)$$

sebab CM merupakan jari-jari lingkaran.

Jika persamaan (7) disubstitusikan ke (6) dan (5) diperoleh kuasa titik P terhadap lingkaran L adalah

$$K_P = (x_1 - h)^2 + (y - k)^2 - r^2 \qquad (8).$$

Jika persamaan lingkaran L berbentuk umum $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, maka kuasa titik $P(x_1, y_1)$ terhadap lingkaran L adalah

$$K_P = x_1^2 + y_1^2 + ax_1 + by_1 + c \qquad (9)$$

Catatan :

a. Jika titik P berada di luar lingkaran L, maka kuasa titik P terhadap lingkaran tersebut adalah positif. Hal ini jelas karena panjang garis singgung dari titik P ke titik singgungnya adalah bilangan positif.
b. Jika titik P berada pada lingkaran maka kuasa titik P terhadap lingkaran itu adalah nol.

   Jika titik P berada di dalam lingkaran maka kuasa titik P terhadap lingkaran adalah negatif. sehingga memperoleh panjang garis singgungnya inajiner. Hal ini sesuai dengan kenyataan geometrik bahwa garis singgung suatu lingkaran tidak bisa dikonstruksi dari sebuah titik di dalam lingkaran.

b) Garis Kuasa

Tempat kedudukan titik-titik yang mempunyai kuasa sama terhadap dua lingkaran berupa garis lurus dan disebut **garis kuasa**.

Jika diberikan dua lingkaran L_1 dan L_2 maka garis kuasa dapat dicari. Misalkan kita akan menentukan persamaan garis kuasa lingkaran $L_1 \equiv x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1$ dan lingkaran $L_2 \equiv x^2 + y^2 + a_2x + b_2y + c_2$ dan misalkan $P(x_P, y_P)$ adalah titik yang mempunyai kuasa sama terhadap L_1 dan L_2.

Menurut (9) maka kuasa titik P terhadap lingkaran L_1 adalah

$K_P = x_P^2 + y_P^2 + a_1x_P + b_1y_P + c_1$

dan kuasa titik P terhadap lingkaran L_1 adalah

$K_P = x_P^2 + y_P^2 + a_2x_P + b_2y_P + c_2$

Kuasa titik P terhadap kedua lingkaran adalah sama sehingga:

$$x_P^2 + y_P^2 + a_1x_P + b_1y_P + c_1 = x_P^2 + y_P^2 + a_2x_P + b_2y_P + c_2$$

$$\Leftrightarrow \quad (a_1 - a_2)x_P + (b_1 - b_2)y_P + (c_1 - c_2) = 0$$

Jika titik P dijalankan maka diperoleh tempat kedudukan titik-titik yang mempunyai kuasa sama terhadap lingkaran L_1 dan L_2 yaitu

$$(a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)y + (c_1 - c_2) = 0 \qquad (10)$$

Secara simbolis persamaan garis kuasa lingkaran $L_1 = 0$ dan $L_2 = 0$ dituliskan sebagai :

$$L_1 - L_2 = 0 \qquad (11)$$

Contoh :

Tentukan titik pada sumbu-x yang mempunyai kuasa sama terhadap lingkaran$L_1 \equiv (x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 16$ dan $L_2 = x^2 + y^2 + 2x - 6y - 15 = 0$, dan tentukan kuasa titik tersebut terhadap kedua lingkaran.

Jawab:

Menurut (11) maka persamaan garis kuasa kedua lingkaran adalah $L_1 - L_2 = 0$. Jadi persamaan garis kuasanya adalah :

$$(x - 1)^2 + (y - 4)^2 - 16 - (x^2 + y^2 + 2x - 6y - 15) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -4x - 2y + 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x + y - 8 = 0$$

Semua titik yang berada pada garis ini mempunyai kuasa sama terhadap kedua lingkaran L_1 dan L_2 di atas. Sedangkan titik yang ditanyakan adalah berada pada sumbu-x, yaitu titik potong sumbu-x dengan garis kuasa. Jadi ordinat titik yang dicari adalah $y = 0$. Substitusi ke garis kuasa diperoleh absis titik yang dicari yaitu

$2x + 0 - 8 = 0$, atau $x = 4$.

Jadi koordinat titik yang dicari adalah $P(-4, 0)$ dan kuasa titik P terhadap kedua lingkaran adalah$K_P = (4 - 1)^2 + (0 - 4)^2 - 16 = 9$

c) Titik Kuasa

Misalkan L_1, L_2, L_3 adalah tiga lingkaran yang pusat-pusatnya tidak berada pada satu garis lurus (konsentris). Ketiga lingkaran tersebut mempunyai tiga garis kuasa yang saling berpotongan di satu titik. Titik potong ketiga garis ini disebut **titik kuasa**.

Jika ketiga lingkaran adalah konsentris maka garis-garis kuasanya sejajar, dan ini berarti titik kuasa ketiga lingkaran berada di titik tak hingga.

Contoh:

Tentukan titik kuasa lingkaran $L_1 \equiv x^2 + y^2 + 3x + 5y - 7 = 0$; $L_2 \equiv x^2 + y^2 - 2x + 4y - 6 = 0$; dan $L_3 \equiv x^2 + y^2 + 4x - 2y - 2 = 0$!

Jawab:

Garis kuasa lingkaran L_1 dan L_2 adalah $L_1 - L_2 = 0$ yaitu

$$5x + y - 1 = 0 \qquad (1)$$

Garis kuasa lingkaran L_1 dan L_3 adalah $L_1 - L_3 = 0$ yaitu

$$x - 7y + 5 = 0 \qquad (2)$$

Dari persamaan simultan (1) dan (2) menghasilkan penyelesaian $x = 1/18$ dan $y = 13/18$. Dengan demikian koordinat titik kuasa ketiga lingkaran tersebut adalah (1/18, 13/18).

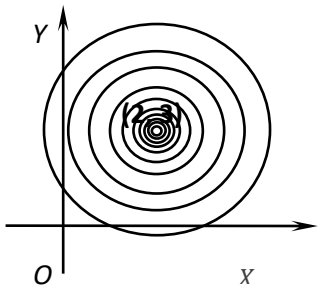
5) Keluarga Lingkaran

Jika sebuah persamaan linier memuat satu konstanta sembarang, atau parameter, maka persamaan itu menyatakan sebuah himpunan semua garis pada bidang. Situasi yang sama juga ada untuk lingkaran. Persamaan lingkaran yang memuat parameter disebut **keluarga lingkaran.**

Misalkan persamaan $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = r^2$

akan menyatakan keluarga lingkaran yang berpusat di (2, 3) (lihat gambar 2.3.3).

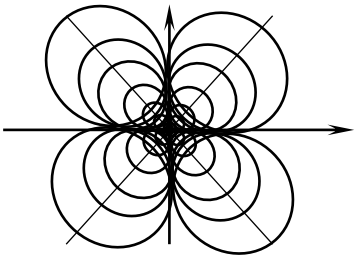
Gambar 2.3.3 keluarga lingkaran



Dengan memberikan nilai tertentu untuk r maka akan menunjuk pada lingkaran tertentu secara unik.

Persamaan dalam bentuk $(x - h)^2 + (y \pm h)^2 = h^2$ akan menyatakan keluarga lingkaran yang meyinggung kedua sumbu koordinat

Gambar 2.3.4 keluarga lingkaran yang menyinggung sumbu koordinat



Juga sangat memungkinkan mempunyai keluarga lingkaran yang mempunyai dua parameter. Sebagai contoh, persamaan

$(x - h)^2 + (y - 2h)^2 = r^2$

menyatakan keluarga lingkaran yang mempunyai pusat pada garis $y = 2x$, tetapi dengan jari-jari sebagai variabel.

6) Berkas Lingkaran

Pandang dua lingkaran L_1 dan L_2 yang berpotongan (baik real maupun imajiner) dengan persamaan sebagai berikut:

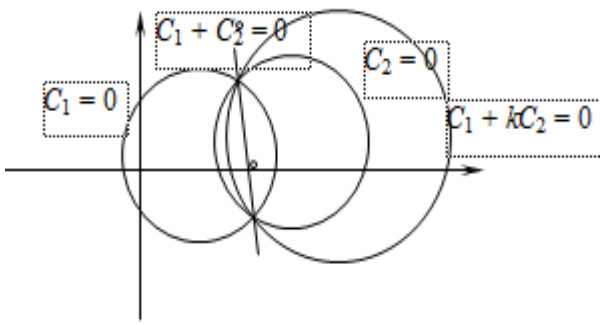
$L_1 \equiv x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1 = 0$ dan

$L_2 \equiv x^2 + y^2 + a_2x + b_2y + c_2 = 0$;

Pandang pula persamaan yang berbentuk:

$L_1 + kL_2 \equiv x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1 + k(x^2 + y^2 + a_2x + b_2y + c_2) = 0$ (1)

Gambar 2.3.5 berkas lingkaran



Untuk sembarang nilai $k \neq -1$ maka persamaan $L_1 + kL_2 = 0$ menyatakan lingkaran yang melalui titik potong kedua lingkaran L_1 dan L_2. Ini mudah dipahami bahwa (1) adalah suatu lingkaran dengan menyusun kembali persamaan (1) dalam bentuk:

$$x^2 + y^2 + \frac{a_1 - a_2}{1+k}x + \frac{b_1 - b_2}{1+k}y + \frac{c_1 - c_2}{1+k} = 0 (2)$$

yang mana menurut seksi 4.2 persamaan di atas merupakan sebuah lingkaran. Koordinat titik potong kedua lingkaran L_1 dan L_2 juga memenuhi lingkaran dengan persamaan $L_1 + kL_2 = 0$, sebab titik potong itu memenuhi persamaan L_1 dan L_2.

Sedangkan untuk $k = -1$, maka $L_1 - L_2 = 0$ merupakan garis kuasa kedua lingkaran yang juga dapat dianggap sebagai lingkaran dengan pusat pada garis hubung titik pusat kedua lingkaran dan terletak di tak hingga, sehingga busurnya berupa garis lurus.

Jika diberikan semua nilai parameter k yang mungkin maka himpunan semua lingkaran yang berbentuk $L_1 + kL_2 = 0$ disebut **berkas lingkaran** dengan L_1 dan L_2 sebagai lingkaran dasar/basis.

Sifat istimewa yang dimiliki anggota berkas lingkaran adalah bahwa semua anggota berkas lingkaran mempunyai sebuah garis kuasa berserikat dan pusatnya adalah berada pada garis lurus yang menghubungkan kedua titik pusat lingkaran dasarnya.

Contoh:

Tentukan persamaan lingkaran yang melalui titik potong lingkaran $L_1 \equiv x^2 + y^2 + 4x - 6y - 96 = 0$ dan $L_2 \equiv x^2 + y^2 - 18x - 8y + 48 = 0$,

dan melalui titik asal!

Jawab:

Lingkaran yang dicari merupakan salah satu anggota berkas lingkaran dengan basis L_1dan L_2, yaitu

$(x^2 + y^2 + 4x - 6y - 96) + k(x^2 + y^2 - 18x - 8y + 48) = 0.$

Karena lingkaran juga melalui titik asal $O(0, 0)$ maka substitusikan $x = 0$ dan $y = 0$ pada persamaan di atas diperoleh

$$-96 + 48k = 0, \text{ atau } k = 2$$

Substitusikan nilai k pada berkas lingkaran diperoleh persamaan lingkaran yang dicari yaitu :

$$3x^2 + 3y^2 - 32x - 22y = 0$$

7) Garis Singgung Lingkaran

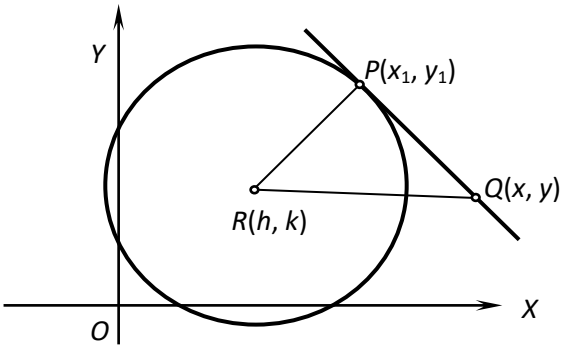
Satu hal yang tak perlu kita jelaskan lagi bahwa berdasarkan teori pada geometri Eucide, garis singgung pada lingkaran selalu tegak lurus pada garis yang menghubungkan titik singgung itu dengan pusat lingkaran. Dengan beberapa sifat dasar yang ada pada teori geometri Euclide dapat diturunkan persamaan garis singgung suatu lingkaran pada beberapa karakter.

a) Persamaan Garis Singgung yang melalui Titik pada Lingkaran

Misalkan kita ingin mencari persamaan garis singgung lingkaran $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ di titik $P(x_1, y_1)$ yang terletak pada lingkaran. Kita tentukan sembarang titik $Q(x, y)$ yang terletak pada garis singgung itu (lihat gambar 4.6).

Karena$P(x_1, y_1)$ berada pada lingkaran maka memenuhi persamaan lingkaran yaitu $(x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2 = r^2$.

Gambar 2.3.6	garis singgung lingkaran



Lingkaran itu berpusat di $R(h, k)$. PQR merupakan segitiga siku-siku, sehingga dengan teorema Pythagoras diperoleh hubungan

$$QR^2 = PQ^2 + PR^2$$

$$\Leftrightarrow (x-h)^2 + (y-k)^2 = (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + r^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2xh + h^2 + y^2 - 2yk + k^2 = x^2 - 2xx_1 + x_1^2 + y^2 - 2yy_1 + y_1^2 + r^2$$

$$\Leftrightarrow -2xh - 2yk + h^2 + k^2 = -2xx_1 + x_1^2 - 2yy_1 + y_1^2 + r^2.$$

$$\Leftrightarrow 2xx_1 - 2xh + h^2 + 2yy_1 - 2yk + k^2 = x_1^2 + y_1^2 + r^2.$$

Jika masing-masing ruas ditambahkan dengan faktor

$$\text{b)} \quad h^2 + k^2 - 2x_1h - 2y_1k$$

maka diperoleh persamaan

$$2xx_1 - 2xh - 2x_1h + 2h^2 + 2yy_1 - 2yk - 2y_1k + 2k^2$$

$$= r^2 + x_1^2 - 2x_1h + h^2 + y_1^2 - 2y_1k + k^2$$

$$\Leftrightarrow xx_1 - xh - x_1h + h^2 + yy_1 - yk - y_1k + k^2 = \tfrac{1}{2}\{r^2 + (x_1 - h)^2 + y_1 - k)^2\}$$

$$\Leftrightarrow (x-h)(x_1-h) + (y-k)(y_1-k) = \tfrac{1}{2}\{r^2 + r^2\}$$

Jadi diperoleh persamaan garis singgung lingkaran $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ di titik $P(x_1, y_1)$ yang terletak pada lingkaran adalah

$$(x-h)(x_1-h) + (y-k)(y_1-k) = r^2 \quad (1)$$

Sedangkan jika persamaan lingkaran umum $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ di titik $P(x_1, y_1)$ yang terletak pada lingkaran adalah

$$xx_1 + yy_1 + \tfrac{1}{2}a(x + x_1) + \tfrac{1}{2}b(y + y_1) + c = 0 \quad (2)$$

Contoh:

Tentukan persamaan garis singgung lingkaran $(x-4)^2 + y^2 = 25$ di titik $P(1, -4)$.

Jawab:

Tampak bahwa persamaan di atas merupakan persamaan lingkaran dalam bentuk baku, berpusat di (4, 0) dan berjari-jari 5. Sehingga persamaan garis singgung di titik (1, –4) adalah

$$(x-h)(x_1-h) + (y-k)(y_1-k) = r^2$$

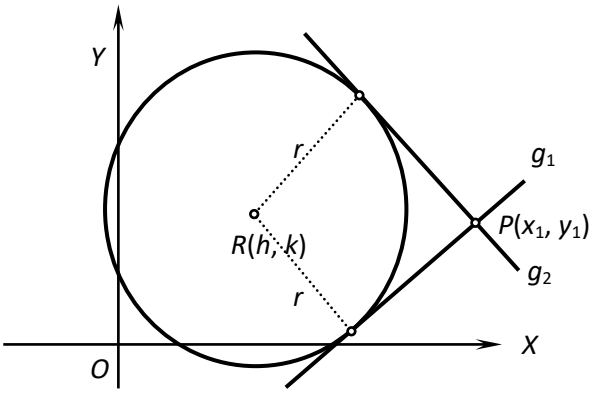
$$(x-4)(1-4) + (y-0)(-4-0) = 25$$

$3x + 4y + 13 = 0$

b) Persamaan Garis Singgung yang melalui Titik di luar Lingkaran

Misalkan diberikan lingkaran $L \equiv (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ dan titik $P(x_1, y_1)$ yang berada di luar lingkaran L. Akan dicari persamaan garis singgung g yang melalui P. (Perhatikan gambar 2.3.8)

Gambar 2.3.7 garis singgung yang melalui titik di Luar lingkaran



Karena garis g melalui $P(x_1, y_1)$ maka g merupakan anggota keluarga garis yang berbentuk

$$g \equiv y - y_1 = m(x - x_1) \quad (3)$$

$$\Leftrightarrow \quad mx - y - (mx_1 - y_1) = 0 \quad (4)$$

Karena g meyinggung lingkaran L, maka jarak titik pusat lingkaran ke garis g adalah sama dengan r, sehingga:

$$d(P, g) = r$$

$$\frac{mh - k - (mx_1 - y_1)}{\pm\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = r$$

$$\Leftrightarrow \quad m(h - x_1) - (k - y_1) = \pm r\sqrt{m^2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow [(x_1 - h)^2 - r^2]m^2 - 2(x_1 - h)(y_1 - k)m + (y_1 - k)^2 - r^2 = 0$$

Penyelesaian untuk m dari persamaan kuadrat di atas adalah

$$m = \frac{1}{(x_1 - h)^2 - r^2}\left((x_1 - h)(y_1 - k) \pm r\sqrt{(x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2 - r^2}\right)$$

$$= \frac{1}{(x_1 - h)^2 - r^2}\left((x_1 - h)(y_1 - k) \pm r\sqrt{K_P}\right) \qquad (5)$$

dengan K_P adalah kuasa titik P terhadap lingkaran L.

Jika persamaan (5) disubstitusikan ke persamaan (3) akan diperoleh persamaan garis singgung yang dicari yaitu:

$$y - y_1 = \frac{1}{(x_1 - h)^2 - r^2}\left[(x_1 - h)(y_1 - k) \pm r\sqrt{K_P}\right](x - x_1) \qquad (6)$$

Contoh:

Tentukan persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 6 = 0$ yang melalui titik $P(-4, -3)$.!

Jawab:

Bentuk baku dari persamaan lingkaran di atas adalah $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 16$, sehingga lingkaran berpusat di titik $(h, k) = (1, -3)$ dan berjari-jari $r = 4$.

Kuasa titik P terhadap lingkaran adalah

$K_P = (-4 - 1)^2 + (-3 + 3)^2 - 16 = 25 + 0 - 16 = 9$

Dengan menggunakan persamaan (6) maka persamaan garis singgung yang dicari adalah

$$y - (-3) = \frac{1}{(-4-1)^2 - 4^2}\left((-4-1)(-3-(-3)) \pm 4\sqrt{9}\right)(x - (-2))$$

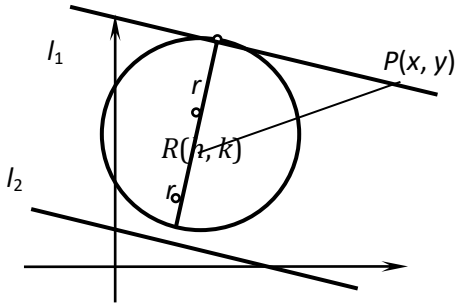
$$y + 3 = \frac{1}{9}(0 \pm 12)(x + 2)$$

$4x - 3y + 7 = 0$ dan $4x + 3y + 25 = 0$

c) Persamaan Garis Singgung pada Lingkaran dengan Kemiringan Tertentu

Sekarang akan dibicarakan garis singgung suatu lingkaran yang mempunyai kemiringan tertentu. Misalkan akan dicari persamaan garis singgung lingkaran $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ dan mempunyai kemiringan m (lihat gambar 2.3.9.).

Gambar 2.3.8 | **garis singgung lingkaran dengan kemiringan tertentu**



Karena kemiringan garis singgung l sudah diketahui maka l merupakan anggota keluarga garis yang mempunyai persamaan:

$y = mx + c,$ (7)

dengan c parameter yang belum diketahui.

Karena garis singgung pada lingkaran selalu tegak lurus pada garis yang menghubungkan titik singgung itu dengan pusat lingkarannya, maka jarak titik pusat ke garis singgungnya sama dengan jari-jari. Dengan rumus jarak titik (h, k) ke garis $mx - y + c = 0$, diperoleh :

$$r = d[(h, k), l]$$

$$r = \frac{mh - k + c}{\pm\sqrt{m^2 + (-1)^2}}$$

sehingga diperoleh konstanta c

$$c = k - mh \pm r\sqrt{m^2 + 1} \quad (8)$$

Selanjutnya dengan mengganti konstanta c pada persamaan (4) ke persamaan (3) diperoleh persamaan garis singgung yang dicari yaitu :

$y = mx + k - mh \pm r\sqrt{m^2 + 1}$

$\Leftrightarrow \quad y - k = m(x - h) \pm r\sqrt{m^2 + 1}$ (9)

Contoh :

Tentukan persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 - 2x + y - 5 = 0$ yang sejajar dengan garis $4x + 3y = 15$!

Jawab*:*

Pertama kita cari terlebih dahulu pusat dan jari-jari lingkaran yang diberikan. Persamaan $x^2 + y^2 - 2x + y - 5 = 0$ merupakan lingkaran dengan pusat $(1, -½)$dan berjari-jari

$$r = \tfrac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 - 4C}$$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{(-2)^2 + 1^2 - 4(-5)}$$

$$= \frac{5}{2}$$

Sedangkan garis singgung yang dicari sejajar (berkemiringan sama) dengan garis $4x + 3y = 15$, sehingga $m_l = -4/3$.

Dengan menerapkan rumus (5) diperoleh persamaan garis singgung yang dicari yaitu

$y - k = m(x - h) \pm r\sqrt{m^2 + 1}$

$y - (-½) = -4/3\ (x - 1) \pm 5/2\ \sqrt{(-4/3)^2 + 1}$

$\Leftrightarrow y + ½ = -4/3\ x + 4/3 \pm 5/2\ \sqrt{25/9}$

$\Leftrightarrow y + ½ = -4/3\ x + 4/3 \pm 5/2 \cdot 5/3$

$\Leftrightarrow y + ½ = -4/3\ x + 4/3 \pm 25/6$

Jadi persamaan garis singgung yang dicari adalah

$4x + 3y + 23 = 0$ dan $4x + 3y - 27 = 0$

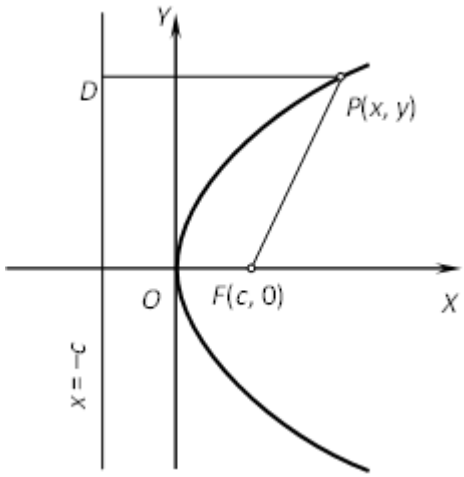
b. Parabola

1) Persamaan Parabola Bentuk baku

Parabola didefinisikan sebagai tempat kedudukan titik-titik $P(x, y)$ pada bidang sedemikian hingga titik itu berjarak sama dari suatu titik tertentu yang disebut *fokus* dan garis tertentu yang tidak memuat fokus dan disebut *direktrik*.

Untuk menentukan persamaan parabola, pertama ditinjau parabola dengan fokus berada pada sumbu-x dan dengan direktrik tegak lurus sumbu-x. Sedangkan sumbu-$y$diletakkan di tengah-tengah segmen garis hubung dari titik fokus F ke garis direktrik$d$.

Gambar 2.3.9 **Parabola**



Misalkan jarak antara garis direktrik dengan fokus adalah $2c$, maka koordinat titik fokusnya adalah $F(c, 0)$ dan persamaan garis direktrik d adalah $x = -c$, $c \neq 0$. (lihat gambar 6.1).

Jika $P(x, y)$ adalah sembarang titik pada parabola, maka dari definisi kurva parabola diperoleh hubungan

$$\overline{PF} = \overline{PD}$$

yaitu $$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = |x + c|$$

$\Leftrightarrow$ $$(x - c)^2 + y^2 = (x + c)^2$$

$\Leftrightarrow$ $$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = x^2 + 2cx + c^2$$

$\Leftrightarrow$ $$y^2 = 4cx \qquad (1)$$

Persamaan (1) di atas merupakan persamaan parabola yang dicari yaitu parabola yang mempunyai fokus F dengan koordinat $(c, 0)$ dan persamaan garis direktrik d $\equiv x = -c$, $c \neq 0$.

Jika dilakukan pertukaran x dan y dalam (1) maka diperoleh

$$x^2 = 4cy, \qquad (2)$$

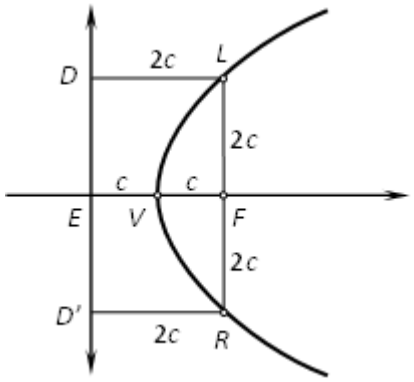
yang mana (2) merupakan persamaan parabola dengan fokus di titik $(0, c)$ pada sumbu-y dan garis direktrik dengan persamaan d $\equiv y = -c$.

Persamaan (1) dan (2) dikenal sebagai **persamaan parabola bentuk baku**.

Jika c adalah positif, maka parabola adalah terbuka ke arah sumbu-x atau sumbu-y positif; sebaliknya jika c adalah negatif, maka parabola adalah terbuka ke arah sumbu-x atau sumbu-y negatif, bergantung parabola bentuk baku (1) atau (2).

Sekarang kita perhatikan beberapa sifat dari parabola sebelum melanjutkan ke permasalahan yang lain. Pertama parabola adalah kurva yang simetrik. Garis simetri dari parabola disebut *sumbu parabola*. Garis ini tegak lurus dengan direktrik dan memuat titik fokus. Titik potong sumbu dengan parabola disebut *puncak* (*vertex*).

Gambar 2.3.10	**parabola bentuk baku**



Tali busur parabola yang melalui fokus dan tegak lurus sumbu parabola disebut ***latus rectum* parabola**. Panjang latus rektum dapat dihitung secara langsung dari gambar 2.3.11, yang mana latus rektum adalah segmen garis LR. Fokus dan puncak parabola F dan V, sedangkan direktriknya d = $\overleftrightarrow{DD'}$. Sumbu parabola dan garisdirektrik berpotongan di

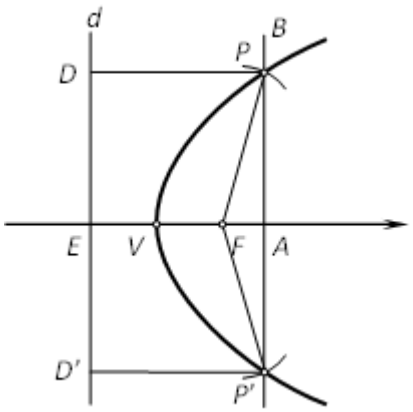
E. Berdasarkan definisi parabola, $LF = LD = |2c|$. Jadi panjang laktus rektum adalah $LR = |4c|$.

2) Konstruksi Geometrik dari parabola

Sebuah parabola yang diketahui fokus dan direktriknya dapat segera dikonstruksi dengan penggaris dan jangka sebagai berikut:

Misalkan *F* adalah fokus dan *d* direktrik yang diberikan (lihat gambar). Gambar sumbu parabola *EF*, yang tentu saja memuat titik fokus *F* dan tegak lurus dengan garis d berpotongan di *E*. Puncak parabola *V* adalah titik tengah antara *E* dan *F*.

Gambar 2.3.11	Kosntruksi Geometri Parabola



Ambil sembarang titik *A* pada sumbu dan berada pada sisi yang sama dengan *F* terhadap titik *V*. Melalui *A* lukis garis *AB* yang sejajar dengan direktrik (atau tegak lurus dengan sumbu parabola).

Dengan *F* sebagai pusat dan jari-jari sama dengan panjang *EA*, lukis busur yang memotong *AB* di *P* dan *P*'. Maka *P* dan *P*' adalah titik-titik pada parabola yang dicari, karena $PF = AE = PD$, yaitu titik yang berjarak sama terhadap titik *F* dan garis *d*. Secara sama dapat diujikan untuk titik *P*'.

Dengan mengubah posisi titik *A* dapat dikonstruksikan sebanyak titik yang diinginkan pada parabola. Secara praktis, akan sangat memudahkan,

apabila pada langkah awal dilukis sejumlah garis sejajar dengan direktrik untuk memperoleh titik anggota tempat kedudukan.

Suatu cara yang sangat mudah dilakukan dalam memvisualisasikan bentuk parabola adalah dengan menggunakan sehelai benang. Jika sehelai benang yang lentur ujung-ujungnya dikaitkan pada paku pada dinding yang rata, maka lengkungan benang yang menggantung akan membentuk parabola.

Contoh 1:

Tentukan koordinat fokus dan persamaan direktrik parabola dengan persamaan $y2 = -8x$! Lukis grafik parabola tersebut!

Jawab:

Dengan membandingkan persamaan parabola dalam bentuk baku (1) maka diperoleh hubungan

$$4c = -8$$

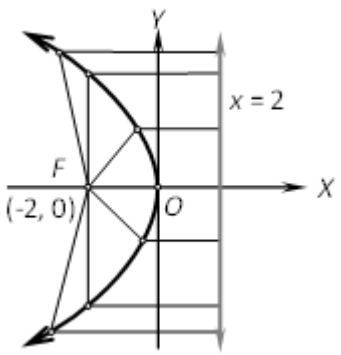
$$\Leftrightarrow \quad c = -2$$

Jadi parabola di atas mempunyai titik fokus di (–2, 0).

Persamaan garis direktriknya adalah x = 2.

Untuk melukis grafik parabola di atas, pertama dilukis garis direktrik dan fokusnya. Kemudian buat sketsa grafik dengan menentukan beberapa titik yang berjarak sama dari fokus dengan direktrik. Sketsa grafik dapat diperlihatkan dalam gambar 2.3.13

Gambar 2.3.12 Kosntruksi Geometri Parabola terbuka ke kiri



Contoh 2:

Tentukan persamaan parabola dengan puncak di titik asal (0, 0)dan titik fokus di (–4, 0)!

Jawab:

Karena fokus dan puncak pada sumbu-x, maka sumbu-x adalah sumbu parabola. Jadi persamaan parabola dalam bentuk $y^2 = 4cx$.

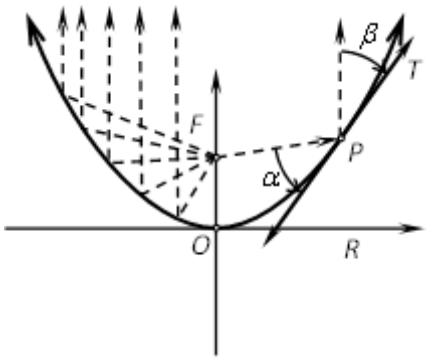
Karena fokusnya adalah (–4, 0), maka c = –4 dan persamaannya adalah $y^2 = 4\cdot(-4)x$ atau $y^2 = -16x$

3) Aplikasi parabola

Lintasan peluru meriam yang ditembakkan dari suatu tempat dengan sudut elevasi tertentu, dengan mengabaikan resistensi udara dan lainnya, adalah sebuah parabola. Kabel pada jembatan gantung yang mempunyai distribusi beban seragam akan menggantung dalam bentuk parabola. Arsitektur jembaran atau ornamen pada sebuah gedung kadang-kadang dibuat dalam bentuk parabolik.

Ada dua sifat yang menarik dari parabola yang mempunyai terapan dalam konstruksi lampu sorot, lampu mobil dan teleskop. Sebuah parabola yang diputar terhadap sumbunya akan membentuk sebuah permukaan. Jika permukaan cekung pada benda ini digunakan sebagai reflektor, sinar cahaya yang datang secara paralel dengan sumbu akan diarahkan ke fokus. Sebaliknya, jika sebuah sumber cahaya dipancarkan dari fokus, maka cahaya akan dipantulkan ke luar dalam bentuk cahaya yang sejajar.

Gambar 2.3.13 **Aplikasi Parabola**



Pada gambar 2.3.14 di atas misalkan *P* adalah sembarang titik pada grafik suatu parabola dan *PT* adalah garis singgung di titik *P*. *F* adalah fokus parabola, dan α adalah sudut antara *FP* dan garis singgung *PT*. *PR* sejajar dengan sumbu parabola, dan β sudut antara *PR* dan *PT*. Dapat dibuktikan (dalam latihan 6 C) bahwa $\alpha = \beta$.

Dengan penjelasan ini, kepala lampu senter, permukaan kepala lampu kendaraan, dan sebagainya dibuat dalam bentuk parabolik. Tetapi reflektor pada teleskop, detektor suara parabolik, antena radio atau televisi berbentuk parabolik dibuat berdasar pada prinsip yang berkebalikan (gambar 2.3.15). Pada teleskop, sinar cahaya dari suatu obyek di langit yang jatuh ke cermin dan sejajar dengan sumbu parabola akan dipantulkan dan dikumpulkan pada fokusnya.

Gambar 2.3.14 **Antena Parabola**

4) Persamaan parabola Bentuk Umum

Dengan merujuk pada penjelasan tentang translasi sumbu, jika puncak parabola di titik V dengan koordinat (h, k) maka akan diperoleh persamaan parabola yang lebih umum, dan persamaan baku parabola (1) dan (2) dari bagian sebelumnya akan berubah menjadi berturut-turut

$(y - k)^2 = 4c(x - h)$ (1)

$(x - h)^2 = 4c(y - k)$ (2)

Persamaan (1) di atas adalah persamaan parabola yang berpuncak di (h, k), dengan titik fokus (h + c, k) dan direktrik x = h – c. Sedangkan fokus parabola dengan persamaan (2) adalah (h, c + k) dan direktrik y = k – c.

Penjabaran lebih lanjut dari persamaan parabola (1) menghasilkan

$$(y - k)^2 = 4c(x - h)$$

$$\Leftrightarrow \quad y^2 - 2ky + k^2 = 4cx - 4ch$$

$$\Leftrightarrow \quad y^2 - 4cx - 2ky + k^2 + 4ch = 0$$

Secara umum persamaan (1) dapat direduksi dalam bentuk

$$Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (3)$$

dengan C dan D tidak sama dengan nol yang menyatakan persamaan parabola dengan sumbu simetrinya sejajar dengan sumbu-x.

Secara sama persamaan (2) dapat direduksi dalam bentuk

$$Ax^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (4)$$

dengan A dan E tidak sama dengan nol yang menyatakan persamaan parabola dengan sumbu simetrinya sejajar dengan sumbu-y.

Persamaan (3) dan (4) di atas dikenal sebagai bentuk umum persamaan parabola.

***Contoh** :*

Tentukan persamaan parabola yang mempunyai fokus di titik (7, 2) dan dengan direktrik garis x = 1! Buat sketsa grafiknya!

Jawab:

Puncak parabola berada di tengah antara fokus dan direktrik. Dengan mudah dapat diperoleh bahwa titik puncak parabola berada pada titik (4, 2). Jadi h = 4 dan k = 2.

Karena direktrik parabola adalah garis x = 1, maka parabola yang dicari bersesuaian dengan persamaan (1) dan berlaku

h – c = 1

c = h – 1 = 4 – 1 = 3.

Jadi persamaan parabola bentuk baku yang dicari adalah

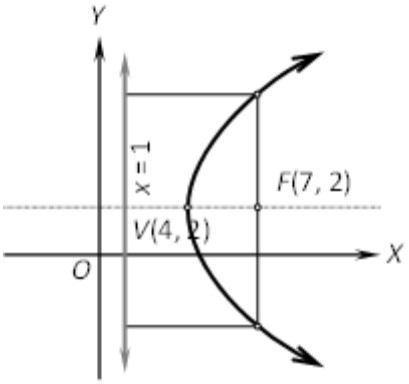
$(y - 2)^2 = 4 \cdot 3\,(x - 4) \Leftrightarrow (y - 2)^2 = 12(x - 4)$

Parabola diatas dapat direduksi menjadi dalam bentuk umum

$y^2 - 12x - 4y + 52 = 0$.

Sketsa grafik dapat dilihat pada gambar .... berikut.

Gambar 2.3.15 **Parabola terbuka ke kanan**



5) Persamaan Garis Singgung pada parabola

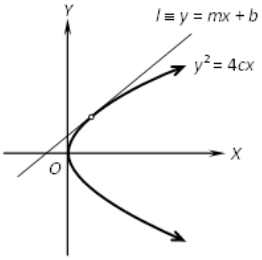
Seperti halnya pada lingkaran dan ellips, terdapat dua macam garis singgung yang akan dibicarakan, yaitu garis singgung yang melalui salah satu titik pada parabola dan garis singgung yang mempunyai kemiringan tertentu.

a) Persamaan garis Singgung yang mempunyai kemiringan m

(1) Pada parabola yang membuka ke kiri/kanan

Sekarang dibahas garis singgung suatu parabola yang mempunyai kemiringan tertentu. Misalkan kita akan mencari persamaan garis singgung parabola $y^2 = 4cx$ yang mempunyai kemiringan m (lihat gambar 2.3.18).

Gambar 2.3.16 **Parabola terbuka ke kiri/kanan**



Karena kemiringan garis singgung l sudah diketahui maka dimisalkan mempunyai persamaan garis yaitu keluarga garis dengan kemiringan m;
l≡y = mx + b,

dengan b konstanta yang belum diketahui.

Jika persamaan garis itu disubstitusikan ke persamaan parabola akan diperoleh hubungan

$$(mx + b)^2 = 4cx$$

$$\Leftrightarrow \quad m^2x^2 + (2mb - 4c)x + b^2 = 0 \qquad (1)$$

Oleh karena garis menyinggung parabola maka haruslah memotong pada satu titik saja, dengan kata lain persamaan kuadrat di atas haruslah mempunyai penyelesaian yang kembar. Hal itu berarti nilai diskriminannya haruslah nol.
Kondisi ini diberikan oleh persamaan :

$$(2mb - 4c)^2 - 4m^2b^2 = 0$$

Persamaan di atas akan memberikan selesaian untuk b

$$b = \frac{c}{m}, m \neq 0$$

Jadi persamaan garis singgung parabola $y^2 = 4cx$ yang mempunyai kemiringan m adalah

$$l \equiv y = mx + \frac{c}{m} \qquad (2)$$

Persamaan garis singgung parabola $(y - k)^2 = 4c(x - k)$ yang berpuncak di titik (h, k) dan sumbu parabola sejajar dengan sumbu-x, jika garis mempunyai kemiringan m, dapat diperoleh dengan mentranslasikan persamaan (2) sedemikian hingga titik asal berpindah ke titik (h, k). Dengan translasi ini diperoleh persamaan garis:

$$y - k = m(x - h) + \frac{c}{m} \qquad (3)$$

Contoh 1:

Tentukan persamaan garis singgung parabola $y^2 + 6y - 8x + 25 = 0$ yang tegak lurus garis $2x + y - 3 = 0$!

Jawab:

Kita tulis kembali persamaan parabola

$$y^2 + 6y = -8x + 25$$

Dengan melengkapkan kuadrat persamaan parabola pada suku yang memuat y pada ruas kiri diperoleh bentuk :

$$(y + 3)^2 = 8x - 16$$

$\Leftrightarrow$

$$(y + 3)^2 = 4 \cdot 2(x - 2)$$

Persamaan terakhir adalah bentuk baku dari persamaan parabola dengan puncak $(2, -3)$ dan $c = 2$, yaitu $h = 2$, dan $k = -3$.

Misalkan m adalah kemiringan garis singgung yang dicari. Garis $2x + y - 3 = 0$ mempunyai kemiringan -2, sedangkan garis singgung yang diminta tegak lurus dengan di atas, yang berarti perkalian antar kemiringan garis sama dengan -1. Jadi

$m.(-2) = -1 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$.

Dengan persamaan (3) di atas maka persamaan garis singgung yang dicari adalah :

$$y + 3 = \tfrac{1}{2}(x - 2) + \frac{2}{1/2} \Leftrightarrow x - 2y = 0$$

Jadi persamaan garis singgung yang dicari adalah

$$x - 2y = 0$$

(2) Pada parabola yang membuka ke atas/bawah

Perhatikan bahwa persamaan garis singgung seperti tertuang baik dalam persamaan (2) maupun (3) di atas hanya berlaku pada parabola yang sumbu simetrinya berimpit atau sejajar sumbu-x. Jika sumbu simetrinya sejajar dengan sumbu-y, atau membuka ke atas/bawah maka rumus tersebut **tidak berlaku**.

Persamaan baku parabola yang berpuncak di titik asal dan sumbu simetrinya berimpit dengan sumbu-y adalah $x^2 = 4cy$. Misalkan persamaan garis singgung parabola itu mempunyai kemiringan m, dan kita misalkan berbentuk

$$y = mx + b$$

dengan b konstanta yang belum diketahui.

Jika y disubstitusikan pada parabola diperoleh

$$x^2 = 4c(mx + b)$$

$$x^2 - 4cmx - 4cb = 0 \qquad (4)$$

Dengan penjelasan yang sama dalam menurunkan rumus (3) maka l menyinggung parabola maka diskriminan persamaan kuadrat (4) haruslah nol. Hal itu diberikan oleh persamaan

$(4cm)^2 - 4\cdot(-4cb) = 0$

yang memberikan penyelesaian untuk b yaitu :

$$b = -cm^2$$

Jadi persamaan garis singgung yang dicari adalah

$$y = mx - cm^2 \qquad (5)$$

Demikian pula untuk memperoleh persamaan garis singgung parabola yang lebih umum $(x - h)^2 = 4c(y - k)$ yang berpuncak di titik (h, k) dan

sumbu parabola sejajar dengan sumbu-y, jika garis mempunyai kemiringan m, dapat diperoleh dengan mentranslasikan persamaan (5) sedemikian hingga titik asal berpindah ke titik (h, k). Dengan translasi ini diperoleh persamaan garis:

$$y - k = m(x - h) - cm^2 \qquad (6)$$

Contoh 2:

Tentukan titik potong garis singgung parabola $x^2 - 4x - 4y - 8 = 0$ yang mempunyai kemiringan 3 dengan sumbu-sumbu koordinat!

Jawab:

Pertama dicari persamaan garis singgungnya, kemudian ditentukan titik potong garis tersebut dengan sumbu-sumbu koordinat.

Tulis kembali persamaan parabola dalam bentuk :

$x^2 - 4x = 4y + 8$

Dengan melengkapkan kuadrat sempurna pada ruas kiri persamaan parabola dapat ditulis ke dalam bentuk baku

$$(x - 2)^2 = 4y + 12$$

$\Leftrightarrow$

$$(x - 2)^2 = 4(y + 3)$$

Persamaan terakhir adalah bentuk baku dari persamaan parabola dengan puncak $(2, -3)$ dan diperoleh $h = 2$, $k = -3$. Dan juga $4c = 4$ atau $c = 1$.

Garis singgung yang dicari mempunyai kemiringan $m = 3$.

Dengan menggunakan persamaan (6) maka persamaan garis singgung yang dicari adalah :

$$y + 3 = 3(x - 2) - 1 \cdot 3^2$$

$$y + 3 = 3x - 6 - 9$$

$$3x - y - 18 = 0$$

Jadi persamaan garis singgung yang dicari adalah

$$3x - y - 18 = 0$$

Dengan demikian titik potong dengan sumbu-x dapat ditentukan dengan memberi nilai $y = 0$ pada garis singgung sehingga diperoleh $x = 6$. Jadi memotong sumbu-x di titik (6, 0).

Hal yang sama dapat dilakukan untuk memperoleh titik potong dengan sumbu-y dengan memberi nilai $x = 0$, sehingga diperoleh $y = 18$. Jadi memotong sumbu-y di titik (0, 18).

b) Persamaan Garis Singgung yang melalui titik di parabola

(1) Pada parabola yang membuka ke kiri/kanan

Untuk menentukan persamaan garis singgung parabola di titik (x_1, y_1) yang terletak pada parabola, pertama kita pandang parabola dalam bentuk $y^2 = 4cx$ dan rumus persamaan garis singgung yang ada rumus (2) pada bagian sebelumnya.

Menurut (2), persamaan garis singgung parabola $y^2 = 4cx$ dengan kemiringan m adalah $y = mx + \frac{c}{m}$. Jika titik (x_1, y_1) merupakan titik singgung garis pada parabola, maka akan berlaku

$$y_1 = mx_1 + \frac{c}{m} \qquad (1)$$

Sekarang nilai m akan kita cari dalam bentuk x_1, y_1 dan c yang mana parameter itu sudah diketahui/diberikan.

Kalikan masing-masing ruas pada persamaan (1) dengan m diperoleh bentuk persamaan kuadrat

$x_1m^2 - y_1m + c = 0$

yang memberikan penyelesaian untuk m

$$m = \frac{y_1 \pm \sqrt{y_1^2 - 4x_1c}}{2x_1} \qquad (2)$$

Karena titik (x_1, y_1) juga terletak pada parabola maka juga berlaku hubungan

$$y_1^2 = 4cx_1 \qquad (3)$$

sehingga jika disubstitusikan ke persamaan (2) diperoleh

$$m = \frac{y_1}{2x_1} \qquad (4)$$

Jika nilai m disubstitusikan ke persamaan garis singgung diperoleh

$$y = mx + \frac{c}{m}.$$

$$y = \frac{y_1}{2x_1}x + \frac{2x_1c}{y_1}$$

$$y_1y = \frac{y_1^2}{2x_1}x + 2x_1c$$

Substitusi nilai $y_1^2 = 4cx_1$ ke persamaan di atas diperoleh

$$y_1y = 2c(x + x_1)$$

Jadi jika $P(x_1, y_1)$ titik pada parabola $y^2 = 4cx$, maka persamaan garis singgung parabola di titik P diberikan oleh persamaan

$$y_1y = 4c\cdot\tfrac{1}{2}(x + x_1) \qquad (5)$$

Misalkan $P(x_1, y_1)$ titik pada parabola $(y - k)^2 = 4c(x - h)$, maka persamaan garis singgung parabola di titik P dapat dicari dari persamaan (5) dengan mentranslasikan sumbu-sumbu koordinat sedemikian hingga titik asal (0, 0) menjadi titik dengan koordinat (h, k), yaitu dengan substitusi

$$(y_1 - k)(y - k) = 4c(\tfrac{1}{2}(x + x_1) - h) \qquad (6)$$

Jika parabola dalam bentuk umum $Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, maka persamaan garis singgung parabola yang menyinggung di titik $P(x_1, y_1)$ dapat dituliskan dalam bentuk:

$$Cy_1y + \tfrac{1}{2}D(x + x_1) + \tfrac{1}{2}E(y + y_1) + F = 0 \qquad (7)$$

Contoh 1:

Tentukan persamaan garis singgung parabola $y^2 = 8x$di titik yang mempunyai ordinat 4!

Jawab:

Kita nyatakan parabola dalam bentuk baku

$$y^2 = 8x$$

$$\Leftrightarrow \quad y^2 = 4 \cdot 2x$$

Dari persamaan di atas terlihat bahwa $c = 2$ dan puncak parabola di titik (0, 0)

Untuk menentukan koordinat titik yang terletak pada parabola dengan ordinat 4, kita masukkan $y = 4$ pada parabola maka diperoleh absis

$$4^2 = 8x$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 2$$

Jadi titik singgung yang dimaksud adalah (2, 4). Dengan mempergunakan persamaan (5) kita peroleh

$$4y = 2 \cdot 2(x + 2)$$

$$\Leftrightarrow \quad 4y = 4x + 8$$

$$\Leftrightarrow \quad x - y + 2 = 0$$

(2) Pada parabola yang membuka ke atas/bawah

Selanjutnya kita perhatikan parabola dalam bentuk $x^2 = 4cy$ dan rumus persamaan garis singgung yang ada rumus (5) pada seksi 6.5.1.

Andaikan titik $P(x_1, y_1)$ pada parabola $x^2 = 4cy$, maka berlaku

$$x_1^2 = 4cy_1 \qquad (1)$$

dan dengan mengingat persamaan garis singgung parabola yang mempunyai kemiringan m adalah $y = mx - cm^2$ dan titik $P(x_1, y_1)$ pada garis singgung, maka berlaku

$$y_1 = mx_1 - cm^2$$

$$\Leftrightarrow \quad cm^2 - x_1 m + y_1 = 0 \qquad (2)$$

Diperoleh penyelesaian m dalam x_1, y_1, dan c yaitu

$$m = \frac{x_1 \pm \sqrt{x_1^2 - 4cy_1}}{2c}$$

Dengan mengingat (1) maka

$$m = \frac{x_1}{2c} \qquad (3)$$

Jika nilai m ini disubstitusikan ke persamaan garis singgung diperoleh

$$y = \frac{x_1}{2c}x - c\left(\frac{x_1}{2c}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 4cy = 2x_1 x - x_1^2$$

Dengan mengingat rumus (1) diperoleh

$$4cy = 2x_1 x - 4cy_1$$

$$\Leftrightarrow \quad x_1 x = 4c\left(\frac{y + y_1}{2}\right) \qquad (4)$$

Jika parabola dalam bentuk umum $Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$, maka persamaan garis singgung parabola yang menyinggung di titik $P(x_1, y_1)$ dapat dituliskan dalam bentuk:

$$Ax_1 x + \tfrac{1}{2}D(x + x_1) + \tfrac{1}{2}E(y + y_1) + F = 0 \qquad (5)$$

Contoh 1:

Tentukan persamaan garis singgung parabola $y = x^2 - 6x + 5$ di titik $(2, -3)$.!

Jawab:

Persamaan parabola di atas jika dinyatakan dalam bentuk umum akan berbentuk

$x^2 - 6x - y + 5 = 0$

Dengan demikian diketahui bahwa $A = 1$, $D = -6$, $E = -1$, dan $F = 5$. Diketahui pula $x_1 = 2$, $y_1 = -3$. Jadi menurut persamaan (5), persamaan garis yang dicari adalah

$2x - \frac{1}{2} \cdot 6(x + 2) - \frac{1}{2}(y - 3) + 5 = 0$

$\Leftrightarrow 2x + y - 1 = 0$

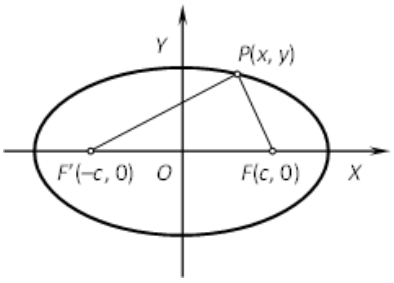
c. Ellips

1) Persamaan Ellips Bentuk baku

Ellips adalah tempat kedudukan titik-titik sedemikian hingga jumlah jaraknya dari pasangan dua titik tertentu yang berbeda adalah konstan tertentu. Dua titik tertentu di atas disebut titik **fokus** (*foci*).

Untuk menurunkan persamaan kurva ellips, dimisalkan kedua fokus berada pada sumbu-x dan sumbu-y menjadi bisektor tegaklurus segmen yang menghubungkan kedua fokus. Misalkan jarak antara kedua fokus adalah $2c$, sehingga titik fokusnya adalah $F(c, 0)$ dan $F'(-c, 0)$ (perhatikan gambar 2.3.20.).

Gambar 2.3.17	Ellips



Jika $P(x, y)$ adalah sembarang titik yang berada pada ellips, maka menurut definisi akan berlaku

$$PF + PF' = \text{konstan.} \qquad (1)$$

Dan apabila dimisalkan konstanta tertentu itu adalah $2a$, maka dengan menggunakan rumus jarak untuk menyatakan PF dan PF' diperoleh:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 4a^2 + 4cx$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a + \frac{cx}{a}$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = a^2 + 2cx + \frac{c^2x^2}{a^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{a^2 - c^2}{a^2}x^2 + y^2 = a^2 - c^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1 \qquad (2)$$

Segitiga $F'PF$ pada gambar 5.1, dengan titik-titik sudut $(-c, 0)$, $(c, 0)$, dan (x, y) salah satu sisinya mempunyai panjang $2c$. Sedangkan jumlah dua sisi yang lain adalah $2a$. Jadi

$2a > 2c$

$a > c$

$a^2 > c^2$

$a^2 - c^2 > 0$.

Karena $a^2 - c^2$ adalah positif, maka bisa diganti dengan bilangan positif lain katakanlah

$$b^2 = a^2 - c^2 \qquad (3)$$

Ini juga berarti bahwa $b<a$.

Jika persamaan (3) disubstitusikan ke persamaan (2) maka akan diperoleh persamaan:

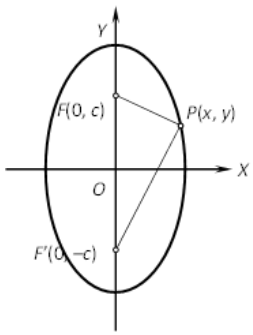
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (4)$$

Persamaan (4) di atas disebut *persamaan ellips bentuk baku*.

Jika fokus ellips adalah titik-titik $(0, c)$ dan $(0, -c)$ yang berada di sumbu-y (gambar 2.3.21) maka persamaan ellips bentuk baku adalah

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \qquad (5)$$

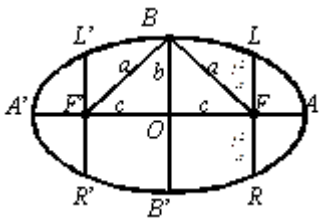
Gambar 2.3.18 **Ellips bentuk baku**



Dalam hal ini bilangan yang lebih besar adalah berada di bawah suku y^2.

Karakteristik utama suatu ellips persamaan (4) ditunjukkan pada gambar 2.3.22)

Gambar 2.3.19	Karakteristik Ellips



Lebih dahulu kita amati bahwa grafik dari ellips dengan persamaan (4), adalah simetris dengan sumbu-x dan sumbu-y. Selanjutnya grafik memotong sumbu-x di titik $(a, 0)$ dan $(-a, 0)$, dan memotong sumbu-y di titik $(0, b)$ dan $(0, -b)$.

Garis yang melalui kedua fokus dinamakan **sumbu utama** ellips. Untuk ellips dengan persamaan berbentuk (4) sumbu-x menjadi sumbu utama ellips. Titik potong ellips dengan sumbu utamanya disebut **puncak**. Jadi untuk ellips dalam persamaan (4) puncaknya adalah $A(a, 0)$ dan $A'(-a, 0)$. Titik pada sumbu utama yang terletak di tengah-tengah kedua puncak ellips dinamakan **pusat** ellips. Pusat ellips dengan bentuk persamaan (4) adalah berimpit dengan titik asal. Segmen garis yang menghubungkan kedua puncak disebut **sumbu mayor (sumbu panjang)** ellips dengan panjang $2a$ satuan, dan kita katakan bahwa a adalah satuan panjang setengah panjang sumbu mayor. Pada ellips ini segmen garis yang menghubungkan titik potong ellips dengan sumbu-y yaitu titik $(0, b)$ dan $(0, -b)$ disebut **sumbu minor (sumbu pendek)** ellips. Panjang sumbu minor adalah $2b$ satuan, sehingga b adalah satuan panjang setengan sumbu

minor. Titik-titik tetap F dan F' terletak pada sumbu mayor dan disebut **fokus**, sebagaimana telah disebutkan pada definisi, adalah berjarak c dari pusat ellips.

Karakteristik dari ellips dengan persamaan (5) secara essensial adalah sama. Pada kenyataannya ellips dengan bentuk persamaan (4) dan (5) adalah identik dalam bentuk dan ukuran, hanya berbeda dalam posisi.

Karena titik B pada ellips, maka jumlah jarak dari kedua fokus adalah $2a$; yaitu $BF + BF' = 2a$. Akan tetapi B berada pada bisektor tegak lurus dari FF', hal ini berarti berjarak sama dari F dan F' yaitu $BF = BF' = a$. Hal ini memungkinkan kita untuk memberikan interpretasi geometris pada relasi (4). Pada kenyataannya pada gambar 5.3 terlihat bahwa a adalah sisi miring dan b dan c adalah sisi-sisi dari segitiga siku-siku BOF. Hal ini juga memberikan metoda geometrik berikut untuk menentukan letak fokus ellips: *letakkan satu kaki jangka pada salah satu titik puncak sumbu minor, dengan radius sama dengan panjang setengah sumbu mayor, lukislah busur hingga memotong sumbu mayor. Titik potong garis lukis dengan sumbu mayor merupakan fokus ellips.*

Tali busur yang melalui salah satu fokus dan tegak lurus dengan sumbu mayor disebut **latus rektum**. Sedangkan titik potong latus rektum dengan ellips disebut **latera rekta**. Untuk mencari panjang latus rektum diberikan nilai $x = c = \sqrt{a^2 - b^2}$ pada persamaan (4) dan dengan menyelesaikan persamaan untuk y diperoleh $y = \pm b^2/a$. Jadi latera rekta ellips (4) adalah $L(c, b^2/a)$ dan $R(c, -b^2/a)$, sehingga panjang latus rektum ellips adalah $2b^2/a$. Jika panjang setengah latus rektum dinotasikan dengan l maka

$$l = \frac{b^2}{a} \tag{6}$$

Sebuah ellips dapat dibuat sketsa grafiknya secara kasar dengan memperhatikan ujung-ujung sumbu mayor dan minor dan ujung latus rektum, dan dengan menggunakan kenyataan bahwa grafinya simetrik

terhadap kedua sumbu. Konstruksi secara mekanik akan diberikan pada seksi lain.

Contoh 1:

Selidiki dan buat sketsa grafik dari persamaan $9x^2 + 25y^2 = 225$!

Jawab:

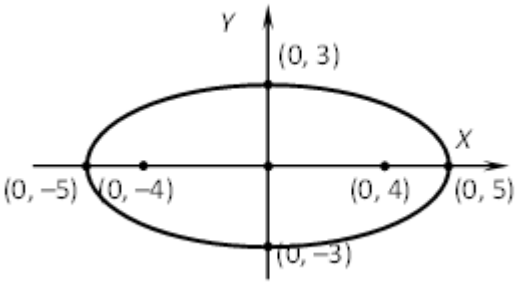
Pertama nyatakan persamaan yang diberikan ke dalam bentuk baku dengan membagi masing-masing ruas dengan 225 dan diperoleh bentuk baku

$$\frac{9x^2}{225} + \frac{25y^2}{225} = 1$$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Dalam hal ini $a^2 = 25$, $b^2 = 9$, dan $c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16$, atau $a = 5$, $b = 3$, $c = 4$. Jadi persamaan di atas adalah ellips yang berpusat di (0, 0), puncak (±5, 0) dan titik fokus (±4, 0). Sumbu mayor sejajar dengan sumbu-x dan panjangnya 10 satuan, dan sumbu minor panjangnya 6 satuan. Sketsa grafik dapat dilihat di gambar 2.3.20

Gambar 2.3.20 **Grafik Ellips**



Contoh 2:

Tentukan persamaan ellips dengan pusat (0, 0), salah satu puncak (0, −13), dan salah satu titik fokus (0, 12).!

Jawab:

Puncak (0, −13) berarti sumbu mayor sejajar dengan sumbu-y dengan a = 13, panjang sumbu mayor = 26 dan karena fokus di (0, 12) berarti c = 12. panjang sumbu minor dapat dicari dengan rumus

$b^2 = a^2 - c^2 = 13^2 - 12^2 = 169 - 144 = 25$

Jadi b = 5.

Bentuk baku dari persamaan ellips yang dicari adalah

$$\frac{y^2}{169} + \frac{x^2}{25} = 1$$

Contoh 3:

Suatu kelengkungan berbentuk setengah ellips dengan lebar alas 48 meter dan tinggi 20 meter. Berapa lebar kelengkungan itu pada ketinggian 10 meter dari alas ?

Jawab:

Gambar 5.5 memperlihatkan sketsa lengkungan dan sumbu-sumbu koordinat dapat dipilih sedemikian hingga sumbu-x terletak pada alas dan titik asal adalah titik tengah alas. Maka sumbu utama ellips terletak sepanjang sumbu-x, pusatnya di titik asal, a = ½·48 = 24, b = 20. Persamaan ellips berbentuk

$$\frac{x^2}{576} + \frac{y^2}{400} = 1$$

Pada ketinggian 10 meter, berarti untuk nilai y = 10 akan diperoleh x yang menyatakan lebar setengah lengkungan pada ketinggian 10 meter. Jadi

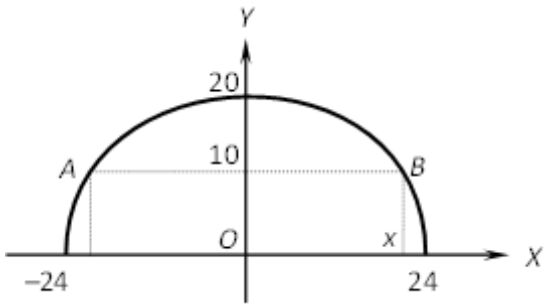
$$\frac{x^2}{576} + \frac{10^2}{400} = 1$$

sehingga diperoleh

$x^2 = 432$, $x = 12\sqrt{3}$

Dengan demikian pada ketinggian 10 meter dari alas, lebar kelengkungan adalah AB = $24\sqrt{3}$ *meter.*

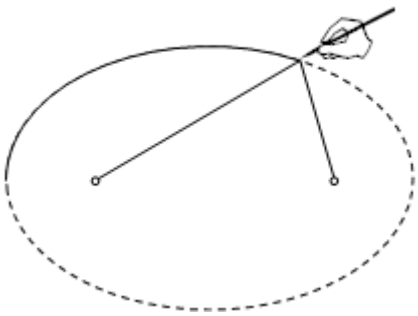
Gambar 2.3.21	Lengkung Ellips



2) Konstruksi Mekanik sebuah Ellips

Dari definisi, sebuah ellips dapat dikonstruksi dengan mengikat ujung tali sepanjang 2a pada dua titik sejauh 2c. Kemudian tarik dan tegangkan tali dengan pensil seperti terleihat pada gambar 5.6 berikut. Gerakkan pensil dengan selalu menjaga agar tali tetap tegang. Hasil lukisan pensil itu akan merupakan sebuah ellips.

Gambar 2.3.22	Konstruksi Mekanik Ellips



3) Persamaan Ellips Bentuk Umum

Ellips yang mempunyai sumbu simetri sejajar dengan sumbu koordinat dan berpusat pada (h, k), persamaannya dapat diperoleh dengan mentranslasikan sumbu koordinat sedemikian hingga sumbu koordinat berimpit pada pusat ellips. Sehingga persamaan ellips akan berbentuk

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \qquad (1)$$

atau $$\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1 \qquad (2)$$

bergantung apakah sumbu mayor horisontal atau vertikan.

Kedua persamaan (1) dan (2) di atas dapat direduksi ke dalam bentuk

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (3)$$

yang mana AC > 0 (yaitu A dan C keduanya posisif atau keduanya negatif) dan A ≠ C. (Jika A = C, maka akan merupakan lingkaran). Persamaan (3) disebut **persamaan ellips bentuk umum**.

Sebaliknya dapat ditunjukkan bahwa sembarang persamaan berbentuk (3) dapat direduksi menjadi bentuk (1) atau bentuk (2), atau menjadi persamaan yang mirip, tetapi pada ruas kanan adalah bilangan 0 atau –1. Dalam hal ini persamaan (3) akan menggambarkan tiga kategori ellips, yaitu **ellips real** dengan sumbu sejajar sumbu koordinat, atau **ellips titik** yaitu apabila ruas kanan bernilai 0, atau **ellips imajiner** yaitu apabila ruas kanan bernilai –1.

Contoh 1:

Gambarlah ellips yang mempunyai persamaan

$3x^2 + 5y^2 - 6x + 20y + 8 = 0$!

Jawab:

Untuk menggambar ellips di atas persamaan harus diubah ke dalam bentuk baku, yaitu dengan melakukan manipulasi bentuk kuadrat sempurna sebagai berikut:

$$3x^2 + 5y^2 - 6x + 20y + 8 = 0$$

$\Leftrightarrow$ $$3x^2 - 6x + 5y^2 + 20y = -8$$

$\Leftrightarrow$ $$3(x^2 - 2x) + 5(y^2 + 4y) = -8$$

$\Leftrightarrow$ $$3(x^2 - 2x + 1) + 5(y^2 + 4y + 4) = -8 + 3 + 20$$

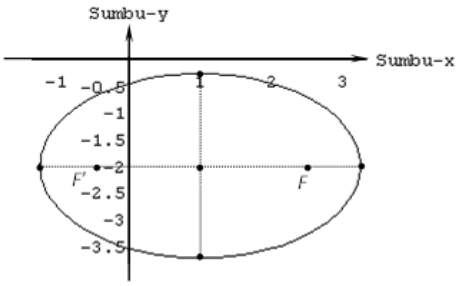
$\Leftrightarrow$ $$3(x - 1)^2 + 5(y^2 + 2)^2 = 15$$

$\Leftrightarrow$ $$\frac{(x-1)^2}{5} + \frac{(y+2)^2}{3} = 1$$

Dari persamaan terakhir dapatlah disimpulkan bahwa ellips yang terjadi berpusat di (1, –2), a = $\sqrt{5}$ sehingga panjang sumbu mayor adalah 2 $\sqrt{5}$ sejajar dengan sumbu-x. Diketahui pula b = $\sqrt{3}$, sedangkan fokusnya diperoleh dengan menghitung $c^2 = a^2 - b^2 = 5 - 3 = 2$, sehingga c = $\sqrt{2}$ dan koordinat titik fokus adalah $(1 \pm \sqrt{2}, -2)$. Titik puncak yaitu titik potong dengan sumbu mayor di $(1 \pm \sqrt{5}, -2)$, dan titik potong dengan sumbu minor di titik $(1, -2 \pm \sqrt{3})$.

Sketsa gambar dapat dilihat pada gambar 2.3.25 berikut.

Gambar 2.3.23 **grafik ellips 2**



4) Persamaan Garis Singgung pada Ellips

Seperti halnya pada lingkaran, terdapat dua macam garis singgung yang akan dibicarakan, yaitu garis singgung yang melalui salah satu titik pada ellips dan garis singgung yang mempunyai kemiringan tertentu.

(a) Persamaan Garis Singgung yang melalui titik di Ellips

Misalkan $P(x_1, y_1)$ titik pada ellips

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (1)$$

maka titik *P* akan memenuhi persamaan (1) yaitu

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \qquad (2)$$

Persamaan garis singgung ellips di titik P merupakan anggota keluarga garis yang melalui $P(x_1, y_1)$ dan berbentuk:

$$y = m(x - x_1) + y_1 \qquad (3)$$

Jika persamaan (3) disubstitusikan ke persamaan (1) maka akan diperoleh persamaan kuadrat dalam x yaitu:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(m(x - x_1) + y_1)^2}{b^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad (a^2 + b^2)x^2 - 2a^2(m^2x_1 - my_1)x + a^2(m^2x_1^2 + y_1^2 - 2mx_1y_1 - b^2) = 0 \quad (4)$$

Karena garis (3) menyinggung kurva (1) maka dari pengetahuan aljabar haruslah persamaan (4) mempunyai akar yang sama. Hal ini berarti nilai diskriminan persamaan kuadrat di atas bernilai nol, yaitu

$$[2a^2(m^2x_1 - my_1)]^2 - 4(a^2 + b^2)a^2(m^2x_1^2 + y_1^2 - 2mx_1y_1 - b^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (a^2 - x_1^2)m^2 + 2x_1y_1m + (b^2 - y_1^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2\left(1 - \frac{x_1^2}{a^2}\right)m^2 + 2x_1y_1m + b^2\left(1 - \frac{y_1^2}{b^2}\right) = 0$$

Substitusi persamaan (2) ke persamaan terakhir akan memberikan persamaan kuadrat dalam m yaitu

$$a^2\frac{y_1^2}{b^2}m^2 + 2x_1y_1m + b^2\frac{x_1^2}{a^2} = 0 \qquad (5)$$

Dari persamaan (5) diperoleh selesaian untuk m yaitu

$$m = -\frac{x_1}{a^2}\frac{b^2}{y_1} \qquad (6)$$

Jika persamaan (6) disubstitusikan ke persamaan (3) diperoleh persamaan garis singgung ellips di titik P yaitu

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} \qquad (7)$$

Dengan persamaan (2) persamaan garis singgung direduksi menjadi

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1 \qquad (8)$$

Apabila titik $P(x_1, y_1)$ tidak terletak pada lingkaran, maka persamaan (8) disebut **persamaan polar**terhadap titik P dan titik P disebut **titik polar**.

Jika ellips dalam bentuk baku yang berpusat di (h, k), yaitu

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \qquad (9)$$

maka persamaan garis singgung ellips dengan persamaan (9) di titik $P(x_1, y_1)$ yang terletak di ellips tersebut dapat diperoleh dari persamaan (8) dengan mentranslasikan sumbu koordinat sedemikian hingga pusat sumbu $O(0, 0)$ bergeser ke titik$O'(-h, -k)$.

Misalkan sumbu baru hasil translasi adalah X' dan Y', dan koordinat baru adalah x' dan y', maka hubungan koordinat baru dan koordinat lama adalah:

$$x = x' - h \text{ dan } y = y' - k \qquad (10)$$

Koordinat titik $P(x_1, y_1)$ juga mengalami perubahan terhadap sistem koordinat baru yaitu

$$x_1 = x_1' - h \text{ dan } y = y_1' - k \qquad (11)$$

Selanjutnya dengan mensubstitusikan persamaan (10) dan (11) ke persamaan (8) akan diperoleh

$$\frac{(x_1' - h)(x' - h)}{a^2} + \frac{(y_1' - k)(y' - k)}{b^2} = 1 \qquad (12)$$

Jika tanda aksen(') dihilangkan maka diperoleh persamaan garis singgung ellips (9) di titik $P(x_1, y_1)$ yang terletak pada ellips tersebut adalah

$$\frac{(x_1-h)(x-h)}{a^2}+\frac{(y_1-k)(y-k)}{b^2}=1 \qquad (12)$$

Dengan cara yang sama dapat ditentukan persamaan garis singgung ellips dengan persamaan

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}+\frac{(x-h)^2}{b^2}=1 \qquad (13)$$

di titik $P(x_1, y_1)$ yang terletak pada ellips tersebut diberikan oleh persamaan

$$\frac{(y_1-k)(y-k)}{a^2}+\frac{(x_1-h)(x-h)}{b^2}=1 \qquad (14)$$

Persamaan (12) jika dijabarkan lebih lanjut akan menghasilkan

$$b^2x_1x + a^2y_1y - b^2h(x_1 + x) - a^2k(y_1 + y) + (b^2h^2 + a^2k^2 - a^2b^2) = 0 \qquad (15)$$

Sedangkan penjabaran persamaan (9) dalam bentuk umum adalah

$$b^2x^2 + a^2y^2 - 2b^2hx - 2a^2ky + (b^2h^2 + a^2k^2 - a^2b^2) = 0 \qquad (16)$$

Dengan memperhatikan persamaan (15) dan (16) maka secara umum dapat disimpulkan bahwa persamaan garis singgung ellips dalam bentuk umum

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

di titik (x_1, y_1) *yang terletak pada ellips tersebut diberikan oleh:*

$$Ax_1x + Cy_1y + \tfrac{1}{2}D(x_1 + x) + \tfrac{1}{2}E(y_1 + y) + F = 0 \qquad (17)$$

Untuk memudahkan mengingat, bahwa persamaan garis singgung ellips dalam bentuk umum di sembarang titik (x_1, y_1) *pada ellips dapat ditemukan dengan cara mengganti suku-suku pada persamaan sebagai berikut:*

x^2 *diganti dengan* x_1x

y^2 *diganti dengan* y_1y

x *diganti dengan* $\frac{1}{2}(x_1 + x)$

y *diganti dengan* $\frac{1}{2}(y_1 + y)$

Harus diingat bahwa cara di atas dapat dilakukan hanya jika titik (x_1, y_1) berada pada ellips. *Akan tetapi metoda di atas juga dapat digunakan sebagai metoda alternatif untuk mencari persamaan garis singgung ellips yang melalui sebuah titik di luar ellips tersebut.*

Contoh 1:

Tentukan persamaan garis singgung ellips $9x^2 + 2y^2 - 18x + 4y - 7 = 0$ yang melalui titik (0, 2).!

Jawab:

Jelas bahwa titik (0, 2) tidak terletak pada ellips tersebut. Dalam hal ini kita tidak bisa menggunakan persamaan (17) secara langsung. Misalkan (x_1, y_1) adalah titik singgung dari garis singgung ellips yang melalui (0, 2). Maka persamaan garis singgung yang dicari dalam bentuk

$$9x_1x + 4y_1y - \tfrac{1}{2}\cdot 18(x_1 + x) + \tfrac{1}{2}\cdot 2(y_1 + y) - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -9x_1x + 4y_1y - 9x_1 - 9x + y_1 + y - 7 = 0 \qquad (18)$$

Karena garis singgung melalui titik (0, 2), maka persamaan di atas harus memenuhi koordinat (0, 2), sehingga

$$-9x_1\cdot 0 + 4y_1\cdot 2 - 9x_1 - 9\cdot 0 + y_1 + 2 - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad y_1 = x_1 + 5/9 \qquad (19)$$

Tetapi titik (x_1, y_1) *berada pada ellips, akibatnya berlaku hubungan*

$$9x_1^2 + 4y_1^2 - 18x_1 + 2y_1 - 7 = 0 \qquad (20)$$

Substitusi persamaan (19) ke (20) diperoleh persamaan kuadrat dalam x_1,

$$1053x^2 - 936x - 377 = 0$$

yang memberikan penyelesaian untuk $x_1 = \frac{4}{9} \pm \frac{\sqrt{5}}{3}$. *Dengan demikian juga diperoleh nilai* $y_1 = 1 \pm \frac{\sqrt{5}}{3}$. *Jadi koordinat titik-titik singgungnya pada ellips adalah* $\left(\frac{4}{9} + \frac{\sqrt{5}}{3}, 1 + \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ *dan* $\left(\frac{4}{9} - \frac{\sqrt{5}}{3}, 1 - \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$. *Selanjutnya dengan persamaan (17) dapat diterapkan pada kasus ini untuk mendapatkan persamaan garis singgung yang dicari atau mensubstitusikan nilai-nilai* (x_1, y_1) *ke persamaan (18). Terdapat dua garis singgung yang dicari.*

Pertama yang melalui titik $\left(\frac{4}{9} + \frac{\sqrt{5}}{3}, 1 + \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ *adalah*

$$-9\left(\frac{4}{9} + \frac{\sqrt{5}}{3}\right)x + 4\left(1 + \frac{\sqrt{5}}{3}\right)y - 9\left(\frac{4}{9} + \frac{\sqrt{5}}{3}\right) - 9x + \left(1 + \frac{\sqrt{5}}{3}\right) + y - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (13 + 3\sqrt{5})x - (5 + \frac{4}{3}\sqrt{5})y + (10 + \frac{8}{3}\sqrt{5}) = 0$$

Dan kedua yang melalui titik $\left(\frac{4}{9} - \frac{\sqrt{5}}{3}, 1 - \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ *adalah*

$$-9\left(\frac{4}{9} - \frac{\sqrt{5}}{3}\right)x + 4\left(1 - \frac{\sqrt{5}}{3}\right)y - 9\left(\frac{4}{9} - \frac{\sqrt{5}}{3}\right) - 9x + \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{3}\right) + y - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad (13 - 3\sqrt{5})x + (5 - \frac{4}{3}\sqrt{5})y - (10 - \frac{8}{3}\sqrt{5}) = 0$$

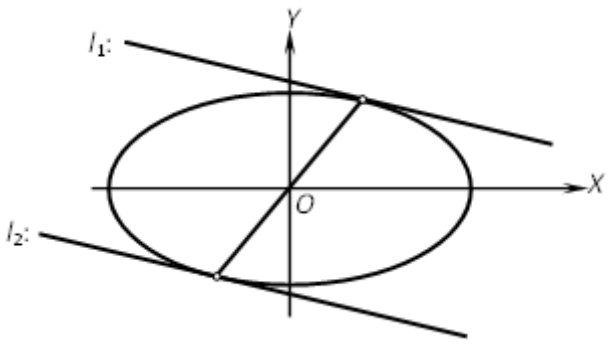
(b) Persamaan Garis Singgung yang mempunyai Kemiringan Tertentu

Sekarang kita bicarakan garis singgung suatu ellips yang mempunyai kemiringan tertentu. Pertama misalkan akan dicari persamaan garis singgung ellips

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (1)$$

dan mempunyai kemiringan *m* (lihat gambar 2.3.28.).

Gambar 2.3.24 **grafik ellips 4**



Karena kemiringan garis singgung l sudah diketahui maka garis l merupakan anggota berkas garis yang berbentuk

$$y = mx + c \qquad (2)$$

dengan *c* parameter konstanta yang belum diketahui.

Jika persamaan garis (2) disubstitusikan ke persamaan ellips (1) akan diperoleh hubungan

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(mx+c)^2}{b^2} = 1$$

$\Leftrightarrow (b^2 + a^2m^2)x^2 + 2mca^2x + (a^2c^2 - a^2b^2) = 0$

Oleh karena garis menyinggung ellips maka haruslah memotong pada satu titik saja, dengan kata lain persamaan kuadrat di atas haruslah mempunyai penyelesaian yang kembar. Hal itu berarti nilai diskriminannya haruslah nol, yaitu

$(2mca^2)^2 - 4(b^2 + a^2m^2)(a^2c^2 - a^2b^2) = 0$

dan memberikan penyelesaian untuk nilai c

$$c^2 = (b^2 + a^2m^2)$$

$$\Leftrightarrow \quad c = \pm\sqrt{a^2m^2 + b^2}$$

Jadi persamaan garis singgung yang dicari adalah

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2} \qquad (3)$$

Sedangkan persamaan garis singgung pada ellips dengan persamaan baku umum

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

yang mempunyai kemiringan m diberikan oleh:

$$y - k = m(x - h) \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2} \qquad (4)$$

5) Terapan Ellips

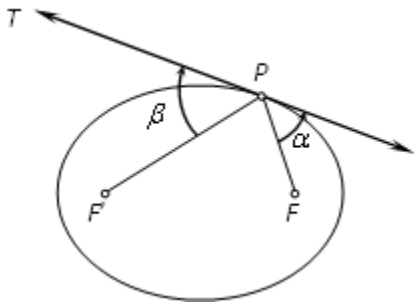
Ellips mempunyai banyak terapan di dalam ilmu pengetahuan maupun seni. Pegas pada sistem suspensi mobil sering berbentuk elliptik atau semi elliptik.

Dalam astronomi, lintasan edar planet dan satelit berupa ellips, di mana matahari berada pada salah satu fokusnya. Hal ini seperti dijelaskan pada hukum Keppler tentang gerak edar planet.

Dalam bidang konstruksi dan arsitektur, lengkungan jembatan kadang-kadang berbentuk ellips, suatu bentuk yang mempunyai efek kekuatan dan nilai seni.

Ada satu sifat aplikatif pada ellips berkenaan dengan pantulan ellips. Perhatikan gambar 2.3.29 berikut.

Gambar 2.3.25 **Terapan Ellips**



PT adalah sembarang garis singgung ellips yang dengan fokus di F dan F'. Misalkan ukuran sudut antara FP dengan PT adalah α, dan ukuran sudut antara $F'P$ dengan PT adalah β, maka dapat ditunjukkan bahwa $\alpha = \beta$ (lihat latihan 5 C no. 1). Oleh karena itu sinar cahaya yang memancar dari sumber di salah satu fokus cermin elliptik yang mengenai cermin akan dipantulkan sepanjang garis yang melalui fokus lainnya. Sifat ellips ini digunakan dalam **serambi bisikan** dengan langit-langit yang mempunyai penampang berupa lengkungan ellips dengan fokus yang sama. Seseorang yang berdiri di salah satu fokus F dapat mendengan bisikan orang lain pada fokus F'yang lain sebab gelombang suara yang berasal dari pembisik di F'

mengenai langit-langit dan oleh langit-langit dipantulkan ke pendengan di *F*. Contoh termashur serambi bisikan ada di bawah kubah gedung Capitol di Washington, D.C. Yang lain ada di Mormon Tabernacle di Salt Lake City

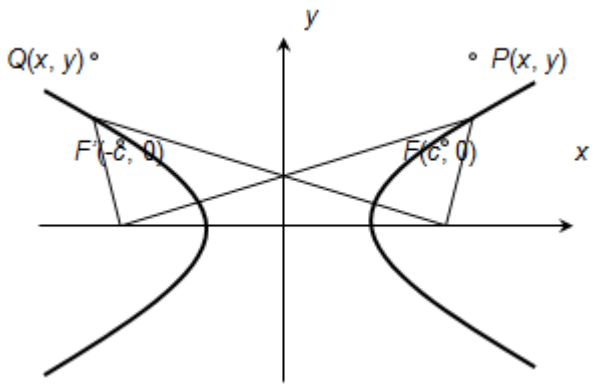
d. Hiperbola

Hiperbola adalah himpunan semua titik (x, y) pada bidang sedemikian hingga selisih positif jarak titik (x, y) terhadap pasangan dua titik tertentu yang disebut titik *fokus* (*foci*) adalah tetap.

Untuk menentukan persamaan hiperbola, misalkan kita pilih titik-titik fokus *F* dan *F'* terletak pada sumbu-*x*. Sedangkan sumbu-*y* diletakkan di tengah-tengah segmen garis *FF'*.

Misalkan kita tentukan titik fokusnya adalah $F'(-c, 0)$ dan $F(c, 0)$ sedangkan selisih jarak konstan tertentu adalah $2a$. (lihat gambar 2.3.26.).

Gambar 2.3.26 Hiperbola 1



Jika (x, y) merepresentasikan titik pada hiperbola, maka dari definisi diperoleh

$$\overline{PF'} - \overline{PF} = 2a$$

$$\sqrt{(x-(-c))^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 2a$$

$\Leftrightarrow \quad (x+c)^2 + y^2 = (x-c)^2 + y^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + 4a^2$

$\Leftrightarrow \quad x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = x^2 - 2cx + c^2 + y^2 + 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$

$\Leftrightarrow \quad -4a^2 + 4cx = 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$

$\Leftrightarrow \quad -a + \frac{cx}{a} = \sqrt{(x-c)^2+y^2}$

$\Leftrightarrow \quad \sqrt{(x-c)^2+y^2} = -a + \frac{cx}{a}$

$\Leftrightarrow \quad x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = a^2 - 2cx + \frac{c^2x^2}{a^2}$

$\Leftrightarrow \quad \frac{c^2-a^2}{a^2}x^2 - y^2 = c^2 - a^2$

$\Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2-a^2} = 1$

Dalam segitiga *PFF'* terlihat bahwa

$$\overline{PF'} < \overline{PF} + \overline{FF'}$$

$$\overline{PF'} - \overline{PF} < \overline{FF'}$$

$$2a < 2c$$

$$a < c$$

$$c^2 - a^2 > 0$$

Karena $c^2 - a^2$ adalah positif, maka bisa diganti dengan bilangan positif lain, sebut b^2 sehingga

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

dimana $b^2 = c^2 - a^2$. Ini merupakan bentuk baku persamaan hiperbola.

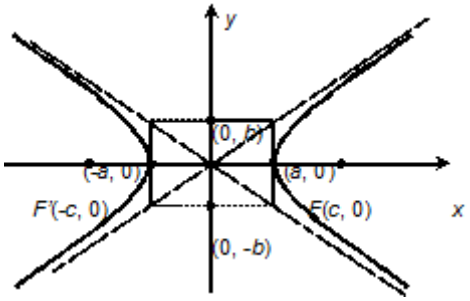
Kedua sumbu koordinat – sumbu-x dan sumbu-y adalah sumbu simetri pada hiperbola dan $(\pm a, 0)$ adalah titik-titik potong dengan sumbu-x. Dalam hal ini tidak memotong sumbu-y, sebab untuk $x = 0$ diperoleh

$$-\frac{y^2}{b^2} = 1,$$

yang mana tidak ada bilangan real y yang memenuhi persamaan di atas.

Sumbu-x (yang memuat dua titik dari hiperbola) disebut *sumbu tranversal* (*transverse axis*) dan sumbu-y disebut *sumbu sekawan* (*conjugate axes*). Titik potong hiperbola dengan sumbu trasversal disebut *titik ujung* (dalam hal ini $(\pm a, 0)$) dan perpotongan kedua sumbu simetri disebut *pusat* hiperbola. Jarak antara kedua titik ujung adalah $2a$ dan disebut *sumbu mayor* dan besaran $2b$ disebut *sumbu minor*. Dalam hal ini panjang sumbu mayor **tidak harus lebih besar**dari sumbu minor. Hal ini berbeda pada persamaan ellips. Sketsa grafik persamaan hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ dan posisi titik-titik $(\pm a, 0)$, $(\pm c, 0)$, dan $(0, \pm b)$ dapat dilihat pada gambar 2.3.27berikut.

Gambar 2.3.27 **Hiperbola 2**



Garis $ax \pm by = 0$ disebut persamaan garis asimtotik dari hiperbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Teorema 1:

Titik (x, y) berada pada hiperbola yang mempunyai fokus $(\pm c, 0)$ dan titik-titik ujung $(\pm a, 0)$ jika dan hanya jika memenuhi persamaan

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

dimana $b^2 = c^2 - a^2$.

Peranan sumbu-x dan sumbu-y dalam bentuk grafik akan dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 2:

Titik (x, y) berada pada hiperbola yang mempunyai fokus $(0, \pm c)$ dan titik-titik ujung $(0, \pm a)$ jika dan hanya jika memenuhi persamaan

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

dimana $b^2 = c^2 - a^2$.

Dari teorema 1 dan 2 di atas, bahwa sumbu mayor sejajar dengan sumbu yang variabelnya berharga positif.

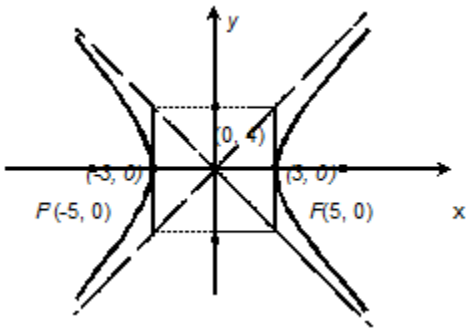
Contoh 1:

Selidiki dan buat sketsa grafik dari persamaan $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$!

Jawab:

Jika kita perhatikan terlihat bahwa $a^2 = 9$, $b^2 = 16$, dan $c^2 = a^2 + b^2 = 25$. Hiperbola ini mempunyai pusat (0, 0), titik-titik ujung $(\pm 3, 0)$, dan titik fokus $(\pm 5, 0)$. Persamaan garis asimtotik hiperbola di atas adalah $3x \pm 4y = 0$. Panjang sumbu mayor = 6 sejajar sumbu-x dan panjang sumbu minor = 8. Sketsa grafik dapat dilihat pada gambar 2.3.28 dibawah ini.

Gambar 2.3.28 **Hiperbola 3**



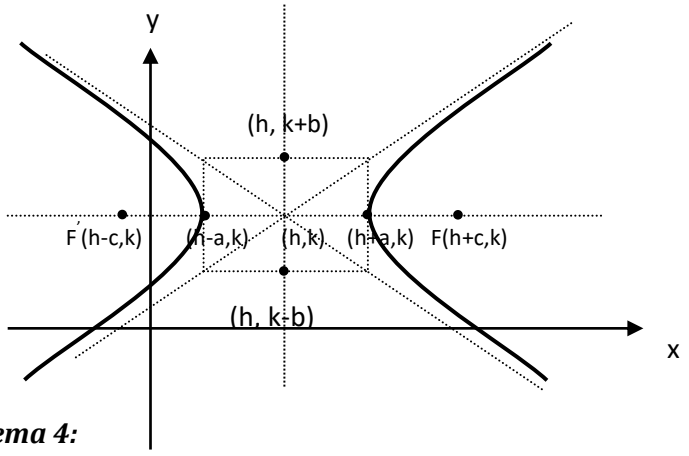
Teorema 3:

Titik (x, y) berada pada hiperbola yang mempunyai pusat (h, k), fokus $(h \pm c, k)$ dan titik-titik ujung $(h \pm a, k)$ jika dan hanya jika memenuhi persamaan

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

dengan $b^2 = c^2 - a^2$ *(lihat gambar 2.3.29)*

Gambar 2.3.29 **Hiperbola 5**



Teorema 4:

Titik (x, y) berada pada hiperbola yang mempunyai pusat (h, k), fokus $(h, k \pm c)$ dan titik-titik ujung $(h, k \pm a)$ jika dan hanya jika memenuhi persamaan

$$\frac{(y-h)^2}{a^2} - \frac{(x-k)^2}{b^2} = 1$$

Contoh 4:

Sebuah hiperbola mempunyai persamaan

$$9x^2 - 4y^2 - 36x - 8y + 68 = 0$$

Tentukan pusat, titik ujung, titik fokus dan gambar grafik hiperbola tersebut.!

Jawab*:*

Kita ubah bentuk persamaan di atas ke dalam bentuk baku seperti pada teorema 6.3 atau teorema 6.4.

$$9x^2 - 4y^2 - 36x - 8y + 68 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 9x^2 - 36x - 4y^2 - 8y = -68$$

$$\Leftrightarrow \quad 9(x^2 - 4x + 4) - 4(y^2 + 2y + 1) = -68 + 36 - 4$$

$$\Leftrightarrow \quad 9(x-2)^2 - 4(y+1)^2 = -36$$

$$\Leftrightarrow \quad 4(y+1)^2 - 9(x-2)^2 = 36$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(y+1)^2}{9} - \frac{(x-2)^2}{4} = 1$$

Dari persamaan terakhir diperoleh informasi h = 2, k = –1, $a^2 = 9$, dan $b^2 = 4$. Dengan demikian $c^2 = a^2 + b^2 = 9 + 4 = 13$.

Menurut teorema 6.4 dapatlah disimpulkan bahwa hiperbola yang terjadi berpusat di (2, –1), titik-titik ujungnya (2, –1 + 3) = (2, 2) dan (2, –1 – 3) = (2, –4), titik fokusnya adalah (2, –1 + $\sqrt{13}$) dan (2, –1 – $\sqrt{13}$).

2. Vektor

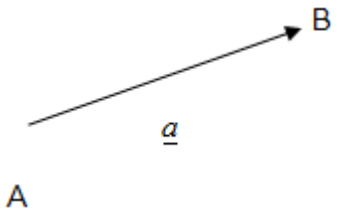
a) Vektor dan Notasinya

Konsep vektor banyak berperan dalam menunjang pemahaman materi fisika atau keteknikan.

Vektor ialah suatu besaran yang mempunyai besar dan arah. Dengan demikian maka dua vektor yang mempunyai besar dan arah yang sama, maka dua vektor tersebut adalah sama, tanpa memandang di mana vektor tersebut berada.

Suatu vektor digambarkan dengan suatu anak panah di mana panjangnya anak panah menyatakan besarnya vektor dan arah anak panahmenunjukkan arah dari vektor.

Gambar 2.3.30 **Ilustrasi Vektor**



Gambar ini menunjukkan gambar vektor, A disebut titik tangkap vektor / titik pangkal vektor dan B disebut titik ujung vektor (terminal).

Vektor tersebut dinyatakan : $\overrightarrow{AB}$ atau $\underline{a}$.

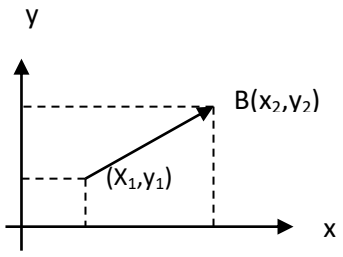
b) Vektor pada Bidang datar R^2 (Dimensi Dua)

Di dalam bidang datar (R^2) suatu vektor yang titik pangkalnya di A (x_1, y_1) dan titik ujungnya di B (x_2, y_2) dapat dituliskan dalam bentuk komponen :

Gambar 2.3.31 **Ilustrasi Vektor pada Bidang datar R^2**

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$$

Dilukiskan sebagai :



Vektor dalam bidang datar juga dapat dinyatakan dalam bentuk :

Kombinasi linear vektor satuan *i*, *j* , misalnya vektor $\underline{a}$ = x*i* + y*j*.

Koordinat kartesius, yaitu : $\underline{a}$ = (a_1, a_2).

Koordinat kutub, yaitu : $\underline{a}$ = r $\angle\theta$ dengan r = $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ dan tg θ = $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Ruang Lingkup Vektor

1) **Vektor Nol**

Vektor nol adalah vektor yang besar / panjangnya nol dan arahnya tak tentu. Pada sistem koordinat kartesius vektor nol digambarkan berupa titik. Di ruang dimensi dua vektor nol dilambangkan dengan $\underline{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2) Vektor Posisi

Vektor posisi adalah vektor yang titik pangkalnya terletak pada pusat koordinat O(0,0) dan titik ujungnya berada pada koordinat lain. Vektor posisi pada R^2 dari titik A(x,y) dinyatakan sebagai kombinasi linear vektor satuan sebagai berikut :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

Penulisan vektor $\vec{i}$ dan $\vec{j}$ menyatakan vektor satuan pada sistem koordinat. Vektor satuan $\vec{i}$ adalah vektor yang searah dengan sumbu X positif dan besarnya 1 satuan. Vektor satuan $\vec{j}$ adalah vektor yang searah dengan sumbu Y positif dan besarnya 1 satuan.

3) Modulus atau Besar Vektor atau Panjang vektor

Misalnya $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$, panjang vektor $\underline{a}$ dinotasikan $|\underline{a}|$ dengan $|\underline{a}| = \sqrt{a_1^{\,2} + a_2^{\,2}}$.

Jika diketahui titik A (x_1, y_1) dan B (x_2, y_2). Secara analitis, diperoleh komponen vektor $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$.

Panjang vektor $\overrightarrow{AB}$ dapat dirumuskan :

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Contoh:

Diketahui titik A(3, -5) dan B(-2, 7), tentukan hasil operasi vektor tersebut !

a. Komponen vektor $\overrightarrow{AB}$
b. Modulus/besar vektor $\overrightarrow{AB}$

Jawab:

a. Komponen vektor $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2-3 \\ 7-(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 12 \end{pmatrix}$

b. Modulus/besar vektor

$\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13$

4) Vektor Satuan

Vektor satuan adalah vektor yang mempunyai panjang (besar) 1 satuan. Vektor satuan dapat ditentukan dengan cara membagi vektor tersebut dengan besar (panjang) vektr semula.

Vektor satuan dari vektor $\underline{a}$ dirumuskan: $\underline{e} = \frac{\underline{a}}{|\underline{a}|}$.

c) Operasi Hitung Vektor di R^2

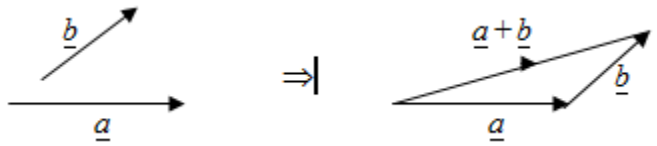
1) Operasi Penjumlahan Vektor

Penjumlahan dua vektor dapat dikerjakan dalam dua cara yaitu cara grafis dan analitis.

Cara Grafis

(1) Dengan cara penjumlahan segitiga atau segitiga vektor

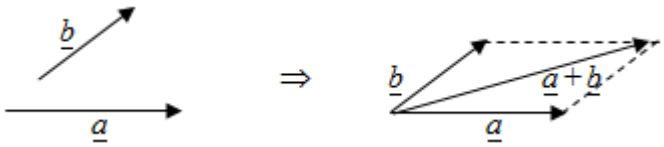
Gambar 2.3.32	Cara Grafis Vektor



Cara: pangkal vektor $\underline{b}$ digeser ke ujung vektor $\underline{a}$ maka vektor hasil $\underline{a}+\underline{b}$ adalah vektor yang menghubungkan pangkal vektor $\underline{a}$ dengan ujung vektor $\underline{b}$.

(2) Dengan cara penjumlahan jajar genjang atau jajar genjang vektor

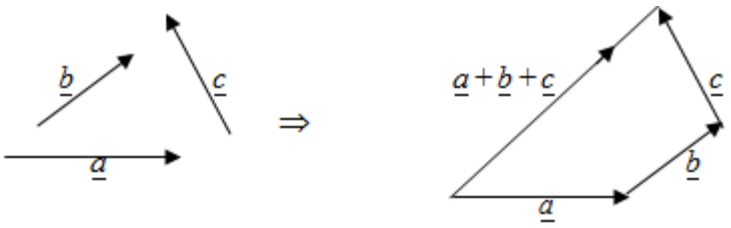
Gambar 2.3.33	Penjumlahan jajar Genjang



Cara: pangkal vektor $\underline{b}$ digeser ke pangkal vektor $\underline{a}$, dilukis jajar genjang, maka diagonal dari ujung persekutuan adalah $\underline{a}+\underline{b}$.

Untuk melakukan penjumlahan lebih dari dua vektor digunakan aturan segi banyak (potongan).

Gambar 2.3.34 **Penjumlahan Banyak Vektor**



(2) Jika vektor disajikan dalam bentuk komponen (dalam bidang kartesius) maka penjumlahan dapat dilakukan dengan menjumlahkan komponennya.

Misalnya: $\underline{a} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ dan $\underline{b} = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ maka $\underline{a}+\underline{b} = \begin{pmatrix} x_A + x_B \\ y_A + y_B \end{pmatrix}$

Contoh:

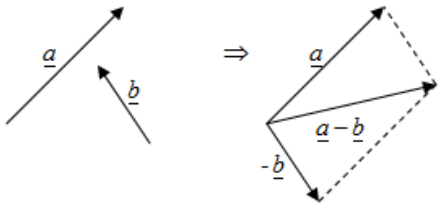
Apabila $\underline{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ dan $\underline{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ maka $\underline{a}+\underline{b} = \begin{pmatrix} 2+(-4) \\ -3+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

2) Pengurangan Vektor

Memperkurangkan vektor $\underline{b}$ dari vektor $\underline{a}$ didefinisikan sebagai menjumlahkan vektor negatif $\underline{b}$ pada vektor $\underline{a}$ dan ditulis :

$\underline{a}-\underline{b} = \underline{a} + (-\underline{b})$.

Gambar 2.3.35 **Pengurangan Vektor**



Apabila vektor disajikan dalam bentuk komponen (dalam bidang kartesius) maka pengurangan dapat dilakukan dengan mengurangkan komponen-komponennya.

3) Perkalian Vektor dan Skalar

Jika $\underline{a}$ suatu vektor dan m adalah skalar (bilangan nyata), maka m $\underline{a}$ atau $\underline{a}$ m adalah suatu vektor dengan kemungkinan :

(a) Jika m > 0 maka m $\underline{a}$ adalah vektor yang besarnya m kali $\underline{a}$ dan searah dengan $\underline{a}$.

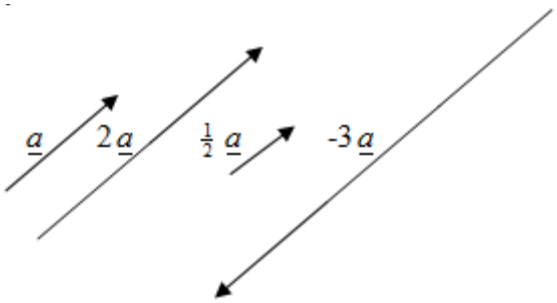
(b) Jika m < 0 maka m $\underline{a}$ adalah vektor yang besarnya m kali $\underline{a}$ dan arahnya berlawanan dengan $\underline{a}$.

(c) Jika m = 0 maka m $\underline{a}$ adalah nektor nol.

Contoh perkalian vektor dan skalar

(a) Vektor diberikan dalam bentuk gambar

Gambar 2.3.36 Perkalian Vektor



(b) Vektor diberikan dalm bentuk kmponen

Jika $\underline{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ maka $2\underline{a} = 2\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$

Jika $\underline{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ maka $\frac{1}{2}\underline{b} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Jika $\underline{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ maka $-2\underline{c} = -2\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -10 \end{pmatrix}$

Apabila titik-titik dalam vektor dapat dinyatakan sebagai perkalian vektor yang lain, titik-titik itu disebut kolinier (segaris).

4) Perkalian Dua Vektor

Operasi perkalian pada vektor dapat dikerjakan melalui dua cara sebagai berikut :

(a) Sudut antara kedua vektor diketahui

Diberikan vektor $\underline{a}$ =(a_1, a_2), $\underline{b}$ =(b_1, b_2) dan sudut yang dibentuk oleh vektor $\underline{a}$ dan $\underline{b}$ adalah α. Perkalian antara vektor $\underline{a}$ dan $\underline{b}$ dirumuskan sebagai berikut :

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \cos\alpha$$

(b) Sudut antara kedua vektor tidak diketahui

Diberikan vektor $\underline{a}$ =(a_1, a_2) dan $\underline{a}$ =(b_1, b_2). Hasil kali kedua vektor dirumuskan sebagai berikut :

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = a_1b_1 + a_2b_2$$

Sementara itu, dari dua buah vektor pada sistem koordinat kartesius dapat kita cari besar sudut yang dibentuk oleh kedua vektor yang dirumuskan sebagai berikut :

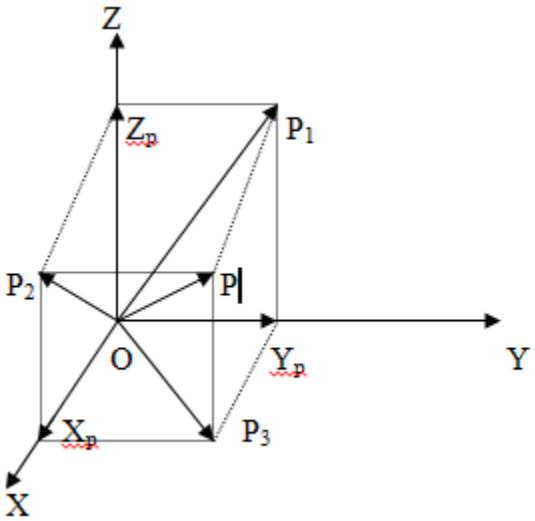
$$\cos\alpha = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{|\underline{a}||\underline{b}|}$$

d) Vektor pada Bangun Ruang

1) Vektor pada Ruang Dimensi 3

Untuk menentukan kedudukan atau letak titik di dalam ruang (R^3) dapat digunakan sistem sumbu koordinat siku-siku X, Y dan Z dengan masing-masing sumbu saling tegak lurus dan berpotongan di sebuah titik O yang disebut pusat sumbu koordinat.

Gambar 2.3.37 Vektor di R^3



Jarak P sampai bidang YOZ adalah X, atau $PP_1 = X_p$.

Jarak P sampai bidang XOZ adalah Y, atau $PP_2 = Y_p$.

Jarak P sampai bidang XOY adalah Z, atau $PP_3 = Z_p$.

Dinyatakan bahwa koordinat ruang dari P ditulis P (X_p, Y_p, Z_p).

Vektor $\overline{OP}$ dinyatakan dengan bentuk sebagai berikut:

(a). $\overline{OP} = X_p\vec{i} + Y_p\vec{j} + Z_p\vec{k}$ merupakan bentuk kombinasi linear dari $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Dengan $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ merupakan vektor satuan dalam koordinat ruang ($\vec{i}$

= vektor satuan pada sumbu X, $\vec{j}$ = vektor satuan pada sumbu Y dan $\vec{k}$ = vektor satuan pada sumbu Z).

(b). $\overline{OP} = \begin{pmatrix} X_p \\ Y_p \\ Z_p \end{pmatrix}$ merupakan bentuk kmponen vektor.

2) Ruang Lingkup Vektor

(a) Vektor Posisi

Vektor posisi titik P adalah vektor $\overline{OP}$ yaitu vektor yang berpangkal di O(0,0,0) dan berujung di titik P(x,y,z). Secara aljabar vektor $\overline{OP}$ dapat ditulis sebagai berikut :

$$\overline{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ atau } \overline{OP} = (x,y,z)$$

Vektor $\overline{OP}$ = (x,y,z) pada dimensi tiga dapat dinyatakan sebagaikombinasi linear dari vektor satuan $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ sebagai berikut :

$$\overline{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Sebuah vektor $\overline{AB}$ dengan koordinat titik pangkal A (x_1, y_1, z_1) dan koordinat titik ujung B (x_2, y_2, z_2) memiliki vektor posisi sebagai berikut :

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}$$

(1) Operasi Hitung Vektor di R^3

(a) Penjumlahan Vektor dalam Ruang

a. Jika dua vektor $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ dan vektor $\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ adalah vektor-vektor tidak nol di R^3 maka operasi penjumlahannya didefinisikan sebagai berikut :

$$\underline{a} + \underline{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

b. Jika vektor $\underline{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ dan vektor $\underline{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ maka operasi penjumlahannya didefinisikan sebagai berikut :

$$\underline{a} + \underline{b} = (a_1 + b_1)\vec{i} + (a_2 + b_2)\vec{j} + (a_3 + b_3)\vec{k}$$

Contoh:

Hitunglah jumlah dari dua buah vektor berikut !

$\underline{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$ dan $\underline{b} = 3\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$

Jawab:

$$\underline{a} + \underline{b} = (2 + 3)\vec{i} + (1 + 5)\vec{j} + (-4 + 1)\vec{k} = 5\vec{i} + 6\vec{j} - 3\vec{k}$$

(b) Selisih Dua Vektor pada R^3

(1). Jika dua vektor $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ dan vektor $\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ maka operasi pengurangan kedua vektor didefinisikan sebagai berikut :

$$\underline{a} - \underline{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix}$$

(2). Jika vektor $\underline{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ dan vektor $\underline{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ maka operasi pengurangan kedua vektor didefinisikan sebagai berikut :

$$\underline{a} - \underline{b} = (a_1 - b_1)\vec{i} + (a_2 - b_2)\vec{j} + (a_3 - b_3)\vec{k}$$

Contoh:

Hitunglah $\underline{a} - \underline{b}$ jika :

$\underline{a} = 8\vec{i} + 6\vec{j} + 9\vec{k}$ dan $\underline{b} = 3\vec{i} + 5\vec{j} + 2\vec{k}$

Jawab:

$$\underline{a} - \underline{b} = (8 - 3)\vec{i} + (6 - 5)\vec{j} + (9 - 2)\vec{k} = 5\vec{i} + \vec{j} + 7\vec{k}$$

(c) Perkalian Skalar denganVektor

(1). Hasil kali vektor $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ dengan suatu skalar c didefinisikan sebagai berikut : c. $\underline{a} = \begin{pmatrix} c.a_1 \\ c.a_2 \\ c.a_3 \end{pmatrix}$

(2). Hasil kali vektor $\underline{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ dengan skalar c didefinisikan sebagai berikut :c. $\underline{a} = c.a_1\vec{i} + c.a_2\vec{j} + c.a_3\vec{k}$

(d) Perkalian Skalar dari Dua Vektor/Perkalian Titik (*Dot Product*)

Perkalian skalar dari dua vektor $\underline{a}$ dan $\underline{b}$ didefinisikan dengan rumus :

$$\underline{a} \,.\, \underline{b} = |\,\underline{a}\,| \,.\, |\,\underline{b}\,| \,.\, \text{Cos}\alpha$$

Apabila $\alpha = 0°$ maka $\underline{a} \cdot \underline{a} = |\underline{a}| \cdot |\underline{a}|$

Apabila $\alpha = 90°$ maka $\underline{a} \cdot \underline{a} = 0$

Apabila $\alpha = 180°$ maka $\underline{a} \cdot \underline{a} = -|\underline{a}| \cdot |\underline{a}|$

Apabila vektor dinyatakan dalam bentuk komponen :

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \text{ dan } \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Diperoleh :

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

Contoh:

Hitunglah perkalian skalar antara $\underline{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$ dan $\underline{b} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$!

Jawab:

$\underline{a} \cdot \underline{a} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

$= 2.2 + 3.1 + 5.3 = 4 + 3 + 15 = 22$

2. Jika $\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ dan $\underline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$, hitunglah $\underline{a} \cdot \underline{a}$!

Jawab:

$\underline{a} \cdot \underline{a} = 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 5 \cdot 6$

$= 2 + 3 + 30 = 35$

3. Hitunglah $\underline{a} \cdot \underline{a}$ jika diketahui $|\underline{a}| = 3$, $|\underline{a}| = 4$ dan sudut antara $\underline{a}$ dan $\underline{a}$ adalah 60° !

Jawab:

$\underline{a} \cdot \underline{a} = |\underline{a}| \cdot |\underline{a}| \cdot \text{Cos } 60°$

$= 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 6$

(e) Sudut Antara Dua Vektor

Dari definisi : $\underline{a} \cdot \underline{a} = |\underline{a}| \cdot |\underline{a}| \cdot \text{Cos } \alpha$

$\underline{a} \cdot \underline{a} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

Diperoleh :

$$\text{Cos } \alpha = \frac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{|\underline{a}||\underline{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)}}$$

Contoh:

Hitunglah besar sudut di antara $\underline{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ dan $\underline{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 6\vec{k}$!

Jawab:

$$\text{Cos } \alpha = \frac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{|\underline{a}||\underline{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)}}$$

$$= \frac{1.2 + 2.3 + 2(-6)}{\sqrt{(1^2 + 2^2 + 2^2)(2^2 + 3^2 + (-6)^2)}}$$

$$= \frac{-4}{\sqrt{9.49}} = \frac{-4}{21} = -0{,}190$$

Dari daftar diperoleh $\alpha = 180° - 79° = 101°$

(f) Perkalian Vektor dari Dua Vektor/Perkalian Silang (*Cross Product*)

Apabila vektor disajikan dalam bentuk $\underline{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ dan $\underline{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ maka:

$$\underline{a} \times \underline{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Persamaan di atas dapat diselesaikan dengan aturan *Sarrus* atau *Cramer*

Contoh:

Diketahui vektor $\underline{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$ dan vektor $\underline{b} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$.

Tentukan $\underline{a} \times \underline{b}$!

Jawab:

$$\underline{a} \times \underline{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= i\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (-9 - 4)i - (-6 - 6)j + (4 - 9)k$$

$$= -13i + 12j - 5k$$

2. Vektor Proyeksi

Vektor proyeksi vektor U pada V adalah: $\frac{u.v}{|v|^2}$ V

Panjang Proyeksi U pada V adalah : $\frac{u.v}{|v|}$

1. Matriks

a. Pengertian Matriks

1) Definisi Matriks

Konsep matriks banyak berperan dan sering dijumpai dalam berbagai masalah kontekstual. Guru diharapkan dapat mengembangkan konsep ini dalam berbagai terapan, baik bidang teknik, ekonomi, maupun bidang lainnya.

Matriks adalah suatu himpunan bilangan atau variabel yang disusun dalam bentuk baris dan kolom (lajur) dalam bentuk persegi panjang yang di tempatkan di antara dua tanda kurung biasa ( ) atau siku [ ].

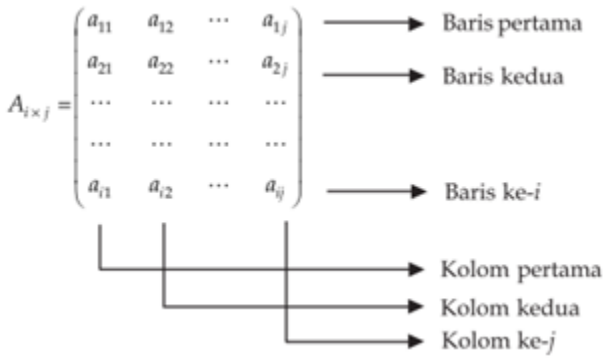
Baris sebuah matriks adalah susunan bilangan-bilangan yang mendatar dalam matriks.

Kolom sebuah matriks adalah susunan bilangan-bilangan yang tegak dalam matriks.

Suatu matriks dilambangkan dengan sebuah huruf kapital A, B, C dst.

Secara umum matriks dapat ditulis sebagai berikut :

Gambar 2.3.38 **Ilustrasi Matriks**



2) Jenis-Jenis Matriks

(a) Matriks Persegi

Yaitu matriks yang banyaknya baris sama dengan banyaknya kolom. (m = n)

Contoh : $A_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

(b) Matriks Baris

Yaitu matriks yang mempunyai elemen satu baris

Contoh : $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

(c) Matriks Kolom

Yaitu matriks yang mempunyai elemen satu kolom

Contoh : $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

(d) Matriks Nol

Yaitu matriks yang seluruh elemennya adalah 0

Contoh : $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$

(e) Matriks Identitas / Satuan

Yaitu matriks bujur sangkar yang elemen pada diagonal utamanya adalah 1 (satu), sedangkan elemen lainnya 0 (nol).

Contoh : $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(f) Matriks Diagonal

Yaitu matriks bujur sangkar yang semua elemen diluar diagonal utamanya adalah 0 (nol)

Contoh : $A=\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Matriks sama : matriks A = matriks B, maka elemen yang seletak sama.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \rightarrow a = p, b = q, c = r, d = s$$

(g) Matriks Skalar

Matriks Skalar adalah matriks yang elemen-elemen diagonal utamanya sama, sedangkan elemen di luar elemen diagonalnya bernilai nol.

Contoh : $A=\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(h) Matriks Segitiga Atas

Matriks segitiga atas adalah matriks persegi yang elemen-elemen di bawah diagonal utamanya bernilai nol.

Contoh :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

a. Matriks Segitiga Bawah

Matriks segitiga bawah adalah matriks persegi yang elemen-elemen di atas diagonal utamanya bernilai nol.

$$D=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & -4 \end{bmatrix}$$

3) Kesamaan Matriks

Dua matriks dikatakan sama jika dan hanya jika keduanya memiliki ordo yang sama dan elemen-elemen yang seletak (bersesuaian) pada kedua matriks tersebut sama.

4) Transpose Matriks

Transpose matrik adalah matriks baru yang merupakan hasil pertukaran baris dan kolom

Tranpose matriks di notasikan A^t (dibaca: A transpose).

Sehingga tranpose matriks A adalah A^t

Jika $A=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$, maka $A^t=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix}$

Jika matriks A berordo m × n maka transpos A memiliki ordo n × m.

Secara Umum bisa dituliskan :

$A_{m\times n}$, maka $A^t{}_{n\times m}$

b. Operasi Aljabar Matriks

1) Operasi Penjumlahan

Operasi penjumlahan pada matriks hanya dapat dilakukan apabila matriks – matriksnya mempunyai ordo sama.

$A=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$ dan $B=\begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}$

$$A+B=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 \\ a_3+b_3 & a_4+b_4 \end{bmatrix}$$

2) Operasi pengurangan

Pengurangan dua matriks harus memiliki ordo sama

$$A=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \text{ dan } B=\begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}$$

$$A-B=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1-b_1 & a_2-b_2 \\ a_3-b_3 & a_4-b_4 \end{bmatrix}$$

3) Operasi Perkalian Bilangan Real dengan matriks

Jika A sebuah matriks dan k bilangan real maka hasil kali kA adalah

matriks yang diperoleh dengan mengalikan masing-masing elemen

matriks A dengan k.

$$K\times\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} K\times a_1 & K\times a_2 \\ K\times a_3 & K\times a_4 \end{bmatrix}$$

4) Operasi Perkalian Matriks dengan Matriks

Perkalian matriks A dan B dituliskan AB terdefinisi hanya jika banyaknya baris matriks B sama dengan banyaknya kolom

matriks A.

Matriks $\underset{\text{Ordo hasil perkalian}}{A_{m\times n}\times B_{n\times p}=C_{m\times p}}$

(a). Jika matriks $A_{1\times 2}=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix}$ dan matriks $B_{2\times 2}=\begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}$

Maka $A \times B = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} a_1 \times b_1 + a_2 \times b_3 & a_1 \times b_2 + a_2 \times b_4 \end{bmatrix}$

(b). Jika matriks $A_{2\times 2} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$ dan matriks $B_{2\times 2} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}$

Maka $A \times B = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} a_1 \times b_1 + a_2 \times b_3 & a_1 \times b_2 + a_2 \times b_4 \\ a_3 \times b_1 + a_4 \times b_3 & a_3 \times b_2 + a4 \times b_4 \end{bmatrix}$

5) Perpangkatan Matrisk Persegi

Misalkan A adalah matriks persegi dengan ordo n × n maka bentuk pangkat dari matriks A didefinisikan sebagai berikut.

$A^2 = A \times A$

$A^3 = A \times A \times A$

$A^n = \underbrace{A \times A \times A \ldots \times A}_{\text{Sebanyak } n \text{ buah}}$

6) Sifat-Sifat Transpose Matriks

Beberapa sifat matriks adalah sebagai berikut.

(a). $(A+B)^t = A^t + B^t$

(b). $(A^t)^t = A$

(c). $(cA)^t = cA^t$ dengan c adalah konstanta

(d). $(AB)^t = B^tA^t$

c. Determinan dan Invers Matriks

1) Determinan matriks

Determinan matriks A didefinisikan sebagai selisih antara perkalian elemen-elemen pada diagonal utama dengan perkalian elemen-elemen pada diagonal sekunder.

Determinan dari matriks A dinotasikan dengan **det A** atau **|A|**.

Nilai dari determinan suatu matriks berupa bilangan real.

(a) Determinan matriks berordo dua

$$A_{2\times 2} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Diagonal sekunder

Diagonal utama

maka

det A = $|A| = a\cdot d - b\cdot c$

Contoh :

Jika matriks A = $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ cari determinan matriks A !

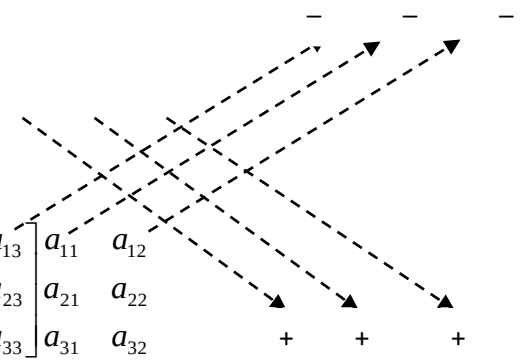
Jawab:

det A = |A|= $a\cdot d - b\cdot c = 2\cdot 6 - 3\cdot 4 = 12 - 12 = 0$

(b) Determinan matriks berordo tiga $\Rightarrow$ menggunakan aturan Sarus

$$A_{3\times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\det A = |A| = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$



det A=|A|=

$$a_{11} \cdot a_{12} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} - a_{33} \cdot a_{21} \cdot a_{12}$$

2) Adjoint Matriks

Adjoint disingkat **Adj**.

Adjoint matriks merupakan transpose dari matriks kofaktor dari matriks tersebut.

Adjoint suatu matriks bujur sangkar ordo 2x2 adalah :

Jika matriks A = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ maka Adj A = $\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

3) Invers Matriks

Jika A sebuah matriks maka invers matriks A adalah A^{-1} dan $A \times A^{-1} = I$, dimana I adalah matriks identitas.

Berikut ini adalah syarat suatu matriks A mempunyai invers.

- Jika |A| = 0, maka matriks A tidak mempunyai invers. Oleh karena itu, dikatakan matriks A sebagai matriks singular.
- Jika |A|≠ 0, maka matriks A mempunyai invers. Oleh karena itu, dikatakan matriks A sebagai matriks nonsingular.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{Adj (A)}$$

Misalkan matriks A = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ invers dari A adalah A^{-1} , yaitu:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Sifat-Sifat Invers suatu Matriks

Misalkan A dan B adalah matriks sebarang yang memiliki invers, AB dan BA juga memiliki invers maka berlaku hubungan berikut.

1. $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
2. $(BA)^{-1} = A^{-1} \cdot B^{-1}$

Persamaan Matriks

Penyelesaian persamaan matriks AX = B ditentukan oleh $X = A^{-1}.B$

Penyelesaian persamaan matriks XA=B ditentukan oleh $X = B.A^{-1}$

Contoh Soal:

Jika $P.\begin{bmatrix}6 & 7\\8 & 9\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 3\\4 & 5\end{bmatrix}$, maka P = ...

Jawab:

$$P.\begin{bmatrix}6 & 7\\8 & 9\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 3\\4 & 5\end{bmatrix}$$

$$P.A=B$$

$$P = B.A^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix}2 & 3\\4 & 5\end{bmatrix}.\frac{1}{6.9-7.8}\begin{bmatrix}9 & -7\\-8 & 6\end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2 & 3\\4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}9 & -7\\-8 & 6\end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-6 & 4\\-4 & 2\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}3 & -2\\2 & -1\end{bmatrix}$$

D. Aktivitas Pembelajaran

1. Pengantar:

   Pada kegiatan pembelajaran topik Geometri analitik ini, Anda akan mempelajari tentang Irisan Kerucut yang meliputi: Lingkaran, Parabola, Hiperbola, Ellips. Juga tentang Matriks yang meliputi: pengertian matriks, ordo matriks dan jenis-jenis matriks, operasi matriks terdiri penjumlahan, pengurangan dan perkalian matriks serta determinan dan invers matriks, juga penggunaan determinan dan invers matriks untuk menyelesaikan sistem persamaan linier.Selain itu dipelajari juga tentang Vektor yang meliputi: Pengertian Vektor, Ruang Lingkup Vektor, dan Operasi Vektor. Topik ini penting bagi saudara sebagai guru sekolah menengah.

   Aktivitas 1:

   Kegiatan yang pertama ini merupakan kegiatan refleksi terkait konsep geometri analitik secara umum. Lakukanlah refleksi secara individu dengan menjawab dan menyelesaikan pertanyaan di dalam LK1 berikut. Jika mengalami kesulitan Saudara disarankan untuk membaca uraian pada modul atau sumber bacaan lainnya dan lakukanlah diskusi dengan rekan Saudara dan percaya dirilah bahwa Saudara pasti bisa.

   LK 1 Untuk apa kita mempelajari konsep geometri analitik?

   Aktivitas 2:

   Kegiatan yang pertama ini merupakan kegiatan refleksi terkait konsep geometri analitik secara umum. Jika mengalami kesulitan Saudara disarankan untuk membaca uraian pada modul atau sumber bacaan

lainnya dan lakukanlah diskusi dengan rekan Saudara dan percaya dirilah bahwa Saudara pasti bisa

LK 2

Tentukan persamaan lingkaran yang pusatnya A(a,b) dengan jari-jari 4!

Penyelesaian:

Aktivitas 3:

Kegiatan berikut adalah terkait dengan konsep lingkaran. Kurva lengkung sederhana dan teratur yang banyak dijumpai dalam kehidupan sehari-hari adalah lingkaran. Buatlah kerucut dari kertas manila, kemudian potong sejajar bidang alas. Berbentuk apakah permukaan kerucut yang dipotong tadi? Permukaan kerucut yang dipotong tadi berbentuk lingkaran.

LK 3

Tentukan persamaan garis singgung pada lingkaran x2 + y2 + 6x – 4 y -4 =0 di titik (1,1) !

Penyelesaian:

Aktivitas 4:

Kegiatan berikut adalah terkait dengan konsep Persamaan garis singgung dengan titik singgung (x_1,y_1) pada lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$**.** Jika mengalami kesulitan Saudara disarankan untuk membaca uraian pada modul atau sumber bacaan lainnya dan lakukanlah diskusi dengan rekan Saudara dan percaya dirilah bahwa Saudara pasti bisa.

LK 4

Tentukan persamaan garis singgung pada lingkaran $x^2+ y^2= 25$ di titik (3,-4)!

Penyelesaian:

Aktivitas5:

Kegiatan berikut adalah terkait dengan konsep persamaan garis singgung sekutu luar dan dalam. Jika mengalami kesulitan Saudara disarankan untuk membaca uraian pada modul atau sumber bacaan lainnya dan lakukanlah diskusi dengan rekan Saudara dan percaya dirilah bahwa Saudara pasti bisa.

LK 5

Tentukan panjang garis singgung sekutu luar antara lingkaran dengan persamaan $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 4 = 0$ dan $x^2 + y^2 + 10x + 14y - 10 = 0$!

Penyelesaian:

Aktivitas 6:

Kegiatan berikut adalah terkait dengan konsep persamaan garis singgung sekutu dalam antara dua lingkaran yang jari-jarinya r1 dan r2 , serta jarak antara kedua pusat . Jika mengalami kesulitan Saudara disarankan untuk membaca uraian pada modul atau sumber bacaan lainnya dan lakukanlah diskusi dengan rekan Saudara dan percaya dirilah bahwa Saudara pasti bisa.

LK 6

Dapatkan ditentukan panjang garis singgung sekutu luar antara lingkaran dengan persamaan $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 4 = 0$ dan $x^2 + y^2 - 12x - 20y + 132 = 0$?

Penyelesaian:

Aktivitas 7:

Kegiatan berikut adalah terkait dengan konsep Ellips. Kurva lengkung sederhana dan teratur yang mempunyai dua sumbu simetri adalah Ellips.

Jika mengalami kesulitan Saudara disarankan untuk membaca uraian pada modul atau sumber bacaan lainnya dan lakukanlah diskusi dengan rekan Saudara dan percaya dirilah bahwa Saudara pasti bisa.

Buatlah model kerucut dari kertas manila, kemudian potong menurut bidang tidak sejajar bidang alas tetapi tidak memotong bidang alas kerucut. Berbentuk apakah permukaan kerucut yang terpotong?

Penyelesaian:

Aktivitas 8:

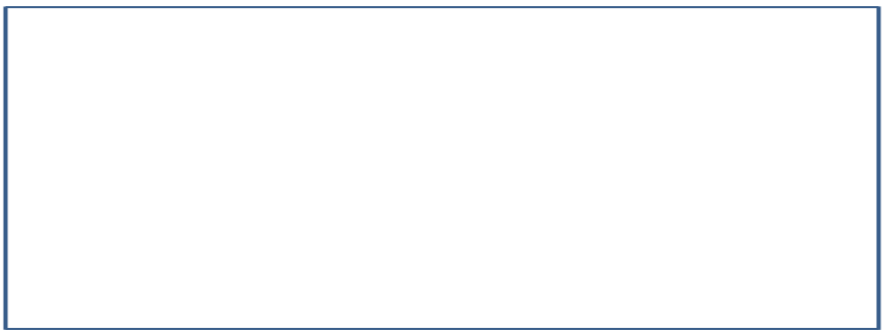
Kegiatan berikut adalah terkait dengan sketsa Ellips. Jika mengalami kesulitan Saudara disarankan untuk membaca uraian pada modul atau

sumber bacaan lainnya dan lakukanlah diskusi dengan rekan Saudara dan percaya dirilah bahwa Saudara pasti bisa.

LK 8

Sediakan 2 paku pines, kapur tulis atau spidol papan dan tali secukupnya. Tancapkan 2 paku pines pada papan. Gunting tali dengan panjang lebih dari jarak kedua pines. Ikat ujung tali pada masing-masing pines (tali pada posisi kendor). Ambil kapur tulis atau spidol papan dan letakkan menempel tali pada posisi bagian dalam tali dan pines. Gerakan kapur atau spidol menelusuri tali maka akan tergambar ellips. Silahkan mencoba! Apa kesimpulan yang diperoleh?

Penyelesaian:



Aktivitas 9:

Kegiatan berikut adalah terkait dengan konsep persamaan garis singgung ellips.Garis singgung ellips adalah suatu garis yang memotong ellips tepat pada satu titik. Jika mengalami kesulitan Saudara disarankan untuk membaca uraian pada modul atau sumber bacaan lainnya dan lakukanlah diskusi dengan rekan Saudara dan percaya dirilah bahwa Saudara pasti bisa.

LK 9

Bagaimana cara memperoleh persamaan garis singgung pada ellips $x^2 + 4y^2 = 20$ yang tegak lurus ke garis $2x - 2y - 13 = 0$!

Penyelesaian:

Aktivitas 10:

Kegiatan berikut adalah terkait dengan konsep persamaan garis singgung ellips dengan titik singgungnya diketahui. Jika mengalami kesulitan Saudara disarankan untuk membaca uraian pada modul atau sumber bacaan lainnya dan lakukanlah diskusi dengan rekan Saudara dan percaya dirilah bahwa Saudara pasti bisa.

LK 10

Carilah persamaan garis singgung pada ellips $\frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{24} = 1$ di titik yang absisnya 5!

Penyelesaian:

Aktivitas 11:

Kegiatan berikut adalah terkait dengan konsep parabola. Jika mengalami kesulitan Saudara disarankan untuk membaca uraian pada modul atau

sumber bacaan lainnya dan lakukanlah diskusi dengan rekan Saudara dan percaya dirilah bahwa Saudara pasti bisa.

Kurva lengkung sederhana dan teratur yang mempunyai satu sumbu simetri adalah Parabola. Buatlah model kerucut dari kertas manila. Atau plastisin (sering disebut malam). Iris dengan bidang yang tegak lurus alas kerucut. Berbentuk apakah permukaan kerucut yang teriris? Permukaan kerucut yang teriris benbentuk parabola. Parabola diperoleh dengan mengiris bangun kerucut sejajar garis pelukisnya.

1. Tentukan persamaan parabola yang puncaknya di (3, 4) dan dan garis arah nya x = 1!

2. Sebuah parabola mempunyai persamaan $3x^2 + 6x + 12y = 5$
3. Nyatakan ke dalam bentuk baku, kemudian tentukan puncak, titik fokus dan direktrik dari parabola tersebut!
4. Tentukan persamaan parabola yang sumbu simetrinya sejajar dengan sumbu-y, berpuncak di $P(2, 3)$ dan melalui titik $Q(4, 5)$

Penyelesaian:

Aktivitas 12:

Kegiatan berikut adalah terkait dengan konsep persamaan garis singgung parabola. Garis singgung parabola adalah suatu garis yang memotong parabola tepat pada satu titik. Jika mengalami kesulitan Saudara disarankan untuk membaca uraian pada modul atau sumber bacaan lainnya dan lakukanlah diskusi dengan rekan Saudara dan percaya dirilah bahwa Saudara pasti bisa.

LK 12

Tentukan persamaan garis singgung dengan gradien 2 pada parabola $y^2 = 8x$!

Penyelesaian:

Aktivitas 13:

Kegiatan berikut adalah terkait dengan persamaan garis singgung parabola yang berpuncak di (a,b). Jika mengalami kesulitan Saudara disarankan untuk membaca uraian pada modul atau sumber bacaan lainnya dan lakukanlah diskusi dengan rekan Saudara dan percaya dirilah bahwa Saudara pasti bisa.

LK 13

Tentukan persamaan garis singgung melalui titik P(5, -8) pada parabola $(y - 4)^2 = 8(x - 3)$!

Penyelesaian:

Aktivitas 14:

Kegiatan berikut adalah terkait dengan grafik persamaan parabola. Jika mengalami kesulitan Saudara disarankan untuk membaca uraian pada modul atau sumber bacaan lainnya dan lakukanlah diskusi dengan rekan Saudara dan percaya dirilah bahwa Saudara pasti bisa.

LK 14

Gambarlah dua grafik parabola! Jelaskan mengapa gambar tersebut termasuk pada parabola!

Penyelesaian:

Aktivitas 15:

Kegiatan berikut adalah terkait dengan konsep Hiperbola. Kurva lengkung sederhana dan teratur yang mempunyai dua sumbu simetri adalah

Hiperbola. Hiperbola merupakan bangun datar yang diperoleh dengan mengiris bangun ruang kerucut yang saling bertolak belakang memotong tegak lurus bangun kerucut tersebut tetapi tidak memotong puncak kerucut. Jika mengalami kesulitan Saudara disarankan untuk membaca uraian pada modul atau sumber bacaan lainnya dan lakukanlah diskusi dengan rekan Saudara dan percaya dirilah bahwa Saudara pasti bisa.

LK 15

Diketahui persamaan parabola $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$. Tentukan Koordinat puncak, fokus, puat, persamaan asimtot dan eksentrisitas numerik! Juga buat skertsa hiperbolanya!

Penyelesaian:

Aktivitas 16:

Kegiatan berikut adalah terkait dengan sketsa Hiperbola. Jika mengalami kesulitan Saudara disarankan untuk membaca uraian pada modul atau sumber bacaan lainnya dan lakukanlah diskusi dengan rekan Saudara dan percaya dirilah bahwa Saudara pasti bisa.

LK 16

Jelaskan bagaimana langka-langkah dalam melukis Hiperbola!

Penjelasan:

Aktivitas17:

Kegiatan berikut adalah terkait dengan konsep matriks. Bacalah tulisan di bawah ini kemudian kerjakan tugas pada pada LK 17 Untuk membantu penyelesaian lihat pada materi. Jika mengalami kesulitan Saudara disarankan untuk membaca uraian pada modul atau sumber bacaan lainnya dan lakukanlah diskusi dengan rekan Saudara dan percaya dirilah bahwa Saudara pasti bisa.

Dalam menjelaskan operasi hitung pada matriks, kita dapat mengangkat peristiwa sehari-hari, misalnya dengan mengambil contoh di suatu toko kelontong menjual barang dagangannya.

LK 17

Tabel berikut menunjukkan barang yang terjual selama tiga bulan yaitu bulan Mei, Juni dan Juli dan daftar harga satuan barang tersebut disajikan pada tabel berikut.

Bulan	Nama Barang		
	Mie instan	Sabun cuci	Pasta gigi
Mei	220	130	80
Juni	240	145	90
Juli	250	150	105

Nama Barang	Harga (Rp)
Mie instan	2.100
Sabun cuci	3.000
Pasta gigi	6.600

a) Berapa jumlah masing-masing barang yang terjual selama tiga bulan?

b) Berapa persen kenaikan Sabun cuci yang terjual pada bulan Juli?

c) Berapa banyaknya uang hasil penjualan Sabun cuci selama tiga bulan?

d) Berapa jumlah seluruh uang hasil penjualan selam tiga bulan?

Penjelasan:

Aktivitas18:

Bacalah tulisan di bawah ini kemudian kerjakan tugas pada pada LK 18 Untuk membantu penyelesaian lihat pada bagian materi. Jika mengalami kesulitan Saudara disarankan untuk membaca uraian pada modul atau sumber bacaan lainnya dan lakukanlah diskusi dengan rekan Saudara dan percaya dirilah bahwa Saudara pasti bisa.

Dalam kehidupan sehari-hari banyak persoalan yang menyangkut persamaan linier, untuk menyelesaikan soal yang berkaitan dengan sistem persamaan linear dapat diselesaikan dengan matriks. Bentuk umum sistem

persamaan linier dari m persamaan dengan n variabel x1, x2, x3, ... xn adalah :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots\ldots a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots\ldots A_{2n}x_n = b_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots\ldots A_{mn}x_n = b_m$$

di mana a_{jk} dan b_i (i, j = 1, 2, 3, ... m dan k = 1, 2, 3, ... n) adalah bilangan real.

Bentuk umum sistem persamaan linier ditulis dengan matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{bmatrix}$$

LK 18

Selesaikan sistem persamaan linier berikut ini dengan matriks (determinan matriks dan invers matriks)!

x + y + z = 6

2x -3y + 2z = 2

x – y = 1

Penjelasan:

Aktivitas19:

Bacalah tulisan di bawah ini kemudian kerjakan tugas pada pada LK 19.

Dalam kehidupan sehari-hari sering kita jumpai permasalahan yang penyelesaian perhitungannya dapat melalui operasi-operasi matriks hingga diperoleh suatu penyelesaian, misalnya: Dinas perhubungan di Propinsi X mengatur rute perjalanan yang menghubungkan Kota A ke Kota B melalui Kota C atau D. Dari Kota A ke Kota C ada 2 rute perjalanan, dari Kota C ke Kota B ada 3 perjalanan. Dari Kota A ke Kota

D ada 4 perjalanan, sedangkan dari Kota D ke Kota B ada 2 perjalanan. Berapa banyaknya rute perjalanan jika seseorang ingin bepergian dari Kota A ke Kota B melalui Kota C atau D? Permasalahan di atas dapat kita selesaikan dengan matriks yaitu dapat dengan perkalian matriks.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

LK 19

Coba Saudara berikan contoh permasalahan dalam kehidupan sehari-hari yang penyelesaiannya dengan operasi matriks (penjumlahan, pengurangan dan perkalian)?

Penjelasan:

Aktivitas20:

Bacalah tulisan di bawah ini kemudian kerjakan tugas pada pada LK 20. Untuk membantu penyelesaian lihat pada bagian Materi. Jika mengalami kesulitan Saudara disarankan untuk membaca uraian pada modul atau sumber bacaan lainnya dan lakukanlah diskusi dengan rekan Saudara dan percaya dirilah bahwa Saudara pasti bisa.

LK 20:

Diketahui suatu matriks A,B dan C yang dapat dikalikan. Apabila AB = AC maka tidak dapat disimpulkan bahwa B = C (tidak berlaku sifat penghapusan). Tunjukkan dengan memberikan contoh suatu matriks A, B dan C sehingga sifat di atas tidak

berlaku!

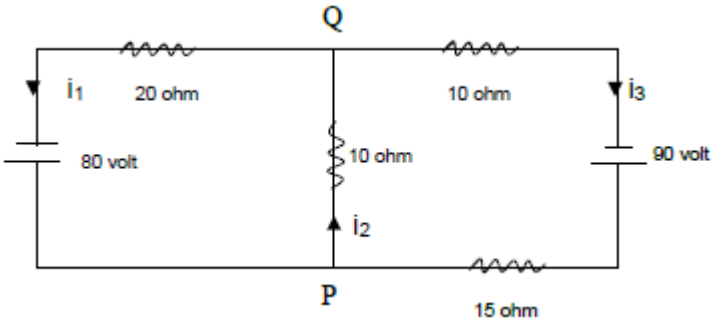
Penjelasan:

Aktivitas 21

Bacalah tulisan di bawah ini kemudian kerjakan tugas pada pada LK 21. Untuk membantu penyelesaian lihat pada bagian materi. Jika mengalami kesulitan Saudara disarankan untuk membaca uraian pada modul atau sumber bacaan lainnya dan lakukanlah diskusi dengan rekan Saudara dan percaya dirilah bahwa Saudara pasti bisa.

LK 21:

Sering kali permasalahan pada bidang kelistrikan dapat diselesaikan dengan matematika yang terkait dengan sistem persamaan linier, misalnya pada lingkaran arus searah pada jaringan listrik berikut :



Dengan hukum Kirchhof dapat menghasilkan empat buah persamaan, dan tiga variabel i1 , i2 dan i3 yaitu :

Titik P : i1 – i2 + i3 = 0

Titik Q : -i1 + i2 - i3 = 0

Loop Kanan : 10 i2 + 25i3 = 90

Loop Kiri : 20i1 + 10 i2 = 80

Tentukan besarnya arus i_1 , i_2 dan i_3

Penjelasan:

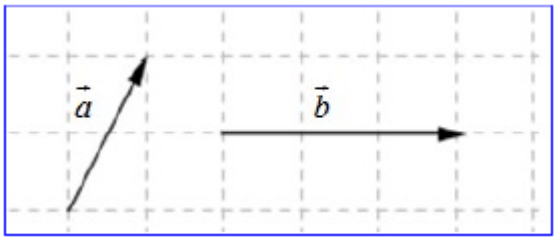
Aktivitas22:

Kegiatan selanjutnya adalah terkait dengan konsep vektor. Bacalah tulisan di bawah ini kemudian kerjakan tugas pada pada Lk 22. Jika mengalami kesulitan Saudara disarankan untuk membaca uraian pada modul atau sumber bacaan lainnya dan lakukanlah diskusi dengan rekan Saudara dan percaya dirilah bahwa Saudara pasti bisa.

Dalam matematika, vektor digambarkan sebagai ruas garis berarah. Arahnya dari titik pangkal menuju titik ujung, sedangkan jarak dari titik pangkal ke titik ujung disebut panjang vektor. Untuk menyatakan sebuah vektor biasanya digunakan notasi huruf kecil tebal atau bergaris atas atau bawah. Vektor-vektor yang mempunyai panjang yang sama dan arah yang sama dinamakan ekivalen, maka vektor yang ekivalen dianggap sama walaupun vektor-vektor tersebut mungkin diletakkan di dalam kedudukan yang berbeda.

LK 22

1. Perhatikan vektor-vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ yang digambarkan sebagai berikut.



Gambarkan dan jelaskan vektor yang menunjukkan vektor $\vec{p} = \vec{a} + 2\vec{b}$ dan vektor $\vec{q} = 2\vec{a} - b$

2. Pada kubus ABCD.EFGH, tentukan resultan dari penjumlahan vektor AH + DC + HE

Penjelasan:

Aktivitas23:

Bacalah tulisan di bawah ini kemudian kerjakan tugas pada pada LK 5. Untuk membantu penyelesaian lihat pada bagian materi.

LK 23

1. Ditentukan titik-titik $P(2,7,8)$ dan $Q(-1,1,-1)$. Tentukanlah dalam bentuk komponen vektor yang diwakili oleh $\overrightarrow{PR}$ apabila R adalah titik pada $\overrightarrow{PQ}$ sehingga $\overrightarrow{PR}=\frac{1}{3}\overrightarrow{PQ}$ berapa koordinat R?

2. Diketahui titik D (2,3,-1) dan E (-2,-4,3) dan vektor**v**= 4 **i** – 3 **j** + **k**

a.Tentukan proyeksi skalar dari vektor $\vec{v}$ pada arah *DE !*

b.Tentukan proyeksi dari vektor $\vec{v}$ pada arah *DE !*

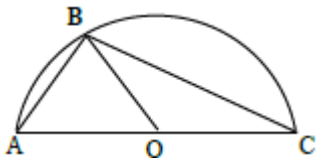
Penjelasan:

Aktivitas24:

Bacalah tulisan di bawah ini kemudian kerjakan tugas pada pada LK 24. Jika mengalami kesulitan Saudara disarankan untuk membaca uraian pada modul atau sumber bacaan lainnya dan lakukanlah diskusi dengan rekan Saudara dan percaya dirilah bahwa Saudara pasti bisa.

LK 24

Dua vektor **a** dan **b** dapat dijumlahkan dengan aturan segitiga vektor, yaitu pangkal **b**digeser ke ujung **a** atau dengan aturan jajaran genjang, yaitu pangkal **b** digeser kepangkal **a**, kemudian dilukis jajaran genjang. Jika dua vektor **a** dan **b** merupakan duavektor yang tegak lurus maka **a.b =** 0. Buktikan bahwa sudut yang menghadap busursetengah lingkaran adalah sudut siku-siku dengan memperhatikan gambar berikut.



Penjelasan:

Aktivitas25:

Bacalah tulisan di bawah ini kemudian kerjakan tugas pada pada LK 10. Untuk membantu penyelesaian lihat pada bagian materi.

LK 25

Diketahui dua buah vektor yang dinyatakan dalam bentuk sebagai berikut: a = 3i + 3j+ 2k dan b = i - 2 j - 4k

Tentukan!

a). Panjang vektor $\underline{a}$ atau $|a|$

b). Vektor satuan b

c). Perkalian titik antara dua vektor a dan b

d). Perkalian silang antara dua vektor a dan b

Jawaban:

Aktivitas 26:

Pada Aktivitas 26 ini Saudara diminta untuk menyusun instrumen penilaian pada materi Geometri Analitik dengan mengacu pada panduan teknik penulisan soal dari puspendik. Diskusikan dengan rekan Saudara

jika mengalami kendala dalam menyelesaikan LEMBAR KERJA 07. Dan percaya dirilah bahwa Saudara pasti bisa

1. Buatlah kisi-kisi penulisan soal mengenai materi Geometri Analitik!
2. Buatlah 20 soal berupa 15 soal Pilihan Ganda dan 5 soal uraian sesuai kisi-kisi yang telah Saudara buat!

LK 26: Pengerjaan

E. Rangkuman

1. Irisan Kerucut

Irisan kerucut adalah sebuah bangun datar yang diperoleh dengan cara memotong kerucut lingkaran tegak berselimut ganda menurut aturan tertentu.

Berdasarkan letak bidang datar yang mengirisnya, maka irisan kerucut dapat berupa titik, garis, segitiga, lingkaran, parabola, elips, dan hiperbola.

a. Jika bidang yang mengiris melalui puncak kerucut, maka irisan yang terbentuk berupa *titik*.

b. Jika bidang yang mengiris berimpit dengan garis pelukis kerucut, maka irisan yang terbentuk berupa sebuah garis.
c. Jika bidang yang mengiris melalui sumbu simetri kerucut dan tegak lurus lingkaran alas, maka irisan terbentuk berupa segitiga.
d. Jika bidang yang mengiris tegak lurus sumbu simetri kerucut, tetapi tidak melalui puncak, maka irisan yang terbentuk berupa lingkaran.
e. Jika bidang yang mengiris sejajar garis pelukis kerucut, maka irisan yang terbentuk berupa parabla.
f. Jika bidang yang mengiris tidak melalui puncak, tidak memotong lingkaran alas, tidak sejajar sumbu simetri maupun garis pelukis kerucut, maka irisan yang terbentuk berupa elips.
g. Jika bidang yang mengiris tidak melalui puncak, memotong lingkaran alas, dan tidak sejajar sumbu simetri maupun garis pelukis kerucut maka irisannya berbentuk hiperbola.

2. Vektor

a. Pengertian Vektor

Besaran yang mempunyai besar dan arah biasanya dinyatakan dengan segmen garis berarah. Segmen garis terarah tersebut dinamakan vektor. Panjang segmen garis berarah menyatakan besar vektor, sedangkan arah vektor dinyatakan oleh kemiringan segmen garis dan anak panahnya.

Untuk menyatakan suatu vektor dapat dialkukan pada bidang datar atau bidang koordinat kartesius XOY dengan menggambar ruas garis dengan anak panah di salah satu ujungnya. Panjang ruas garis mewakili besar (panjang) vektor dan anak panah mewakili arah vektor. Vektor disimbolkan dengan huruf tebal atau huruf yang digarisbawahi.

b. Komponen Vektor

Vektor yang digambarkan pada bidang koordinat mempunyai komponen horisontal (gerakan ke kanan/ke kiri) dan komponen vertikal (gerakan ke atas/ke bawah).

c. Besaran Vektor

Besaran vektor adalah besaran yang mempunyai besar (panjang) dan arah digambarkan sebagai segmen garis berarah. Besar vektor dinyatakan dengan panjang segmen garis berarah.

Besar vektor $\overrightarrow{AB}$ adalah panjang $\overrightarrow{AB}$.

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2}$$

d. Notasi Vektor

Karena vektor mempunyai dua komponen yaitu komponen horisontal (sejajar sumbu X) dan komponen vertikal (sejajar sumbu Y) maka setiap vektor dapat dinyatakan dengan notasi : $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ dimana X komponen horisontal dan Y komponen vertikal.

e. Menggambar Vektor

Sebaliknya, jika diberikan komponen-komponen vektor maka kita dapat menggambar vektor yang dimaksud pada bidang datar atau bidang koordinat cartesius.

f. Modulus Vektor

Vektor yang digambarkan pada bidang koordinat mempunyai komponen horisontal (searah sumbu X) dan komponen vertikal (searah sumbu Y). Besar vektor $\overrightarrow{AB}$ adalah panjang $\overrightarrow{AB}$ dan disebut modulus vektor $\overrightarrow{AB}$.

$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 = (komponenhorisontal)^2 + (komponenvertikal)^2$ atau

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2}$$

g. Vektor Posisi

Pada bidang koordinat cartesius, setiap titik P pada bidang dapat dinyatakan sebagai vektor $\overrightarrow{OP}$. Vektor $\overrightarrow{OP}$ disebut vektor posisi dari titik P. Koordinat titik P merupakan komponen-komponen dari vektor $\overrightarrow{OP}$.

h. Kesamaan Dua Vektor

Dua vektor dikatakan sama jika kedua vektor tersebut mempunyai besar dan arah yang sama.

i. Vektor Negatif

Vektor yang besarnya sama dengan vektor $\vec{u}$ tetapi arahnya berlawanan disebut vektor negatif dari $\vec{u}$ dan ditulis sebagai $-\vec{u}$.

j. Vektor Nol

Yang dimaksud dengan vektor nol adalah vektor yang besarnya nol atau mempunyai panjang berupa titik. Vektor nol tidak mempunyai arah tertentu. Vektor nol dilambangkan dengan $\vec{0} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$.

Pada koordinat cartesius, vektor nol adalah titik 0 (0,0).

k. Vektor Satuan

Vektor yang mempunyai panjang (modulus) 1 satuan disebut vektor satuan.

Kita dapat menentukan vektor satuan yang searah dengan vektor $\vec{V}$ menurut rumus berikut:

$$\frac{\vec{V}}{|\vec{V}|}$$

3. Matriks

a. Matriks adalah susunan suatu kumpulan bilangan dalam bentuk persegi panjang yang diatur menurut baris dan kolom.

b. Baris sebuah matriks adalah susunan bilangan-bilangan yang mendatar dalam matriks.

c. Kolom sebuah matriks adalah susunan bilangan-bilangan yang tegak dalam matriks.

d. Jenis-jenis matriks berdasarkan ordo dan elemen-elemen matriks:
Matriks baris, yaitu matriks yang terdiri dari satu baris.

- Matriks kolom, yaitu matriks yang terdiri dari satu kolom.
- Matriks persegi, yaitu matriks yang banyak barisnya sama dengan banyak kolomnya.
- Matriks nol, yaitu matriks yang semua elemennya nol.

- Matriks identitas, yaitu matriks yang elemen-elemen diagonal utamanya sama dengan 1, sedangkan elemen-elemen lainnya sama dengan 0.
- Matriks skalar, yaitu matriks yang elemen-elemen diagonal utamanya sama, sedangkan elemen di luar elemen diagonalnya bernilai nol.
- Matriks diagonal, yaitu matriks persegi yang elemen di luar elemen diagonalnya bernilai nol.
- Matriks segitiga atas, yaitu matriks persegi yang elemen-elemen di bawah diagonal utamanya bernilai nol.
- Matriks segitiga bawah, yaitu matriks persegi yang elemen-elemen di atas diagonal utamanya bernilai nol.

e. Operasi Pada Matriks

1) Penjumlahan dan Pengurangan

- Syarat : ordo harus sama
- Entry yang bersesuaian di operasikan.

2) Perkalian dengan skalar

Masing masing entry dikalikan dengan skalar

3) Perkalian Matriks degan Matriks

- Syarat : $A_{(m \times n)}B_{(n \times p)} = C_{(m \times p)}$
- Baris ke-i kalikan dengan kolom ke-j (element seletak), kemudian jumlahkan

f. Transpose Matriks

Baris menjadi kolom atau kolom menjadi baris.

g. Sifat – sifat tranpose matriks :

a. $(A^t)^t = A$

b. $(A + B)^t = A^t + B^t$

c. $(K\,A)^t = KA^t$

d. $(A \times B)^t = B^t \times A^t$

h. Invers Matriks.

Jika A = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, maka invers dari matriks A adalah

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Dengan Determinan A, **Det A = ad – bc**

i. Sifat-Sifat Invers suatu Matriks

Misalkan A dan B adalah matriks sebarang yang memiliki invers, AB dan BA juga memiliki invers maka berlaku hubungan berikut.

1. $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
2. $(BA)^{-1} = A^{-1} \cdot B^{-1}$

j. Persamaan Matriks

- Penyelesaian persamaan matriks AX = B ditentukan oleh $X = A^{-1}.B$
- Penyelesaian persamaan matriks XA=B ditentukan oleh $X = B.A^{-1}$

F. Tes Formatif

1. Suatu lingkaran yang berpusat di titik (-2,1) melalui titik (4, 9). Tentukan persamaan lingkarannya !
2. Diketahui persamaan parabola sebagai berikut : y2 + 4y – 4x + 8 = 0. Tentukan koordinat puncak , koordinat focus, persamaan sumbu simetri, persamaan direktriks, dan sketsa gambarnya !

3. Tentukan : pusat, focus, sumbu simetri, sumbu panjang, sumbu pendek, direktriks, dan eksentrisitas dari persamaan elips berikut ini !
   $9x^2 + 25y^2 = 900$
4. Tentukan persamaan hiperbola jika diketahui puncaknya $P_1(-5, 0)$ dan $P_2(5, 0)$ serta fokusnya $F_1(-8, 0)$ dan $F_2(8, 0)$!
5. Jika diketahui vektor AB = $3a_y + 4a_y + 5a_y$ m dan vektor AC = $2a_x + 3a_y + 3a_z$ m, tentukan luas segitiga ABC !
6. Diketahui matriks A = $\begin{bmatrix} 2a-10 & 4 \\ -3 & a \end{bmatrix}$.
   Hitunglah nilai-nilai a yang memenuhi det A = 0!

G. Kunci Jawaban

1. Jarak kedua titik merupakan jari-jari, maka :

   $(4 + 2)^2 + (9 - 1)^2 = r^2$

   $\Leftrightarrow 6^2 + 8^2 = r^2$

   $\Leftrightarrow r^2 = 100$

   Persamaan lingkarannya :

   $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

   $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 100$

2. $y^2 + 4y - 4x + 8 = 0$

   $\Leftrightarrow y^2 + 4y = 4x - 8$

   $\Leftrightarrow (y + 2)^2 - 4 = 4x - 8$

   $\Leftrightarrow (y + 2)^2 = 4x - 4$

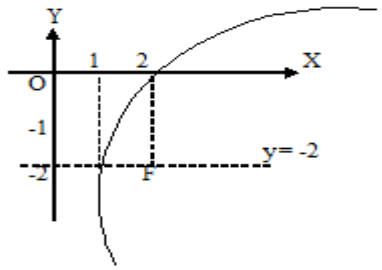
   $\Leftrightarrow (y + 2)^2 = 4(x - 1) \Leftrightarrow (y - \beta)^2 = 4p(x - \alpha)$

   Berarti : $\beta = -2$; $\alpha = 1$; $p = 1$

   Jadi, koordinat puncaknya (1, -2), koordinat fokusnya $(\alpha + p, \beta) = (2, -2)$, persamaan sumbu simetrinya $y = -2$, dan persamaan garis direktriksnya : $x = \alpha - p \Leftrightarrow x = 1 - 1 \Leftrightarrow x = 0$

Grafiknya :

Gambar 2.3.53	Grafik Persamaan Parabola



3. $9x^2 + 25y^2 = 900$

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$$

a = 10, b = 6, c = 8

pusat O(0,0)

Fokus (8, 0) dan (-8, 0)

Sumbu simetri : sumbu X dan sumbu Y

Sumbu panjang = 2a = 20

Sumbu pendek = 2b = 12

Direktriks : $x = \pm \frac{a^2}{c} = \pm \frac{100}{8} = \pm 12\frac{1}{2}$

Eksentrisitas : $e = \frac{c}{a} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

4. Puncak (±5, 0), maka a = 5

Fokus (±8, 0), maka c = 8

$b^2 = c^2 - a^2 = 64 - 25 = 39$

Persamaan hiperbola : $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{39}=1$

5. luas segitiga ABC

   AB= harga abolut vektor AB = $(3^2 + 4^2 + 5^2)^{1/2}$

   = 7,07 meter

   AC= harga abolut vektor AC = $(2^2 + 3^2 + 3^2)^{1/2}$

   = 4,69 meter

   cos θ = (3)(2)+(4)(3)+(5)(3) / (7,07)(4,69)

   θ = 5,73

   Dengan demikian, kita peroleh

   Luas segitiga ABC = $\frac{1}{2}$ AB.AC.sin θ = $\frac{1}{2}$ AB.AC = ½ .7,07.4,69 sin 5,73

   = 1,66 m^2

6. det A = 0

   det A = $\begin{vmatrix} 2a-10 & 4 \\ -3 & a \end{vmatrix}$

   $=((2a-10)\times a)-(-3\times 4)$

   $=2a^2-10a+12$

   Oleh karena det A = 0 maka

   $2a^2-10a+12=0$

   $a^2-5a+6=0$

   $(a-3)(a-2)=0$

   a – 2 = 0 atau a – 3 = 0

   a = 2 a = 3

   Jadi, nilai a yang memenuhi adalah 2 dan 3.

BAB III

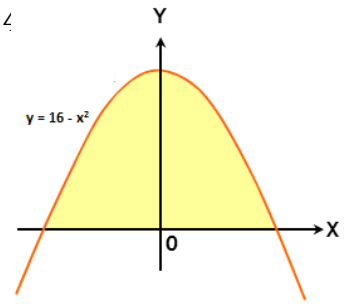
PENUTUP

Setelah menyelesaikan modul ini, peserta diklat berhak untuk mengikuti tes untuk menguji kompetensi yang telah dipelajari. Apabila peserta diklat dinyatakan memenuhi syarat kelulusan dari hasil evaluasi dalam modul ini, maka peserta berhak untuk melanjutkan ke topik/modul berikutnya.

Mintalah pada widyaiswara untuk uji kompetensi dengan sistem penilaian yang dilakukan langsung oleh pihak institusi atau asosiasi yang berkompeten apabila peserta telah menyelesaikan seluruh evaluasi dari setiap modul, maka hasil yang berupa nilai dari widyaiswara atau berupa portofolio dapat dijadikan bahan verifikasi oleh pihak institusi atau asosiasi profesi. Selanjutnya hasil tersebut dapat dijadikan sebagai penentu standar pemenuhan kompetensi dan bila memenuhi syarat peserta berhak mendapatkan sertifikat kompetensi yang dikeluarkan oleh institusi atau asosiasi profesi.

UJI KOMPETENSI

1. Pisau pemotong kayu dapat bergerak mengikuti persamaan $\mathbf{s(t)} = \frac{t^2+4t-12}{t-2}$ cm. Posisi pisau pemotong ketika mendekati dua detik adalah ... cm.
   A. 6
   B. 8
   C. 10
   D. 12
2. Sebuah perusahaan tekstil memproduksi x unit pakaian per hari dengan biaya $2x3 - 150x2 + 3.600x$ rupiah. Banyaknya barang yang harus diproduksi setiap harinya supaya biaya produksi menjadi minimal adalah ...unit
   A. 20
   B. 25
   C. 30
   D. 35
3. Sebuah mobil bergerak dengan persamaan Vt=4t3+6t-5 dengan V dalam satuan meter per sekon dan t dalam satuan sekon. Perpindahan mobil setelah menempuh waktu t = 2 sekon adalah...meter
   A. 10
   B. 12
   C. 14
   D. 18



Pilar sebuah jembatan tampak seperti gambar di atas. Luas daerah yang diarsir adalah...satuan luas

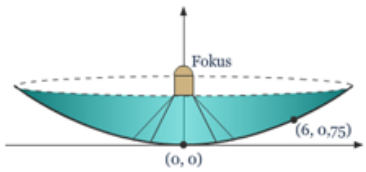
A. $84\frac{1}{3}$

B. $84\frac{2}{3}$

C. $85\frac{1}{3}$

D. $85\frac{2}{3}$

5.



Gambar di atas menunjukkan penampang dari piringan antena radio. Seorang teknisi telah menempatkan suatu titik pada penampang antena yang terletak 0,75 meter di atas dan 6 meter di kanan dari titik pusatnya. Seharusnya teknisi menempatkan fokus antena sebesar ... meter dari titik pusat

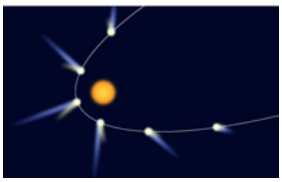
A. 3

B. 6

C. 9

D. 12

6.



Komet-komet akan mengitari matahari dengan lintasn berbentuk hiperbola dengan matahari sebagai salah satu titik fokusnya. Lintasan komet yang diilustrasikan oleh gambar di atas dimodelkan dengan persamaan $8.100x^2 - 14.400y^2 = 116.640.000$. Jarak komet tersebut dengan matahari adalah...juta mil

A. 30

B. 50

C. 100

D. 150

7. Sebuah perahu menyeberangi sungai yang lebarnya 120 m dan kecepatan airnya 4 m/s. Bila perahu diarahkan menyilang tegak lurus dengan kecepatan 3 m/s, maka panjang lintasan yang ditempuh perahu hingga sampai ke seberang sungai adalah ...m

   A. 200
   B. 225
   C. 250
   D. 275

8. sebuah pesawat terbang 200 mil dalam arah membentuk sudut 30o diukur dari selatan ke barat. . Maka komponen peprindahan pesawat dalam arah Barat adalah ...mil

   A. 100
   B. 150
   C. $100\sqrt{2}$
   D. $100\sqrt{3}$

9. Pada perhitungan gaya-gaya reaksi dan bidang momen terhadap perletakan jepit diperoleh persamaan berikut :

   $2H + 2V + M = 4$

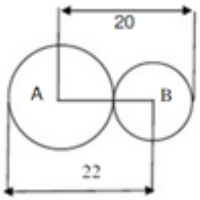
   $2H + 4V + 2M = 10$

   $2H + 3V + 2M = 6$

   Nilai determinan V (gaya vertikal) sebesar ...

   A. 6
   B. 7
   C. 8
   D. 9

10. Hubungan antara Roda gigi A dan Roda Gigi B tampak seperti gambar di atas. Jari-jari masing-masing roda jika dinyatakan dengan matriks adalah $\begin{bmatrix} r_A \\ r_B \end{bmatrix} = \cdots$



A. $-\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 20 \\ 22 \end{bmatrix}$

B. $-\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 20 \\ 22 \end{bmatrix}$

C. $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 20 \\ 22 \end{bmatrix}$

D. $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 20 \\ 22 \end{bmatrix}$

GLOSARIUM

ISTILAH	KETERANGAN
Diferensiasi perkalian dua buah fungsi	perkalian turunan fungsi yang pertama dikalikan fungsi kedua ditambah dengan turunan fungsi kedua dikalikan dengan fungsi pertama
Diferensiasi pembagian dua buah fungsi	perkalian penyebut dan turunan pembilang dikurangi perkalian pembilang dan turunan penyebut dibagi kuadrat penyebut
integral parsial.	proses integral dilakukan perbagianJika integral perkalian fungsi tetapi masing-masing fungsi bukan merupakan diferensial fungsi yang lain
Integral Tertentu	Integral dengan batas atas dan batas bawah dinamakan integtral tertentu
Limit fungsi f(x)	merupakan nilai hampiran dari f(x) untuk nilai x mendekati nilai tertentu
Persamaan parametrik	merupakan persamaan dimana baik y maupun x merupakan fungsi variabel lain yang dinamakan parameter
Volume Benda Putar	Jika bentuk bidang yang dibatasi oleh kurva y = f(x) sumbu x dan x = a dan x = b diputarkan penuh terhadap sumbu x atau sumbu y

DAFTAR PUSTAKA

Al Krismanto (2001). *Garis Singgung pada Irisan Kerucut.* Yogyakarta: PPPG Matematika.

Ayres, Frank Jr. (1972), *Theory and Problem of Differensial and Integral Calculus.* Mc Graw Hill : New York.

Danuri (2008). *Irisan Kerucut untuk Guru Matematika SMK*. Yogyakarta: PPPPTK Matematika.

Depdiknas (2006). *Permendiknas Nomor 22 Tahun 2006 Tentang Standar Isi* Sekolah *MenengahKejuruan.* Jakarta: Depdiknas.

Fatah Asyarie, dkk. (1992), *Kalkulus untuk SMA.* Pakar Raya : Bandung.

Herry Sukarman. (1998), *Kalkulus,* Makalah Penataran Guru Matematika MGMP SMU. PPPG matematika : Yogyakarta.

Jacobs, H.R. (1982). *Mathematics, A Human Endeavor (2nd Ed)*. San Fransisco: W.H. Freeman and Company.

Johannes, H dan Budiono Sri Handoko. (1988), *Pengantar Matematika untuk Ekonomi.*LP3ES : Jakarta.

Piskunov, N. (1974), *Differensial and Integral Calculus.* Mir Publishers : Moscow.

Purcell, E. J. & Varberg, D. (1991). *Kalkulus dan Geometri Analitis.* Jakarta: Erlangga.

Setiawan. (2009) *Kalkulus*. Pusat Pengembangan dan Pemberdayaan Pendidik dan Tenaga Kependidikan Matematika: Yogyakarta

Sri Kurnianingsih, dkk. (1995), *Matematika SMU,* Yudhistira : Jakarta.

Sumadi, dkk. (1997), *Matematika SMU,* PT. Tiga Serangkai : Surakarta.

Thomas, George B. Jr. (1977), *Calculus and Analytic Geometry,* Addison-Werley Publishers Company.

Tim Matematika (1990). *Matematika Program Ilmu-Ilmu Fisik untuk Kelas 3* Semester *5 SMA*. Klaten: Intan Pariwara.

APPENDIKS Buku materi workshop penulisan soal Puspendik.pdf

MODUL

PENGEMBANGAN KEPROFESIAN BERKELANJUTAN

MATEMATIKA TEKNIK

SEKOLAH MENENGAH KEJURUAN (SMK)

F

Kelompok Kompetensi

EDISI REVISI 2018

Terintegrasi Penguatan Pendidikan Karakter dan
Pengembangan Soal Keterampilan Berpikir Aras Tinggi
(HOTS)

Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan
Direktorat Jenderal Guru dan Tenaga Kependidikan
2018

Jalan Jenderal Sudirman, Gedung D Lantai 12, Senayan, Jakarta 10270 Telefon / Fax: (021)57974108

http://gtk.kemdikbud.go.id/