Modul

Pengembangan Keprofesian Berkelanjutan

C

Kelompok Kompetensi

PROFESIONAL

GEOMETRI

Edisi Revisi 2018

Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan
Direktorat Jenderal Guru dan Tenaga Kependidikan
2018

MODUL PENGEMBANGAN KEPROFESIAN BERKELANJUTAN

MATEMATIKA TEKNIK
SEKOLAH MENENGAH KEJURUAN (SMK)

TERINTEGRASI PENGUATAN PENDIDIKAN KARAKTER DAN PENGEMBANGAN SOAL KETERAMPILAN BERPIKIR ARAS TINGGI (HOTS)

EDISI REVISI 2018

KELOMPOK KOMPETENSI C

PROFESIONAL:

Geometri

Penulis:
Dr. Yanto Permana, M.Pd.
Drs. Sukarna, M.Si.
Penalaah:
Joko Soebagyo, S.Pd, M.Pd.
Wahyu Purnama, S.Si, M.Pd.

Desain Grafis dan Ilustrasi:
Tim Desain Grafis

Direktorat Jenderal Guru dan Tenaga Kependidikan
Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan

KATA SAMBUTAN

Peran guru profesional dalam proses pembelajaran sangat penting sebagai kunci keberhasilan belajar siswa. Guru profesional adalah guru yang kompeten membangun proses pembelajaran yang baik sehingga dapat menghasilkan pendidikan yang berkualitas dan berkarakter prima. Hal tersebut menjadikan guru sebagai komponen yang menjadi fokus perhatian pemerintah pusat maupun pemerintah daerah dalam peningkatan mutu pendidikan terutama menyangkut kompetensi guru.

Pengembangan profesionalitas guru melalui Program Pengembangan Keprofesian Berkelanjutan merupakan upaya Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan melalui Direktorat Jenderal Guru dan Tenaga Kependikan dalam upaya peningkatan kompetensi guru. Sejalan dengan hal tersebut, pemetaan kompetensi guru telah dilakukan melalui Uji Kompetensi Guru (UKG) untuk kompetensi pedagogik dan profesional pada akhir tahun 2015. Peta profil hasil UKG menunjukkan kekuatan dan kelemahan kompetensi guru dalam penguasaan pengetahuan pedagogik dan profesional. Peta kompetensi guru tersebut dikelompokkan menjadi 10 (sepuluh) kelompok kompetensi. Tindak lanjut pelaksanaan UKG diwujudkan dalam bentuk pelatihan guru paska UKG sejak tahun 2016 dan akan dilanjutkan pada tahun 2018 ini dengan Program Pengembangan Keprofesian Berkelanjutan bagi Guru. Tujuannya adalah untuk meningkatkan kompetensi guru sebagai agen perubahan dan sumber belajar utama bagi peserta didik. Program Pengembangan Keprofesian Berkelanjutan bagi Guru dilaksanakan melalui Moda Tatap Muka.

Pusat Pengembangan dan Pemberdayaan Pendidik dan Tenaga Kependidikan (PPPPTK) dan, Lembaga Pengembangan dan Pemberdayaan Pendidik dan Tenaga Kependidikan Kelautan Perikanan Teknologi Informasi dan Komunikasi (LP3TK KPTK) merupakan Unit Pelaksanana Teknis di lingkungan Direktorat Jenderal Guru dan Tenaga Kependidikan yang bertanggung jawab dalam mengembangkan perangkat dan melaksanakan peningkatan kompetensi guru sesuai bidangnya. Adapun perangkat pembelajaran yang dikembangkan tersebut adalah modul Program Pengembangan Keprofesian Berkelanjutan melalui Pendidikan dan Pelatihan Guru moda tatap muka untuk semua mata pelajaran dan kelompok kompetensi. Dengan modul ini diharapkan program Pengembangan Keprofesian Berkelanjutan memberikan sumbangan yang sangat besar dalam peningkatan kualitas kompetensi guru.

Mari kita sukseskan Program Pengembangan Keprofesian Berkelanjutan melalui Pendidikan dan Pelatihan Guru ini untuk mewujudkan Guru Mulia karena Karya

Jakarta, Juli 2018

Direktur Jenderal Guru
dan Tenaga Kependidikan,

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
DIREKTORAT JENDERAL GURU DAN TENAGA KEPENDIDIKAN

Dr. Supriano, M.Ed.
NIP. 196208161991031001

KATA PENGANTAR

Undang–Undang Republik Indonesia Nomor 14 Tahun 2005 tentang Guru dan Dosen mengamanatkan adanya pembinaan dan pengembangan profesi guru secara berkelanjutan sebagai aktualisasi dari profesi pendidik. Program Peningkatan Keprofesian Berkelanjutan dilaksanakan bagi semua guru, baik yang sudah bersertifikasi maupun belum bersertifikasi. Untuk melaksanakan Program Peningkatan Keprofesian Berkelanjutan bagi guru, pemetaan kompetensi telah dilakukan melalui Uji Kompetensi Guru (UKG) bagi semua guru di di Indonesia. Dengan melihat hasil UKG dapat diketahui secara objektif kondisi guru saat ini, dan data tersebut dapat digunakan untuk meningkatan kompetensi guru tersebut.

Modul ini disusun sebagai materi utama dalam program peningkatan kompetensi guru mulai tahun 2017 yang diberi nama Peningkatan Keprofesian Berkelanjutan (PKB). Program ini disesuaikan dengan mata pelajaran/paket keahlian yang diampu oleh guru dan kelompok kompetensi yang diindikasi perlu untuk ditingkatkan. Untuk setiap mata pelajaran/paket keahlian telah dikembangkan sepuluh modul kelompok kompetensi yang mengacu pada Standar Kompetensi Guru (SKG) dan indikator pencapaian kompetensi (IPK) yang ada di dalamnya. Demikian pula soal-soal Uji Kompetensi Guru (UKG) telah terbagi atas 10 kelompok kompetensi. Sehingga program Peningkatan Keprofesian Berkelanjutan yang ditujukan bagi guru berdasarkan hasil UKG diharapkan dapat menjawab kebutuhan guru dalam peningkatan kompetensinya.

Sasaran program strategis pencapaian target RPJMN tahun 2015–2019 antara lain adalah meningkatnya kompetensi guru dilihat dari *Subject Knowledge* dan *Pedagogical Knowledge* yang diharapkan akan berdampak pada kualitas hasil belajar siswa. Oleh karena itu, materi di dalam modul dirancang meliputi kompetensi pedagogik yang disatukan dengan kompetensi profesional yang didalamnya terintegrasi penguatan pendidikan karakter dan pengembangan soal keterampilan berpikir aras tinggi (HOTS) sehingga diharapkan dapat mendorong peserta diklat agar dapat langsung menerapkan kompetensi pedagogiknya dalam proses pembelajaran sesuai dengan substansi materi yang diampunya. Disamping dalam bentuk *hard-copy*, modul ini dapat diperoleh juga dalam bentuk digital, sehingga guru dapat lebih mudah mengaksesnya kapan saja dan dimana saja meskipun tidak mengikuti diklat secara tatap muka.

Kepada semua pihak yang telah bekerja keras dalam penyusunan modul program Guru Pembelajar ini, kami sampaikan terima kasih yang sebesar-besarnya.

Cimahi, Juli 2018

Kepala PPPPTK BMTI,

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
PUSAT PENGEMBANGAN DAN PEMBERDAYAAN PENDIDIK DAN TENAGA KEPENDIDIKAN BMTI

Drs. Marthen Katte Patiung, M.M.

NIP. 19590416 198603 1 000

DAFTAR ISI

KATA SAMBUTAN i
KATA PENGANTAR ii
DAFTAR TABEL viii
LAMPIRAN viii
PENDAHULUAN 1
A. Latar Belakang 1
B. Tujuan 2
C. Peta Kompetensi 2
D. Ruang Lingkup 4
E. Saran Cara Penggunaan Modul 4
KEGIATAN PEMBELAJARAN 1 5
A. Tujuan 5
B. Indikator Pencapaian Kompetensi 6
C. Uraian Materi 6
D. Aktivitas Pembelajaran 72
E. Rangkuman 87
E. Umpan Balik dan Tindak Lanjut 89
F. Tes Formatif 91
G. Kunci Jawaban 92
KEGIATAN PEMBELAJARAN 2 95
A. Tujuan 95
B. Indikator Pencapaian Kompetensi 95
C. Uraian Materi 95
D. Aktivitas Pembelajaran 136
Aktifitas 1: Jarak dalam Dimensi Tiga 136
LEMBAR KERJA 01a 136
LEMBAR KERJA 01b 137
LEMBAR KERJA 01c 137

LEMBAR KERJA 01d **138**

Aktifitas 2: Sudut dalam Dimensi Tiga **138**

LEMBAR KERJA 02 .... **138**

Aktifitas 3: Bangun Ruang Bersisi Datar **139**

LEMBAR KERJA 03a **139**

LEMBAR KERJA 03b **140**

LEMBAR KERJA 03c **140**

Aktifitas 4: Bangun Ruang Sisi Lengkung **141**

LEMBAR KERJA 04a **141**

LEMBAR KERJA 04b **141**

LEMBAR KERJA 04c **142**

LEMBAR KERJA 04d **143**

Aktivitas 05: Penyusunan Instrumen Penilaian **144**

Lembar Kerja 05 .... **144**

E. Rangkuman 145

F. Tes Formatif 148

PENUTUP **153**

UJI KOMPETENSI **154**

DAFTAR PUSTAKA **157**

GLOSARIUM **158**

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.3.1 Unsur-Unsur Geometri 9
Gambar 2.3.2 Titik, Garis, dan Bidang........ 11
Gambar 2.3.3 Limas T.ABCD 12
Gambar 2.3.4 Sinar AB........ 13
Gambar 2.3.5 Segitiga ABC 15
Gambar 2.3.6 Sudut ABC 15
Gambar 2.3.7 Sinar Garis OA dan OB........ 16
Gambar 2.3.8 Sudut 1........ 16
Gambar 2.3.9 Sudut 2........ 17
Gambar 2.3.10 Perpotongan Garis AC dan BD........ 17
Gambar 2.3.11 Sudut 65^o 17
Gambar 2.3.12 Sudut yang Berdekatan........ 20
Gambar 2.3.13 Sudut-Sudut Berpenyiku dan Berpelurus........ 20
Gambar 2.3.14 Sudut yang Bertolak Belakang 21
Gambar 2.3.16 Postulat 1 Garis Sejajar........ 22
Gambar 2.3.17 Postulat 2 Garis Sejajar........ 23
Gambar 2.3.18 Diagonal pada Bangun Datar 25
Gambar 2.3.19 Air mancur di Singapura 26
Gambar 2.3.20 Bangun Datar ABCDEF........ 26
Gambar 2.3.21 Gambar Macam-Macam Bangun Datar 28
Gambar 2.3.22 Bangun Datar A dan B 29
Gambar 2.3.23 Gambar Ilustrasi untuk Luas Bangun Datar 29
Gambar 2.3.24 Trapesium........ 30
Gambar 2.3.25 Ilustrasi Luas dan Keliling Segitiga 32
Gambar 2.3.26 Ilustrasi Luas dan Keliling Bangun Datar 32
Gambar 2.3.27 Ilustrasi Luas dan Keliling Trapesium dan Lingkaran........ 33
Gambar 2.3.28 Trapesoida........ 35
Gambar 2.3.29 Mid Ordinat 36
Gambar 2.3.30 Kurva y = f (x)........ 38
Gambar 2.3.31 Escalator 41

Gambar 2.3.32 Segitiga ABC 41
Gambar 2.3.33 Bangunan di Tepi Danau 45
Gambar 2.3.34 Refleksi dari Segitiga ABC (1) 45
Gambar 2.3.35 Refleksi dari Segitiga ABC (2) 46
Gambar 2.3.36 Ilustrasi Refleksi 47
Gambar 2.3.37 Refleksi terhadap sumbu x 47
Gambar 2.3.38 Refleksi terhadap sumbu y 50
Gambar 2.3.39 Refleksi terhadap garis x = m 50
Gambar 2.3.40 Refleksi terhadap garis y = n 51
Gambar 2.3.41 Refleksi terhadap garis y = x 52
Gambar 2.3.42 Refleksi terhadap garis y = -x 54
Gambar 2.3.43 Komedi Putar 55
Gambar 2.3.44 Rotasi ΔABC 55
Gambar 2.3.45 Rotasi Bendera FGHI 56
Gambar 2.3.46 Rotasi pada Sumbu (X,Y) 56
Gambar 2.3.47 Alat Pembesar 62
Gambar 2.3.48 Dilatasi pada Segitiga ABC 62
Gambar 2.3.49 Dilatasi [O,k] 63
Gambar 2.3.50 Matriks Transformasi 68
Gambar 2.4.1 Kubus ABCD.EFGH 97
Gambar 2.4.2 Jaring-Jaring Kubus 99
Gambar 2.4.3 Prisma Segitiga 99
Gambar 2.4.4 Balok ABCD.EFGH 100
Gambar 2.4.5 Kubus (3) 102
Gambar 2.4.6 Jarak Titik P ke garis g 106
Gambar 2.4.7 Proyeksi P pada bidang α 107
Gambar 2.4.8 Jarak P dan Q 107
Gambar 2.4.9 Jarak antara Dua Bidang 112
Gambar 2.4.10 Garis yang Memotong Garis Lain (1) 112
Gambar 2.4.11 Garis yang Memotong Garis Lain (2) 113
Gambar 2.4.12 Garis yang Memotong Tegak Lurus 114
Gambar 2.4.13 Sudut pada Bangun Ruang 115

Gambar 2.4.14 Sudut antara dua garis berpotongan 116
Gambar 2.4.15 Sudut antara dua garis bersilangan 116
Gambar 2.4.16 Sudut antara garis dan bidang 116
Gambar 2.4.17 Sudut antara bidang dan bidang 117
Gambar 2.4.18 Proyeksi Titik pada Bidang 119
Gambar 2.4.19 Jaring-Jaring Prisma 122
Gambar 2.4.20 Selimut Tabung 123
Gambar 2.4.21 Kerucut 124
Gambar 2.4.22 Selimut Kerucut 124
Gambar 2.4.23 Limas 126
Gambar 2.4.24 Jaring-Jaring Limas 126
Gambar 2.4.25 Sebidang Tanah 128
Gambar 2.4.26 Bangun yang Identik dengan Prisma 132
Gambar 2.4.27 Tabung 133
Gambar 2.4.28 Kubus (2) 134
Gambar 2.4.33 Corong Mesin Penggiling 141
Gambar 2.4.34 Rumah Dome 142
Gambar 2.4.35 Tugu Bambu Runcing 143

DAFTAR TABEL

Tabel 1.1 Ruang Lingkup Isi Modul 4
Tabel 2.3.1 Unsur-Unsur Geometri 10
Tabel 2.3.2 Matrisk Transformasi 68

LAMPIRAN

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Pengembangan keprofesian berkelanjutan sebagai salah satu strategi pembinaan guru dan tenaga kependidikan diharapkan dapat menjamin guru dan tenaga kependidikan mampu secara terus menerus memelihara, meningkatkan, dan mengembangkan kompetensi sesuai dengan standar yang telah ditetapkan. Pelaksanaan kegiatan PKB akan mengurangi kesenjangan antara kompetensi yang dimiliki guru dan tenaga kependidikan dengan tuntutan profesional yang dipersyaratkan.

Guru dan tenaga kependidikan wajib melaksanakan PKB baik secara mandiri maupun kelompok. Khusus untuk PKB dalam bentuk diklat dilakukan oleh lembaga pelatihan sesuai dengan jenis kegiatan dan kebutuhan guru. Penyelenggaraan diklat PKB dilaksanakan oleh PPPPTK dan LPPPTK KPTK atau penyedia layanan diklat lainnya. Pelaksanaan diklat tersebut memerlukan modul sebagai salah satu sumber belajar bagi peserta diklat. Modul merupakan bahan ajar yang dirancang untuk dapat dipelajari secara mandiri oleh peserta diklat berisi materi, metode, batasan-batasan, dan cara mengevaluasi yang disajikan secara sistematis dan menarik untuk mencapai tingkatan kompetensi yang diharapkan sesuai dengan tingkat kompleksitasnya.

Untuk mempersiapkan kegiatan PKB dalam bentuk diklat bagi guru-guru matematika diperlukan adanya modul yang tepat sesuai dengan tuntutan dari Permendinas no. 16 Tahun 2007 tentang Standar Kualifikasi Akademik dan Kompetensi Guru. Dari permendiknas tersebut, standar kompetensi guru yang dikembangkan dari kompetensi pedagogik memuat sepuluh kompetensi inti guru yang diantaranya memuat tentang penguasaan konsep pengembangan kurikulumdan dari kompetensi profesional memuat tentang konsep geometri.

B. Tujuan

Tujuan penyusunan modul ini adalah agar peserta diklat PKB dapat menguasai konsep pengembangan kurikulumdan konsep geometrimelalui kegiatan diskusi dengan percaya diri.

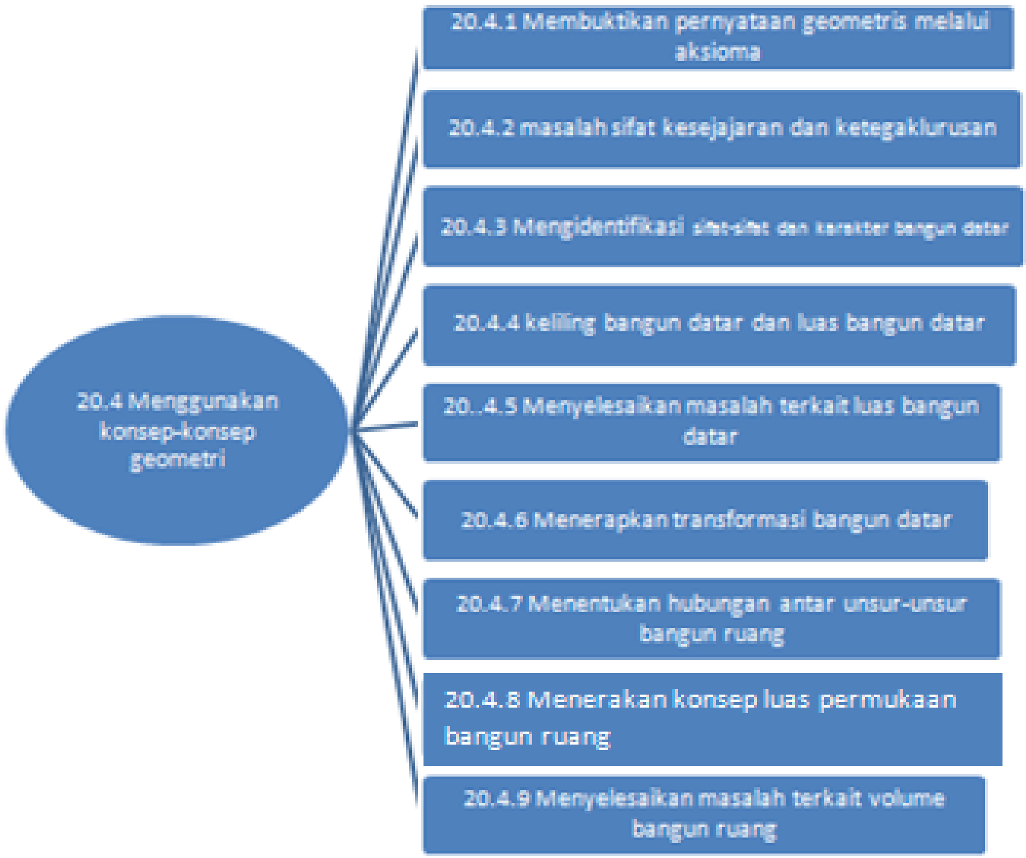
C. Peta Kompetensi

Pada Gambar 1.1 berikut dicantumkan daftar kompetensi pedagogik sesuai dengan Permendiknas Nomor 16 Tahun 2007 tentang Standar Kualifikasi Akademik dan Kompetensi Guru yang akan ditingkatkan melalui proses belajar dengan menggunakan modul ini.

Gambar 1.1 **Peta Kompetensi Pedagogik**

Pada Gambar 1.2 berikut dicantumkan daftar kompetensi profesional sesuai dengan Permendiknas Nomor 16 Tahun 2007 tentang Standar Kualifikasi Akademik dan Kompetensi Guru yang akan ditingkatkan melalui proses belajar dengan menggunakan modul ini.

Gambar 1.2	**Peta Kompetensi Profesional**



Bagan 12

D. Ruang Lingkup

Ruang lingkup dari modul ini berisikan kegiatan belajar untuk pengembangan kompetensi pedagogik dan pengembangan kompetensi profesional. Secara rinci ruang lingkup dari modul ini adalah sebagai berikut.

Tabel 1.1 Ruang Lingkup Isi Modul

No	Kegiatan Belajar	Uraian Materi
1	Kegiatan Belajar 1	Berisikan materi tentang Pengalaman Pembelajaran
2	Kegiatan Belajar 2	Berisikan materi tentang Materi Pembelajaran
3	Kegiatan Belajar 3	Beriskan materi tentang Geometri Dimensi Dua
4	Kegiatan Belajar 4	Beriskan materi tentang Geometri Dimensi Tiga

E. Saran Cara Penggunaan Modul

Untuk mempelajari modul ini, hal-hal yang perlu peserta diklat lakukan adalah sebagai berikut:

1. Baca dan pelajari semua materi yang disajikan dalam modul ini,
2. Kerjakan soal-soal tes formatif dan cocokkan jawabannya dengan Kunci Jawaban yang ada.
3. Jika ada bagian yang belum dipahami, diskusikanlah dengan rekan belajar Anda. Jika masih menemui kesulitan, mintalah petunjuk instruktor/widyaiswara.
4. Untuk mengukur tingkat penguasaan materi Kerjakan soal-soal Uji Kompetensi di akhir bab dalam modul ini

BAB II
KEGIATAN PEMBELAJARAN 1

Kegiatan Belajar 3 : Geometri Dimensi Dua

Pengantar:

Dalam Kegiatan Belajar ini akan dibahas mengenai unsur dasar pembangun geometri, sudut dan garis, aksioma dan teorema, luas dan keliling bangun datar, dan transformasi bangun datar. Geometri dimensi dua merupakan bagian awal sebelum mempelajari geometri dimensi tiga, sehingga diharapkan peserta dapat menyelesaikan Kegiatan Belajar ini. Setelah mempelajari materi ini, diharapkan para peserta akan dapat menerapkan ke dalam soal-soal kejuruan.

A. Tujuan

Tujuan dari penulisan modul ini adalah:

1. Melalui membaca peserta diklat dapat mengidentifikasi sifat-sifat atau karakteristik bangun datar dengan penuh tanggungjawab.
2. Melalui diskusi kelompok peserta diklat dapat menyelesaikan masalah terkait luas bangun datar dengan teliti.
3. Melalui simulasi peserta diklat dapat menyelesaikan masalah terkait sifat kesejajaran dan ketegaklurusan dengan cermat.
4. Melalui eksperimen peserta diklat dapat membuktikan pernyataan geometris melalui aksioma dan teorema dengan percaya diri.
5. Melalui tanya jawab peserta diklat dapat menentukan keliling bangun datar dan luas daerah bangun datar dengan benar.
6. Melalui penugasan peserta diklat dapat menerapkan transformasi bangun datar dengan tekun.

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

Indikator pencapaian kompetensi yang harus dikuasai setelah mengikuti kegiatan belajar ini adalah, peserta diklat dapat:

a. Mengidentifikasi sifat-sifat atau karakteristik bangun datar dengan cermat.
b. Menyelesaikan masalah terkait luas bangun datar dengan teliti.
c. Menyelesaikan masalah terkait sifat kesejajaran dan ketegaklurusan dengan cermat.
d. Membuktikan pernyataan geometris melalui aksioma dan teorema dengan penuh tanggung jawab.
e. Menentukan keliling bangun datar dan luas daerah bangun datar secara cermat.
f. Menerapkan transformasi bangun datar dengan teliti.

C. Uraian Materi

1. Sejarah Geometri

a. Pengertian Geometri

Geometri (Greek; geo= bumi, metria= ukuran) adalah sebagian dari matematika yang mengambil persoalan mengenai ukuran, bentuk, dan kedudukan serta sifat ruang. Geometri adalah salah satu dari ilmu yang tertua. Awal mulanya sebuah badan pengetahuan praktikal yang mengambil berat dengan jarak, luas dan volume, tetapi pada abad ke-3 geometri mengalami kemajuan yaitu tentang bentuk aksiometik oleh Euclid, yang hasilnya berpengaruh untuk beberapa abad berikutnya.

Geometri merupakan salah satu cabang dalam ilmu matematika. Ilmu Geometri secara harfiah berarti pengukuran tentang bumi, yakni ilmu yang mempelajari hubungan di dalam ruang. Sejatinya, ilmu geometri sudah dipelajari peradaban Mesir Kuno, masyarakat Lembah Sungai Indus dan Babilonia.

Peradaban-peradaban kuno ini diketahui memiliki keahlian dalam drainase rawa, irigasi, pengendalian banjir dan pendirian bangunan-bagunan besar. Kebanyakan geometri Mesir kuno dan Babilonia terbatas hanya pada perhitungan panjang segmen-segmen garis, luas, dan volume.

b. Sejarah Singkat Geometri

Paling tidak ada enam wilayah yang dapat dipandang sebagai 'sumber' penyumbang pengetahuan geometri, yaitu: Babilonia (4000 SM - 500 SM), Yunani (600 SM – 400 SM), Mesir (5000 SM - 500 SM), Jasirah Arab (600 - 1500 AD), India (1500 BC - 200 BC), dan Cina (100 SM - 1400). Tentu masih ada negara-negara penyumbang pengetahuan geometri yang lain, Namun, kurang signifikan atau belum terekam dalam tradisi tulisan.

c. Tokoh-Tokoh Geometri

1) Thales (640 – 546 SM)

Masyarakat matematika sekarang menghargai Thales sebagai orang yang selalu berkarta "Buktikan itu" dan bahkan ia selalu melakukan itu. Dari sekian banyak teorema adalah:

a. Sudut-sudut alas dari suatu segitiga samakaki adalah kongruen,
b. Sudut-sudut siku-siku adalah kongruen,
c. Sebuah sudut yang dinyatakan dalam sebuah setengah lingkaran adalah sudut siku-siku.

2) Pythagoras (582-507 SM)

Para Pythagorean menggunakan metode pembuktian tidak hanya untuk mengembangkan Teorema Pythagoras, tetapi juga terhadap teorema-teorema jumlah sudut dalam suatu poligon, sifat-sifat dari garis-garis yang sejajar, teorama tentang jumlah-jumlah yang tidak dapat diperbandingkan, serta teorema tentang lima bangun padat beraturan.

3) Euclid (300 SM)

Dalam The Elements, Euclid menggabungkan pekerjaan disekolah yang telah ia ketahui dengan semua pengetahuan matematika yang ia ketahui dalam suatu perbandingan yang sistematis hingga menjadi sebuah hasil yang menakjubkan. Kebanyakan dari pekerjaannya itu bersifat original, sebagai metode deduktif ia mendemonstrasikan sebagian besar pengetahuan yang diperlukan melalui penalaran. Dalam Element Euclid pun menjelaskan aljabar dan teori bilangan sebaik ia menjelaskan geometri.

4) Saintis-Saintis Muslim

Di era kekhalifahan Islam, para saintis Muslim pun turut mengembangkan geometri. Bahkan, pada era abad pertengahan, geometri dikuasai para matematikus Muslim. Tak heran jika peradaban Islam turut memberi kontribusi penting bagi pengembangan cabang ilmu matematika modern itu.

Penelitian al-Khawarizmi dianggap sebagai sebuah revolusi besar dalam dunia matematika. Dia menghubungkan konsep-konsep geometri dari matematika Yunani kuno ke dalam konsep baru. Penelitian-penelitian al-Khawarizmi menghasilkan sebuah teori gabungan yang memungkinkan bilangan rasional/irasional, besaran-besaran geometri diperlakukan sebagai objek-objek aljabar.

Ilmuwan Muslim lainnya yang berjasa mengembangkan geometri adalah Thabit Ibnu Qurra. Matematikus Muslim yang dikenal dengan panggilan Thebit itu juga merupakan salah seorang ilmuwan Muslim terkemuka di bidang Geometri. Dia melakukan penemuan penting di bidang matematika seperti kalkulus integral, trigonometri, geometri analitik, maupun geometri non-Eucledian.

Selain itu, ilmuwan Muslim lainnya yang berjasa mengembangkan geometri adalah Ibnu al-Haitham. Dalam bidang geometri, Ibnu al-Haitham mengembangkan analitis geometri yang menghubungkan geometri dengan aljabar. Selain itu, dia juga memperkenalkan konsep gerakan dan transformasi dalam geometri. Teori Ibnu al-Haitham dalam bidang persegi merupakan teori yang pertama kali dalam geometri eliptik dan geometri hiperbolis. Teori ini dianggap sebagai tanda munculnya geometri non- Euclidean.

Cendekiawan Muslim lainnya yang berjasa mengembangkan geometri adalah Abu Nasr Mansur ibnu Ali ibnu Iraq atau biasa disebut Abu Nasr

Mansur. Ia merupakan salah satu ahli geometri yang mendalami spherical geometri (geometri yang berhubungan dengan astronomi).

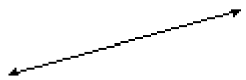
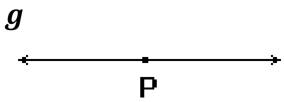
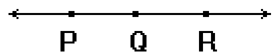
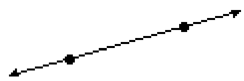
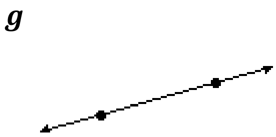
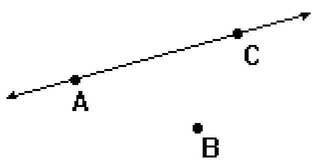
2. Geometri Dimensi Dua (Struktur Konsep)

Geometri sebagai salah satu sistem matematika, di dalamnya memiliki banyak konsep pangkal, mulai dari unsur primitif atau unsur tak terdefinisi, antara lain: titik, garis, kurva, ataupun bidang. Juga terdapat relasi-relasi pangkal yang tidak didefinisikan, misalnya: 'melalui', 'terletak pada', 'memotong', dan 'antara'. Dari unsur-unsur yang tidak terdefinisikan ini kemudian membangun unsur-unsur yang didefinisikan, selanjutnya ke aksioma atau postulat, dan akhirnya pada teorema atau dalil. Gambaran hubungan antara unsur-unsur yang tidak terdefinisikan, unsur-unsur yang didefinisikan, aksioma/postulat, dan teorema/dalil, dapat dilihat pada Gambar 2.3.1, diikuti selanjutnya oleh contoh beberapa hubungan antara konsep-konsep tersebut.

Gambar 2.3.1 Unsur-Unsur Geometri

unsur-unsur yang tidak terdefinisi ⇨ ***unsur-unsur yang terdefinisi*** ⇨ *aksioma/ postulat* ⇨ *teorema/ dalil-dalil*

Perhatikan Tabel 2.3.1 berikut ini. Tabel tersebut memperlihatkan mengenai konsep-konsep dalam geometri beserta ilustrasinya, juga keterkaitan antara unsur tak terdefinisi, relasi tak terdefinisi, dan aksioma-aksioma yang ada dalam geometri. Selanjutnya, akan dipelajari beberapa konsep dasar dalam geometri yang telah didefinisikan, serta beberapa permasalahan yang mengandung pemecahan masalah matematika.

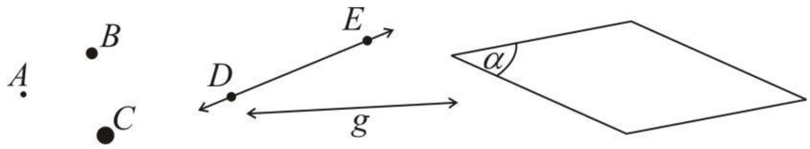
Tabel 2.3.2	Unsur-Unsur Geometri	
	Konsep	**Ilustrasi**
Unsur Pangkal yang Tak Terdefinisi	Titik	Tidak memiliki dimensi.
	Garis	 Pada garis terdapat banyak titik, panjang tak berbatas.
Relasi Pangkal yang Tak Terdefinisi	Melalui	 Garis g melalui titik P, atau titik P terletak pada garis g.
	Antara	 Titk Q antara P dan R.
Aksioma	Melalui dua titik yang berbeda dapat dibuat tepat satu garis.	
	Pada setiap garis g paling sedikit trdapat dua titik yang berbeda.	
	Melalui satu titik di luar garis, dapat dibuat tepat satu garis sejajar dengan garis tersebut.	

3. Beberapa Konsep Dasar

a. Pengertian pangkal

Titik, garis, dan bidang merupakan pengertian pangkal yang tidak didefinisikan (*undefined term*).

Gambar 2.3.2	Titik Garis dan Bidang



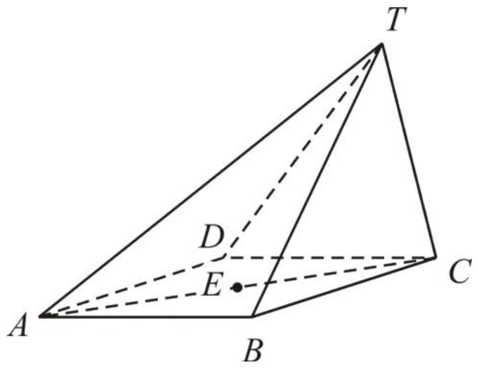
Beberapa istilah lain dalam geometri juga cukup diterima secara intuitif, tetapi tidak didefinisikan, seperti "terletak", "di luar", "kelurusan" suatu garis, atau "datarnya" bidang.

b. Definisi, Aksioma, dan Teorema

Setelah mengenal *undefined term* titik, garis, dan bidang, diperlukan pernyataan-pernyataan yang menjelaskan suatu istilah. Pernyataan ini disebut sebagai definisi. Dalam mendefinisikan sesuatu, hanya boleh menggunakan *undefined term*, atau istilah-istilah yang telah dikenal sebelumnya. Berikut ini beberapa definisi dalam geometri.

1) Kolinear (segaris):
   Tiga titik dikatakan kolinear (segaris) jika semua titik tersebut terletak pada garis yang sama. Pada gambar limas T.ABCD di bawah, titik *E* terletak di tengah AC, sehingga ketiga titik A, E, dan C segaris. Sementara itu tiga titik A, C dan Ttak segaris (non kolinear).

Gambar 2.3.3	Limas T.ABCD



2) Koplanar (sebidang):

   Dua garis dikatakan koplanar jika keduanya terletak pada bidang yang sama. Empat titik dikatakan koplanar jika keempat titik tersebut terletak sebidang. Pada gambar di atas, garis AB dan BC koplanar, sedang garis AB dan TC non koplanar. Empat titik T, A, B, C tak sebidang karena tidak terletak di bidang yang memuat ABC

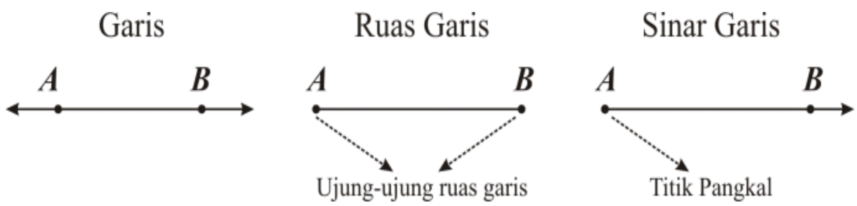
3) Ruas garis (segmen):

   Ruas garis (dilambangkan dengan $\overline{AB}$) merupakan himpunan titik A, B dan semua titikdi antara A dan B yang kolinear dengan garis melalui kedua titik tersebut. Titik A dan B dalam hal ini disebut sebagai ujung-ujung ruas garis. Dalam penulisan berikutnya, $\overline{AB}$dapat diartikan sebagai ruas garis AB, dapat juga diartikan sebagai panjang ruas garis AB tergantung pada konteksnya.

4) Sinar Garis (*Ray*):

Sinar AB (ditulis $\overrightarrow{AB}$) merupakan bagian dari $\overleftrightarrow{AB}$yang terdiri atas $\overline{AB}$dan semua titik Xpada $\overleftrightarrow{AB}$sedemikian hingga$B$terletak di antara A dan X. Selanjutnya titik A ini dinamakansebagai titik pangkal.

Gambar 2.3.4	Sinar AB



Harap dicatat bahwa $\overrightarrow{AB}$ dan $\overrightarrow{BA}$ merupakan sinar yang berbeda.

Sebagai catatan, definisi yang baik, menyajikan hal-hal berikut:

a. Nama atau istilah yang akan didefinisikan.
b. Posisi istilah tersebut dalam himpunan atau kategori.
c. Dapat membedakan istilah yang didefinisikan dengan istilah lain tanpamemberikan fakta-fakta yang tidak diperlukan.
d. Berlaku bolak-balik.

Contoh definisi: *Segitiga samakaki adalah segitiga yang memiliki dua sisi yang kongruen*.

Perhatikan bahwa:

(a) Istilah yang didefinisikan adalah “segitiga samakaki”.

(b) Posisi segitiga samakaki termasuk dalam himpunan “segitiga”.

(c) Hal yang membedakan segitiga samakaki dengan segitiga yang lain adalah “memiliki dua sisi yang kongruen”.

(d) berlaku bolak balik, dimaksudkan sebagai berikut:

(1). “Jika suatu segitiga itu samakaki, maka ia memiliki dua kaki yang kongruen”

(2). “Jika suatu segitiga memiliki dua sisi yang kongruen, maka ia merupakan segitiga samakaki”.

Selain *undefined term* dan definisi, untuk membangun geometri juga dibutuhkan sekumpulan aksioma atau postulat. Aksioma merupakan pernyataan pangkal yang secara intuitif mudah dipahami, sehingga diterima kebenarannya tanpa bukti. Beberapa aksioma dalam geometri di antaranya:

Aksioma 1. Melalui dua titik berbeda, dapat dibuat tepat satu garis.

Aksioma 2. Jika dua titik pada suatu garis terletak pada suatu bidang, maka titik-titik pada garis tersebut seluruhnya terletak pada bidang.

Aksioma 3. Melalui tiga titik tidak segaris dapat dibuat tepat satu bidang.

Dengan menggunakan kaidah-kaidah logika berdasarkan suatu pernyataan dapat ditentukan benar dan salahnya. Dalam matematika pernyataan yang dapat dibuktikan kebenarannya dengan menggunakan penalaran deduktif dinamakan sebagai teorema. Dalam membuktikan suatu teorema hanya boleh menggunakan aksioma, definisi, dan teorema sebelumnya yang telah terbukti kebenarannya. Pernyataan yang belum dibuktikan kebenarannya dinamakan sebagai konjektur (*conjecture*) atau dugaan.

Teorema 1. Melalui satu garis dan sebuah titik di luar garis hanya dapat dibuat satu bidang.

Bukti:

Misalkan diberikan garis, maka dap ditentukan dua titik berbeda dan yang

terletak pada garis. Karena bidang melalui maka seluruh titik pada garis itu terletak pada bidang (Aksioma 1). Sementara itu masih ada satu titik lagi di luar garis, sehingga terdapat tiga titik yang tidak segaris. Menurut aksioma 3, maka dapat dibuat tepat satu bidang. Jadi melalui satu garis dan sebuah titik di luar garis hanya dapat dibuat satu bidang.

Teorema 2. Melalui dua garis berpotongan hanya dapat dibuat satu bidang.

Bukti:

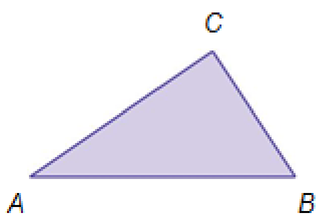
misal dibarikan garis dan berpotongan di titik. Tanpa mengurangi keumuman,

pandang garis, dan ambil titik di garis. Menurut teorema 1, dapat dibuat satubidang. Jadi melalui dua garis berpotongan hanya dapat dibuat satu bidang.

3. Pengertian Sudut

Sebuah kantor pemasaran alat-alat elektronik berdiri di atas tanah berbentuk segitiga seperti Gambar 2.3.5 berikut.

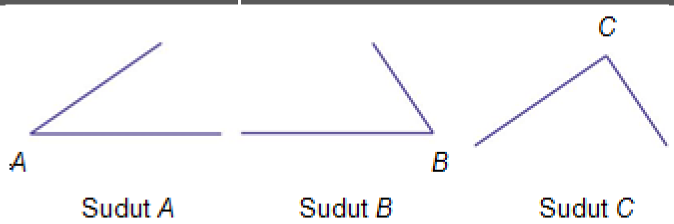
Gambar 2.3.5	Segitiga ABC



Pada tiap sudutnya dipasangi lampu. Sandi yang bekerja sebagai *cleaning service* di kantor tersebut mendapat tugas mengganti semua lampunya. Ada berapakah lampu yang harus disediakan Sandi?

Sebelum menentukan jumlah lampu yang harus disediakan Sandi, terlebih dahulu Sandi harus mengetahui jumlah sudut yang terbentuk pada lahan kantornya itu, coba Anda perhatikan gambar lahan kantor dimana Sandi bekerja. Pada lahan tersebut, terdapat tiga buah sudut yaitu sudut *A*, *B*, dan *C*. Berarti jumlah lampu yang harus dibawa Sandi ada 3 buah.

Gambar 2.3.6	Sudut ABC

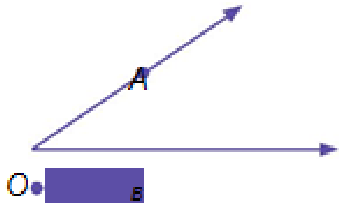


Berdasarkan ilustrasi tersebut, dapatkah Anda menyimpulkan pengertian dari sudut? Dalam kehidupan sehari-hari mungkin Anda sering mendengar kata sudut, misalnya seperti dalam kalimat-kalimat berikut.

- Anto duduk di *sudut* ruangan.
- Gol tim nasional Indonesia bermula dari tendangan *sudut*.
- Pak Anwar *disudutkan* oleh koleganya dalam rapat direksi.

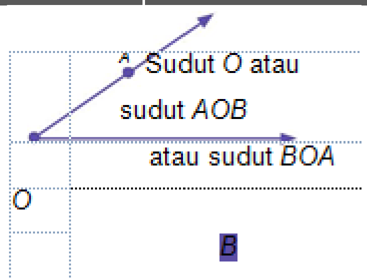
Setelah Anda membaca uraian tersebut, Anda menyimpulkan bahwa sudut dapat diartikan sebagai pojok. Dari segi bahasa konsep itu adalan benar, tetapi bagaimanakah definisi sudut dalam matematika?
Untuk menjawabnya, perhatikanlah sinar garis *OA* dan *OB* berikut.

Gambar 2.3.7	Sinar Garis OA dan OB



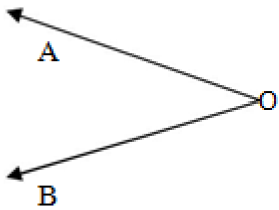
Pada gambar tersebut terlihat dua buah sinar garis OA dan OB berhimpit di titik O. Daerah yang terbentuk di antara sinar garis OA dan OB disebut sudut. Ingat, walaupun sinar garis memiliki panjang yang tak hingga, jika pangkalnya berhimpit dengan pangkal sinar garis lain, pasti akan membentuk sudut.
Sudut yang terbentuk pada gambar tersebut, dapat diberi nama dengan tiga cara, yaitu sudut O disimbolkan dengan <O, atau sudut BOA disimbolkan dengan<BOA atau juga sudut AOB disimbolkan dengan <AOB. Sinar garis OA dan sinar garis OB dinamakan kaki sudut. Titik O (titik pangkal) dinamakan titik sudut.

Gambar 2.3.8	Sudut 1



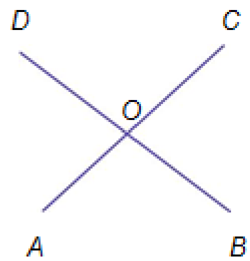
Berdasarkan uraian tersebut, sudut didefinisikan sebagai suatu daerah yang dibatasi oleh dua sinar garis yang mempunyai titik pangkal yang sama atau dengan kata lain Sudut adalah gabungan dua sinar garis yang bersekutu titik pangkalnya.

Gambar 2.3.9	Sudut 2



Suatu sudut yang dibentuk oleh sinar garis OA dan OB dinotasikan AOB atau BOA atau O. Sinar garis OA dan OB disebut **kaki-kaki sudut** dan titik O disebut **titik sudut**. Perhatikan sudut-sudut yang terbentuk pada perpotongan garis AC dan BD gambar berikut.

Gambar 2.3.10	Perpotongan Garis AC dan BD

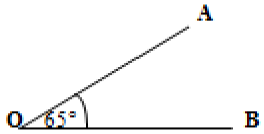


Garis AC dan garis BD yang berpotongan di titik O. Sudut yang terbentuk dari perpotongan dua garis tersebut terdiri atas 4 buah, yaitu <AOB, <BOC, <COD, dan <AOD.

Sudut adalah bangun yang dibentuk dari ruas garis yang bertemu pada suatu titik. Titik pertemuannya disebut titik sudut. Kedua ruas garisnya disebut kaki sudut / sisi sudut.

Perhatikan Gambar 2.3.11 berikut:

Gambar 2.3.11	Sudut 65°



AOB = $\angle\theta = 65°$, sudut refleks AOB = 295°

Dengan demikian, segitiga ABC pada Gambar 2.3.9 memiliki 3 buah sudut, yaitu:

- $<A$atau $<CAB$ atau $<BAC$
- $<B$atau $<CBA$ atau $<ABC$
- $<C$atau $<BCA$ atau $<ACB$

4. Macam-macam satuan sudut

1). Satuan Derajat (°)

2). Satuan radian (rad)

3). Satuan Centisimal/ gone/ grade (^{g})

5. Mengkonversikan Satuan Sudut

Contoh:

Nyatakan: (i) 30° dalam satuan radian

(ii) $\frac{2}{3}\pi$ radian dalam derajat

(iii) 57,215° dalam derajat, menit dan detik

(iv) 65°50′25″ dalam desimal derajat

(v) 5° ke satuan grade

(vi) $\frac{1}{5}\pi$ radian ke satuan grade

Jawab:

(i) $30° = \frac{30}{180}\pi$ rad $= \frac{1}{6}\pi$ rad

(ii) $\frac{2}{3}\pi$ rad = $\frac{2}{3}$.180° = 120°

(iii) 57,215° = 57° + $\frac{215}{1000}$.60′ = 57° + 12,9′ = 57° + 12′ + $\frac{9}{10}$.60′′

= 57° + 12′ + 54′′ = 57°12′54′′

(iv) 65°50′25′′ = 65° $+ \left(\frac{50}{60}\right)^0 + \left(\frac{24}{3600}\right)^0$ = 65° + 0,83$\overline{3}$° + 0,00$\overline{6}$°

= 65,84°

(v) 45° = $\frac{45}{180}$. 200^g = 50^g

(vi) $\frac{1}{5}\pi$ rad = $\frac{1}{5}$. 200^g = 40^g

6. Jenis-jenis Sudut

Berdasarkan besarnya, sudut dapat dikelompokan menjadi beberapa jenis, yaitu:

1) Sudut lancip
   Sudut lancip adalah sudut yang besarnya antara 0° dan 90°.

2) Sudut siku-siku
   Sudut siku-siku adalah sudut yang besarnya 90°.

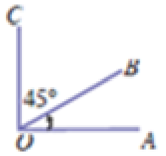
3) Sudut tumpul
   Sudut tumpul adalah sudut yang besarnya antara 90° dan 180°.

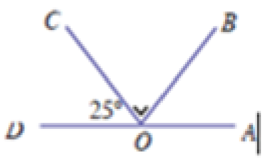
4) Sudut pelurus
   Sudut pelurus adalah sudut yang besarnya 180°.

5) Sudut refleks
   Sudut refleks adalah sudut yang besarnya antara 180° dan 360°.

Contoh:

Tentukan besar sudut AOB pada gambar berikut !

a.


b.


Jawab:

a. Sudut *AOC* adalah sudut siku-siku sehingga

$AOB + \lt BOC = 90^\circ$

$\lt AOB + 45^\circ = 90^\circ$ sehingga $\lt AOB = 45^\circ$

b. Sudut *AOD* adalah sudut pelurus sehingga

$\lt AOB + \lt BOC + \lt COD = 180^\circ$

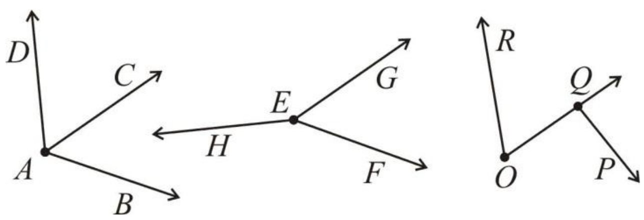
$\lt AOD + 90^\circ + 25^\circ = 180^\circ$ sehingga $\lt AOB = 65^\circ$

7. Hubungan antara sudut-sudut

- Sudut yang berdekatan/berdampingan

  Sudut yang berdekatan adalah dua sudut yang memiliki titik sudut yang sama, sebuah kaki sudut yang sama, tetapi tidak memiliki titik-titik interior yang sama. Contoh pasangan sudut berdekatan: <BAC dengan <CAD, <FEH dengan <FEG. Bukan pasangan berdekatan: <BAC dengan <BAD (interior bersama), <ROQ dengan <OQP (titik sudut berbeda).

Gambar 2.3.12	Sudut yang Berdekatan



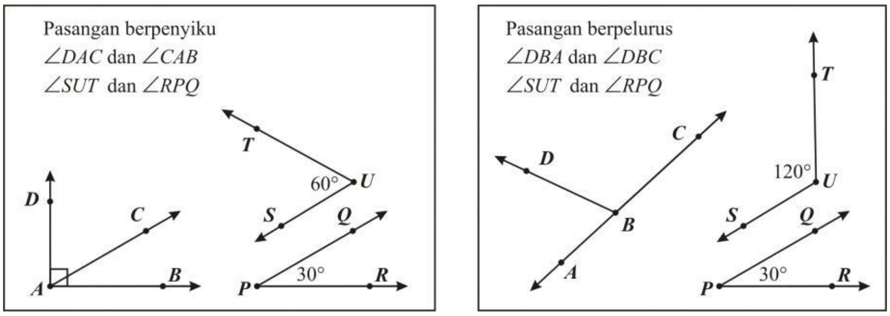
- Sudut-sudut berpenyiku

  Dua sudut dikatakan berpenyiku jika jumlah besar kedua sudut 90. Satu sudut merupakan penyiku (komplemen) bagi sudut yang lain.

- Sudut-sudut berpelurus

  Dua sudut dikatakan berpelurus jika jumlah besar kedua sudut 180. Satu sudut merupakan pelurus (suplemen) bagi sudut yang lain.

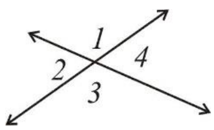
Gambar 2.3.13	Sudut-Sudut Berpenyiku dan Berpelurus



- Dua sudut bertolak belakang

  Sudut bertolak belakang terbentuk ketika dua garis saling berpotongan dan membentuk empat sudut. Setiap dua sudut yang tidak berdampingan dari keempat sudut disebut sudut bertolak belakang.

Gambar 2.3.14	Sudut yang Bertolak Belakang



Pasangan sudut bertolak belakang: <1 dan <3, <2 dan <4

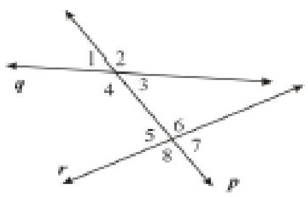
Pasangan sudut berdekatan: <1 dan <2, <2 dan <3, <3 dan <4, <1 dan <4

8. Kesejajaran dan Ketegaklurusan

1). Transversal (melintang)

Jika dua garis *q* dan *r* dipotong oleh garis *p* seperti pada gambar, maka dikatakan transversal *p* memotong garis *q* dan *r*. Perhatikan istilah-istilah yang digunakan. Istilah-istilah sudut pada transversal.

Tabel 2.3.15	Sudut pada Transversal

Gambar	Sudut	Nama
 Transversal *p* memotong garis *q* dan *r*	$\angle 3, \angle 4, \angle 5, \angle 6$	Sudut-sudut dalam (sudut yang terletak di antara garis *q* dan *r*).
	$\angle 1, \angle 2, \angle 7, \angle 8$	Sudut-sudut luar (sudut yang tidak terletak di antara garis *q* dan *r*).
	$\angle 1, \angle 4, \angle 5, \angle 8$	Sudut-sudut sepihak (sudut di sebelah kiri garis *p*)
	$\angle 2, \angle 3, \angle 6, \angle 7$	Sudut-sudut sepihak (sudut di sebelah kanan garis *p*)
	$\angle 1, \angle 5$	Sudut-sudut sehadap (menghadap arah yang sama)
	$\angle 1, \angle 4, \angle 5, \angle 8$ dengan $\angle 2, \angle 3, \angle 6, \angle 7$	Sudut-sudut berlainan pihak/ berseberangan (sudut-sudut di sebelah kiri garis *p* dikatakan berseberangan dengan sudut-sudut di sebelah kanan garis *p*).
	$\angle 1, \angle 7$	Sudut luar berseberangan

Catatan: perhatikan bahwa istilah-istilah sudut sehadap, berseberangan, sudut luar, dan lain-lain seperti di atas berlaku secara umum tidak hanya berlaku untuk dua garis sejajar yang dipotong oleh garis lain.

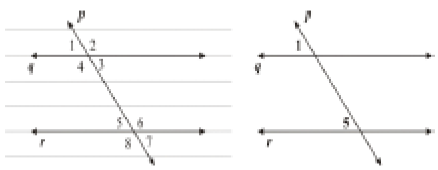
2). Postulat Kesejajaran

Dua garis dikatakan sejajar jika kedua garis tersebut terletak pada bidang yang sama dan tidak memiliki titik persekutuan.

Postulat 1 Garis Sejajar:

Gambar 2.3.16	Postulat 1 Garis Sejajar

Jika dua garis sejajar dipotong oleh sebuah garis melintang, maka masing-masing pasangan sudut sehadap sama besar.



Sehingga, pada gambar di atas, garis r sejajar q dipotong garis p, maka berlaku: *<1 =<5, <2 = <6. <3 =<7. Dan <4 =<8*

Catatan: postulat merupakan pernyataan yang diterima kebenarannya tanpa bukti. Akibat-akibat yang muncul dari postulat sejajar adalah:
Jika dua garis sejajar dipotong oleh garis melintang, maka

a. sudut luar berseberangan sama besar.
b. sudut dalam berseberangan sama besar.
c. sudut-sudut dalam sepihak saling berpelurus.
d. sudut luar sepihak saling berpelurus.

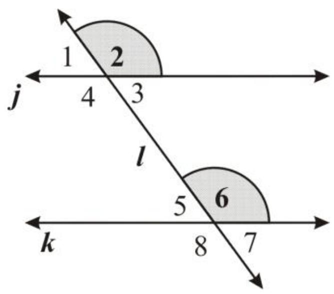
Bukti:

<1 = <3 dan <2 = <4 (sudut bertolak belakang sama besar)
<3 = <7 dan <4 = <8 (sudut sehadap sama besar)
Sehingga <1 = <7 dan <2 = <8 , sudut luar berseberangan sama besar. (a terbukti). Dengan cara serupa, pernyataan-pernyataan b, c, dan d dapat Anda buktikan kebenarannya.

Postulat 2 garis sejajar.

Jika dua garis dipotong oleh garis melintang membentuk sudut sehadap yang sama besar, maka dua garis tersebut sejajar.

Gambar 2.3.17	Postulat 2 Garis Sejajar



Atau dapat juga dituliskan:
Misalkan garis *j* dan *k* dipotong oleh garis melintang, jika <2 = <6 maka *j* // *k* . Dengan postulat 2 kesejajaran, dapat diturunkan teorema-teorema berikut.

1). Jika dua garis dipotong oleh garis melintang sehingga sudut dalam berseberangan sama besar maka kedua garis tersebut sejajar.

Bukti:

Diketahui garis *j* dan *k* dipotong oleh garis *l* , dan <4 = <6. Akan ditunjukkan bahwa *j // k* .

<2 = <6 (diketahui), <6 = <8 (sudut bertolak belakang sama *besar*)

Akibatnya sehingga menurut postulat sejajar 2 diperoleh garis*j // k.* (terbukti).

2). Jika dua garis dipotong oleh garis melintang sehingga sudut luar berseberangan sama besar maka kedua garis tersebut sejajar.

Bukti:

Diketahui garis *j* dan *k* dipotong oleh garis *l* , dan <4 = <6. Akan ditunjukkan bahwa *j // k.*

<2 = <8 (diketahui) , <8 = <6 (sudut bertolak belakang sama besar)

Akibatnya, sehingga menurut postulat sejajar 2, maka garis *j* // k (terbukti)

3). Jika dua garis dipotong oleh garis melintang sehingga sudut dalam sepihak saling berpelurus maka kedua garis tersebut sejajar.

Bukti:

Diketahui garis *j* dan *k* dipotong oleh garis *l*, dan dan <3 + <6 = <180^{o}

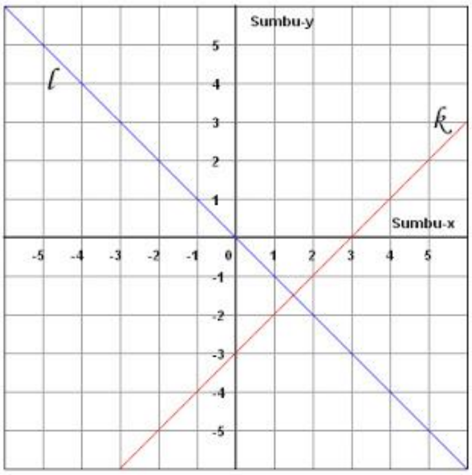
Akan *ditunjukkan* bahwa *j* // k

<3 + <6 = <180^{o}(diketahui) **,** <3 + <2 = <180^{o}(sudut berpelurus)

Akibatnya <2 = <6 sehingga menurut postulat sejajar 2, maka garis *j* // k.

1) Ketegaklurusan

Dua garis saling tegak lurus terjadi apabila gradien dari kedua garis tersebut apa bila di kalikan hasilnya menjadi -1, atau kita rumus kan *dengan* m_1 x m_2 = -1. m_1 adalah garis yang pertama dan m_2 adalah garis yang ke *2*. Perhatikan gambar berikut:



Ambil titik (0,-3) dan (3,0) yang di lalui garis k untuk mencari gradiennya,

$$m_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{0-(-3)}{3-0} = 1$$

Dengan cara yang sama peserta diklat dapat mencari nilai m_2 dengan menggunakan titik (-1,1) dan (-2,2) pada garis l, sehingga didapat m_2 = -1. Jika m_1 x m_2 = 1 x -1 = -1, sehingga dapat dikatan bahwa garis k dan garis l saling tegak lurus. Dua buah garis dikatakan salin tegak lurus jika saling berpotongan membentuk sudut 90°.

9. Bangun Datar

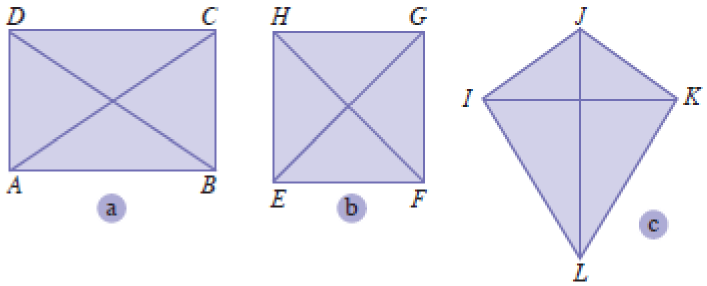
Dalam ilmu ekonomi, dikenal berbagai bentuk perusahaan seperti firma, perusahaan perorangan, Perseroan Terbatas (PT), dan lain sebagainya. Perusahaan-perusahaan tersebut memiliki ciri khusus masing-masing yang tidak sama. Anda dapat mengatakan perusahaan tersebut termasuk Perseroan Terbatas, perusahaan perorangan, atau firma setelah melihat berbagai aspek seperti kepemilikan modalnya, peran, atau tanggung jawab yang ditanggung oleh masing-masing individu.

Analogi dengan bentuk-bentuk perusahaan, dalam matematika, yaitu geometri dikenal bentuk-bentuk bangun datar seperti persegipanjang, trapesium, segitiga, persegi, dan sebagainya. Sama seperti bentuk-bentuk perusahaan, setiap jenis bangun datar tersebut memiliki ciri-ciri khas yang berbeda dari bangun lainnya. Anda dapat mengatakan apakah bangun tersebut merupakan persegi, segitiga, atau trapesium dengan melihat sisinya, sudutnya, simetri lipatnya, dan sifat lainnya.

Sebelum mempelajari sifat-sifat yang dimiliki bangun datar, pelajarilah uraian berikut.

Diagonal adalah garis yang ditarik dari sudut di hadapannya. Perhatikan Gambar 2.3.36

Gambar 2.3.18	Diagonal pada Bangun Datar



Perhatikan Gambar 2.3.36 (a), (b), dan (c). Garis AC dan BD merupakan diagonal pada bangun ABCD, garis FH dan EG merupakan diagonal pada bangun EFGH, serta garis JL dan IK merupakan diagonal pada bangun IJKL.

Pada bagian ini, Anda akan mempelajari beberapa bentuk bangun datar, sifat - sifatnya, keliling, dan luasnya. Bentuk bangun datar yang akan dipelajari pada Subbab ini adalah persegipanjang, persegi, segitiga, jajargenjang, layang-layang, dan trapesium.

Di Singapura ada air mancur yang sangat terkenal bernama *'Fountainof Wealth'.* Air mancur tersebut banyak dikunjungi orang-orang dari seluruh dunia. Kerangka air mancur tersebut dibuat dari perunggu yang berbentuk lingkaran dengan keliling 66 m dan luas 1.683 m^2.

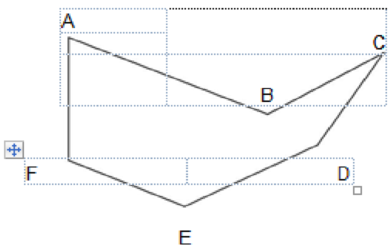
Gambar 2.3.19	Air mancur di Singapura

Keliling suatu bangun datar yang tertutup merupakan jumlah panjang sisi-sisinya. Anda dapat pula mengatakan bahwa keliling suatu bangun datar adalah jarak yang yang anda tempuh, bila anda mengitari bangun tersebut.

Contoh 1:

Perhatikan bangun datar berikut.

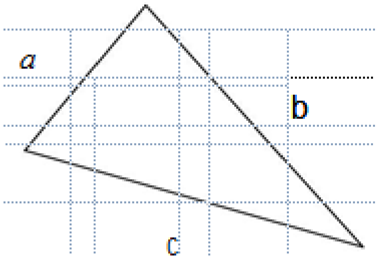
Gambar 2.3.20	Bangun Datar ABCDEF



Panjang AB = 7 cm, panjang BC = panjang CD = panjang AF = 4 cm, panjang DE = 5 cm, dan panjang EF = 3,5 cm.

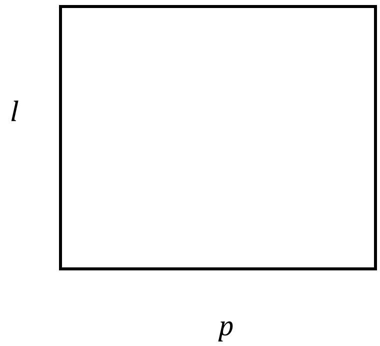
Keliling bangun datar ABCDEF = (7 + 4 + 4 + 5 + 3, 5 + 4) cm = 27,5 cm

Sekarang marilah kita mengingat kembali rumus keliling bangun-bangun datar, yang telah anda kenal. Jika keliling bangun-bangun datar tersebut dinyatakan dengan K, kita peroleh rumus untuk keliling setiap bangun berikut ini.



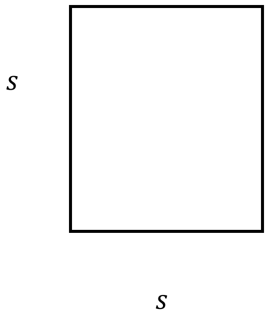
Gambar di samping adalah gambar segitiga yang sisi-sisinya berturut-turut *a* satuan, *b* satuan, dan *c* satuan.

$K = (a + b + c)$ satuan



Gambar di samping adalah gambar persegi panjang dengan panjang *p* satuan dan lebar *i* satuan.

$K = 2\ (l + p)$ satuan

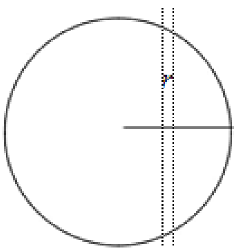


Gambar di samping adalah gambar persegi dengan sisi *s* satuan.

$K = 4\ s$ satuan

Gambar di bawah adalah gambar lingkaran dengan jari-jari *r*.

Gambar 2.3.21	Gambar Macam-Macam Bangun Datar



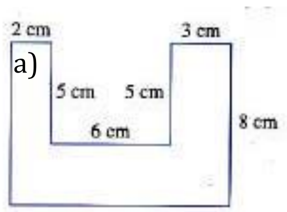
$K = 2\,\pi\, r = 2\,\frac{22}{7}\, r$ **satuan**

Karena diameter (garis tengah) lingkaran, d, sama dengan 2 r maka K dapat juga dinyatakan sebagai: $K = \pi\, d = \frac{22}{7} d$ **satuan**

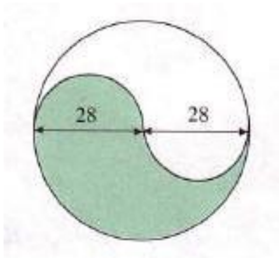
Contoh 2 :

Tentukan keliling daerah yang berbayang-bayang pada gambar berikut:

a)



b)



Penyelesaian:

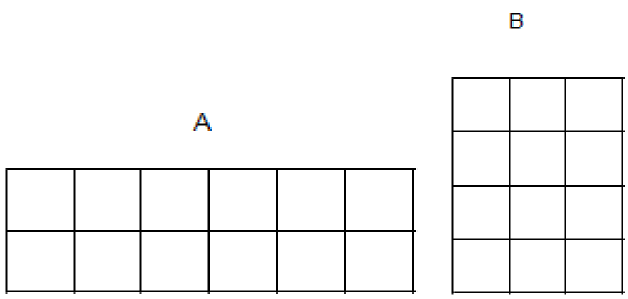
a) Keliling = (2+ 5 + 6 + 5 + 3 + 8 + 3 + 6 + 2 + 8) cm = 48 cm.

b) K 'setengah lingkaran besar' = ½ x 2πR = ½ x 2π x 28 = 28π

K 2 'setengah lingkaran kecil' = 2 (½ 2π x 14) = 28π
bangun berbayang-bayang = (28π + 28π) satuan = 56 π satuan
Atau keliling bangun berbayang-bayang= $\frac{22}{7}$ x 56 Satuan = 176 satuan

Setelah Anda mempelajari keliling bangun datar, berikut ini anda mempelajari luas bangun datar. Perhatikan dua bangun A dan B berikut.

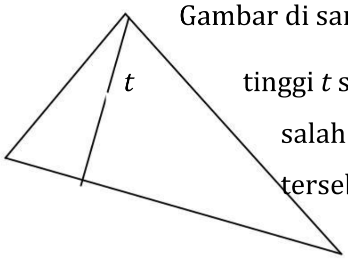
Gambar 2.3.22	Bangun Datar A dan B



Bangun A dan B memuat persegi kecil sama banyak. Berapakah banyak persegi kecil dalam setiap bangun? Anda dapat mengatakan bahwa banyak persegi kecil yang anda gunakan untuk menutup bangun A dan B sama banyak. Hal ini dikatakan bahwa bangun A dan B mempunyai luas sama.

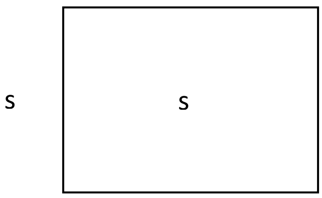
Luas daerah suatu bangun datar, yang selanjutnya disebut luas adalah ukuran yang menunjukkan banyak satuan untuk menutup permukaan bangun datar tersebut. Jika luas suatu bangun datar dinyatakan dengan *L*,marilah mengingat kembali rumus-rumus luas bangun datar yang sudahpernah anda pelajari.

Gambar 2.3.23	Gambar Ilustrasi untuk Luas Bangun Datar



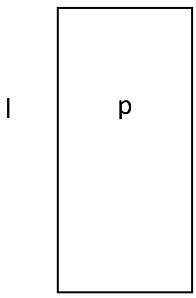
Gambar di samping adalah gambar segitiga dengan alas *a* satuan dan tinggi *t* satuan. Tinggi suatu segitiga adalah panjang garis pada salah satu sisi segitiga dan melalui titik di depan sisi tersebut.

$$L = \frac{1}{2} at \ Satuan$$



Gambar di samping adalah gambar persegi dengan s satuan

L = s^2 satuan



Gambar di samping adalah gambar persegi panjang dengan panjang *p* satuan dan lebar l satuan

***L* = (*l* x*p*) satuan**

Contoh 3:

Berdasarkan gambar pada Contoh 2, tentukan luas bangun datar tersebutTentukan luas bangun berikut.

Penyelesaian:

a) L = (2 x 8) + (6 x 3) + (3 x 8)

= 16 + 18 + 24 = 58

Jadi luas bangun a) adalah 58 cm^2 .

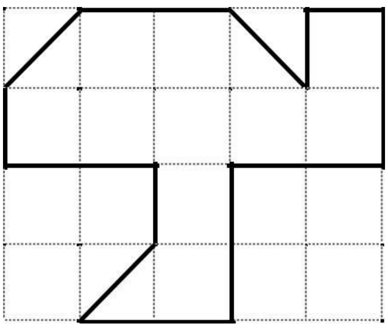
b) L = ½ x π x (28)^2 = ½ x π x 784 = 392π

Jadi luas bangun b) adalah 392 π satuan.

Untuk menentukan luas bangun datar yang tidak beraturan, anda dapat menggunakan bidang Cartesius, kemudian membilang banyak satuan yang terdapat pada bangunan tersebut.

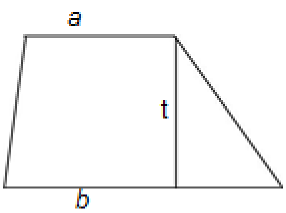
Contoh 4.

Tentukan luas bangun pada bidang Cartesius berikut.



Luas bangun tersebut adalah 11,5 satuan.

Gambar 2.3.24	Trapesium

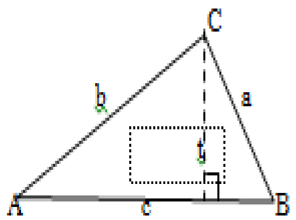


Gambar di atas adalah gambar trapesium dengan sisi sejajar *a* dan *b* serta tinggi *t*. Luas trapesium tersebut adalah ***L***=½ x (*a*+*b*) x *t*
Berikut adalah kesimpulan dari keliling dan luas macam-macam Bangun datar Beraturan

1. Segitiga

- Berdasarkan sisinya segitiga dibedakan menjadi 3 macam, yaitu :
  1) Segitiga sembarang
  2) Segitiga sama kaki
  3) Segitiga sama sisi
- Berdasarkan sudutnya segitiga dibedakan menjadi 3 macam, yaitu :
  1) Segitiga lancip
  2) Segitiga tumpul
  3) Segitiga siku-siku

Gambar 2.3.25 Ilustrasi Luas dan Keliling Segitiga



$$L = \frac{1}{2}\, a \,.\, t$$

a = panjang alas
t = tinggi

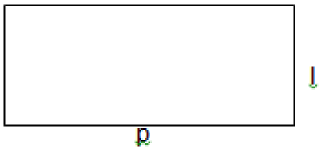
$$L = \frac{1}{2}\, a\, b \,\mathrm{Sin}\, C = \frac{1}{2}\, a\, c \,\mathrm{Sin}\, B = \frac{1}{2}\, b\, c \,\mathrm{Sin}\, A$$

$$L = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$
dengan $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$

$$K = a + b + c$$

Gambar 2.3.26	Ilustrasi Luas dan Keliling Bangun Datar

2. Persegi Panjang

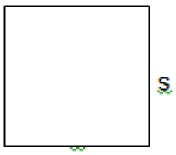


$L = p \cdot l$

$K = 2(p + l)$

p = panjang
l = lebar

3. Persegi

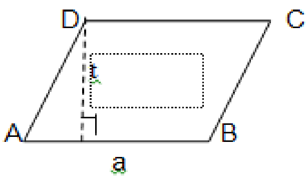


$L = s^2$

$K = 4s$

s = sisi

4. Jajar Genjang

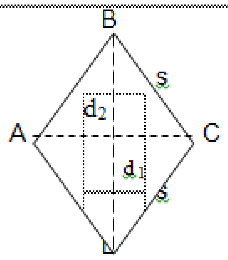


$L = a \cdot t$

$K = 2(AB + BC)$

a = panjang alas
t = tinggi

5. Belah Ketupat

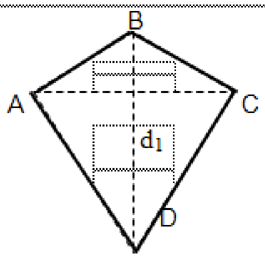


$L = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2$

$K = 4s$

d_1 = AC = diagonal pertama
d_2 = BD = diagonal kedua
s = sisi

6. Layang-Layang



$L = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2$

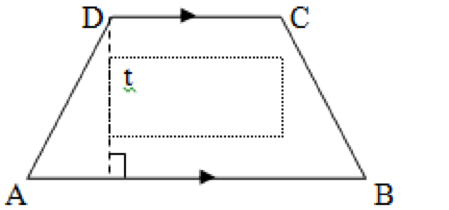
$K = 2(AB + AD)$

d_1 = AC = diagonal pertama
d_2 = BD = diagonal kedua

7. Trapesium

- Trapesium dibedakan menjadi 3 macam, yaitu :
  a) Trapesium sembarang
  b) Trapesium sama kaki
  c) Trapesium siku-siku

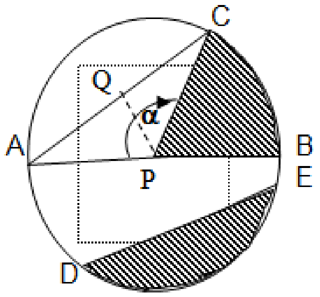
Gambar 2.3.27 Ilustrasi Luas dan Keliling Trapesium dan Lingkaran



$$L = \frac{1}{2}(AB + CD)\,.\,t$$

$$K = AB + BC + CD + DA$$

8. Lingkaran



$$L = \pi r^2 = \frac{\pi}{4} d^2$$

$$K = 2\pi r = \pi d$$

r = jari-jari
d = diameter

$$\frac{\angle APC}{\angle BPC} = \frac{\frown AC}{\frown BC} = \frac{L_{juringAPC}}{L_{juringBPC}}$$

$$L_{juringAPC} = \frac{\alpha}{360^\circ}\pi r^2$$

$$\frown AC = \frac{\alpha}{360^\circ} 2\pi r$$

$$L_{tembereng} = L_{juring} - L_{segitiga}$$

9. Segi-n Beraturan

Jika r adalah jari-jari lingkaran pada segi-n beraturan, maka :

$$L_{segi\text{-}n} = \frac{n}{2} r^2 \sin \frac{360^\circ}{n}$$

Jika sisinya s dan sudut kelilingnya ada n, maka :

$$L_{segi\text{-}n} = \frac{n.s^2.Sin^2\left[\frac{(n-2).180^\circ}{2n}\right]}{2.Sin\left[\frac{(n-2).180^\circ}{n}\right]}$$

10. Taksiran Luas Daerah Bidang Tak Beraturan

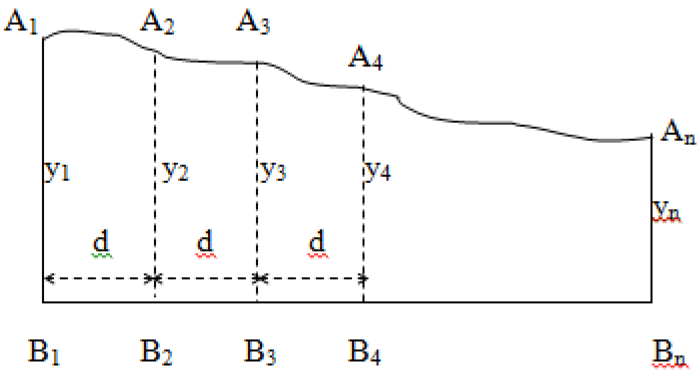
Ada tiga aturan yang dipergunakan untuk mencari luas daerah bidang tak beraturan .

a. Aturan Trapesoida

Bangun daerah bidang tak beraturan dibagi menjadi beberapa bagian yang lebarnya sama. Masing-masing bagian disebut pias/partisi.

Perhatikan gambar berikut :

Gambar 2.3.28	Trapesoida



Satu bidang pias $A_1B_1B_2A_2$, luasnya mendekati trapezium dengan sisi sejajar y_1 dan y_2 serta jaraknya d.

Luas pias $A_1B_1B_2A_2 \approx \left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right).d$

Demikian seterusnya untuk luas pias-pias berikutnya, sehingga luas total merupakan jumlah dari msing-masing pias.

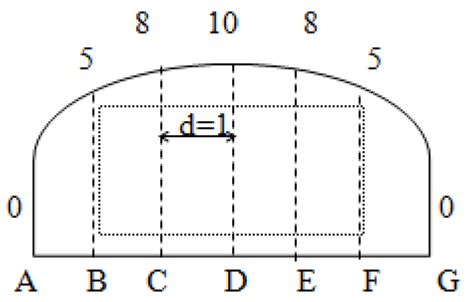
$$L \approx \text{lebar pias} \left\{ \frac{\textit{ordinat pertama} + \textit{ordinat terakhir}}{2} + \textit{ordinat lain} \right\}$$

$$L \approx d$$

$$\left\{ \frac{y_1 + y_n}{2} + \left(y_2 + y_3 + y_4 + \ldots + y_{n-1} \right) \right\}$$

Contoh:

Tentukan luas daerah pada gambar di bawah ini dengan aturan trapesoida !



Jawab:

Enam pias vertikal dengan ordinat : 0, 5, 8, 10, 8, 5, 0

$$L \approx d \left\{ \frac{y_1 + y_7}{2} + \left(y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 \right) \right\}$$

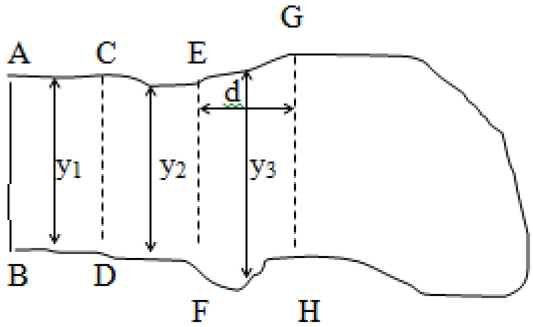
$$\approx 1 \left\{ \frac{0+0}{2} + (5+8+10+8+5) \right\}$$

≈ 36 satuan luas.

b. Aturan Mid Ordinat

Perhatikan gambar berikut :

Gambar 2.3.29	Mid Ordinat



y_1, y_2, y_3, … menunjukkan ordinat-ordinat di tengah-tengah ordinat terdahulu.

Luas pias ABCD $\approx y_1$ x d

Luas pias CDEF $\approx y_2$ x d

Dan seterusnya.

Jadi $y_1 = \dfrac{AB + CD}{2}$, $y_2 = \dfrac{CD + EF}{2}$, $y_3 = \dfrac{EF + GH}{2}$, dan seterusnya.

Luas total = jumlah luas masing-masing pias.

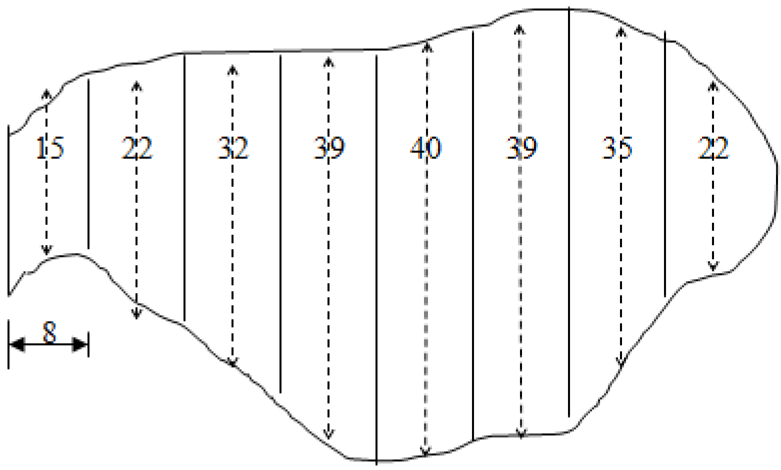
$L \approx y_1.d + y_2.d + y_3.d + \ldots$

$\approx d\ (y_1 + y_2 + y_3 + \ldots)$

$\boxed{L \approx d \text{ (jumlah ordinat tengah)}}$

Contoh:

Tentukan luas bangun pada gambar di bawah ini dengan aturan mid ordinat !



Jawab:

L ≈ d (jumlah ordinat tengah)

≈ 8 (15 + 22 + 32 + 39 + 40 + 39 + 35 + 22)

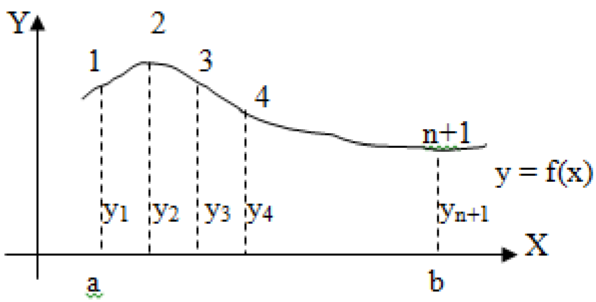
≈ 8 (244)

≈ 1952 satuan luas

c. Aturan Simpson

Perhatikan gambar berikut !

Gambar 2.3.30	**Kurva y = f (x)**



Untuk mencari luas daerah di bawah kurva y = f(x) dengan sumbu X di antara x = a dan x = b, sebagai berikut:

Bagilah gambar tersebut menjadi n buah trapezium yang genap, dengan lebar (s) sama dan tingginya $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{n+1}$ dari interval [a,b].

Sehingga diperoleh luas daerah menurut kaidah Simpson adalah:

$$L \approx \frac{s}{3}\,[(y_1 + y_{n+1}) + 4(y_2 + y_4 + \ldots) + 2(y_3 + y_5 + \ldots)] \quad \text{dengan } n \in \text{ bilangan genap}$$

$$\boxed{L \approx \frac{s}{3}\,[(F + L) + 4E + 2R}$$

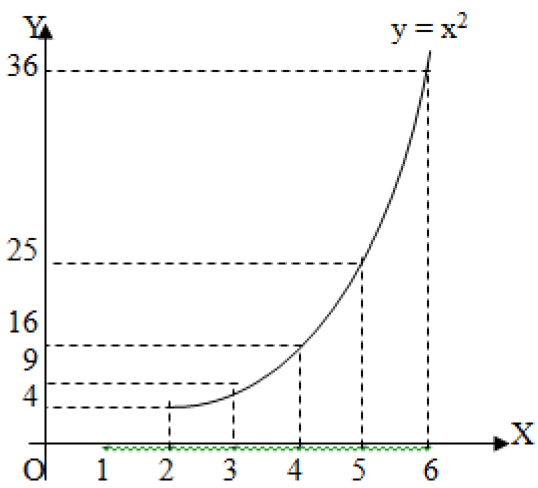
Dengan F = ordinat pertama interval a
L = ordinat terakhir interval b

E = jumlah ordinat bernomor genap

R = jumlah ordinat bernomor ganjil

Contoh:
Tentukan luas daerah kurva yang dibatasi oleh kurva $y = x^2$, garis x = 2, gari x = 6 dan sumbu X, dengan menggunakan aturan Simpson!

Jawab:



s = 1, F = 4, L = 36, E = 9 + 25 = 34, R = 16

Substitusi ke rumus

$L \approx \frac{s}{3} [(F + L) + 4E + 2R$

$\approx \frac{1}{3} [(4 + 36) + 4(34) + 2(16)]$

$\approx \frac{1}{3} [40 + 136 + 32] \approx \frac{1}{3} (208) \approx 69{,}3$ satuan luas

11. Transformasi Bangun Datar

Transformasi pada bidang ada 4 jenis yaitu;

- Pergeseran (Translasi)
- Pencerminan (Refleksi)
- Perputaran (Rotasi)
- Perkalian (Dilatasi)

Transformasi isometri adalah suatu transformasi yang menghasilkaan bayangan yang kongruen dengan bangun aslinya. Misal: translasi, refleksi, dan rotasi.

Catatan:

➢ Jarak dan arah suatu pergeseran dapat ditentukan dengan: ruas garis berarah, misal $\overrightarrow{RS}$ atau sebuah pasangan bilangan, misal $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

➢ Pencerminan ditentukan dengan suatu garis yang dianggap sebagai sumbu pencerminannya.

➢ Perputaran ditentukan dengan :

- pusat putaran.
- besar dan arah sudut putar, misalnya searah atau berlawanan arah jarum jam.

1. Perkalian ditentukan dengan pusat dan factor skalanya. Misal [P,k] merupakan dilatasi berpusat di P dan factor skala k.

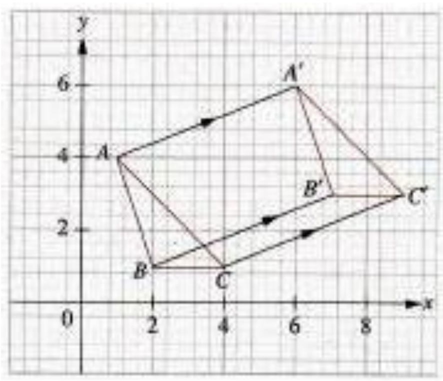
1). Translasi (Pergeseran)

Gambar 2.3.31 **Escalator**

Pernahkah anda melihat *escalator* (tangga berjalan) di *shopping center* (pusat pertokoan)? Tangga berjalan tersebut berguna untuk memindahkan orang dari lantai yang satu ke lantai yang lain. Perpindahan orang tersebut merupakan contoh dari translasi atau geseran. Dapatkah anda mencari keadaan di sekitar anda yang menggambarkan suatu translasi atau geseran?

Pada gambar di bawahΔABC dipindahkan dari kedudukan awal ke posisi $\Delta A'B'C'$. Hal ini dikatakan bahwa ΔABC ditanslasikan ke $\Delta A'B'C'$. Untuk melakukan suatu **translasi** diperlukan **arah** dan **besar** translasi.

Gambar 2.3.32 **Segitiga ABC**



Pada gambar di atas ΔABC ditranslasikan sejauh 5 pada arah positif sumbu x dan sejauh 2 pada arah positif sumbu y. Perhatikan bahwa pada suatu translasi tidak ada perubahan ukuran bangun.

Suatu translasi yang memindahkan setiap titik " a satuan ke kanan dan b satuan ke atas ' dinyatakan dengan suatu pasangan bilangan bentuk kolom $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Translasi T: $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ memetakan setiap titik (x,y) ke titik (x′,y′) sehingga x′ = x + a dan y′ = y + b.

Ditulis T: (x, y) $\rightarrow$ (x′,y′) = (x + a, y + b)

Dalam bentuk matriks kolom, ditulis:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+a \\ y+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Contoh 1:

Tentukan bayangan segi empat OABC dengan O(0,0), A(5,0), B(0,6) dan C(5,6) sebagai hasil translasi $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$!

Jawab:

$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

O(0,0) $\rightarrow$ O′(1,3)

A(5,0) $\rightarrow$ A′(6,3)

B(0,6) $\rightarrow$ B′(1,9)

C(5,6) $\rightarrow$ C′(6,9)

Jadi bayangannya O′A′B′C′ dengan O′(1,3), A′(6,3), B′(1,9), dan C′(6,9).

<u>Cara lain</u> :

$$\begin{array}{cc} \text{O A B C} & \text{O' A' B' C'} \\ \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = & \begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 & 6 \\ 3 & 3 & 9 & 9 \end{pmatrix} \end{array}$$

Jadi bayangannya O′A′B′C′ dengan O′(1,3), A′(6,3), B′(1,9), dan C′(6,9).

Contoh2 :

1. Diketahui segitiga OAB dengan koordinat titik O(0,0), A(3,0) dan B(3,5). Tentukan koordinat bayangan segitiga OAB tersebut bila ditranslasi oleh T = $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

   jawab :

   titik O (0,0) $\xrightarrow{T\binom{1}{3}}$ O'(0+1, 0+3) = O'(1,3)

   titik A (3,0) $\xrightarrow{T\binom{1}{3}}$ A'(3+1, 0+3) = A'(4,3)

   titik B (3,5) $\xrightarrow{T\binom{1}{3}}$ B' (3+1, 5+3) = B'(4,8)

2. Bayangan persamaan lingkaran $x^2 + y^2 = 25$ oleh translasi T= $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ adalah….

   Jawab : Karena translasi T = $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ maka

   x' = x – 1 → x = x' + 1…..(1)

   y' = y + 3 → y = y' – 3…..(2)

(1)dan (2) di substitusi ke $\mathbf{x^2 + y^2 = 25}$

diperoleh $\mathbf{(x' + 1)^2 + (y' - 3)^2 = 25;}$

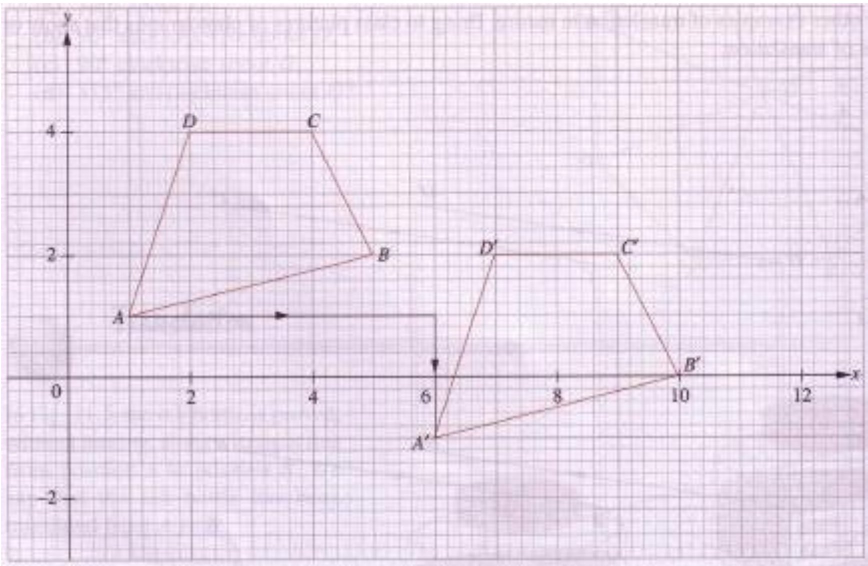
Jadi bayangannya adalah:

$\mathbf{(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 25}$

<u>Contoh 3:</u>

Gunakan skala 1 cm untuk menyatakan satuan pada sumbu *x* dan sumbu *y*. Gambarlah suatu segiempat dengan titik sudut A(1, 1), B(5, 2), C(4, 4),dan D(2,4). Tentukan bayangan segiempat ABCD pada translasi sejauh 5 satuan dalam arah positif sumbu *x* dan 2 satuan dalam arah negatif sumbu *y.*

<u>Penyelesaian:</u>



Gambar di atas menunjukkan segiempat ABCD dan bayangannya segiempat A'B'C'D' yang ditanslasikan sejauh 5 satuan pada arah positif sumbu *x* dan sejauh 2 pada arah sumbu y negatif. Koordinat titik-titik sudut segiempat A'B'C'D' adalah A'(-1, 6), B'(10, 0), C'(9, 2), dan D'(7, 2).

2). Refleksi (Pencerminan)

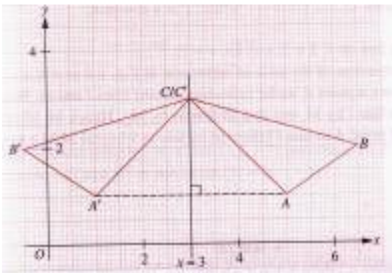
Gambar 2.3.33	Bangunan di Tepi Danau

Gambar di samping merupakan contoh refleksi yang sering anda jumpai dalam kehidupan sehari-hari. Sebuah bangunan direfleksikan oleh danau. Gambar bangunan di bawah permukaan air merupakan bayangan dari bangunan di daratan tepi danau.

Refleksi merupakan salah satu jenis transformasi. Perhatikan keadaan di sekeliling anda. Apakah anda dapat menemukan refleksi yang lain?

Untuk melakukan suatu refleksi diperlukan sumbu refleksi atau sumbu simetri atau garis refleksi atau garis cermin.

Gambar 2.3.34	Refleksi dari Segitiga ABC (1)



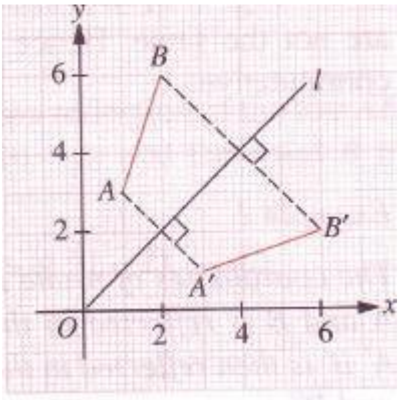
Pada gambar di samping, ΔABC dengan titik sudut A(5, 1), B(6,5 , 2), dan C(3, 3) direfleksikan terhadap garis x = 3. Bayangannya adalah ΔA'B'C'dengan A'(1, 1), B'(-0,5 , 2), dan C(3, 3).

Perhatikan bahwa pada suatu refleksi ukuran bangun tidak berubah dan titik pada bangun yang terletak pada sumbu refleksi tidak berpindah letaknya. Titik C pada gambar di atas berimpit dengan titik C'. Jadi titik C dan bayangannya merupakan titik yang sama. Titik C disebut **titik invariant**.

Jika diketahui suatu bangun dan hasil refleksinya, maka anda dapat menentukan sumbu refleksinya.

Gambar di bawah menunjukkan segmen garis AB dan bayangannya A'B' dengan A, B, A', B' berturut-turut adalah titik (1, 3), (2, 6), (3, 1), dan (6, 2). Untuk menentukan sumbu refleksinya ditempuh

Gambar 2.3.35	Refleksi dari Segitiga ABC (2)

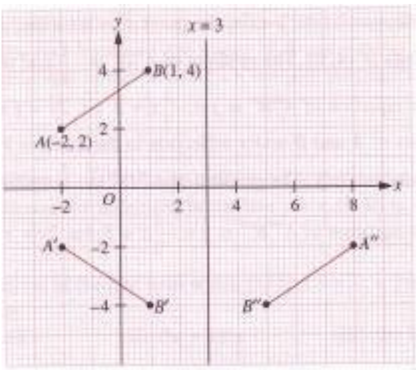


langkah berikut: hubungkan A dengan A' atau B dengan B' untuk membentuk garis sumbu, *l,* dari segmen garis AA' atau BB'. Garis *l* adalah sumbu refleksi.

Contoh :

Koordinat titik A dan B berturut-turut adalah (-2, 2) dan (1, 4). Garis yang menghubungkan A dan B direfleksikan terhadap sumbu *x* untuk mendapatkan A' dan B'. Kemudian A'B' direfleksikan terhadap garis *x*= 3 untuk memperoleh A" dan B". Tentukan koordinat A', B', A', dan B'.

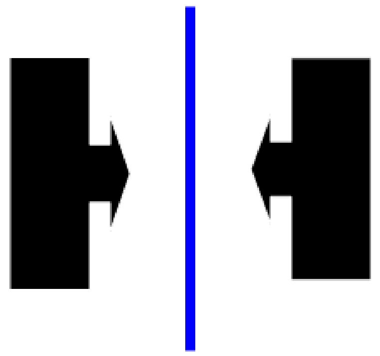
Penyelesaian:



Dari gambar di samping, anda dapat menentukan koordinat A', B', A', B', berturut-turut adalah (-2, -2), (1, -4), (8, - 2) dan (5, -4).

- Refleksi adalah pencerminan.

Gambar 2.3.36	Ilustrasi Refleksi

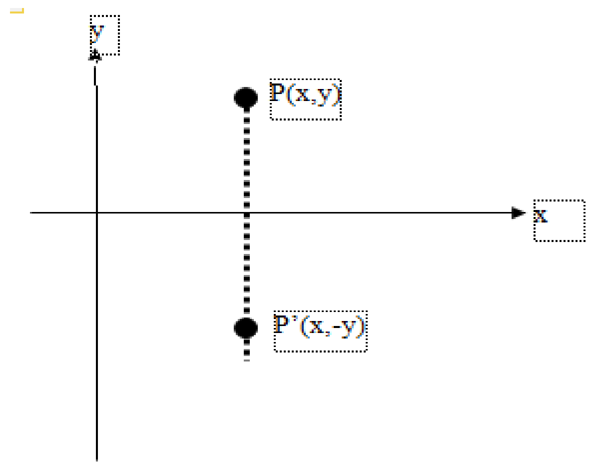


Dalam geometri bidang, sebagai cermin digunakan

1. Sumbu x
2. Sumbu y
3. x = m
4. y = n
5. y = x
6. y = -x
7. Titik pusat O(0,0)

- **Refleksi terhadap sumbu x**

Gambar 3.5.37	Refleksi terhadap sumbu x



Berdasarkan gambar tersebut, jika bayangan titik P(x,y) adalah P'(x',y') maka P'(x', y') = P'(x, -y) sehingga dalam bentuk matriks dapat ditulis sebagai berikut :

x' = x

y' = -y

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Jadi $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ adalah matriks pencerminan terhadap sumbu x.

Contoh :

1. Diketahui segitiga ABC dengan koordinat titik **A(2,0), B(0,-5)** dan **C(-3,1).** Tentukan koordinat bayangan segitiga **ABC** tersebut bila dicerminkan terhadap sumbu x

   jawab :

   Pencerminan terhadap sumbu x

$P(x,y) \longrightarrow P'(x, -y)$

$A(2,0) \longrightarrow A'(2,0)$

$B(0,-5) \longrightarrow B'(0,5)$

$C(-3,1) \longrightarrow C'(-3,-1)$

2. Bayangan garis **3x – 2y + 5 = 0** oleh refleksi terhadap sumbu x adalah

Jawab :

oleh pencerminan terhadap sumbu **X**

maka:

$x' = x \longrightarrow x = x'$

$y' = -y \longrightarrow y = -y'$

$x = x'$ dan $y = -y'$

disubstitusi ke kurva **$3x - 2y + 5 = 0$**

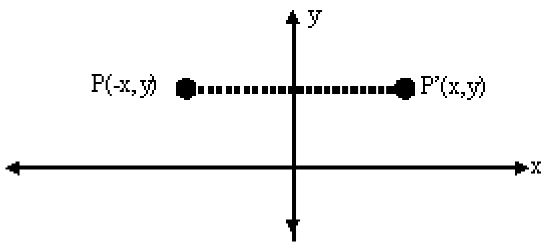
diperoleh: **$3x' - 2(-y') + 5 = 0$**

$3x' + 2y' + 5 = 0$

Jadi bayangannya adalah **$3x + 2y + 5 = 0$**

- **Refleksi terhadap sumbu y**

Gambar 3.5.38	Refleksi terhadap sumbu y



Berdasarkan gambar tersebut, jika bayangan titik P(x,y) adalah P'(x',y') maka P'(x',y') = P'(-x,y), sehingga dalam bentuk matriks dapat ditulis sebagai berikut :

$x' = -x$

$y' = y$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

jadi $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ adalah matriks pencerminan terhadap sumbu y.

Contoh :

1. Tentukan bayangan kurva $\mathbf{y = x^2 - x}$ oleh pencerminan terhadap sumbu **Y**.

Jawab:

oleh pencerminan terhadap sumbu **Y**

maka: $\mathbf{x' = -x \rightarrow x = -x'}$

$\mathbf{y' = y \rightarrow y = y'}$

$\mathbf{x = -x'}$ dan $\mathbf{y = y'}$ disubstitusi ke $\mathbf{y = x^2 - x}$

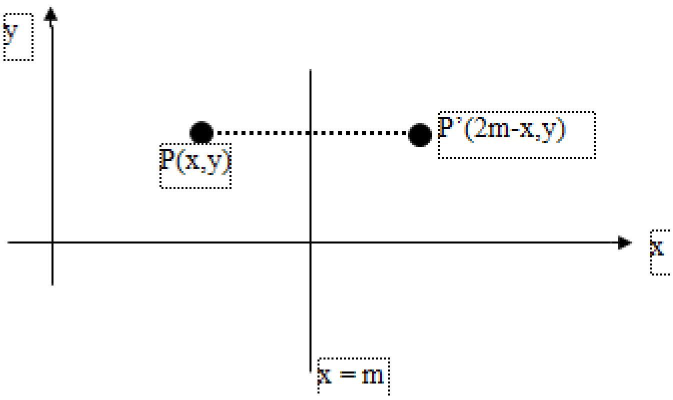
diperoleh: $\mathbf{y' = (-x')^2 - (-x')}$

$\mathbf{y' = (x')^2 + x'}$

Jadi bayangannya adalah $\mathbf{y = x^2 + x}$

- **Refleksi terhadap garis x = m**

Gambar 2.3.39	Refleksi terhadap garis x = m



Berdasarkan gambar tersebut, jika bayangan titik P(x,y) adalah P'(x',y') maka P'(x',y') = P'(2m-x,y).

Contoh :

1. Tentukan bayangan kurva $\mathbf{y^2 = x - 5}$ oleh pencerminan terhadap

garis **x = 3**.

Jawab:

oleh pencerminan terhadap garis **x = 3**

maka: **x’ = 2m - x → x = 2.3 - x’ = 6 –x’**

y’ = y → y = y’

x = 6 – x’ dan **y = y’** disubstitusi ke $\mathbf{y^2 = x - 5}$

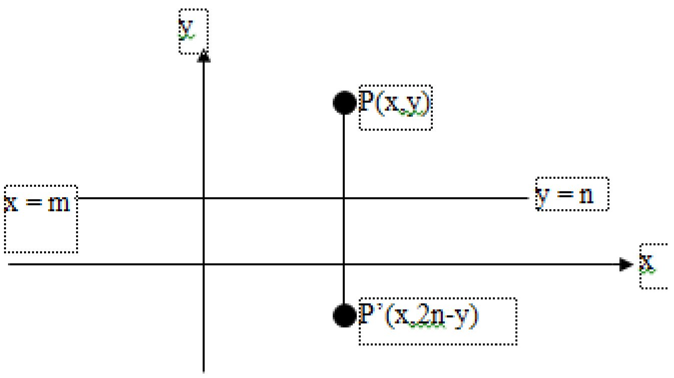
diperoleh: $\mathbf{(y')^2 = (6 - x') - 5}$

$\mathbf{(y')^2 = 1 - x'}$

Jadi bayangannya adalah $\mathbf{y^2 = 1 - x}$

- **Refleksi terhadap garis y = n**

Gambar 2.3.40	Refleksi terhadap garis y = n



Berdasarkan gambar diatas, jika bayangan titik P(x,y) adalah P’(x’,y’) maka P’(x’,y’) = P’(x,2n-y).

Contoh :

1. Tentukan bayangan kurva **x2 + y2 = 4** oleh pencerminan terhadap garis **y = -3**.

Jawab:

oleh pencerminan terhadap garis $\mathbf{y = -3}$ maka: $\mathbf{x' = x}$

$\mathbf{y' = 2n - y}$

pencerminan terhadap garis $\mathbf{y = -3}$ maka: $\mathbf{x' = x \rightarrow x = x'}$

$\mathbf{y' = 2n - y}$

$\mathbf{y' = 2(-3) - y}$

$\mathbf{y' = -6 - y \rightarrow y = -y' - 6}$ disubstitusi ke $\mathbf{x^2 + y^2 = 4}$

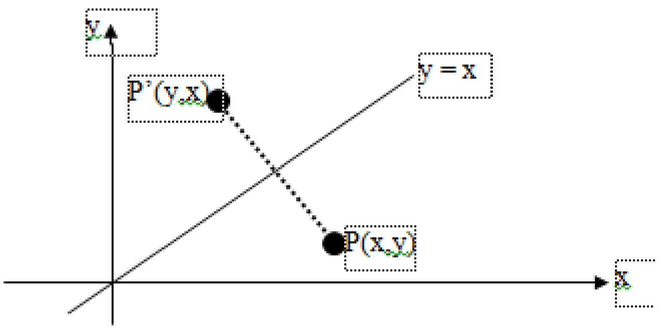
$\mathbf{(x')^2 + (-y' - 6)^2 = 4}$

$\mathbf{(x')^2 + ((-y')^2 + 12y' + 36) - 4 = 0}$

Jadi bayangannya: $\mathbf{X^2 + y^2 + 12y + 32 = 0}$

- **Refleksi terhadap garis y = x**

Gambar 2.3.41	Refleksi terhadap garis y = x



Berdasarkan gambar diatas, jika bayangan P(x,y) adalah P'(x',y') maka P'(x',y') = P'(y,x), sehingga dalam bentuk matriks dapat ditulis sebagai berikut :

$x' = y$

y’ = x

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

jadi $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ adalah matriks pencerminan terhadap garis y = x.

Contoh :

1. Bayangan garis **2x – y + 5 = 0** yang dicerminkan tehadap garis **y = x** adalah….

   Pembahasan:

   Matriks transformasi refleksi terhadap **y = x** adalah $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

   Sehingga **x’ = y** dan **y’ = x**

   disubstitusi ke **2x – y + 5 = 0**

   diperoleh: **2y’ – x ’ + 5 = 0**

   -x’ + 2y’ + 5 = 0

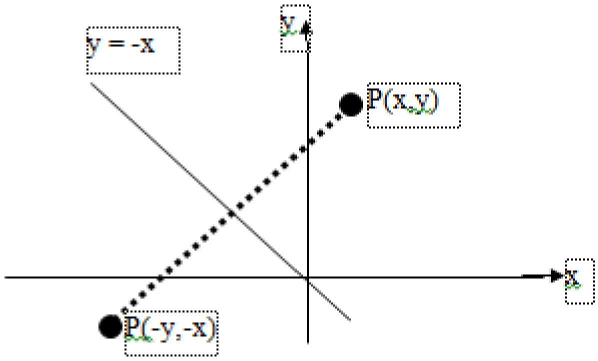
   -x’ + 2y’ + 5 = 0

   dikali **(-1) → x’ – 2y’ – 5 = 0**

   Jadi bayangannya adalah **x – 2y + 5 = 0**

- **Refleksi terhadap garis y = -x**

Gambar 2.3.42	Refleksi terhadap garis y = -x



Berdasarkan gambar diatas, jika bayangan P(x,y) adalah P'(x',y') maka P'(x',y') = P'(-y,-x), sehingga dalam bentuk matriks dapat ditulis sebagai berikut :

x' = -y

y' = -x

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Jadi $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ adalah matriks pencerminan terhadap garis y = -x.

Contoh :

1. Bayangan persamaan lingkaran $x^2 + y^2 - 8y + 7 = 0$ yang dicerminkan terhadap garis y = -x adalah....
   Jawab :

   x' = -y dan **y' = -x** atau **y = -x'** dan **x = -y'**

   Kemudian disubstitusikan ke $\mathbf{x^2 + y^2 - 8y + 7 = 0}$

   $$\mathbf{(-y')^2 + (-x)^2 - 8(-x) + 7 = 0}$$
   $$\mathbf{(y')^2 + (x')^2 + 8x + 7 = 0}$$

$$(x')^2 + (y')^2 + 8x + 7 = 0$$

Jadi bayangannya adalah $X^2 + y^2 + 8x + 7 = 0$

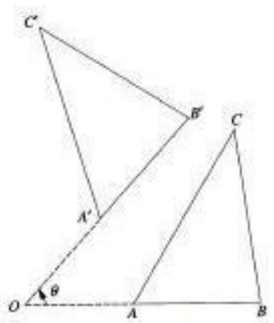
- **Rotasi (Perputaran)**

Gambar 2.3.43	**Komedi Putar**

Beberapa benda di dunia keberadaan atau pergerakannya bergantung rotasi (putaran). Jarum jam, komedi putar, untuk membuka dan menutup pintu, putaran roda mobil atau sepeda motor merupakan contoh-contoh rotasi.

Kejadian alam ada pula yang gerakannya berdasarkan rotasi, misal angin puting beliung. Dapatkah anda mencari benda di sekeliling anda yang gerakannya berdasarkan rotasi? Untuk melakukan **rotasi** diperlukan adanya **pusat rotasi** dan **sudut putar**. Perhatikan gambar-gambar berikut.

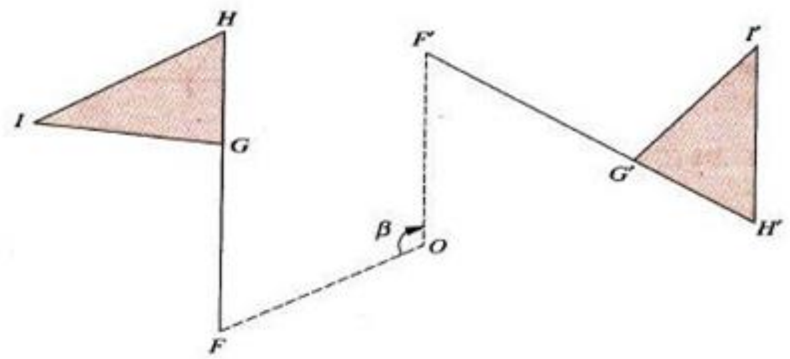
Gambar 2.3.44	**Rotasi ∆*ABC***



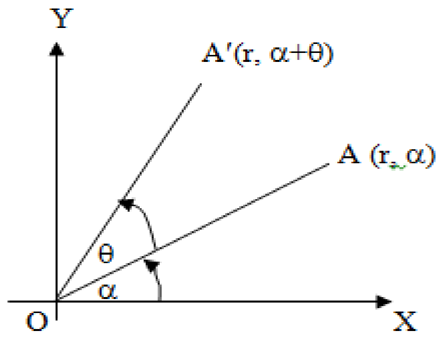
Gambar di samping menunjukkan suatu rotasi ∆*ABC* dengan pusat rotasi titik O dan sudut rotasi berlawanan dengan arah jarum jam sebesar ?. Bayangan ? *ABC* oleh rotasi tersebut adalah ? *A'B'C'*.

Gambar berikut menunjukkan suatu rotasi bendera *FGHI* dengan pusat rotasi titik O sudut rotasi searah dengan arah jarum jam sebesar *ß*. Bayangan *FGHI* oleh rotasi tersebut adalah bendera *F'G'H'I'*.

Gambar 2.3.45	Rotasi Bendera FGHI



Gambar 2.3.46	Rotasi pada Sumbu (X,Y)



$A\ (r, \alpha) \rightarrow x = r \text{ Cos } \alpha$

$y = r \text{ Sin } \alpha$

$A'(r, \alpha+\theta) \rightarrow x' = r \text{ Cos } (\alpha+\theta)$

$y' = r \text{ Sin } (\alpha+\theta)$

$x' = r \text{ Cos } (\alpha+\theta)$

$= r \text{ Cos } \alpha \text{ Cos } \theta - r \text{ Sin } \alpha \text{ Sin } \theta$

$= x \text{ Cos } \theta - y \text{ Sin } \theta$

$y' = r \text{ Sin } (\alpha+\theta)$

$= r \text{ Sin } \alpha \text{ Cos } \theta + r \text{ Cos } \alpha \text{ Sin } \theta$

= y Cos θ + x Sin θ

= x Sin θ + y Cos θ

Secara matriks dapat ditulis :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xCos\theta - ySin\theta \\ xSin\theta + yCos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Cos\theta & -Sin\theta \\ Sin\theta & Cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Sudut rotasi positif jika berlawanan dengan arah perputaran jarum jam, dan negative jika sesuai dengan arah perputaran jarum jam.

Rotasi ditentukan oleh pusat rotasi dan besar sudut rotasi.

Rotasi Pusat ***O(0,0)***

Titik **P(x,y)** dirotasi sebesar αberlawanan arah jarum jam dengan pusat **O(0,0)** dan diperoleh bayangan **P'(x',y')**

maka: **x' = xcosα - ysinα**

y' = xsinα + ycosα

Jika sudut putar ***α = ½π***(rotasinya dilambangkan dengan **R½π**)

maka **x' = - y** dan **y' = x**

dalam bentuk matriks:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Jadi **R½π** $= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Contoh 1:

Tentukan bayangan segi empat OABC dengan O(0,0), A(5,0), B(0,6) dan C(5,6) sebagai hasil rotasi di O sejauh 30° berlawanan dengan arah jarum jam !

Jawab:

$$R_{0,30^\circ} = \begin{pmatrix} Cos30^\circ & -Sin30^\circ \\ Sin30^\circ & Cos30^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{array}{c} \begin{matrix} O & A & B & C \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{matrix} O' & A' & B' & C' \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \frac{5}{2}\sqrt{3} & -3 & \frac{5}{2}\sqrt{3}-3 \\ 0 & \frac{5}{2} & 3\sqrt{3} & \frac{5}{2}+3\sqrt{3} \end{pmatrix} \end{array}$$

Jadi bayangannya O'A'B'C' dengan O'(0,0), A'($\frac{5}{2}\sqrt{3}, \frac{5}{2}$), B'($-3, 3\sqrt{3}$), dan C' ($\frac{5}{2}\sqrt{3}-3, \frac{5}{2}+3\sqrt{3}$)

Rotasi dengan Pusat P(a,b)

x' = {(x-a) Cos θ - (y-b) Sin θ} - a

y' = {(x-a) Sin θ + (y-b) Cos θ} – b

atau

$$\begin{pmatrix} x'-a \\ y'-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Cos\theta & -Sin\theta \\ Sin\theta & Cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}$$

Contoh 2:

Diketahui titik A(4,5), tentukan bayangannya akibat rotasi 90° dengan titik pusat P(1.1) !

Jawab:

$$\begin{pmatrix} x'-1 \\ y'-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Cos90^\circ & -Sin90^\circ \\ Sin90^\circ & Cos90^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4-1 \\ 5-1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4+1 \\ 3+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Jadi, bayangan titik A(4,5) akibat rotasi 90° dengan titik pusat P(1.1) adalah A′(-3,4).

Contoh3 :

1. Persamaan bayangan garis **x + y = 6** setelah dirotasikan pada pangkal koordinat dengan sudut putaran **+90⁰**, adalah….
   Jawab :

   R+90⁰ berarti: **x’ = -y → y = -x’**

   y’ = x → x = y’

   disubstitusi ke: **x + y = 6**

   y’ + (-x’) = 6

   y’ – x’ = 6 → x’ – y’ = -6

   Jadi bayangannya: **x – y = -6**

2. Persamaan bayangan garis **2x - y + 6 = 0** setelah dirotasikanpada pangkal koordinat dengan sudut putaran **-90⁰** , adalah ..
   Jawab :

   R-90⁰ berarti:

   x’ = xcos(-90) – ysin(-90)

   y’ = xsin(-90) + ycos(-90)

   x’ = 0 – y(-1) = y

y’ = x(-1) + 0 = -x’

atau dengan matriks: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

R-90⁰ berarti: **x’ = y** → **y = x’**

y’ = -x → **x = -y’**

disubstitusi ke: **2x - y + 6 = 0**

2(-y’) - x’ + 6 = 0

-2y’ – x’ + 6 = 0

x’ + 2y’ – 6 = 0

Jadi bayangannya: **x + 2y – 6 = 0**

Jika sudut putar $\alpha = \pi$(rotasinya dilambangkan dengan H)

maka **x’ = - x** dan**y’ = -y**

dalam bentuk matriks: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Jadi H = $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Contoh 3 :

1. Persamaan bayangan parabola **y = 3x2 – 6x + 1** setelah dirotasikan pada pangkal koordinat dengan sudut putaran
   +180o, adalah ....
   Jawab :
   H berarti: **x’ = -x** → **x = -x’**

   y’ = -y → **y = -y’**

   disubstitusi ke: **y = 3x2 – 6x + 1**

   -y’= 3(-x’)2 – 6(-x’) + 1

$-y' = 3(x')2 + 6x + 1$ (dikali **-1**)

Jadi bayangannya: **$y = -3x2 - 6x - 1$**

<u>Contoh 4:</u>

ΔABC dengan titik sudut A, B, C yang koordinatnya berturut-turut adalah (2, 2), (4, 5), dan C(4, 2). ΔABC dirotasikan sejauh 90^0 dengan arah berlawanan dengan arah jarum jam dan pusat rotasi titik O, bayangannya adalah $\Delta A_1B_1C_1$. ΔABC juga dirotasikan sejauh 90^0 dengan arah searah dengan arah jarum jam dan pusat rotasi titik O, bayangannya adalah $\Delta A_2B_2C_2$. Tentukan koordinat A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, dan C_2.

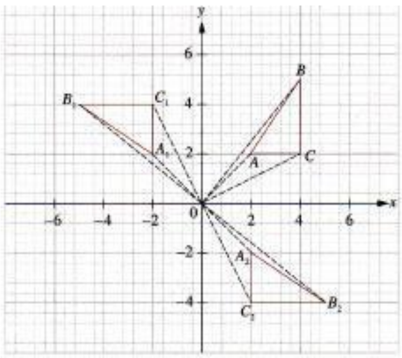
<u>Penyelesaian:</u>

Dari gambar di samping anda dapat menentukan koordinat A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, dan C_2 yaitu:

$A_1(-2, 2)$, $B_1(-5, 4)$, $C_1(-2, 4)$,

$A_2(2, -2)$, $B_2(-4, 5)$, dan

$C_2(-4, 2)$.



4) Dilatasi (Perkalian)

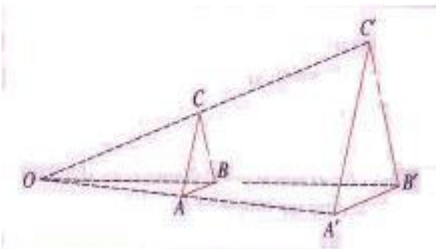
Adalah suatu transformasi yang mengubah ukuran (memperbesar atau memperkecil) suatu bangun tetapi tidak mengubah bentuk bangunnya.

Gambar 2.3.47	Alat Pembesar

Gambar di samping menunjukkan alat pembesar yang merupakan alat penting di laboratorium foto. Alat ini digunakan untuk memperbesar foto dari negatifnya (klisenya). Dengan menggerakkan film di depan lensa, memungkinkan untuk mengubah ukuran foto yang dihasilkan.

Untuk melakukan suatu **dilatasi** diperlukan **pusat dilatasi** dan faktor dilatasi.

Gambar 2.3.48	Dilatasi pada Segitiga ABC



Gambar di samping menunjukkan suatu dilatasi dengan pusat dilatasi O, yang berada di luar bangun yang didilatasikan, dan faktor dilatasi k > 0. Pada dilatasi ini bangun yang didilatasikan adalah ΔABC dan hasil dilatasi $\Delta A'B'C'$.

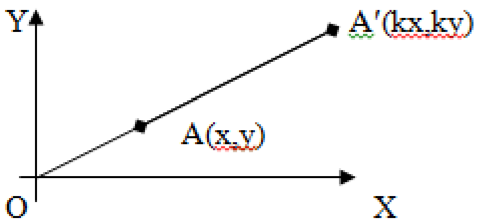
Berikut adalah dilatasi dengan pusat dilatasi E, yang berada dalam bangun yang didilatasikan, dan faktor dilatasi k > 0.

Suatu dilatasi dengan pusat O dan factor skala k dinyatakan dengan [O,k].

Dilatasi [O,k] memetakan setiap titik (x,y) ke titik (x′,y′) sehingga x′ = kx dan y′ = ky.

Ditulis [O,k] : (x,y) → (x′,y′) = (kx,ky)

Gambar 2.3.49	Dilatasi [O,k]



$OA' = k\,OA$

Jika x′ dan y′ dinyatakan dengan x dan y, didapat :

x′ = kx = k.x + 0.y

y′ = ky = 0.x + k.y

yang dapat disajikan dengan matriks :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k.x + 0.y \\ 0.x + k.y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Matriks [O,k] = $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ disebut matriks operator dilatasi dengan pusat O dan factor skala k.

<u>Catatan:</u>

- Jika k>0 maka bangun asal dan bayangan letaknya sepihak terhadap pusat dilatasi.
- Jika k<0 maka bangun asal dan bayangan letaknya berlainan pihak terhadap pusat dilatasi.
- Jika 0<k<1 maka dilatasi merupakan pengecilan.

- Jika k<-1 atau k>1 dilatasi merupakan pembesaran.
- Jika k = -1 maka dilatasi itu sama dengan pencerminan terhadap O dan sama dengan rotasi 180° dengan pusat O.

Contoh 1:

Tentukan bayangan segi empat OABC dengan O(0,0), A(5,0), B(0,6) dan C(5,6) sebagai hasil dilatasi [O,3] !

Jawab;

$$[O,3] = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

O A B C O′ A′ B′ C′

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 15 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 18 & 18 \end{pmatrix}$$

Jadi bayangannya O′A′B′C′ dengan O′(0,0), A′(15,0), B′(0,18), dan C′(15,18).

Dilatasi dengan Pusat P(a,b)

A(x,y) $\xrightarrow{[P(a,b),k]}$ A′ (k(x-a) + a, k(y-b) + b)

atau

$$\begin{pmatrix} x'-a \\ y'-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k(x-a)+a \\ k(y-b)+b \end{pmatrix}$$

Contoh 2:

Diketahui titik A(5,9), tentukan hasil bayangannya karena dilatasi [P,3] dengan titik pusat P(2,1) !

Jawab:

Dilatasi [P,3]

$$\begin{pmatrix} x'-2 \\ y'-1 \end{pmatrix} = 3.\begin{pmatrix} 5-2 \\ 9-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.2+2 \\ 3.8+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 25 \end{pmatrix}$$

Jadi, titik bayangan hasil dilatasi adalah: A′(11,25).

Contoh 3:

Garis **2x – 3y = 6** memotong sumbu **X** di A dan memotong sumbu y di B. Karena dilatasi **[O,-2],** titik A menjadi A' dan titik B menjadi B'. Hitunglah luas segitiga **OA'B'**

Jawab :

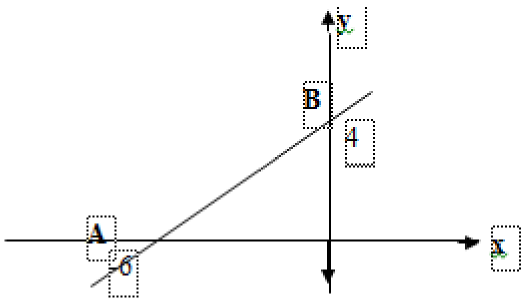
garis **2x – 3y = 6** memotong sumbu X di **A(3,0)** memotong sumbu Y di **B(0,2)**

karena dilatasi **[O,-2]** maka,

A'(*k*x,*k*y)→ A'(-6,0) dan,

B'(*k*x,*k*y) → B'(0,-4)

Titik **A'(-6,0), B'(0,-4)** dan titik **O(0,0)** membentuk segitiga seperti pada gambar:



Sehingga luasnya = ½ x OA' x OB'

= ½ x 6 x 4 = 12

Dilatasi Pusat P(a,b) dan faktor skala *k*

bayangannya adalah

x' = *k*(x – a) + a dan

y’ = *k(*y – b) + b

dilambangkan dengan **[P(a,b) ,*k*]**

Contoh 4:

Titik **A(-5,13)** didilatasikan oleh **[P,⅔]** menghasilkan **A’.**

Jika koordinat titik **P(1,-2),** maka koordinat titik **A’** adalah….

Jawab :

$$A(x,y) \xrightarrow{[P(a,b),k]} A'(x',y')$$

x’ = *k*(x – a) + a

y’ = *k*(y – b) + b

$$A(-5,13) \xrightarrow{[P(1,-2),\ ^{2}\!/_{3}]} A'(x'\ y')$$

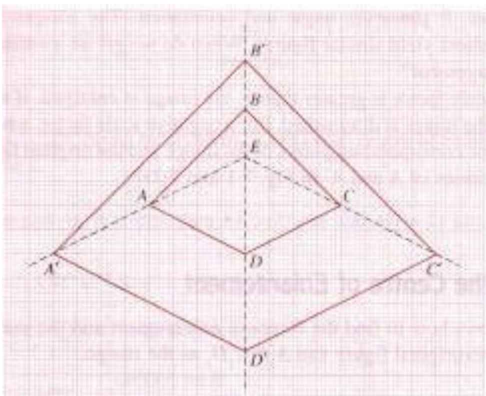
x’ = ⅔(-5 – 1) + 1 = -3

y’= ⅔(13 – (-2)) + (-2) = 8

Jadi koordinat titik A’(-3,8)

<u>**Contoh 5:**</u>

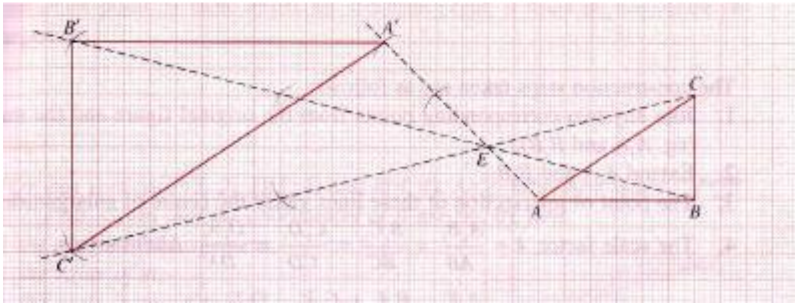
Pada dilatasi ini bangun yang didilatasikan adalah segi-4 *ABCD* dengan pusat dilatasi E, faktor dilatasi 2, dan bayangan atau hasil dilatasi segi-4 *A′B′C′D′*. Hal ini dapat juga dikatakan bahwasegi-4 *A′B′C′D′* didilatasikan dengan pusat E, faktor dilatasi $\frac{1}{2}$, menghasilkan segi-4 *ABCD*.



Berikut disajikan suatu dilatasi dengan pusat dilatasi E, yang berada di luar bangun yang didilatasikan, dan faktor dilatasi k < 0.

Contoh 6:

Suatu ΔABC didilatasikan dengan pusat E dan faktor dilatasi -2 menghasilkan $\Delta A'B'C'$. Hal ini dapat juga dikatakan ? $A'B'C'$ didilatasikan dengan pusat E dan faktor dilatasi ½ menghasilkan ΔABC .



Dari Contoh 5 dan 6 anda dapat mengetahui bahwa: suatu dilatasi dapat memperbesar atau memperkecil bangun. Bangun yang didilatasikan sebangun dengan bayangannya.

5). Transformasi Linear

Transformasi linear adalah transformasi yang memetakan setiap titik (x,y) ke titik (x′,y′) sedemikian sehingga :

$$\left.\begin{array}{l} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{array}\right\} atau \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Contoh:

Diketahui dua buah titik dipetakan sebagai berikut :

$(2,1) \rightarrow (5,1)$

$(0,1) \rightarrow (1,3)$

Tentukan matriks transformasinya !

$(2,1) \xrightarrow{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} (5,1)$

~~(0,1)~~ $\longrightarrow$ (1,3)

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$ 2a + b =5

2c + d = 1

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$ b = 1 ; d = 3

Sehingga : a = 2 ; c = -1

Jadi matriks transformasinya $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

Tabel 2.3.50	**Matriks Transformasi**

NO	*TRANSFORMASI*	*PEMETAAN*	*MATRIKS*
1	Identitas	$(x,y) \rightarrow (x,y)$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
2	Translasi	$(x,y) \rightarrow (x',y') = (x + a , y + b)$	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

3	M_x	$(x,y) \rightarrow (x,-y)$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
4	M_y	$(x,y) \rightarrow (-x,y)$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
5	$M_{y=x}$	$(x,y) \rightarrow (y,x)$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
6	$M_{y=-x}$	$(x,y) \rightarrow (-y,-x)$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
7	M_o	$(x,y) \rightarrow (-x,-y)$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
8	$R_{(0,\theta)}$	$(x,y) \rightarrow (x\text{Cos}\theta - y\text{Sin}\theta, x\text{Sin}\theta + y\text{Cos}\theta)$	$\begin{pmatrix} Cos\theta & -Sin\theta \\ Sin\theta & Cos\theta \end{pmatrix}$
9	D[O,k]	$(x,y) \rightarrow (kx,ky)$	$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$

<u>Catatan:</u>

Untuk memperoleh matriks transformai tunggal dari beberapa matriks transformasi, dapat dilakukan dengan mengalikan matriks-matriks transformasi tersebut.

Contoh:

Jika $T_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ dan $T_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ menyatakan matriks translasi, maka tentukan bayangan titik A(-3,1) oleh $T_2 o T_1$!

Jawab:

$T_2 o T_1 = T_1 + T_2$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Sehingga : $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Jadi, bayangan A(-3,1) oleh $T_1 + T_2$ adalah A′(1,3)

Contoh:

Tentukan bayangan A(2,5) oleh pencerminan terhadap sumbu Y dilanjutkan terhadap sumbu X !

Jawab:

M_x o M_y = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Jadi, bayangan A(2,5) oleh M_y dilanjutkan M_x adalah A′(-2,-5).

12. Komposisi Transformasi dengan Matriks

Bila T1 adalah suatu transformasi dari titik A(x,y) ke titik A'(x',y')dilanjutkan dengan transformasi T2 adalah transformasi dari titik A'(x',y')ke titik A"(x",y") maka *dua transformasi berturut-turut* tsb disebut *Komposisi Transformasi* dan ditulis T2 o T1.

Bila T1 dinyatakan dengan matriks $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dan T2 dengan matriks $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ maka *dua transformasi berturut-turut* mula-mula T1 dilanjutkan dengan T2 ditulis T2 o T1 = $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Contoh :

1. Matriks yang bersesuaian dengan dilatasi dengan pusat (0,0) dan faktor skala 3 dilanjutkan dengan refleksi terhadap garis y = x adalah…
   Jawab :

   M1= Matrik dilatasi skala 3 adalah $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

   M2 = Matrik refleksi terhadap y = x adalah $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

   Matriks yang bersesuaian dengan M1 dilanjutkan M2

   ditulis M2 o M1 = $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

   Jadi matriknya adalah $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

2. Bayangan segitiga ABC, dengan A (2,1), B (6,1), C (5,3) karena refleksi terhadap sumbu Y dilanjutkan rotasi (O, π) adalah…

Jawab :

Refleksi sb Y: $(x,y) \xrightarrow{\text{sb Y}} (-x, y)$

Rotasi π : $(x,y) \xrightarrow{O,\pi} (-x,-y)$

$A(2,1) \xrightarrow{\text{sb Y}} A'(-2,1) \xrightarrow{O,\pi} A''(2,-1)$

$B(6,1) \xrightarrow{\text{sb Y}} B'(-6,1) \xrightarrow{O,\pi} B''(6,-1)$

$C(5,3) \xrightarrow{\text{sb Y}} C'(-5,3) \xrightarrow{O,\pi} C''(5,-3)$

D. Aktivitas Pembelajaran

1. Pengantar:

Dalam kegiatan ini Anda akan melakukan serangkaian kegiatan untuk mencapai kompetensi berkaitan dengan Geometri. Kegiatan-kegiatan tersebut akan terbagi dalam beberapa topik, di antaranya adalah:

a. Unsur dasar pembangun geometri, pada bagian ini Anda akan belajar tentang pengertian pangkal, sistim deduktif aksiomatis dalam geometri yang dimulai dari pengertian pangkal, aksioma, definisi, dan teorema yang perlu dibuktikan kebenarannya berdasarkan aksioma atau teorema sebelumnya yang telah terbukti benar. Anda dapat mendiskusikan dengan rekan sejawat Anda bagaimana membuktikan sebuah teorema, sikap saling menghargai pendapat orang lain sangat diperlukan dalam tahapan ini.

b. Sudut serta garis sejajar dan tegak lurus, pada bagian ini Anda akan belajar tentang sudut dan ukurannya, relasi antar sudut, sifat-sifat garis sejajar dan garis tegak lurus.

c. Segitiga, pada bagian ini dibahas tentang pengertian, jenis, dan sifat-sifatnya. Ketelitian sangat diperlukan dalam menggambar dan menentukan jenis segitiga yang diinginkan
d. Proporsi dan kesebangunan. Sebelum membangun sebuah rumah, seorang arsitek perlu membuat desain dalam ukuran yang lebih kecil. Agar perbandingan antara ukuran pada gambar dan ukuran sebenarnya selalu sesuai, maka diperlukan pengetahuan yang matang tentang kesebangunan dan proporsi. Pada bagian ini dibahas tentang syarat-syarat dan sifat-sifat dua bangun yang sebangun.
e. Luas dan Keliling, pada bagian ini dibahas tentang bagaimana cara menurunkan rumus-rumus luas dan keliling bangun datar. Dengan membelajarkan prosesnya maka resiko siswa tidak dapat menyelesaikan permasalahan karena lupa rumusnya dapat dikurangi. Pada bagian ini dituntut kreativitas dan kecermatan dalam menerapkan konsep keliling dan luas bangun datar ke dalam masalah kejuruan.
f. Lingkaran. Pada bagian ini akan dipelajari tentang unsur-unsur lingkaran, nilai , keliling dan luas lingkaran, sudut-sudut pada lingkaran, dan garis singgung lingkaran.
g. Transformasi Geometri. Berbagai ornamen berbagai daerah sebenarnya dibuat berdasarkan prinsip-prinsip transformasi. Pada bagian ini dibahas tentang transformasi yang berupa isometri dan dilatasi. Transformasi ini dapat digunakan untuk menghitung luas daerah yang tidak beraturan

2. Aktifitas

Aktifitas 0: Mengidentifikasi Isi Bahan Belajar

Mengawali proses pembelajaran, diskusikan bersama rekan guru untuk mengidentifikasi hal-hal berikut:

1. Ada berapa aktivitas yang harus Anda ikuti dalam mempelajari bahan belajar ini? Sebutkan topik-topik untuk masing-masing aktivitas.
2. Kompetensi apa yang diharapkan tercapai setelah mempelajari bahan belajar ini? Sebutkan!

3. Anda saat ini mengikuti pelatihan dengan pola tatap muka. Apa saja yang harus Anda lakukan saat tatap muka?

Jawablah pertanyaan-pertanyaan di atas dengan menggunakan LK 00.

LK 00 **Jawaban:**

Ketika seseorang yang masih awam dalam geometri diberitahu definisi sudut sebagai dua sinar yang bersekutu di titik pangkalnya, maka akan muncul pertanyaan lanjutan, apa yang dimaksud dengan sinar dan titik pangkal? Ketika dijelaskan tentang definisi sinar sebagai bagian dari garis, akan muncul pertanyaan lagi, apakah yang dimaksud dengan garis? Jika tuntutan pendefinisian tersebut diteruskan, maka akan sampai kepada suatu istilah yang tidak dapat didefinisikan lagi dengan kata-kata yang sudah dikenal. Dalam aktifitas ini kita akan belajar tentang unsur dasar pembangun geometri, yang meliputi unsur yang tidak didefinisikan, aksioma, definisi, sifat, dan teorema. Jika Anda kesulitan menjawab LEMBAR KERJA 01, disarankan untuk membaca bahan bacaan 01.

LEMBAR KERJA 01.

Diskusikan dengan rekan Anda mengenai konsep-konsep dasar geometri berikut ini !

1. Sebutkan tiga unsur dasar geometri yang tidak didefinisikan (*undefined term*).
2. Jelaskan mengapa “Suatu garis adalah seperti sisi dari suatu penggaris” bukan merupakan definisi yang baik.
3. Tuliskan ketiga aksioma yang berhubungan dengan pernyataan-pernyataan berikut ini!

Melalui dua titik berbeda, ada berapa garis dapat dibuat melalui kedua titik tersebut?

Dua titik berbeda A dan B terletak pada sebuah bidang. Bagaimana kedudukan titik-titik pada garis AB terhadap bidang?

Diberikan tiga titik tidak segaris. Ada berapa bidang dapat dibuat jika bidang tersebut melalui ketiga titik yang diberikan?

4. Susunlah definisi sinar garis dan ruas garis.
5. Buktikan bahwa melalui sebuah garis dan titik di luar garis dapat dibuat sebuah bidang.

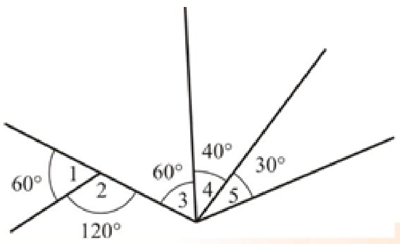
LK 01 **Jawaban:**

Aktifitas 2: Sudut serta Garis-garis Sejajar dan tegak lurus

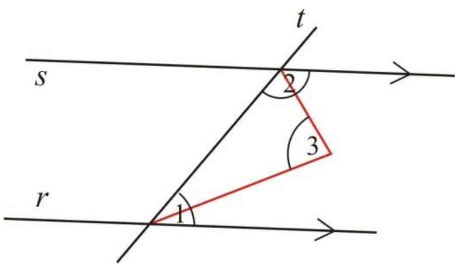
Pada LK berikut, kita akan membahas tentang pengertian sudut, berbagai satuan pengukuran sudut, jenis-jenis sudut, relasi antar sudut, serta relasi antara garis dan sudut. Sebagai tambahan wawasan, Anda dapat membaca bahan bacaan 02.

LEMBAR KERJA 02

1. Jelaskan apa yang dimaksud sudut dalam bidang datar?
2. Sebutkan macam-macam satuan pengukuran sudut, dan besar sudut satu putaran untuk masing-masing satuan.
3. Jika ada, sebutkan pasangan sudut yang saling
   a. berpenyiku
   b. berpelurus?



4. Diberikan garis dipotong garis. Masing-masing sudut dalam di sebelah kanan garis



terbagi dua sama besar. Tentukan besar<1 .

LK 02

Jawaban:

Penggunaan segitiga dapat di temukan di sekitar kita seperti pada kuda-kuda atap rumah, penentuan posisi pusat gempa, dll. Lebih lanjut tentang segitiga, disarankan membaca bagian materi.

LEMBAR KERJA 03a

1. Apakah yang dimaksud dengan segitiga?
2. Sebutkan jenis-jenis segitiga menurut besar sudutnya
3. Sebutkan jenis-jenis segitiga menurut panjang sisi
4. Lukis segitiga dengan panjang sisi sebagai berikut:
   a. 3, 5, 6
   b. 4, 7, 2
   c. 7, 5, 2
5. Berdasarkan aktvitas di atas, manakah yang dapat dilukis segitiganya? Tuliskan syarat segitiga dapat dibuat berdasarkan panjang sisinya.
6. Buktikan bahwa jumlah sudut segitiga 180^{o}

LK 03a

Jawaban:

LEMBAR KERJA 03b

Pada setiap segitiga, dapat dilukis garis tinggi, garis berat, garis bagi sudut, garis sumbu. Garis-garis tersebut memiliki sifat yang unik. Aktifitas berikut akan menunjukkan keunikan sifat-sifat garis-garis tersebut.

Garis tinggi segitiga merupakan garis yang dilukis melalui titik sudut segitiga dan tegak lurus terhadap sisi di depannya. Lakukan hal-hal berikut ini !

1. Lukislah segitiga tumpul, segitiga siku-siku, dan segitiga dengan teliti.
2. Pada masing-masing segitiga, lukis semua garis tingginya. Sifat apa yang Anda temukan?
3. Pada masing-masing segitiga, lukis semua garis beratnya. Sifat apa yang Anda temukan?
4. Pada masing-masing segitiga, lukis semua garis bagi sudutnya. Sifat apa yang Anda temukan?
5. Diskusikan dengan rekan Anda hasil dari temuan Anda dan juga rekan Anda. Setiap peserta wajib menghargai perbedaan pendapat dengan orang lain.

LK 03b **Jawaban:**

Aktifitas 4: Kekongruenan.

LEMBAR KERJA 4. Kekongruenan.

1. Susunlah dengan kata-kata sendiri pengertian atau definisi dua segitiga kongruen.

Untuk menunjukkan kekongruenan dua segitiga, tidak perlu menunjukkan keenam unsur bersesuaian pada kedua segitiga sama. Cukup beberapa unsur bersesuaian, maka dapat disimpulkan kedua segitiga tersebut kongruen. Dengan mistar di bawah dan busur derajat, lakukan aktifitas berikut dengan cermat.

2. Lukis segitiga dengan panjang sisi 6, 3, 5. Bandingkan dengan hasil yang diperoleh teman Anda, apakah keduanya kongruen? Berdasar aktifitas di atas, tulislah syarat dua segitiga kongruen.

3. Lukis ΔABC dengan AB = 5, $< A =$ 40°, dan $< B =$ 60°. Bandingkan hasilnya dengan pekerjaan teman Anda, apakah keduanya kongruen? Tulislah syarat dua segitiga kongruen berdasar aktifitas di atas.

4. Lukis ΔDEF dengan DE = 5, $< D =$ 60°, dan$EF =$ 4. Bandingkan hasilnya dengan pekerjaan teman Anda, apakah keduanya kongruen? Berdasarkan aktifitas di atas, Tulislah syarat dua segitiga kongruen

5. Dari aktivitas-ativitas tersebut, diskusikan dengan teman Anda tentang syarat-syarat dua segitiga yang kongruen secara cermat

6. Lukis sebuah ΔGHI, dengan $< G = 30$°, GH = 5, dan HI = 2,5. Ada berapa kemungkinan segitiga yang dapat dibuat? Apa yang dapat Anda simpulkan?

LK 4 **Jawaban:**

Aktifitas 5: Keliling dan Luas Bangun Datar

LEMBAR KERJA 05a. Persegi Panjang

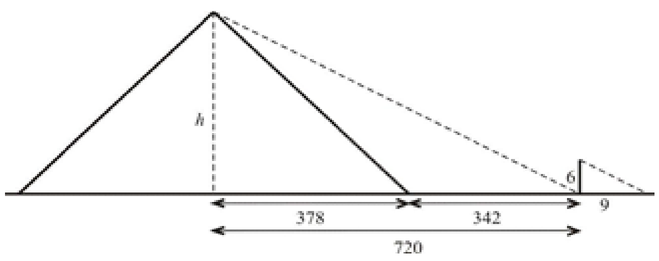
a. Apakah yang dimaksud dengan persegi panjang? Diskusikan dengan teman sejawat sehingga diperoleh definisi persegi panjang yang baik.
b. Apakah persegi panjang merupakan himpunan bagian dari jajar genjang?

c. Tuliskan sifat-sifat persegi panjang.
d. Tuliskan pengertian belah ketupat? Diskusikan dengan teman sejawat untuk mendapatkan definisi yang baik.
e. Apakah belah ketupat merupakan himpunan bagian dari jajar genjang?
f. Tuliskan sifat-sifat belah ketupat
g. Diskusikan dengan teman sejawat tentang definisi persegi.
h. Apakah persegi merupakan himpunan bagian dari belah ketupat?
i.Tuliskan sifat-sifat persegi.

LK 05a **Jawab:**

LEMBAR KERJA 05c.

Thales (625-547 SM) berhasil mengukur tinggi Piramida. Diketahui bahwa panjang sisi alas Piramida Besar adalah 756 kaki, sehingga jarak dari pusat alas piramida ke tepinya adalah 378 kaki. Untuk mengukur tinggi Piramida, ia memerintahkan pembantunya yang memiliki tinggi 6 kaki untuk berdiri di ujung bayangan Piramida. Diperoleh ukuran-ukuran jarak ujung bayangan piramida dari sisi Piramida 342 kaki, dan panjang bayangan anak buah Thales 9 kaki.



Berdasar data ini, Thales mendapatkan tinggi Piramida 480 kaki.

Jelaskan, prinsip apa dan bagaimana cara yang digunakan Thales untuk mengukur tinggi Piramida tersebut.

LK 05b **Jawab:**

LEMBAR KERJA 05c. Luas dan Keliling.

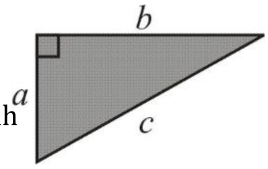
Masing-masing cat tembok memiliki daya sebar yang berbeda. Sebagai contoh, cat merk "D" memiliki daya sebar $12m^2$ per liter, yang berarti dibutuhkan 1 liter untuk mengecat 1 lapis permukaan seluas $12m^2$. Sementara itu, daya sebar cat "V" hanya $9m^2$ per liter dengan harga yang lebih murah. Dari kasus tersebut, selain informasi daya sebar dan harga masing-masing merk, tentu saja luas permukaan yang harus dicat juga harus diperhitungkan. Pada bagian ini Anda akan belajar tentang Luas dan keliling bangun bersisi datar. Sebagai tambahan wawasan, Anda dapat membaca Bahan Bacaan 7 tentang Luas dan Keliling.

1. Jelaskan bagaimana Anda mendapatkan rumus luas persegipanjang dan segitiga.
2. Jelaskan bagaimana Anda mendapatkan rumus keliling persegipanjang dan segitiga

LK 05c **Jawab:**

LEMBAR KERJA 05d. Teorema Phytagoras.

Segitiga siku-siku memiliki sifat yang unik terkait dengan panjang sisi-sisinya. Pada Tablet Babylonia (Plimpton 322) yang dibuat sekitar 1900 – 1600 SM memuat tripel Pythagoras. Pythagoras sendiri hidup sekitar 580 – 500 SM. Teorema Pythagoras berbunyi:



Pada segitiga siku-siku berlaku hubungan.

Kuadrat sisi miring suatu segitiga siku-siku sama dengan jumlah kuadrat sisi-sisi yang lain.

Konvers teorema Pythagoras menyatakan pada segitigadengan sisi a, b, dan sisi terpanjang c, jika $c^2 = a^2 + b^2$ maka segitiga ABC merupakan segitigasiku-siku.

Konvers teorema Pythagoras ini dipercaya telah digunakan oleh bangsa Mesir kuno untuk membuat segitiga siku-siku dengan cara merentangkan tali yang memiliki simpul dengan jarak yang sama.

1. Buktikan bahwa pada segitiga siku-siku dengan sisi a,b , dan sisi terpanjang c ,berlaku $c^2 = a^2 + b^2$.

2. Pada tahun 1927 telah diterbitkan buku *The Pythagorean Proposition* karya Elisha Scott Loomis yang memuat ratusan bukti teorema Pythagoras. Buku tersebut memuat lebih dari 200 bukti teorema Pythagoras, termasuk bukti dari Pythagoras sendiri, Euclid, Leonardo da Vinci, dan Presiden Amerika Serikat James Garfield. Cobalah Anda mencari satu pembuktian teorema Pythagoras yang berbeda dengan bukti yang telah Anda tuliskan di LK 1.

3. Tuliskan soal pemecahan masalah terkait teorema Pythagoras beserta penyelesaiannya.

LK 05d **Jawaban:**

Lembar Kerja 05e

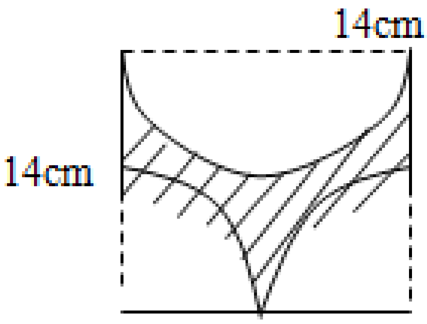
1. Jelaskan bagaimana Anda mendapatkan rumus keliling dan luas lingkaran berjari-jari.

2. Hitunglah keliling dan luas gambar yang diarsir berikut!

3. Sebuah kolam berbentuk persegi panjang berukuran 8 m x 7 m. Sekeliling kolam dibuat jalan dari keramik sebesar 1 m. Jika harga keramik Rp 125.000,00 permeter persegi, dana yang dibutuhkan untuk membeli keramik adalah....

4. Pada sebuah lingkaran besar sudut pusat adalah dua kali besar sudut keliling yang menghadap busur yang sama. Buktikan pernyataan tersebut.

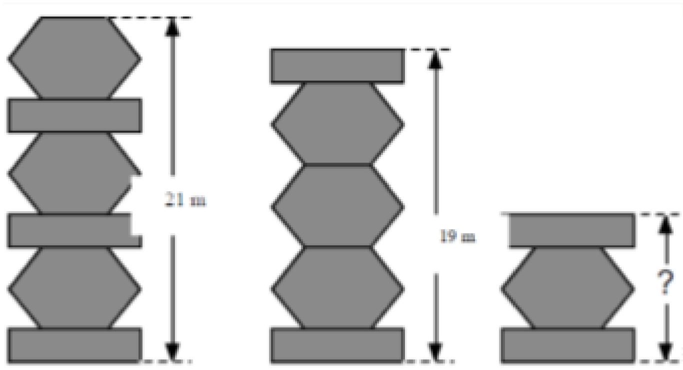
5. Perhatikan gambar. Maka luas daerah yang diarsir



LK 05e
Jawaban:

Lembar Kerja 05f

Dibawah ini adalah 3 tower yang memiliki tinggi berbeda dan tersusun dari dua bentuk yaitu bentuk segi-enam dan persegi panjang. Berapa tinggi tower yang paling pendek tersebut?



Sumber: Setiawan, H, et.al

Setiawan, H., Dafik, D., & Lestari, N. D. S. (2014). Soal Matematika Dalam Pisa Kaitannya Dengan Literasi Matematika Dan Kemampuan Berpikir Tingkat Tinggi.

LK 05f
Jawaban:

Aktifitas 06: Geometri Transformasi

Salah satu bentuk pengubinan karya MC. Escher yang berjudul "Sea Horse" merupakan aplikasi dari transformasi geometri. Pola-pola yang lain karya beliau dapat dilihat di http://www.mcescher.com/. Pada bagian ini, Anda akan belajar tentang transformasi geometri. Untuk memperdalam pemahaman Anda dapat membaca bahan bacaan pada uraian materi.

Lembar Kerja 06a

1. Jelaskan apa yang dimaksud dengan transformasi.
2. Jelaskan apa yang dimaksud dengan isometri dan transformasi apa saja yang termasuk di dalamnya?
3. Di manakah posisi titik-titik invarian pada translasi, rotasi, refleksi, dan dilatasi.
4. Buka situs http://www.tessellations.org/methods-tracing-paper-0.html, pelajari cara pembuatan pola ubin dengan teknik translasi kemudian buatlah pola ubin menurut versi Anda sendiri.
5. Buatlah pola pengubinan yang dibuat dengan prinsip rotasi, dengan mempelajari situs http://www.tessellations.org/methods-tracing-paper-2-0.html. Terlebih dahulu.

LK 06a **Jawaban:**

Lembar Kerja 06b

1. Tentukan persamaan bayangan garis $y = 2x + 1$ yang dicerminkan terhadap garis $y = x$
2. Tentukan persamaan bayangan parabola $y = x^2$ terhadap rotasi dengan pusat (1,3), sudut rotasi 45^o.
3. Tentukan persamaan bayangan parabola $y = x^2$ terhadap translasi dengan vektor $\binom{3}{2}$

4. Tentukan persamaan bayangan parabola $y = x^2$ yang didilatasi dengan pusat (1,2), dan faktor dilatasi 2.

LK 06b **Jawaban:**

Lembar Kerja 06C

Seorang paleontologis sedang meneliti jejak telapak kaki dinosaurus jenis *T-Rex* di suatui daerah. Coba diskusikan dengan kelompok Anda, komposisi transformasi geometri apa yang bersesuaian dengan jejak telapak kaki satu dengan lainnya tersebut.

LK 06c **Jawaban:**

Aktivitas 07: Penyusunan Instrumen Penilaian

Pada aktivitas ini, Anda diminta untuk berlatih menyusun instrumen penilaian pada materi Geometri Dimensi Dua sesuai dengan mengacu pada panduan penyusunan dan penulisan soal dari PUSPENDIK. Diskusikan dengan rasa tanggung jawab bersama rekan sejawat Anda, dibutuhkan rasa tanggung jawab dalam mengerjakan tugas ini.

Lembar Kerja 07

1. Buatlah kisi-kisi soal yang akan dibuat sebanyak 10 soal PG dan 5 soal esai
2. Buatlah soal sesuai dengan kisi-kisi yang telah Anda buat

LK 07 **Jawaban:**

E. Rangkuman

1. Pengertian Aksioma

Aksioma merupakan pernyataan pangkal yang secara intuitif mudah dipahami, sehingga diterima kebenarannya tanpa bukti.

2. Pengertian Sudut

Sudut adalah daerah yang dibatasi oleh dua buah ruas garis dan satu titik

3. Macam-macam Satuan Sudut

a. Satuan Derajat (… .°)

b. Satuan Radian (rad) Ukuran Radian disingkat rad.

c. Satuan Centisimal / gon / grade

3. **Rumus Keliling dan Luas Bidang**

No	Nama Bangun Datar	Keliling	Luas
1	Persegi	K = 4. s	L = s . s = s^2
2	Persegi panjang	K = 2 . (p + l)	L = p . l
3	Segitiga	K = a+b+c	L = ½ . alas.tinggi $= \sqrt{s(s-a).(s-b).(s-c)}$ Dimana s = $\frac{a+b+c}{2}$
4	Jajaran genjang	K = 2. (a + b)	L = a. t
5	Belah ketupat	K = 4 . s	L = ½ . a . b Dimana a dan b diagonal
6	Layang-layang	K = 2. (a + b)	L = ½ . p . q Dimana p dan q diagonal
7	Trapesium	K = a + b + c + d	L = ½ .(a + b) . t
8	Lingkaran	K = 2π r K = π d	L = π r^2 $= \frac{1}{4}$ π d^2

4. **Taksiran Luas Daerah Bidang tak Beraturan**

No	Cara Perhitungan	Rumus
1	Aturan Trapesoida	$L \approx d = \left\{ \frac{y_1 + y_n}{2} + (y_2 + y_3 + y_4 + ... + y_{n-1}) \right\}$
2	Aturan Mid-Ordinat	$y_1 = \frac{AB + CD}{2}$, $y_2 = \frac{CD + EF}{2}$, $y_3 = \frac{EF + GH}{2}$, dan seterusnya $L \approx y_1.d + y_2.d + y_3.d + ...$
3	Aturan Simpson	$L \approx \frac{s}{3}$ $[(y_1 + y_{n+1}) + 4(y_2 + y_4 + ...) + 2(y_3 + y_5 + ...)]$ $L \approx \frac{s}{3}$ $[(F + L) + 4E + 2R$ Dengan F = ordinat pertama interval a L = ordinat terakhir interval b E = jumlah ordinat bernomor genap R = jumlah ordinat bernomor ganjil

Pengertian Transformasi

Transformasi dapat dipandang sebagai pemetaan dari himpunan titik ke himpunan titik. Biasanya titik yang dipetakan adalah (x,y), titik hasil pemetaan/bayangannya adalah (x',y').

7. Hasil dari Transformasi

No	Transformasi	Pemetaan
1	Identitas	$(x , y) \rightarrow (x , y)$
2	Translasi	$(x , y) \rightarrow (x ', y ')$

3	Pencerminan terhadap sumbu x	$(x , y) \rightarrow (x , -y)$
4	Pencerminan terhadap sumbu y	$(x , y) \rightarrow (-x , y)$
5	Pencerminan terhadap garis y = x	$(x , y) \rightarrow (y , x)$
6	Pencerminan terhadap garis y = -x	$(x , y) \rightarrow (-y , -x)$
7	Rotasi 90° terhadap O [R , 90^0]	$(x , y) \rightarrow (-y , x)$
8	Rotasi - 90° terhadap O [R , - 90^0]	$(x , y) \rightarrow (y , -x)$
9	Dilatasi pusat O dan faktor skala k	$(x , y) \rightarrow (kx , ky)$

E. Umpan Balik dan Tindak Lanjut

Pada kegitan belajar 1 ini telah dibahas mengenai:

1. Membuktikan suatu aksioma dn teorema
2. Mengidentifikasi krakteristik bangun datar

3. Menggunakan sifat kesejajaran dan ketegaklurusan garis
4. Menerapkan konsep keliling dan luas bangun datar
5. Menghitung bangun datar tak beraturan
6. Menerapkan transformasi bangun datar

Cocokan jawaban Latihan dan Tugas pada Kegiatan Belajar 1 ini dengan kunci jawaban yang tersedia. Hitunglah jumlah skor jawaban Anda yang benar, dan gunakan rumus di bawah ini untuk mengetahui tingkat penguasaan materi kegiatan belajar ini.

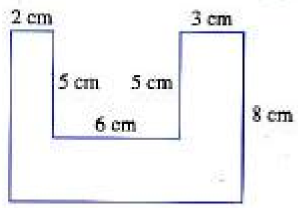
$$\text{Tingkat Penguasaan} = \frac{\text{Jumlah skor jawaban benar}}{15} \times 100\%$$

Bila kebenaran jawab Anda mencapai ≥ 67%, Anda dapat meneruskan dengan kegiatan belajar selanjutnya. Akan tetapi bila kebenaran jawaban Anda belum mencapai 67%, hendaknya Anda mengulangi kegiatan belajar, terutama pada bagian yang Anda anggap rumit dan berdiskusilah dengan teman sejawat yang lainnya atau dengan narasumber/fasilitator.

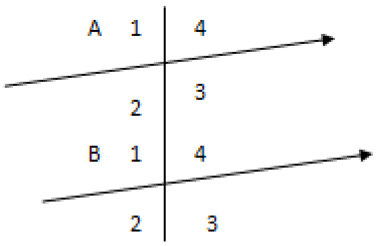
Untuk mengembangkan materi yang lebih jauh Anda sebaiknya mempelajari materi Geometri pada kegiatan belajar berikutnya. Lakukan tahapan kegiatan belajar materi selanjutnya dengan mengerjakan aktifitas kegiatannya dan mengerjakan lembar kerjanya. Ukurlah kemampuan pemahaman materi yang Anda pelajari dengan mengerjakan latihan soal-soalnya.

F. Tes Formatif

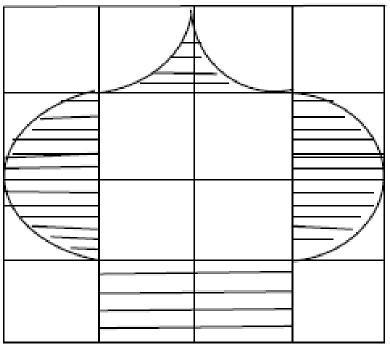
1. Jelaskan bagaimana cara pembuktian dari teorema "Dua garis yang berbeda berpotongan paling banyak hanya pada satu titik" !
2. Tentukan keliling dan luas bangun berikut!



3. Pada gambar dibawah diketahui $<A_1 = x + 30^0$ dan $B_3 = 3x + 10^0$. Tentukan nilai x !



4. Tentukan persamaan garis yang melalui titik k(5, 1) dan tegak lurus dengan garis $x - 2y + 3 = 0$!
5. Jika panjang sisi setiap persegi = 7 cm. Luas bagian yang diarsir adalah.....

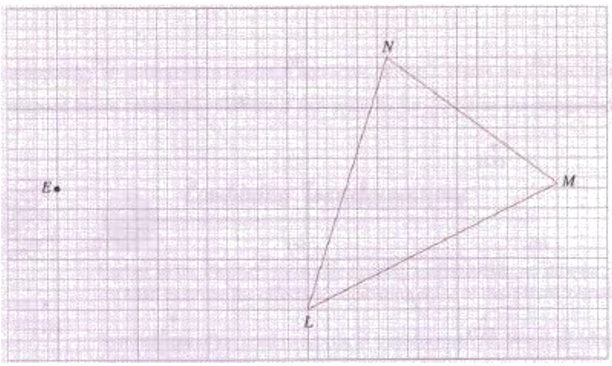


6. Sebuah mobil mulai berjalan dari keadaan berhenti, kemudian kecepatan mobil tersebut diukur setiap detik selama 6 detik.

Waktu t (detik)	0	1	2	3	4	5	6
Kecepatan v (m/det)	0	2	5	9	14	20	27

Tentukan jarak yang ditempuh, yaitu luas daerah di bawah grafik dengan aturan trapezoidal !

7. Luas sebuah pelat yang berbentuk lingkaran adalah 15400 mm^2. Tentukan jari-jari dan kelilingnya !
8. Gunakan skala 1 cm untuk menyatakan satuan pada sumbu x dan sumbu y. Gambarlah suatu segiempat dengan titik sudut A(1, 1), B(5, 2), C(4, 4), dan D(2,4). Tentukan bayangan segiempat ABCD pada translasi sejauh 5 satuan dalam arah positif sumbu x dan 2 satuan dalam arah negatif sumbu y.
9. Koordinat titik A dan B berturut-turut adalah (-2, 2) dan (1, 4). Garis yang menghubungkan A dan B direfleksikan terhadap sumbu x untuk mendapatkan A' dan B'. Kemudian A'B' direfleksikan terhadap garis x= 3 untuk memperoleh A" dan B". Tentukan koordinat A', B', A'', dan B''.
10. ΔABC dengan titik sudut A, B, C yang koordinatnya berturut-turut adalah (2, 2), (4, 5), dan C(4, 2). Δ ABC dirotasikan sejauh 90^0 dengan arah berlawanan dengan arah jarum jam dan pusat rotasi titik O, bayangannya adalah Δ A1B1C1. Δ ABC juga dirotasikan sejauh 90^0 dengan arah searah dengan arah jarum jam dan pusat rotasi titik O, bayangannya adalah ΔA2B2C2. Tentukan koordinat A1, B1, C1, A 2, B2, dan C2.
11. Salinlah gambar berikut, kemudian dilatasikan Δ LMN dengan E sebagai pusat dilatasi dan faktor dilatasi ½



G. Kunci Jawaban

1. Misalkan garis itu adalah *l* dan *m*. Andaikan *l* dan *m* berpotongan pada dua titik berbeda P dan Q. Maka menurut teorema tersebut melalui P dan Q hanya dapat dibuat tepat satu garis. Ini berarti *l* dan *m* berimpit atau $l = m$, tetapi ini kontradiksi dengan $l \neq m$. Jadi pengandaian salah. Maka terbukti bahwa Dua garis yang berbeda berpotongan paling banyak hanya pada satu titik.

2. Keliling = (2+ 5 + 6 + 5 + 3 + 8 + 3 + 6 + 2 + 8) cm = 48 cm.

   L = (2 x 8) + (6 x 3) + (3 x 8) = 16 + 18 + 24 = 58 cm^2

3. $< A_1 = < A_3 = < B_3$, sehingga $x = 10^0$

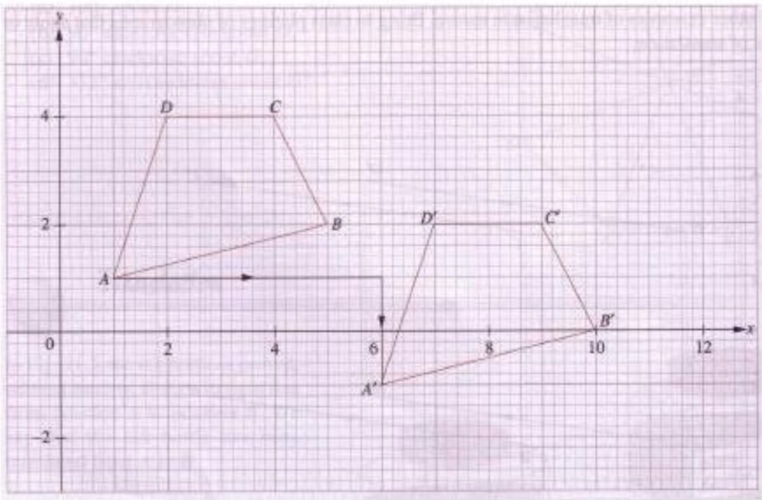
4. 2x + y – 11 = 0

5. 273 cm^2

6. 63,5 m^2

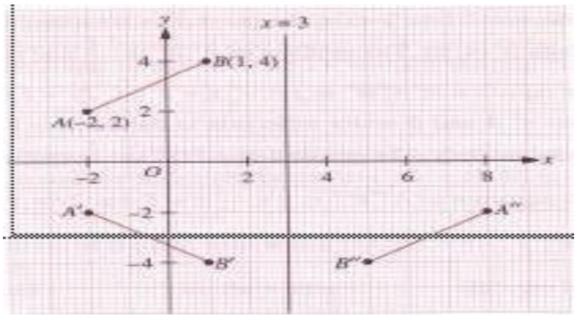
7. r = 70 mm, K= 440 mm

8. Gambarnya adalah sebagai berikut

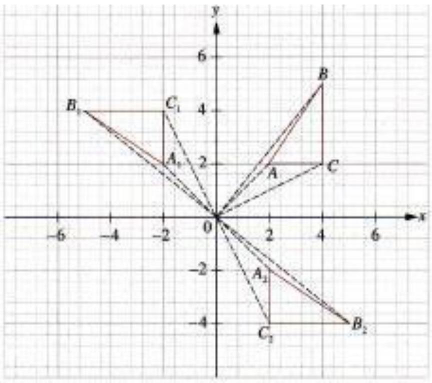


Gambar di atas menunjukkan segiempat ABCD dan bayangannya segiempat A'B'C'D' yang ditanslasikan sejauh 5 satuan pada arah positif sumbu *x* dan sejauh 2 pada arah sumbu y negatif. Koordinat titik-titik sudut segiempat A'B'C'D' adalah A'(6, -1), B'(10, 0), C'(9, 2), dan D'(7, 2).

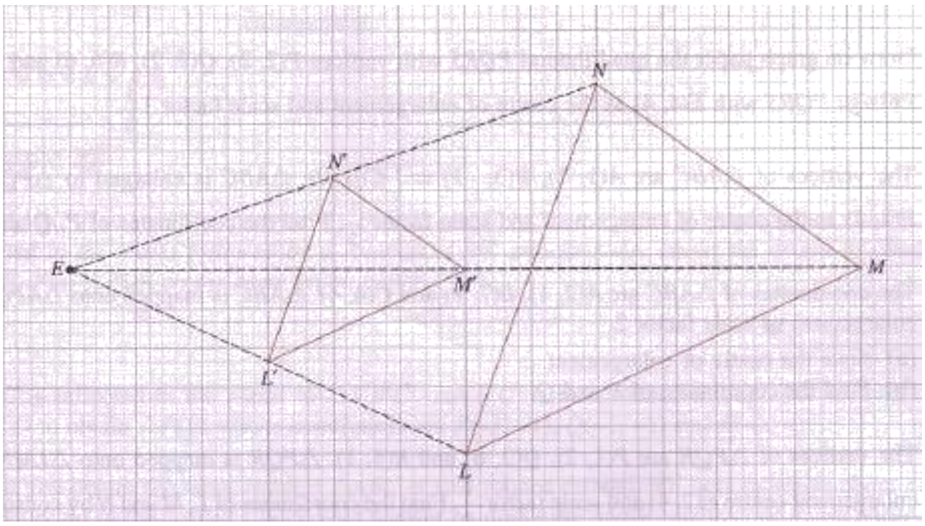
9. Dari gambar di bawah, anda dapat menentukan koordinat A', B', A'', B'', berturut-turut adalah (-2, -2), (1, -4), (8, - 2) dan (5, -4).



10. Dari gambar di bawah anda dapat menentukan koordinat A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, dan C_2 yaitu: $A_1(-2, 2)$, $B_1(-5, 4)$, $C_1(-2, 4)$, $A_2(2, -2)$, B_2(5, -4), dan C_2(2, -4).



11. Hasil dilatasi *LMN* dengan E sebagai pusat dilatasi dan faktor dilatasi ½ dapat dilihat pada gambar berikut.



KEGIATAN PEMBELAJARAN 2

Kegiatan Belajar 2 : Geometri Dimensi Tiga

Pengantar:

Dalam Kegiatan Belajar ini akan dibahas mengenai jarak dan sudut dalam dimensi tiga serta bangun ruang, mulai dari unsur-unsur bangun ruang, luas permukaan dan volume. Diharapkan setelah peserta mempelajari Kegiatan Belajar ini, para peserta akan dapat menerapkan ke dalam soal-soal kejuruan maupun dalam kehidupan sehari-hari.

A. Tujuan

Tujuan dari penulisan modul ini adalah:

1. Melalui penugasan peserta diklat dapat menentukan hubungan antar unsur-unsur dalam bangun ruang dengan cermat
2. Melalui penugasan peserta diklat dapat menyelesaikan masalah terkait luas permukaan bangun ruang dengan tekun
3. Melalui diskusi peserta diklat dapat menerapkan konsep volume bangun ruang dalam menyelesaikan masalah kejuruan dengan teliti.

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

Indikator pencapaian kompetensi yang harus dikuasai setelah mengikuti kegiatan belajar ini adalah, peserta diklat dapat:

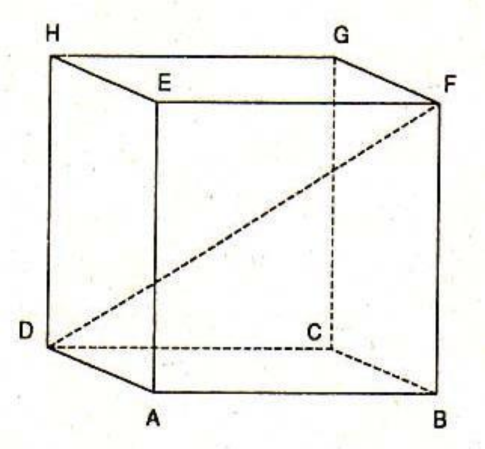
1. Menentukan hubungan antar unsur-unsur dalam bangun ruang dengan cermat
2. Menyelesaikan masalah terkait luas permukaan bangun ruang dengan tekun
3. Menerapkan konsep volume bangun ruang dalam menyelesaikan masalah kejuruan dengan teliti

C. Uraian Materi

1. Unsur-unsur bangun ruang

Anda telah mempelajari berbagai bentuk bangun ruang, antara lain kubus, balok, prisma, limas, dan bola. Sekarang anda akan mempelajari unsur-unsur yang terdapat pada kubus dan balok. Untuk itu perhatikan kubus *ABCD.EFGH* berikut.

Gambar 2.4.1	Kubus ABCDEFGH



Kubus mempunyai 6 **sisi** yang berbentuk persegi yaitu persegi *ABCD, ABFE, BCGF, DCGH, ADHE,* dan *EFGH. ABCD* disebut **bidang alas**, seringkali disebut **alas** dan EFGH disebut **bidang atas** kubus *ABCD.EFGH.* Sisi yang lain disebut **sisi tegak** atau **bidang tegak**. Sisi *ABCD* **berhadapan** dengan sisi *EFGH*. Cobalah anda mencari sisi lain yang juga berhadapan.

Setiap 2 sisi kubus berpotongan menurut suatu garis. Garis tersebut disebut rusuk kubus. Jadi ada 12 rusuk, yaitu AB, BC, CD, DA, AE, BF, CG, DH, EF, FG, GH, dan HE. Rusuk-rusuk tersebut dapat dikelompokkan menjadi 3 kelompok, yaitu rusuk yang terletak pada bidang alas, rusuk yang terletak pada bidang atas, dan rusuk yang terletak pada bidang tegak. Sebutkan rusuk-rusuk mana yang terletak pada alas, bidang atas, dan bidang tegak.

Kubus mempunyai 8 titik sudut, yaitu titik-titik A, B, C, D, E, F, G, dan H disebut titik sudut kubus ABCD.EFGH. Anda dapat melihat bahwa di antara titik-titik tersebut ada yang terletak pada satu bidang. Titik-titik ini disebut titik sebidang. Titik-titik A, B, C, dan D adalah titik-titik yang terletak pada bidang yang sama, yaitu bidang ABCD. Karena itu, titik-titik tersebut dikatakan titik yang sebidang. Sedangkan titik A dan titik G tidak sebidang. Titik A berhadapan dengan titik C yang sebidang, dan titik A juga berhadapan dengan titik G yang tidak sebidang.

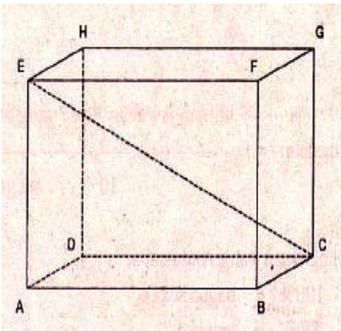
Bila anda menghubungkan 2 titik berhadapan yang sebidang anda mendapatkan sebuah garis yang disebut diagonal bidang. Contoh CH adalah diagonal bidang yang terletak pada bidang DCGH. Ada berapa diagonal bidang pada suatu kubus? Sebutkan semua diagonal bidang pada kubus ABCD.EFGH!

Bila anda menghubungkan 2 titik berhadapan yang tidak sebidang anda mendapatkan sebuah garis yang disebut diagonal ruang. Contoh CE adalah diagonal ruang, karena titik C dan titik E adalah titik yang berhadapan, tetapi mereka tidak sebidang. Titik C terletak pada bidang DCGH dan titik E terletak pada bidang ABFE. Ada berapa diagonal ruang pada suatu kubus? Sebutkan semua diagonal ruang pada kubus ABCD.EFGH!

Sekarang perhatikan titik C yang berhadapan dengan titik E dan titik B yang berhadapan dengan titik H. Anda dapat membuat bidang yang memuat rusuk BC dan HE, yaitu bidang BCHE. Bidang BCHE disebut bidang diagonal. Ada berapa bidang diagonal dalam suatu kubus? Sebutkanlah bidang-bidang diagonal pada kubus ABCD.EFGH!

Contoh:

Berikut ini adalah balok *ABCD.EFGH.* Dari balok tersebut, tentukan:



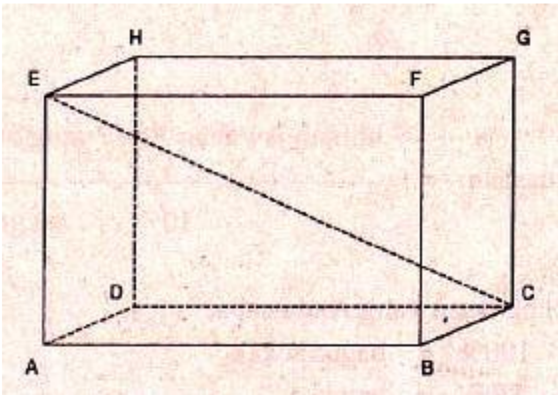
a) Nama unsur untuk garis AB, BD, dan EC

b) Kedudukan titik *D* terhadap titik *F* dan *G.*

c) kedudukan garis *AB* terhadap garis *EF* dan *GH*.

Penyelesaian:

a) Garis *AB* adalah rusuk kubus *ABCD. EFGH.*



Garis *BD* adalah diagonal bidang kubus *ABCD.EFGH.*

Garis *EC* adalah diagonal ruang kubus *ABCD. EFGH.*

b) Titik D dan titik F adalah titik yang tidak sebidang. Mereka adalah dua titik yang berhadapan. Titik D dan titik G adalah titik yang sebidang, kedua titik tersebut berhadapan.

c) Garis AB berhadapan dengan garis EF dan GH.

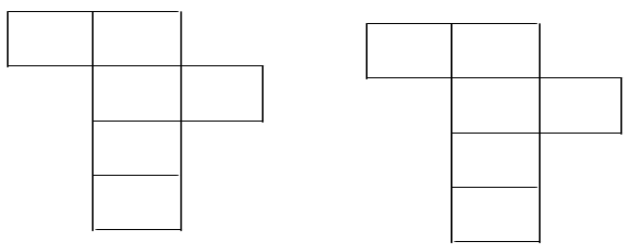
2. Jaring-jaring

Anda dapat membedah suatu kubus dan meletakkan sisinya sedemikan hingga sisi-sisi tersebut terletak pada satu bidang seperti terlihat pada gambar berikut, yang disebut **jaring-jaring kubus**. Ada beberapa cara untuk membuat jaring-jaring kubus.

Contoh 1:

Gambar berikut adalah jaring-jaring kubus.

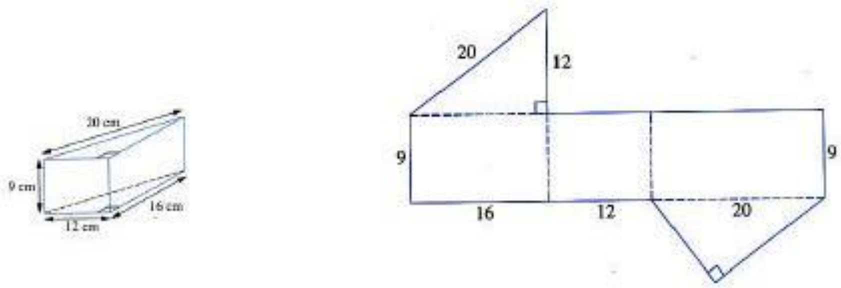
Gambar 2.4.2	Jaring-Jaring Kubus



Contoh 2:

Berikut adalah gambar prisma segitiga beserta jaring-jaringnya

Gambar 2.4.3	Prisma Segitiga

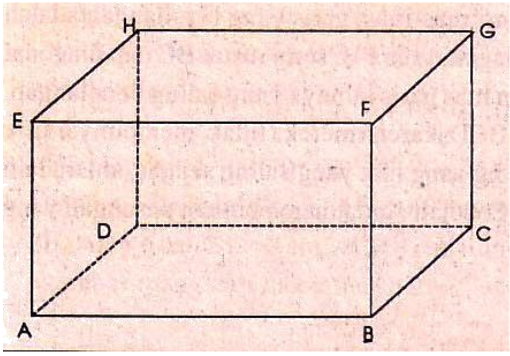


3. Hubungan Antara Unsur-Unsur Bangun Ruang

a. Letak titik dan garis dalam ruang

Bangun ruang apakah yang sering Anda jumpai dalam kehidupan sehari-hari? Ya, balok adalah bangun ruang yang sering Anda jumpai dalam kehidupan sehari-hari. Cobalah Anda amati ruang kelas Anda, kemasan-kemasan yang Anda jumpai di toko, atau benda lain yang terdapat di sekitar Anda. Pada umumnya benda-benda tersebut berbentuk balok. Karena itulah untuk memahami letak titik, garis, dan bidang dalam ruang, Anda dapat memulainya dengan memahami letak titik dan garis pada balok. Untuk itu perhatikan balok *ABCD.EFGH* berikut.

Gambar 2.4.4	Balok ABCD.EFGH



Tentunya anda masih ingat bahwa balok adalah suatu bangun ruang yang dibatasi oleh 6 persegi panjang yang sepasang-sepasang berukuran sama. Sisi-sisi yang berukuran sama adalah sisi-sisi yang saling berhadapan.

Sisi *ABCD* berhadapan dengan sisi *EFGH*. Kedua sisi ini merupakan persegi panjang yang berukuran sama, artinya panjang persegi panjangABCD sama dengan panjang persegi panjang *EFGH* begitu juga dengan lebarnya. Dalam hal ini $AB = EF$ dan $BC = FG$.

Sekarang perhatikanlah titik *A*. Titik *A* terletak pada garis *AB* dan juga pada garis *AD,* tetapi titik *A* tidak terletak pada garis *BC.* Titik *A* adalah titik yang terletak pada bidang *ABFE* dan tidak terletak pada bidang *EFGH.* Hal ini dikatakan juga sebagai: bidang $ABFE$ memuat titik A atau titik A termuat pada bidang $ABFE$ dan bidang $EFGH$ tidak memuat titik A atau titik A tidak termuat dalam bidang $EFGH.$ Cobalah Anda cari bidang lain yang juga memuat titik A.

Setelah itu perhatikan garis $AB.$ Garis AB terletak pada bidang $ABCD$, tetapi tidak terletak pada bidang $BCGF$. Hal ini juga dikatakan bahwa: garis AB termuat pada bidang $ABCD$ dan tidak termuat pada bidang $BCGF$ atau bidang $ABCD$ memuat garis AB dan bidang $BCGF$ tidak memuat garis AB. Cobalah Anda cari bidang lain yang memuat garis AB.

Beberapa hal yang bisa kita dapatkan dari kegiatan di atas adalah

1. Kedudukan titik terhadap garis

   Jika diketahui sebuah titik T dan sebuah garis g, maka:

   1) Titik T teletak pada garis g, tau garis g melalui titik T
   2) Titik T berada diluar garis g, atau garis g tidak melalui titik T

2. Kedudukan titik terhadap bidang

   Jika diketahui sebuah titik T dan sebuah bidang H, maka:

   a. Titik T terletak pada bidang H, atau bidang H melalui titik T
   b. Titik T berada diluar bidang H, atau bidang H tidak melalui titik T

3. Kedudukan garis terhadap garis

   Jika diketahui sebuah garis g dan sebuah garis h, maka:

   a. Garis g dan h terletak pada sebuah bidang, sehingga dapat terjadi:
      - garis g dan h berhimpit, g = h
      - garis g dan h berpotongan pada sebuah titik
      - garis g dan h sejajar

   b. Garis g dan h tidak terletak pada sebuah bidang, atau garis g dan h bersilangan, yaitu kedua garis tidak sejajar dan tidak berpotongan.

4. Kedudukan garis terhadap bidang

   Jika diketahui sebuah garis g dan sebuah bidang H, maka:

   a. Garis g terletak pada bidang H, atau bidang H melalui garis g.
   b. Garis g memotong bidang H, atau garis g menembus bidang H
   c. Garis g sejajar dengan bidang H

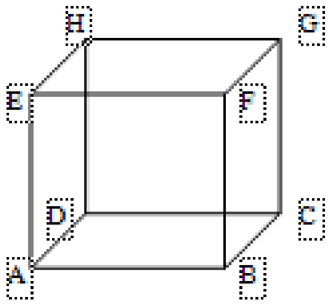
5. Kedudukan bidang terhadap bidang

Jika diketahui bidang V dan bidang H, maka:

a. Bidang V dan bidang H berhimpit
b. Bidang V dan bidang H sejajar
c. Bidang V dan bidang H berpotongan. Perpotongan kedua bidang berupa garis lurus yang disebut garis potong atau garis persekutuan.

Contoh:

Diketahui kubus ABCD.EFGH. Tentukan:



a. Titik yang berada pada garis DF
b. Titik yang berada diluar bidang BCHE
c. Garis yang sejajar dengan CF
d. Garis yang berpotongan dengan BE
e. Garis yang bersilangan dengan FG
f. Bidang yang sejajar dengan bidang BDG

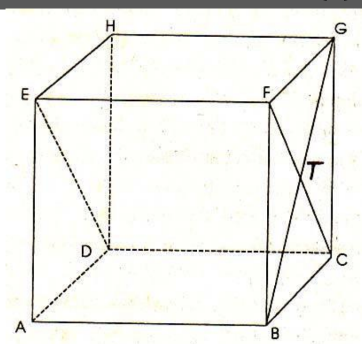
Jawab:

a. Titik D dan F
b. Titik A, D, F, G
c. DE
d. EA, EF, ED, EH
e. AB, DC, AE, DH
f. AFH

b. Hubungan antara garis dan bidang serta garis dan garis dalam ruang

Setelah Anda mempelajari letak titik dan garis dalam ruang, sekarang Anda mempelajari bagaimana hubungan antara garis dan bidang dalam ruang. Untuk itu, perhatikan kubus berikut.

Gambar 2.4.5	Kubus (3)



Dari gambar di atas Anda dapat melihat bahwa garis *BG* dan *FC* terletak pada bidang *BCGF*. Kedua garis ini (*BG* dan *FC*) sebidang dan berpotongan di titik *T*. Tentunya Anda dengan mudah dapat memahami bahwa sudut yang dibentuk oleh garis *BG* dan *FC* adalah sudut siku-siku (besarnya 90^0).

Garis *BG* dan garis *ED* tidak sebidang, kedua garis tersebut dikatakan bersilangan. Kedua garis ini (*BG* dan *ED*) tidak dapat berpotongan. Lebih lanjut Anda dapat mengatakan bahwa *BG* dan *ED* adalah dua garis yang bersilangan tegak lurus, karena *ED //FC* serta *BG* dan *FC* berpotongan tegak lurus.

Contoh 1:

Diketahui kubus *ABCD.EFGH.*

a) Di mana sajakah letak garis *DC*?
b) Tentukan pada bidang apa saja letak titik *C*
c) Sebutkan garis yang sejajar dengan garis *AC.*
d) Sebutkan garis yang bersilangan tegak lurus dengan garis *DB*.
e) Tentukan garis yang tegak lurus dengan garis *DH*.

Penyelesaian:

a) Garis *DC* terletak pada bidang *ABCD, DCGH,* dan *DCFE*.
b) Titik *C* terletak pada bidang *ABCD, DCGH, DCFE,* dan *ACGE*.
c) Garis yang sejajar dengan garis *AC* adalah garis *EG*.
d) Garis yang bersilangan tegak lurus dengan garis *DB* adalah garis *EG*.
e) Garis yang tegak lurus dengan garis *DH* adalah garis *AD* dan *DC*.

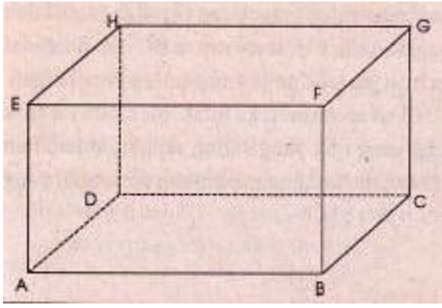
Garis *FC* dan garis *ED* juga dua garis yang sebidang, tetapi mereka tidak berpotongan, karena kedua garis ini sejajar. Karena garis *ED* sejajar dengan salah satu garis yang terletak pada bidang *BCGF*, maka dikatakan bahwa garis *ED* sejajar dengan bidang *BCGF.*

Garis *DC* tegak lurus dengan garis *BC* (mengapa?). Grais *DC* jugategak lurus garis *CG* (mengapa? Karena garis *DC* tegak lurus pada garia *BC* dan *CG* yang berpotongan, maka garis *BC* tegak lurus pada bidang yang memuat garis *BC* dan *CG*, yaitu bidang *BCGF*.

Perhatikanlah baik-baik bahwa untuk menentukan bahwa suatu garis tegak lurus pada suatu bidang, Anda harus menunjukkan bahwa garis tersebut tegak lurus pada dua garis berpotongan yang terletak pada bidang tersebut. Sedangkan untuk menunjukkan bahwa suatu garis sejajar suatu bidang, Anda cukup menunjukkan bahwa garis tersebut sejajar dengan satu garis yang terletak pada bidang tersebut.

<u>Contoh 2:</u>

Diketahui balok *ABCD.EFGH*.



Tentukan:

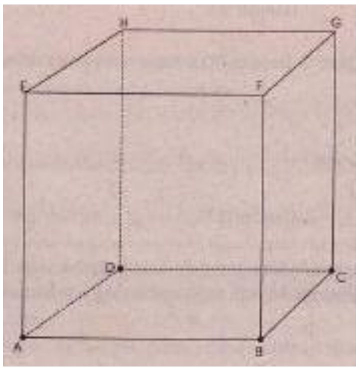
a) bidang yang sejajar dengan garis AF, jelaskan.
b) bidang yang tegak lurus garis *DH* jelaskan.

<u>Penyelesaian:</u>

a) Garis *AF* sejajar dengan bidang *DCGH*, karena *AF* sejajar dengan garis *DG* yang terletak pada bidang *DCGH*.
b) *DH* tegak lurus garis *DC* karena *DCGH* persegi panjang. *DH* tegak lurus garis *DA* karena *ADHE* persegi panjang. *DH* tegak lurus bidang yang memuat *DC* dan *DA*, yaitu bidang *ABCD.*

c. Hubungan antara bidang dengan bidang

Perhatikan kubus *ABCD.EFGH* berikut.



Bidang *ABCD* dan bidang *DCGH* adalah dua bidang yang berpotongan menurut garis *CD*. Kedua bidang ini saling tegak lurus, karena sudut tumpuan kedua bidang adalah sudut siku-siku. Sudut tumpuan dua bidang adalah sudut yang dibentuk oleh garis pada masing-masing bidang yang tegak lurus pada garis potong kedua bidang.

Contoh 1:

Garis DH adalah garis pada bidang DCGH. Garis AD adalah garis pada bidang ABCD.

DH = DC, AD = DC, DC garis potong atau garis sekutu bidang DCGH dan ABCD < ADH adalah sudut tumpuan bidang DCGH dan ABCD. < ADH $=90^0$ (ADHE persegi panjang). Karena sudut tumpuan bidang DCGH dan ABCD besarnya 90^0, maka bidang DCGH dan ABCD merupakan bidangyang berpotongan tegak lurus.

Sekali lagi perhatikan kubus ABCD.EFGH. Bidang ADHE dan bidang BCGF adalah dua bidang yang sejajar, karena kedua bidang tersebut tidak bersekutu pada satu titikpun.

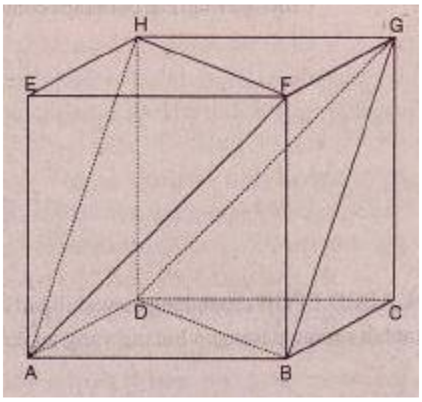
Carilah bidang-bidang lain pada kubusABCD.EFGH yang saling sejajar.

Dua bidang sejajar, bila kedua bidang tersebut masing-masing memuat dua garis berpotongan yang sepasang-sepasang sejajar.

Contoh 2:

Tunjukkan bahwa bidang *AFH* dan bidang *BDG* pada kubus *ABCD.EFGH* adalah dua bidang yang sejajar.

Bukti:



Bidang *ADHE* // bidang *BCGF*. Bidang *ABGH* memotong kedua bidang menurut garis *AH* dan *BG*, maka *AH*//*BG* .... (1) Perhatikan bidang *ABCD* dan *EFGH*. Kedua bidang dipotongbidang *BDHF* berturut-turut pada garis *BD* dan *HF.* Karena itu *BD//HF....* (2) Dari (1) dan (2) didapat bidang *AFH//*bidang *BDG*.

d. Jarak titik, garis dan bidang

Dalam kehidupan sehari-hari, Anda sering mendengar istilah jarak. Misal jarak dari Jakarta ke Surabaya adalah 950 km. Dalam hal ini yang dimaksud dengan jarak adalah panjang jalan yang dilalui, jika seseorang berjalan dari Jakarta ke Surabaya. Jalan ini tentunya berbelok-belok, mendaki, atau menurun. Dalam geometri jarak antara dua titik adalah ruas garis penghubung kedua titik tersebut. Hal ini biasanya Anda katakan sebagai panjang (ruas) garis.

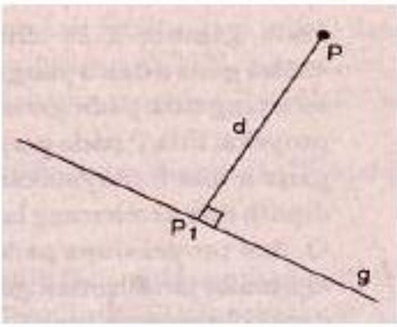
Contoh:

Pada kubus ABCD.EFGH yang rusuknya 5 cm, panjang $AH = 5\sqrt{2}$ cm (cobalah Anda hitung dengan teorema Pythagoras).

Anda dapat pula menentukan jarak dari suatu titik P ke suatu garis *g*. Untuk itu buatlah garis tegak lurus dari titik *A* ke garis *g*, namakan garis ini garis *d*. *d* memotong garis *g* di

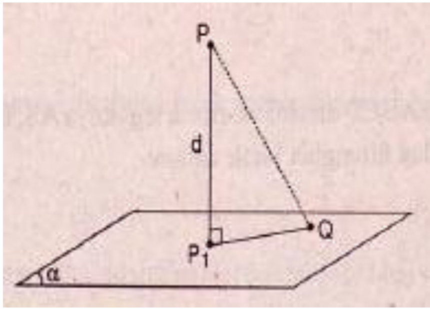
titik P_1. Panjang PP_1 adalah jarak titik P ke garis *g.*

Gambar 2.4.6	Jarak Titik *P* ke garis *g*



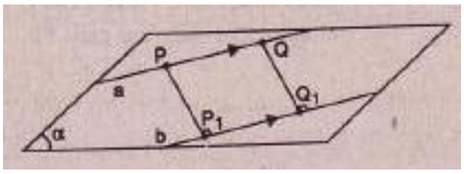
Sekarang Anda akan menentukan jarak dari suatu titik *P* ke bidang α. Untuk itu, proyeksikanlah titik *P* ke bidang α, hasilnya adalah titik P_1. Titik P_1 disebut proyeksi *P* pada bidang α. Jika *Q* sembarang titik pada bidang α, maka ΔPP_1Q adalah segitiga siku-siku dengan <P_1 sudut siku-siku dan PQ sisi miring. PP_1 adalah jarak titik P ke bidang α.

Gambar 2.4.7	Proyeksi P pada bidang α



Jika ada dua garis sejajar, bagaimanakah Anda menentukan jarak keduanya?

Gambar 2.4.8	Jarak P dan Q



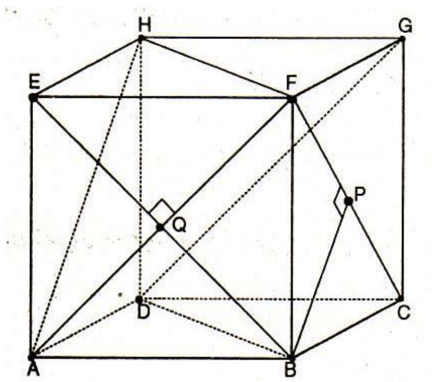
Pada gambar di samping, garis a dan b adalah dua garis sejajar. P sembarang titik padapada garis a dan P_1 proyeksi P pada b. Jarak antara garis a dan b adalah panjang ruas garis PP_1.

Contoh 7:

Diketahui kubus *ABCD.EFGH* dengan rusuk 6cm.

Tentukan: jarak antara

a) titik C dan titik H,
b) titik B dan garis CF,
c) titik E dan bidang $ADGF$,
d) garis AB dan garis GH.



Jawab:

a) Perhatikan ΔDCH adalah siku-siku dengan sisi siku-siku DC = 6 cm dan DH = 6 cm serta sisi miring CH.

$$\text{CH} = \sqrt{(CD)^2 + (DH)^2}\ \text{cm} \qquad = \sqrt{6^2 + 6^2}\ \text{cm} \qquad = 6\sqrt{2}\ \text{cm}$$

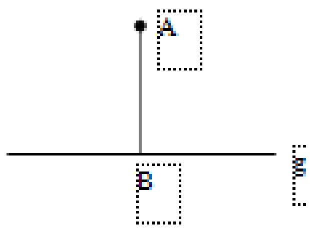
b) Untuk menentukan jarak dari titik B ke garis CF terlebih dahulu dibuat bidang melalui B dan CF, yaitu bidang $BCGF$. Setelah itu tentukan proyeksi B pada CF. Karena $BCGF$ suatu persegi, maka proyeksi B pada CF adalah titik P. Jadi jarak B ke CF = BP = $\frac{1}{2}$ $\overline{\text{BG}}$ = $\frac{1}{2}$ $6\sqrt{2}$ cm = $3\sqrt{2}$ cm

c) Jarak E ke bidang $ADGF$ adalah ruas garis EQ dengan Q titik potong AF dan BE dan Q merupakan proyeksi E pada $ADGF$.

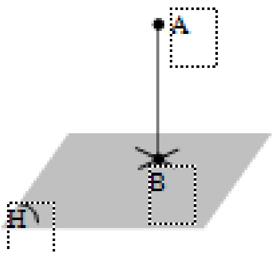
EQ = $\frac{1}{2}$ $\overline{\text{EB}}$ = $\frac{1}{2}$ $6\sqrt{2}$ cm = $3\sqrt{2}$ cm

d) AB dan GH merupakan dua garis sejajar. Jadi jaraknya dapatdiwakili oleh jarak salah satu titik pada AB, misal A, ke garis GH. Karena $GH//DH$ dan $GH//EH$, maka GH tegak lurus pada bidang$ADHE.$ Dengan demikian GH tegak lurus pada semua garis padabidang $ADHE.$ Berarti GH $//AH.$ Dengan demikian proyeksi A pada GH adalah titik H. Jadi jarak AB dan GH adaalah AH = $6\sqrt{2}$ cm.

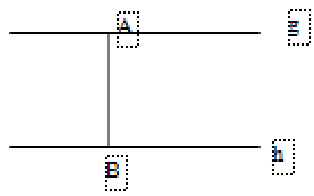
Dari beberapa hal tersebut di atas kita peroleh kesimpulan sebagai berikut:



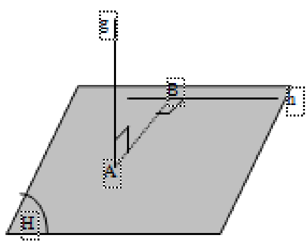
(1)



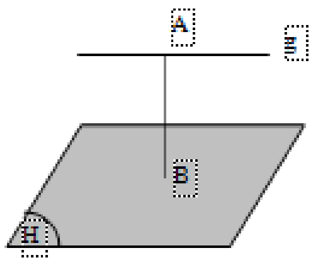
(2)



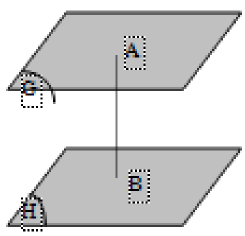
(3b)



(3c)



(4)



(5)

1) Menghitung jarak antara titik dan garis
2) Menghitung jarak antara titik dan bidang
3) Menghitung jarak antara 2 garis

   a. Dua garis yang berpotongan tidak mempunyai jarak
   b. Jarak antara dua garis yang sejajar
   c. Jarak dua garis bersilangan

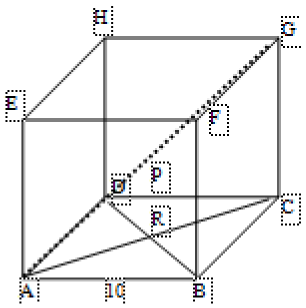
4) Menghitung jarak antara garis dan bidang
5) Jarak antara dua bidang

Contoh:

Diketahui kubus ABCD.EFGH dengan panjang rusuk 10 cm. Hitunglah jarak antara:

a. Titik A ke H
b. Titik A ke P (P adalah perpotongan diagonal ruang)
c. Titik A ke garis CE
d. Titik A ke bidang BCGF
e. Titik A ke bidang BDHF
f. Titik A ke bidang BDE
g. Garis AE ke garis CG
h. Garis AE ke garis CG
i. Bidang ABCD ke EFGH

Jawab:

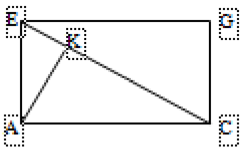


a. Jarak titik A ke H = AH

AH = $\sqrt{AD^2 + DH^2}$ = $\sqrt{100+100}$ = $\sqrt{200}$ = $10\sqrt{2}$ cm

b. Jarak titik A ke P = AP = ½ AG = $\frac{10}{2}\sqrt{3}$ cm

c. Jarak A ke CE = AK



Pada segitiga siku-siku CAE

L Δ CAE = ½.AC.AE = ½.CE.AK

$$\frac{1}{2}.10\sqrt{2}.10 = \sqrt{2}.10\sqrt{3}.AK$$

$$AK = \frac{\frac{1}{2}.10\sqrt{2}.10}{\frac{1}{2}.10\sqrt{3}}$$

$$AK = \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

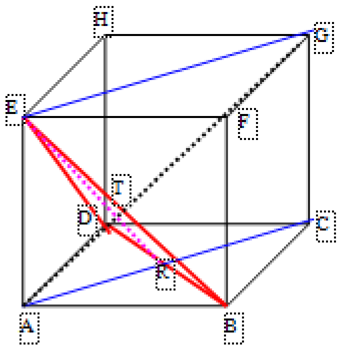
$$AK = \frac{10}{3}\sqrt{6}$$

d. Jarak titik A ke bidang BCGF = AB = 10 cm

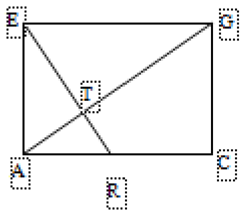
e. Jarak titik A ke bidang BDHF = AR (R titik tengah garis BD)

AR = ½ AC = ½ $10\sqrt{2}$ = $5\sqrt{2}$ cm

g. Jarak titik A ke bidang BDE



Perhatikan persegi panjang ACGE di bawah:



Garis AG berpotongan tegak lurus dengan garis ER dititik T, sehingga jarak A ke Bidang BDE adalah AT.

ER = $\sqrt{AR^2 + AE^2}$ = $\sqrt{50+100}$ = $\sqrt{150}$ = $5\sqrt{6}$ cm.

$\triangle$L. ARE = ½. AR. AE = ½. RE. AT

½. $5\sqrt{2}.10$ = ½. $5\sqrt{6}.AT$

$50\sqrt{2}$ = $5\sqrt{6}.AT$

AT = $\frac{50\sqrt{2}}{5\sqrt{6}}$ = $\frac{10}{3}\sqrt{3}$ cm

Jarak AE ke CG = AC = $10\sqrt{3}$

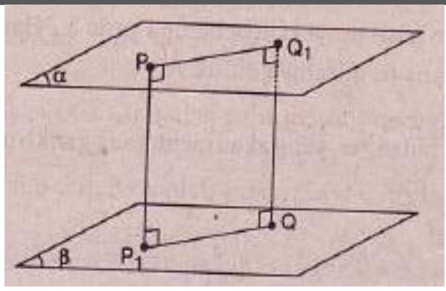
Jarak ABCD dan EFGH = AC = 10 cm

Anda telah mempelajari jarak antara dua titik, jarak dari suatu titik ke suatu garis, dan jarak titik ke bidang. Sekarang marilah kita mempelajari jarak antara dua bidang sejajar.

Jarak antara dua bidang sejajar adalah panjang ruas garis yang menghubungkan sebuah titik di salah satu bidang dengan proyeksinya di bidang yang lain.

Gambar di samping menunjukkan bidang ∝ yang sejajar dengan bidang ß. P titik sembarang pada bidang ∝ . P_1 proyeksi P pada ß. Jarak antara bidang ∝ dan ß adalah panjang ruas garis PP_1.

Gambar 2.4.9 Jarak antara Dua Bidang



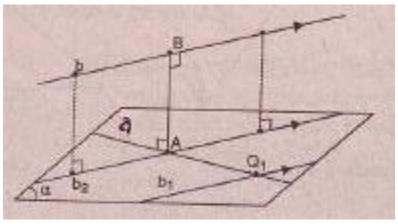
Anda tahu bahwa ada garis yang bersilangan. Bagaimanakah caranya, jika Anda diminta untuk menentukan jarak antara dua garis yang bersilangan? Jarak antara dua garis bersilangan adalah ruas garis yang memotong tegak lurus kedua garis tersebut. Untuk itu, cermatilah cara untuk menentukan suatu garis yang memotong tegak lurus kedua garis terebut.

Ada 2 cara yang dapat Anda lakukan untuk menentukan garis yang memotong tegak lurus dua garis yang bersilangan. Kegunaan masing-masing cara dapat Anda sesuaikan dengan ketentuan yang ada. Masing-masing cara diuraikan pada uraian berikut ini.

Cara 1:

a) Buat garis b_1 yang memotong garis a dan sejajar garis b.

Gambar 2.4.10 Garis yang Memotong Garis Lain (1)



b) Buat bidang α yang melalui a dan b_1. Bidang α adalah bidang yang sejajar dengan garis b karena memuat garis b_1 yang sejajar b.

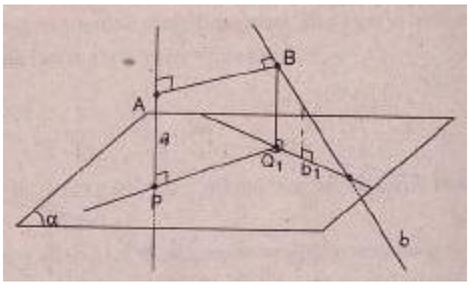
c) Tentukan proyeksi garis b pada bidang α, namakan b_2. Garis b_2 sejajar dengan garis b dan memotong garis a di titik A.

d) Melalui titik A buat garis yang tegak lurus pada bidang α. Garis ini memotong garis b di titik B.

e) Ruas garis AB adalah garis yang memotong tegak lurus garis a di titik A dan memotong tegak lurus garis b di titik B. Jadi panjang ruas garis AB merupakan jarak antara garis a dan garis b.

Cara 2:

Gambar 2.4.11	Garis yang Memotong Garis Lain (2)



a) Buat bidang α yang memotong tegak lurus garis a di titik P.

b) Proyeksikan garis b ke bidang α , namakan garis b_1.

c) Pada bidang α buat garis melalui P dan memotong tegak lurus garis $b_1$di titik Q.

d) Melalui titik Q buat garis tegak lurus bidang α dan memotong garis b di titik B.

e) Melalui titik B buat garis sejajar QP yang memotong garis a di titik A.

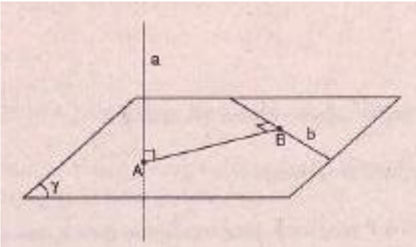
f) Ruas garis A B merupakan ruas garis yang memotong tegak lurus garis a di titik A dan memotong tegak lurus garis b di titik B. Jadi ruas garis AB merupakan jarak antara garis a dengan garis b.

Jika garis a dan b bersilangan tegak lurus, maka cara 2 dapat disederhanakan sebagi berikut:

a) Buat bidang α yang melalui *b* dan memotong tegak lurus *a* di titik *A.*

b) Melalui *a* buat garis yang memotong tegak lurus *b* di titik *B.*

Gambar 2.4.12	Garis yang Memotong Tegak Lurus



c) Panjang ruas garis *AB* adalah jarak antara garis *a* dan garis *b.*

Contoh:

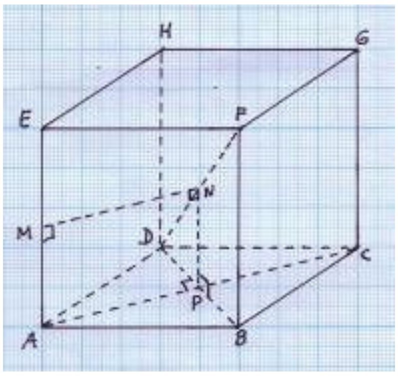
Diketahui kubus *ABCD.EFGH* dengan rusuk 12 cm.

Tentukan:

a) Jarak antara bidang *ABFE* dan bidang *CDHG*.

b) Jarak antara rusuk *AE* dan diagonal sisi *DF*.

Jawab:

a) 

Bidang *ABFE* dan bidang *CDHG* adalah 2 bidang yang sejajar. Demikian jarak keduanya ditentukan oleh jarak salah satu titik pada bidang *ABFE* ke bidang *CDHG*.

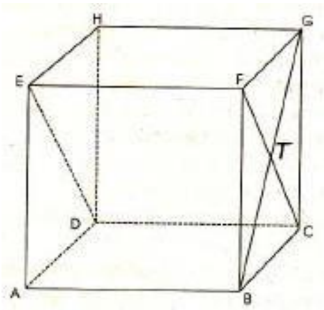
Untuk itu, pilih titik *A.* Proyeksi titik A pada bidang *CDHG* adalah *D*. Dengan demikian jarak antara bidang *ABFE* dan bidang *CDHG* adalah panjang ruas garis

AD, yang sama dengan panjang rusuk kubus. Jadi jarak antara kedua bidang *ABFE* dan bidang *CDHG* adalah 12 cm.

b) Garis *AE* dan garis DF adalah dua garis yang bersilangan. Untuk menentukan jarak antara kedua garis berarti harus ditentukan terlebih dahulu garis yang memotong keduanya. Pilih bidang *ABCD* yang tegak lurus pada garis *AE*. Proyeksikan *DF* ke bidang *ABCD*, hasilnya adalah garis *DB.* Melalui titik *A* pada bidang *ABCD* buat garis yang memotong tegak lurus garis *DB,* namakan titik ini titik *P.* Titik *P* adalah titik potong diagonal *AC* dengan *DB* Melalui titik *P* buat garis sejajar *AE* yang memotong *DF* di titik *N.* Melalui *N* buat garis sejajar *PA* yang memotong *AE* di titik *M*. Dengan demikian panjang garis *MN* adalah jarak antara garis *AE* dengan garis *DF*.
MN = *AP* = ½ *AC* = 6v2 cm.

e. Sudut pada bangun ruang

Gambar 2.4.13	Sudut pada Bangun Ruang



Anda telah mempelajari dua garis yang bersilangan tegak lurus. Sudut antara kedua garis tersebut besarnya 90^0, misal sudut antara garis *DE* dengan garis *BG*. Sekarang Anda akan mempelajari sudut-sudut lain pada suatu bangun ruang.
Perhatikan Δ*EBG* pada kubus *ABCD.EFGH* berikut. Segitiga apakah Δ*EBG?*

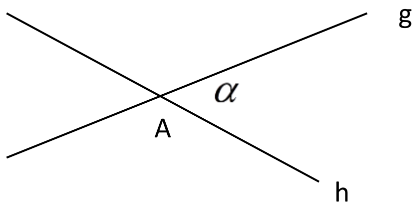
Ya, Δ*EBG* adalah segitiga samasisi, karena ketiga sisinya sama panjang (semua sisi? *EBG* adalah diagonal bidang pada kubus *ABCD.EFGH)*. Jika penjang rusuk kubus *s*, maka panjang sisi *EBG* adalah $s\sqrt{2}$.

Sudut antara dua garis berpotongan

Sudut antara dua garis berpotongan diambil sudut yang lancip.

Garis g berpotongan dengan garis h di titik A, sudut yang dibentuk adalah α .

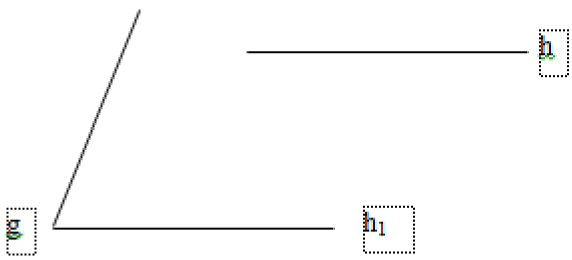
Gambar 2.4.14	Sudut antara dua garis berpotongan



Sudut antara dua garis bersilangan

Sudut antara dua garis bersilangan ditentukan dengan membuat garis sejajar salah satu garis bersilangan tadi dan memotong garis yang lain dan sudut yang dimaksud adalah sudut antara dua garis berpotongan itu.

Gambar 2.4.15	Sudut antara dua garis bersilangan



Garis g bersilangan dengan h
Garis h_1 sejajar dengan h
Sudut antara g dan h sama dengan sudut antara g dan h_1

Sudut antara garis dan bidang

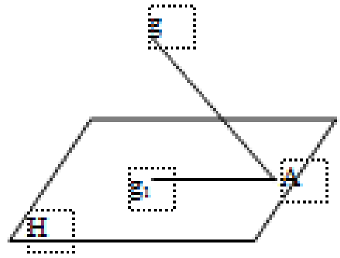
Sudut antara garis dan bidang hanya ada jika garis menembus bidang. Sudut antara garis dan bidang adalah sudut antara garis dan proyeksinya pada bidang itu.

Gambar 2.4.16	Sudut antara garis dan bidang

Garis g menembus bidang H dititik A.

Proyeksi garis g pada bidang H adalah g_1

Sudut antara garis g dengan bidang H adalah sudut yang dibentuk garis g dg g_1

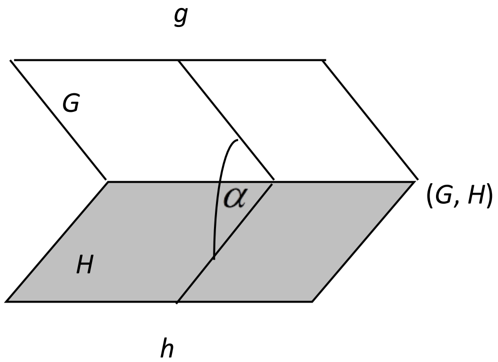


Sudut antara bidang dengan bidang

Sudut antara dua bidang terjadi jika kedua bidang saling berpotongan. Untuk menentukannya sebagai berikut:

a. Tentukan garis potong kedua bidang
b. Tentukan sebarang garis pada bidang pertama yang tegak lurus garis potong kdua bidang
c. Pada bidang kedua buat pula garis yang tegak lurus garis potong kedua bidang dan berpotongan dengan garis pada bidang pertama tadi.
d. Sudut antara kedua bidang sama dengan sudut antara kedua garis tadi

Gambar 2.4.17	Sudut antara bidang dan bidang



Bidang G dan H berpotong pada garis (G, H). Garis *g* pada G tegak lurus gais (G, H). Garis *h* pada H tegak lurus garis (G, H)

Sudut antara bidang G dan H sama dengan sudut antara garis *g* dan *h.*

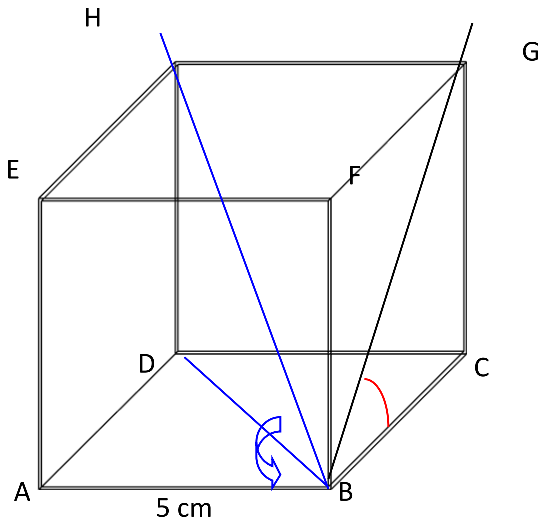
Contoh :

Diketahui kubus ABCD.EFGH dengan panjang rusuk 5 cm. Tentukan:

a. Besar sudut antara BG dan bidang ABCD

b. Cosinus sudut antara BH dan ABCD

Jawab:



a. Sudut antara BG dengan ABCD adalah sudut CBG = 45^0

b. Cosinus sudut antara BH dengan ABCD adalah Cos DBH = $\dfrac{BD}{BH} = \dfrac{5\sqrt{2}}{5\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$

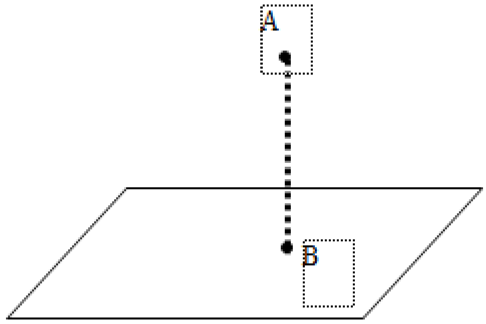
f. Proyeksi

a. Proyeksi titik pada bidang

Jika titik A diluar bidang H, maka proyeksi A pada bidang H ditentukan sebagai berikut:

1) Dari titik A dibuat garis g yang tegak lurus bidang H
2) Tentukan titik tembus garis g terhadap bidang H, misalnya titik B. Proyeksi titik A pada bidang H adalah B.

Gambar 2.4.18	Proyeksi Titik pada Bidang



b.Proyeksi garis pada bidang

Menentukan proyeksi garis pada bidang sama dengan menentukan proyeksi dua buah titik yang terletak pada garis ke bidang itu, dan proyeksi garis tadi pada bidang merupakan garis yang ditarik dari titik-titik hasil proyeksi.

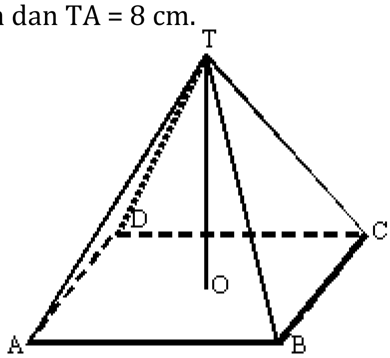
a. Jika sebuah garis tegak lurus pada bidang maka proyeksi garis ke bidang itu berupa titik.
b. Jika garis sejajar bidang maka proyeksi garis ke bidang merupakan garis yang sejajar dengan garis yang diproyeksikan.

Contoh:

Diketahui limas beraturan T. ABCD dengan AB = 5 cm dan TA = 8 cm.

Hitunglah panjang proyeksi:

a. TB pada bidang ABCD
b. TB pada bidang TAC



a. Proyeksi T pada bidang ABCD adalah titik O. Jadi proyeksi TB pada bidang ABCD = BO

   BO = $\frac{1}{2}$.AC

$= \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 + BC^2}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{25+25}$

$= \frac{1}{2}\, 5\sqrt{2}$

$= \frac{5}{2}\sqrt{2}$ cm

b. Proyeksi TB pada bidang TAC = TO

TO = $\sqrt{TB^2 - BO^2}$

$= \sqrt{64 - \frac{25}{2}}$

$= \sqrt{\frac{103}{2}}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{206}$ cm

2) Luas Permukaan Kubus

Pada Kegiatan Belajar sebelumnya, Anda telah mempelajari jaring-jaring kubus. Jaring-jaring kubus tersebut dapat menolong Anda untuk menentukan luas permukaan kubus. Dari jaring-jaring ini Anda dapat mengetahui bahwa permukaan kubus terdiri dari 6 persegi. Tentunya anda masih ingat bahwa luas persegi yang sisinya s adalah s^2. Maka:

L p= 6 s^2 ,

dengan **L p = Luas Permukaan**

<u>Contoh:</u>

Tentukan luas permukaan kubus yang panjang rusuknya 5 cm.

<u>Penyelesaian:</u>

L p = 6 s^2 = 6 x 5^2= 150

Jadi luas permukaan kubus yang panjang rusuknya 5 cm adalah 150 cm^2.

Luas permukaan suatu bangun ruang seringkali hanya dikatakan sebagai luas permukaan bangun ruang yang bersangkutan.

3) Luas Permukaan Balok

Dari jaring-jaring pada gambar sebelumnya Anda dapat mengetahui bahwa permukaan balok terdiri dari 2 persegi panjang dengan panjang l (sebagai panjang balok), dan lebar h (sebagai tinggi balok), 2 persegi panjang dengan panjang l dan lebar w (sebagai lebar balok), serta 2 persegi panjang dengan panjang w dan lebar h. Tentunya anda masih ingat bahwa luas persegi panjang yang panjangnya l dan lebarnya h adalah l x h.

Jika suatu balok dengan tinggi h, panjang l, lebar w, dan luasnya A, maka:

$$A = 2\ (l \times w + h \times l + h \times w)$$

<u>Contoh 2:</u>

Suatu kotak perhiasan berbentuk balok dengan panjang 20 cm, lebar, 10 cm, dan tinggi 5 cm. Tentukan lebar kain minimal yang dapat digunakan untuk melapisi seluruh permukaan kotak perhiasan tersebut.

<u>Penyelesaian:</u>

Lebar kain = 2 (20 x 10 + 5 x 20 + 5 x 10)

= 2 (200 + 100 + 50) = 700

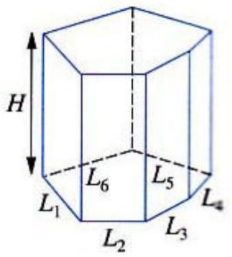
Jadi kain pelapis yang diperlukan minimal 700 m

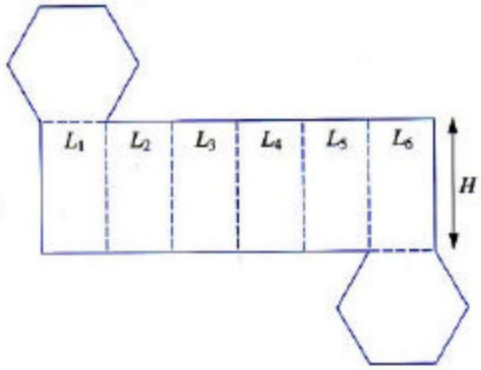
4) Luas Permukaan Prisma

Pada Kegiatan Belajar 1 telah mengetahui jaring-jaring prisma segienam. Misal Lp menyatakan luas permukaan prisma, H menyatakan tinggi prisma, dan panjang sisi-sisi alasnya adalah L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, dan L_6.

Jaring-jaring prisma ditunjukkan di sebelah kanan. Garis putus-putus menyatakan lipatan.

Gambar 2.4.19	Jaring-Jaring Prisma





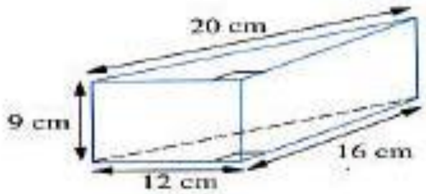
Luas *Lp* ditentukan oleh

$$Lp = L_1H + L_2H + L_3H + L_4H + L_5H + L_6H + 2 \text{ x luas alas}$$
$$= (L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5 + L_6)\, H + 2 \text{ x luas alas}$$
$$= \text{keliling alas x tinggi} + 2 \text{ x luas alas}$$

Secara umum,

Luas permukaan prisma = keliling alas x **tinggi + 2** x **luas alas**

<u>Contoh 3:</u>

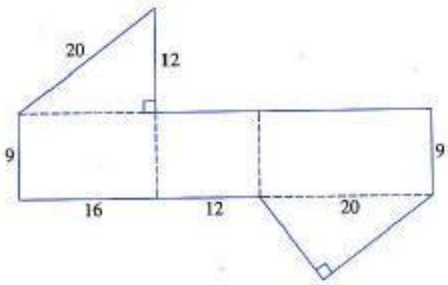


Gambarlah jaring-jaring prisma berikut.

Setelah itu, tentukan luasnya.

<u>Penyelesaian:</u>

Jaring-jaring prisma tersebut adalah:



Luas alas = (½ x 12 x 16) = 96

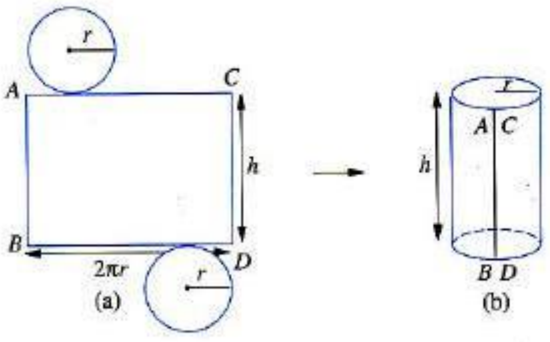
Keliling alas = 12 + 16 + 20 = 48

Jadi luas prisma = {48 x 9 + 2 (96)} cm^2 = 624 cm^2.

5) Luas Permukaan Tabung

Gambar (a) berikut menunjukkan dua lingkaran yang berjari-jari sama, *r,* dan persegi panjang dengan lebar *h* dan panjang $2\pi r$, yang merupakan keliling lingkaran. Untuk membentuk silinder atau tabung di gambar (b), anda dapat menggulung persegi panjang sehingga sisi AB dan CD berimpit. Kedua lingkaran yang berjari-jari sama menjadi alas dan tutup tabung. Persegi panjang tersebut menjadi selimut tabung.

Gambar 2.4.20 Selimut Tabung



Luas selimut tabung = luas persegi panjang = $2\pi r\, h$

Luas alas dan tutup tabung masing-masing adalah πr^2

Jika luas permukaan tabung Lp, maka

$Lp = 2\pi\ r\ h + 2\pi r^2$

$\boldsymbol{Lp = 2\pi r\ (h + r)}$

Contoh 4:

Diameter atau garis alas suatu silinder 14 cm, sedangkan tinggi silinder 10 cm. Tentukan luas silinder.

Penyelesaian:

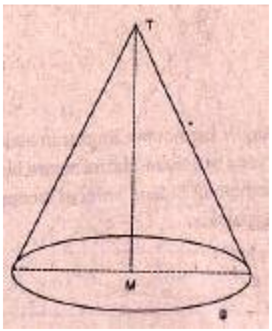
$r = \frac{14}{2} = 7$ dan $h = 10$

$Lp = 2\,\pi\, r\,(\,h + r\,) = \{\,2\text{x}\frac{22}{7}x7(\,10 + 7\,)\,\} = 748\ \text{cm}^2$

Jadi luas silinder adalah 748 cm ^{2}.

6) Luas Permukaan Kerucut

Gambar 2.4.21	Kerucut

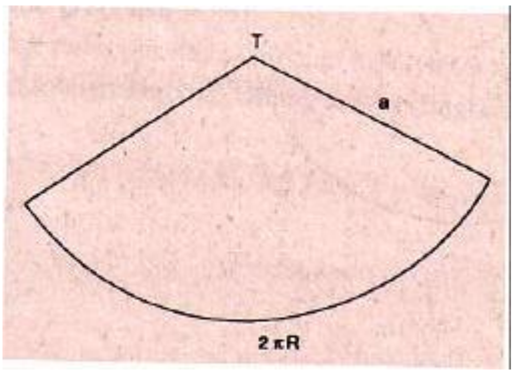


Kerucut mempunyai 2 permukaan, yaitu bidang lengkung, yang disebut selimut kerucut, dan alas yang berbentuk lingkaran. Gambar di samping menunjukkan kerucut dengan: T sebagai titik puncak, alas lingkaran g, M proyeksi

T pada alas, dan TM merupakan tinggi kerucut. Bila selimut kerucut tersebut Anda buka dan kemudian Anda bentangkan pada suatu bidang datar, maka Anda memperoleh bentuk berikut.

Bentuk ini berupa juring lingkaran yang berjari-jari a, yang disebut apotema, dan panjang busur sama dengan keliling lingkaran alas yang jari-jarinya R. Keliling lingkaran alas = $2\pi R$.

Gambar 2.4.22	Selimut Kerucut



$$Luas\ selimut\ kerucut \quad = \frac{Panjang\ Busur}{Keliling\ Lingkaran} x\ Luas\ Lingkaran$$

$$= \frac{2\pi r}{2\pi a} x\pi a^2$$

$$=\pi ra$$

Luas kerucut = luas selimut + luas alas

Jika luas kerucut dinyatakan dengan Lp, maka

$Lp = \pi\ R\ a + \pi\ R^2$

Lp **=** π $\boldsymbol{R\ (\ a + R\ )}$

Bila ß merupakan sudut pusat juring, maka:

ß = $\frac{2\pi R}{2\pi a} x360^{o}$

$= \frac{R}{a} x360^{o}$

<u>Contoh 5:</u>

Selimut sebuah kerucut yang telah dibuka berupa setengah lingkaran yang berjari-jari 4 cm. Hitung luas kerucut.

<u>Penyelesaian:</u>

Keliling lingkaran alas = setengah keliling lingkaran yang berjari-jari 4 cm.

Keliling lingkaran alas = $\frac{1}{2} x2\pi(4) = 4\pi$.

Keliling lingkaran alas = 2 πr.

Jadi jari-jari lingkaran alas = 2 cm.

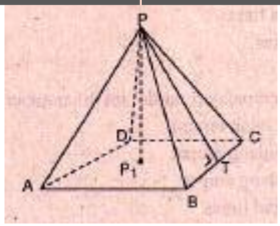
Luas alas kerucut = π 2^2 cm^2 = 4 π cm^2.

Luas selimut kerucut = $\pi R\ a$ cm^2 = π 2 (4) cm^2 = 8 π cm^2.

Jadi luas kerucut = (4 π + 8 π) cm^2 = 12 π cm^2.

7) Luas Permukaan Limas

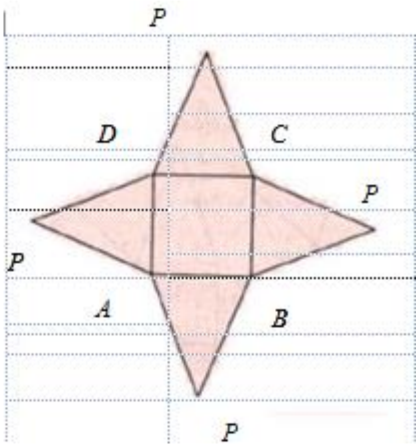
Gambar 2.4.23	Limas



Limas berikut adalah limas segiempat beraturan *P.ABCD* dengan puncak *P* dan alas persegi *ABCD*. Sisi tegak limas berbentuk segitiga sebangun dengan tinggi sama, yaitu *PT*.

Bila limas tersebut direbahkan sedemikian hingga semua sisi sebidang dengan alas, diperoleh jaring-jaring limas berikut ini

Gambar 2.4.24	Jaring-Jaring Limas



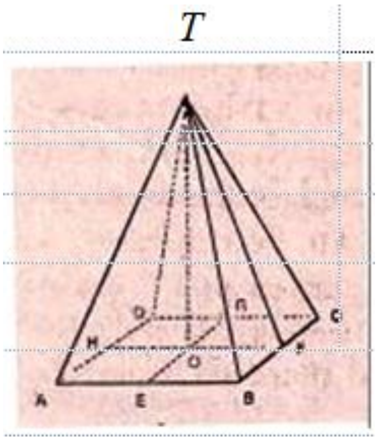
Dari gambar jaring-jaring limas di samping, Anda dapat menentukan luas limas yang merupakan jumlah dari luas alas (persegi *ABCD*) dan luas sisi-sisi tegaknya (ΔABP, ΔBCP, ΔCDP, dan ΔADP).

Jadi luas limas *P.ABCD* = luas persegi *ABCD* + luas ΔABP + luas ΔBCP + luas ΔCDP + luas ΔADP.

Luas limas = Luas alas + Luas seluruh sisi tegak

Contoh 6:

Diketahui limas segiempat beraturan *T.ABCD* dengan rusuk *AB* = 12cm dan tinggi limas 8 cm. Tentukan luas limas.



Penyelesaian:

AB = 12 cm

OF = EB = AB = 6 cm

TO = 8 cm.

TF = Tinggi Δ BCT = $\sqrt{(OT)^2 + (OF)^2} cm$

= $\sqrt{8^2 + 6^2}$ cm = 10 cm

Luas persegi $ABCD$ = (12 × 12) cm^2 = 144 cm^2.

Luas ΔABT = luas ΔCDT = luas ΔADT

= luas ΔBCT = ½ BC x TF = ½ x 12 x 10

= 60 cm^2

Luas limas $T.\ ABCD$ = luas alas + luas seluruh sisi tegak

= (144 + 4 x ½ x 12 x 10) cm^2 = 384 cm^2.

8) Luas Permukaan Bola

Jika *A* menyatakan luas permukaan bola yanga berjari-jari *R*, maka luas permukaan bola adalah

$$\mathbf{Lp = 4\pi R^2}$$

Contoh 7:

Tentukan luas bola yang berjari-jari 7.

Penyelesaian:

Luas bola = 4 πR^2 = 4 x $\frac{22}{7}$x 7^2 = 616 satuan luas

Contoh 8:

Tentukan luas bola yang berjari-jari 10.

Penyelesaian:

Luas bola = 4 πR^2

$= 4\pi 10^2$

$= 400\pi$

Perhatikan contoh 7 dan 8. Dari kedua contoh tersebut, Anda dapat melihat bahwa Anda dapat memilih π sebagai $\frac{22}{7}$ jika jari-jari bola kelipatan 7. Pemilihan ini dilakukan untuk memudahkan perhitungan yang Anda lakukan. Jika πbukan kelipatan 7, Anda dapat tetap menggunakannya untuk menghitung luas bola.

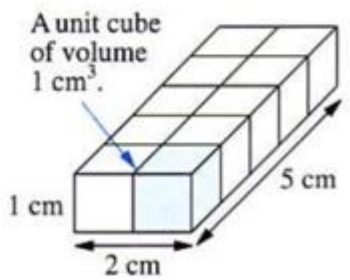
9) Volume Bangun Ruang

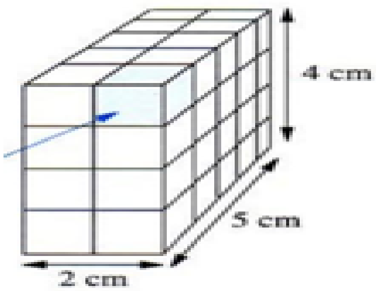
Gambar 2.4.25	Sebidang Tanah

Gambar di atas menunjukkan sebidang tanah yang disiapkan untuk suatu bangunan. Pemborong dengan sengaja meninggalkan timbunan tanah. Tahukah Anda bahwa tujuannya adalah memperkirakan volume tanah yang diambil dari areal tersebut?

a. Volume Balok

Gambar di samping menunjukkan balok dengan panjang 5 cm, lebar 2 cm, dan tinggi 1 cm. Balok itu memuat 10 satuan volume. Karena itu, volume balok tersebut $(5 \times 2 \times 1)$ cm^3 = 10 cm^3.





Gambar di samping adalah gambar balok dengan panjang 5 cm, lebar 2 cm, dan tinggi 4 cm. Balok itu memuat 40 satuan volume. Karena itu, volume balok tersebut (5 × 4 × 2) cm^3 = 40 cm^3.

Dari beberapa balok di atas, Anda dapat menemukan volume balok dengan mengalikan panjang, lebar, dan tinggi, yang bersatuan panjang sama. Karena itu, volume, *V*, dari balok yang berpanjang *l*, berlebar *w* dan bertinggi *h*, ditentukan dengan rumus berikut.

$$V = (\underbrace{L \times W}_{\text{Luas alas}} \times H) \text{ satuan volume}$$

Contoh 1:

Suatu balok yang panjangnya 9 cm dan lebarnya 7 cm mempunyai volume 315 cm^3. Tentukan:

a)Tinggi balok

b)Luas permukaan balok

Penyelesaian:

a) $L = 9$, $W = 7$, $V = 315$

$V = L \times W \times H$

$315 = 9 \times 7 \times H$

$H = \frac{315}{9 \times 7}$

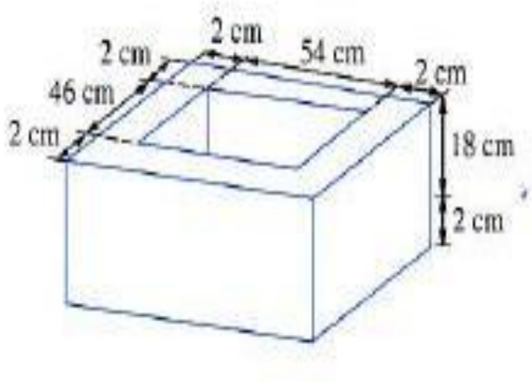
Jadi tinggi balok 5 cm.

b) $A = 2\,(L \times W + H \times L + H \times W)$

$= (9 \times 7 + 5 \times 9 + 5 \times 7) = 286$ Jadi luas balok = 286 cm^2.

Contoh 2:

Tentukan volume kayu yang digunakan untuk membuat kotak terbuka, yang berbentuk balok, dengan ketebalan 2 cm, jika diketahui ukuran bagian dalam kotak adalah panjang 54 cm, lebar 46 cm, dan kedalaman 18 cm.



Penyelesaian:

Panjang luar	= (54 + 2 + 2) cm	= 58 cm.
Lebar luar	= (46 + 2 + 2) cm	= 50 cm.
Tinggi luar	= (18 + 2) cm	= 20 cm.
Volume luar	= (58 × 50 × 20) cm^3	= 58.000 cm^3.
Volume dalam = (54 × 46 × 18) cm^3		= 44.712 cm^3.
Jadi volume kayu yang digunakan		= (58.000 – 44.712) cm^3
		= 13.288 cm^3.

b. Volume Kubus

Kubus merupakan kejadian khusus dari balok, artinya kubus adalah balok dengan panjang, lebar, dan tinggi sama. Misal panjang, lebar, dan tinggi kubus adalah *s*. Dengan kata lain panjang rusuk kubus adalah *s.*

Jika volume kubus dinyatakan dengan *V* dan rusuknya *s*, maka $\boldsymbol{V = s^3}$

Contoh 3:

Nyatakan:

a) 1 cm^3 dalam mm^3.

b) 1 m^3 dalam cm^3.

Penyelesaian:

a)Karena 1 cm = 10 mm, berarti kubus dengan rusuk 10 mm mempunyai volume 1cm^3.
Jadi 1 cm^3 = (10 × 10 × 10) mm^3 = 1.000 mm^3.

b) Karena 1 m = 100 cm, dengan cara serupa didapat:

1m^3 = (100 × 100 × 100) cm^3.

Untuk menentukan volume suatu cairan digunakan satuan khusus. Satuan ini adalah mililiter (ml), liter (l), dan kiloliter (Kl). Biasanya Anda membeli susu atau bensin dengan satuan liter dan obat dengan satuan mililiter.

1 ml = 1 cm^3

= 1.000 ml = 1.000 cm^3

= 1.000 l = 1m^3

Contoh 4:

Sebuah kontainer berbentuk balok dengan panjang 20 cm, lebar 3 cm, dan tinggi 14 cm. Tentukan volume cairan, dalam l, yang dapat dimuat kontainer tersebut (hal ini sering disebut sebagai kapasitas kontainer).

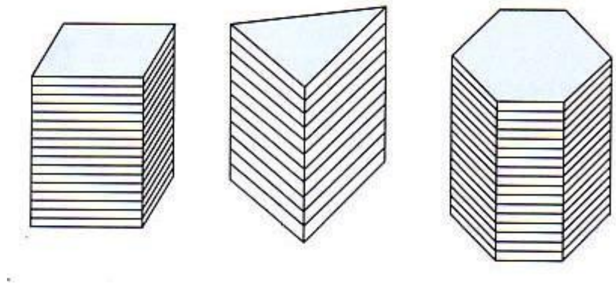
Penyelesaian:

Volume kontainer = (20 × 3 × 14) cm^3 = 840 cm^3
Karena 1.000 cm^3 = 1l, maka volume cairan dalam kontainer = 0,84 l.

c. Volume Prisma

Tiga prisma berikut diperoleh dengan menumpuk beberapa bangun yang identik yang dipotong dari kardus.

Gambar 2.4.26	Bangun yang Identik dengan Prisma



Volume prisma tegak persegi panjang atau balok = luas alas × tinggi

Begitu juga luas prisma tegak segitiga = luas alas × tinggi

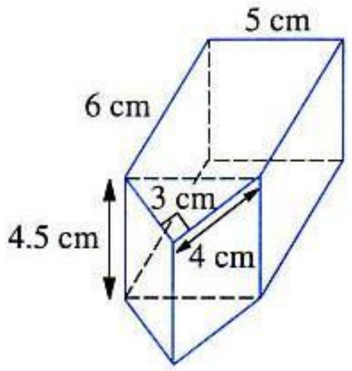
Secara umum, untuk prisma tegak yang volumenya dinyatakan dengan V, didapat rumus

$$V = A \times H$$

A adalah luas alas prisma dan H merupakan tinggi prisma.

Contoh 5:

Tentukan luas dan volume prisma tegak segitiga seperti gambar di samping.



Penyelesaian:

Luas alas = $\{(6 \times 5) + (\frac{1}{2} \times 3 \times 4)$ cm^2

= 36 cm^2

Luas sisi tegak = keliling alas × tinggi

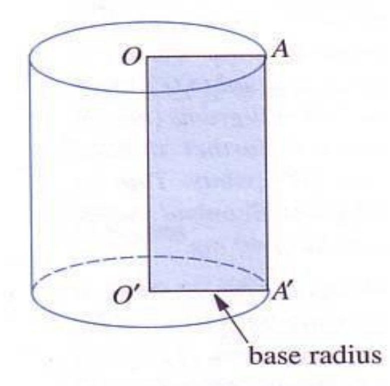
= {(6+ 5 + 6 + 4 + 3) × 4,5} cm ^{2} = 108 cm^2

Jadi luas prisma = {108 + 2 (36)} cm^2 = 180 cm^2.

Volume prisma = (36 × 4,5) cm^3 = 162 cm^3.

d. Volume Tabung

Gambar 2.4.27	Tabung



Karena suatu tabung atau silinder merupakan sebuah prisma tegak dengan alas lingkaran, maka volume tabung = luas alas × tinggi.

Alas tabung berbentuk lingkaran dan luas lingkaran yang berjari-jari r adalah πr^2. Jika volume tabung V, maka

$$V = \pi r^2 h$$

Contoh 6:

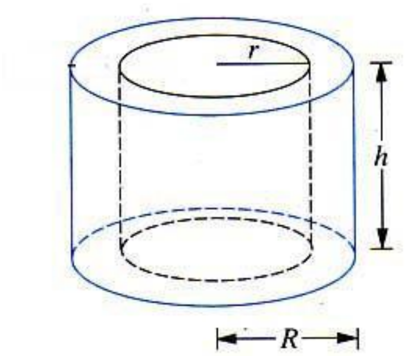
Garis tengah lingkaran alas sebuah tabung 14 cm dan tingginya 10 cm. Tentukan volume tabung.

Penyelesaian:

r = $\frac{14}{2}$ = 7, h = 10, V = $\pi r^2 h = \frac{22}{7} x 7^2 x 10 = 1.540\ cm^2$

Jadi volume tabung adalah 1.540 cm^2.

Bayangkan sebuah silinder berjari-jari R dan tingginya h. Misal silinder lain yang lebih kecil dengan jari-jari r (r<R) dengan tinggi sama, yaitu h, dimasukkan ke dalam silinder yang berjari-jari R. Kejadian ini menghasilkan sebuah pipa, seperti gambar berikut.



Silinder seperti ini disebut silinder berlubang. Volume silinder berlubang

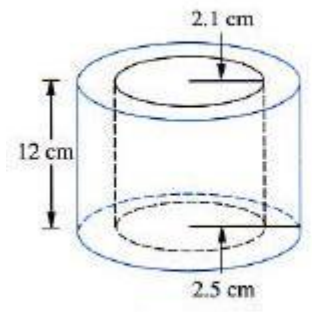
$= \pi R^2 h - \pi r^2 h$

$= \pi\, h\, (R^2 - r^2)$

∴ **Volume silinder berlubang =π h (R^2- r^2)**

Contoh 7:

Gambar di sebelah kanan menunjukkan potongan sebuah pipa logam. Jari-jari bagian dalam pipa adalah 2,1 cm, jari-jari bagian luar pipa adalah 2,5 cm dan panjang pipa 12 cm. Tentukan volume logam yang digunakan untuk membuat pipa.



Penyelesaian:

R = 2,5, r = 2,1, h = 12. Penampang pipa berupa cincin.

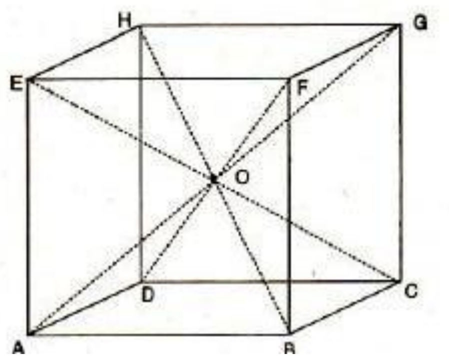
Luas cincin = { π (2,5)^2 - π (2,1)^2} cm^2 = 1,84 π cm^2

Volume pipa = (1,84 × 3,34 × 12) cm^3 = 76,7 cm^3 (dibulatkan sampai 1 tempat desimal).

Jadi volume logam yang digunakan untuk membuat pipa adalah 73,7 cm^3.

e. Volume Limas

Gambar 2.4.28	Kubus (2)



Perhatikan gambar kubus *ABCD.EFGH* di samping ini. Titik *O* merupakan perpotongan diagonal ruang, sehingga kubus terbagi menjadi 6 limas segiempat, dengan alas persegi, yang sama besar.

Keenam limas tersebut adalah *O.ABFE, O.ABCD, O.DCGH, O.BFGC,O.BHEG,* dan *O.HADE.* Dengan demikian tinggi setiap limas adalahsetengah panjang rusuk kubus, *s.* Karena keenam limas sama besar, maka:

Volume setiap limas $= \frac{1}{6}$ volume kubus

$= \frac{1}{6}\, s^3$

$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}s\right) s^2$

$= \frac{1}{3}$ Luas alas x tinggi

Secara umum, suatu limas yang luas alasnya A dan tingginya h, dan volumenya V, maka

$$\boldsymbol{V = \frac{1}{3} A.h}$$

Contoh 8:

Sebuah limas tegak dengan alas berbentuk persegi panjang yang panjangnya 5 dan lebarnya 4. jika tinggi limas 6, tentukan volume limas.

Penyelesaian:

Alas berbentuk persegi panjang.

Panjang alas = 5, lebar alas = 4, maka A = 20.

Tinggi limas 6.

Jadi volume limas $= \frac{1}{3} \times 20 \times 6 = 40$.

f. Volume Kerucut

Kerucut adalah bentukkhusus dari limas. Kekhususannya terletak pada bentuk alas. Alas kerucut berbentuk lingkaran. Jika suatu kerucut dengan tinggi h dan jari-jari alas r dan volume V, maka:

$$V = \frac{1}{3} r^2 h$$

Contoh 9:

Jika jari-jari sebuah kerucut 7 cm dan tingginya 10 cm, maka hitunglah volume kerucut tersebut.

Penyelesaian:

Volume kerucut $= (\frac{1}{3} r^2 h)$ cm^3

$= (\frac{1}{3} \times 7^2 \times 10)$ cm^3

$= 513 \frac{1}{3}$ cm^3

g. Volume Bola

Jika V volume suatu bola yang berjari-jari R, maka:

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3$$

Contoh 10:

Tentukan volume bola yang jari-jarinya 15 cm.

Penyelesaian:

$V = \frac{4}{3} \pi R^3$

$V = \frac{4}{3} \pi 15^3$

$V = 300\ \pi$

D. Aktivitas Pembelajaran

1. Pengantar:

Dalam kegiatan ini Anda akan melakukan serangkaian kegiatan untuk mencapai kompetensi berkaitan dengan Geometri. Kegiatan-kegiatan tersebut akan terbagi dalam beberapa topik, di antaranya adalah:

a. Jarak dan Sudut dalam Dimensi Tiga, pada bagian ini dibahas tentang pengertian jarak dan sudut dalam ruang berdimensi tiga, cara menentukan jarak antara obyek-obyek, dan cara menentukan besar sudut antara dua obyek dalam ruang berdimensi tiga.

b. Bangun Ruang, pada bagian ini dibahas tentang bangun ruang bersisi datar yaitu balok, prisma, dan limas yang meliputi pengertian, unsur-unsur, luas permukaan dan volumnya. Dibahas juga bangun ruang sisi lengkung yang meliputi tabung, kerucut, dan bola.

2. Aktifitas

Aktifitas 1: Jarak dalam Dimensi Tiga

LEMBAR KERJA 01a

a. Titik pusat sebuah bola berjari-jari 10 cm terletak 1 m dari dinding. Jarak bola ke dinding tersebut adalah ... cm.

b. Garis g tegak lurus terhadap sebuah garis h yang terletak pada bidang α. Apakah hal ini menjamin bahwa garis g tegak lurus terhadap bidang α? Jelaskan!

c. Pada ruang berbentuk kubus *ABCD.EFGH*, seekor cicak hendak merayap di dinding dari titik *A* ke titik *F*. Berapa jarak terpendek yang dapat ditempuh cicak?

LK 01a **Jawab:**

LEMBAR KERJA 01b

Jelaskan bagaimana langkah-langkah menentukan

a. Jarak titik ke garis

b. Jarak titik ke bidang

c. Jarak antara dua garis sejajar

d. Jarak antara dua garis bersilangan

e. Jarak antara garis ke bidang

f. Jarak antara bidang ke bidang

g. Jarak antara dua bidang berpotongan.

LK 01b **Jawab:**

LEMBAR KERJA 01c

Pada kubus *ABCD.EFGH*, berapakah jarak antara bidang *AFH* dan bidang *BDG*?

LK 01c **Jawab:**

LEMBAR KERJA 01d

Panjang setiap rusuk bidang empat beraturan *T.ABC* adalah 16 cm. Jika P Pertengahan AT, dan Q pertengahan BC, tentukan panjang PQ adalah.

LK 01d **Jawab:**

LEMBAR KERJA 02

1) Dua garis berpotongan akan membentuk empat sudut. Dari keempat sudut tersebut, yang digunakan untuk sudut antara dua garis adalah sudut terkecilnya. Jelaskan bagaimana langkah-langkah menentukan sudut antara
   a. Dua garis bersilangan
   b. Garis dengan bidang dengan posisi garis menembus bidang
   c. Garis dengan bidang dengan posisi garis sejajar bidang.
   d. Dua bidang berpotongan.
2) Bidang V dan W berpotongan tegak lurus sepanjang garis g. Garis l membentuk sudut 45^{o} dengan V dan 30^{o} dengan W. sinus sudut antara l dan g adalah ...
3) Diketahui kubus *ABCD.EFGH*. Besar sudut yang dibentuk oleh garis BG dengan bidang $BDHF$ adalah …
4) Diketahui kubus *ABCD.EFGH* dengan panjang rusuk 6 cm. Jika sudut antara diagonal AG dengan bidang alas adalah α, maka nilai sin α adalah …

LK 02

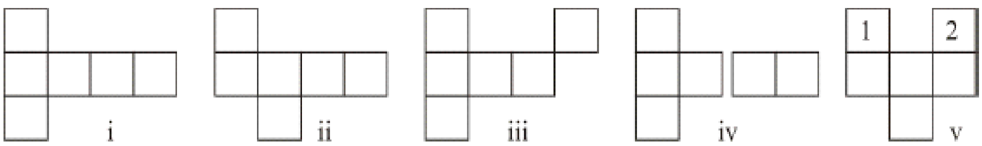
Jawab:

Aktifitas 3: Bangun Ruang Bersisi Datar

LEMBAR KERJA 03a

1. Apakah kubus merupakan himpunan bagian dari balok?

2. Di antara 4 gambar di bawah, manakah yang merupakan jaring-jaring kubus? Berikan penjelasannya.



LK 03a

Jawab:

LEMBAR KERJA 03b

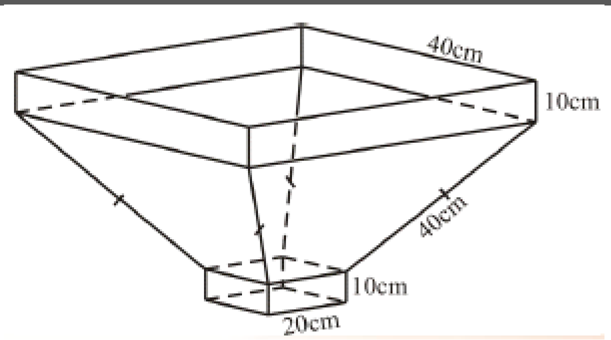
1) Dalam proses mendapatkan volume bangun-bangun ruang diperlukan pemahaman yang baik tentang prinsip Cavalieri. Jelaskan bagaimana prinsip Cavalieri tersebut. Diskusikan secara berkelompok, informasi dan paparan tentang prinsip Cavalieri.
2) Jelaskan bagaimana cara mendapatkan rumus volum dan luas permukaan balok, prisma, dan limas.

LK 03b **Jawab:**

LEMBAR KERJA 03c

Sebuah corong mesin penggiling padi terbuat dari plat stainless steel berbentuk seperti pada gambar dengan penampang atas dan bawah berbentuk persegi.

Gambar 2.4.33	Corong Mesin Penggiling



a. Jika berat bahan yang digunakan adalah 8 kg/m2, tentukan berat corong tersebut.

b. Jika bagian tersebut berisi rata penuh dengan padi, tentukan volum padi yang dapat ditampung.

LK 03c **Jawab:**

Aktifitas 4: Bangun Ruang Sisi Lengkung

LEMBAR KERJA 04a

Jelaskan proses penurunan rumus volume dan luas permukaan bola.

LK 04a **Jawab:**

LEMBAR KERJA 04b

Di desa Sengir, Kec. Prambanan, Kab. Sleman, DIY, terdapat 71 rumah dome yang bagian atapnya berbentuk kubah setengah bola berdiameter 7 m. Jika bagian kubah ini akan dicat, dan 1 kg cat dapat digunakan untuk mengecat 9 m^2, berapa kilogram cat yang diperlukan?

Gambar 2.4.34	Rumah Dome

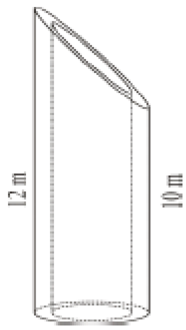
LK 04b

Jawab:

LEMBAR KERJA 04c

Untuk mengenang jasa pahlawan kemerdekaan, sebuah tugu bambu runcing akan dibangun dengan desain utama berbentuk tabung terpancung terbuat dari beton dengan diameter luar 2 m, tebal dinding 40 cm, bagian tertinggi 12 m, bagian terrendah 10 m. Tentukan volum beton monumen tersebut.

Gambar 2.4.35	Tugu Bambu Runcing

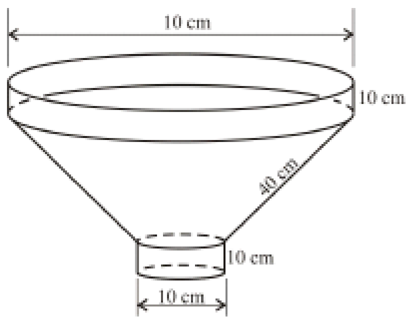


LK 04c

Jawab:

LEMBAR KERJA 04d

Sebuah corong mesin penggiling dengan bahan plat besi terdiri atas tabung dan kerucut teriris, dengan ukuran seperti pada gambar. Jika berat plat besi adalah 23 kg/m^2.



a. Berapa berat corong?

b. Berapa volum bahan dapat ditampung oleh corong dengan permukaan atas rata?

LK 04d

Jawab:

Aktivitas 05: Penyusunan Instrumen Penilaian

Pada aktivitas ini, Anda diminta untuk berlatih menyusun instrumen penilaian pada materi Geometri Dimensi Tiga sesuai dengan mengacu pada panduan penyusunan dan penulisan soal dari PUSPENDIK. Diskusikan dengan rasa tanggung jawab bersama rekan sejawat Anda, dibutuhkan rasa tanggung jawab dalam mengerjakan tugas ini.

Lembar Kerja 05

1. Buatlah kisi-kisi soal yang akan dibuat sebanyak 10 soal PG dan 5 esai
2. Buatlah soal sesuai dengan kisi-kisi yang telah Anda buat

LK 05

Jawaban:

E. Rangkuman

1. Kedudukan Titik, Garis, Dan Bidang

a. Kedudukan titik terhadap garis

Jika diketahui sebuah titik T dan sebuah garis g, maka:

3) Titik T teletak pada garis g atau garis g melalui titik T

4) Titik T berada diluar garis g atau garis g tidak melalui titik T

b. Kedudukan titik terhadap bidang

Jika diketahui sebuah titik T dan sebuah bidang H, maka:

1) Titik T terletak pada bidang H, atau bidang H melalui titik T

2) Titik T berada diluar bidang H, atau bidang H tidak melalui titik T

c. Kedudukan garis terhadap garis

Jika diketahui sebuah garis g dan sebuah garis h, maka:

1) Garis g dan h terletak pada sebuah bidang, sehingga dapat terjadi:
   - garis g dan h berhimpit, g = h
   - garis g dan h berpotongan pada sebuah titik
   - garis g dan h sejajar

2) Garis g dan h tidak terletak pada sebuah bidang, atau garis g dan h bersilangan, yaitu kedua garis tidak sejajar dan tidak berpotongan.

d. Kedudukan garis terhadap bidang

Jika diketahui sebuah garis g dan sebuah bidang H, maka:

1) Garis g terletak pada bidang H, atau bidang H melalui garis g.

2) Garis g memotong bidang H, atau garis g menembus bidang H

3) Garis g sejajar dengan bidang H

e. Kedudukan bidang terhadap bidang

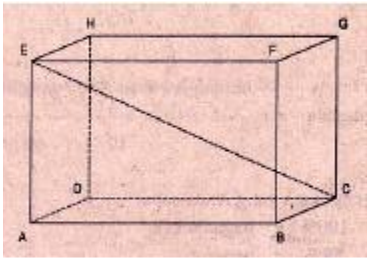
Jika diketahui bidang V dan bidang H, maka:

1) Bidang V dan bidang H berhimpit

2) Bidang V dan bidang H sejajar

3) Bidang V dan bidang H berpotongan. Perpotongan kedua bidang berupa garis lurus yang disebut garis potong atau garis persekutuan.

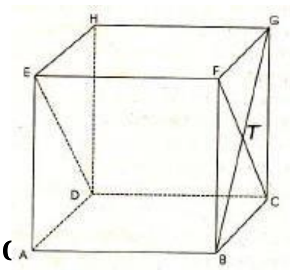
2. Unsur-Unsur Bangun Ruang



Balok *ABCD.EFGH* mempunyai 6 **sisi,** yaitu **bidang alas** *ABCD*, **bidang atas** *EFGH*, dan **sisi tegak** *ABFE, BCGF, DCHG, ADHE*.

Balok *ABCD.EFGH* mempunyai 12 **rusuk**, yang merupakan 2 perpotongan sisi, antara lain: *AB, BF,* dan *EH.* Balok *ABCD.EFGH* mempunyai 8 **titik sudut,** yang merupakan perpotongan rusuk, antara lain: *B* dan G. *EC* adalah salah satu **diagonal ruang** pada balok *ABCD.EFGH. ED* adalah salah satu **diagonal bidang** pada balok *ABCD.EFGH. ADGF EC* adalah salah satu **bidang diagonal** pada balok *ABCD.EFGH.*

3. Hubungan Antara Unsur-Unsur Bangun Ruang



Pada kubus *ABCD.EFGH:*

titik *A* **terletak pada garis** *AB, AD,* dan *AE.*

(**a bidang** *ABCD* dan *ABFE,* **titik** *A* **terletak pada bidang** yang memuat garis *AB, AD,* dan *AE,* yaitu bidang *ABCD, ABFE,* dan *ADHE.* Garis *AB* dan garis *GH* adalah **dua garis** yang **sejajar**. Garis *BG* dan garis *DC* adalah **dua garis** yang **bersilangan.** Garis *AB* dan garis *DH* adalah **dua garis** yang **bersilangan tegak lurus. Garis** *AB* **sejajar** dengan **bidang** *CDHG*, karena*AB*sejajar dengan salahsatu garis pada bidang *CDHG* yaitu garis *CD.* **Garis** *AB* **tegak lurus** dengan **bidang** *CBFG*, karena AB tegak lurus dengan dua garis berpotongan pada bidang *CBFG* yaitu garis *CB* dan *BF.* **Bidang** *ABCD* **berpotongan dengan bidang *DECF.***

Bidang *ABCD* **berpotongan tegak lurus dengan bidang *DCGH.***

Bidang *ABCD* **sejajar dengan bidang *EFGH.***

Jarak antara **dua titik** adalah ruas garis terpendek yang menghubungkan dua titik tersebut.

Jarak antara sebuah **titik ke** sebuah **garis** adalah panjang garis yangmemproyeksikan titik ke garis. Begitu juga **jarak titik ke bidang**.

Jarak antara **dua garis sejajar** adalah jarak salah satu titik di salah satu garis ke garis yang lain.

Jarak dua garis bersilangan adalah panjang ruas garis yang tegak luruspada kedua garis tersebut.

Jarak antara **dua bidang yang sejajar** adalah jarak dari salah satu titikpada bidang yang satu ke bidang yang lain.

Sudut antara garis dengan bidang adalah sudut antara garis tersebut dengan proyeksinya pada bidang.

Sudut antara dua bidang adalah sudut tumpuan kedua bidang.

Sudut tumpuan dua bidang adalah sudut antara dua garis pada masing-masing bidang di mana garis-garis tersebut masing-masing tegak lurus pada garis potong kedua bidang.

4. Luas Permukaan dan Volume Bangun Ruang

No	Nama Bangun Ruang	Luas Permukaan (Lp)	Volume (V)
1	Kubus	$Lp = 6s^2$	$V = s^3$ Dimana: s = panjang rusuk
2	Balok	$Lp = 2(lw + hl + hw)$	$V = (l \times w \times h)$ Dimana: l = panjang w = lebar h = tinggi
3	Prisma	Lp = keliling alas × tinggi + 2 × luas alas	$V = Lp \times h$

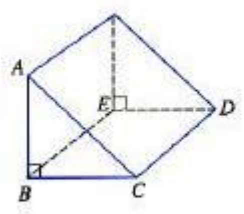
4	Limas	Lp = Luas alas + Luas seluruh sisi tegak	$V = \frac{1}{3} . Lp. h$
5	Tabung	$Lp = 2\pi r(h + r)$	$V\pi r^2 h$ Dimana: r = jari-jari alas tabung
6	Kerucut	$Lp = \pi R(a + R)$ Dimana: a = apotema R = jari-jari alas kerucut	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$
7	Bola	$Lp = 4\pi R^2$	$V = \frac{4}{3}\pi R^2$

F. Tes Formatif

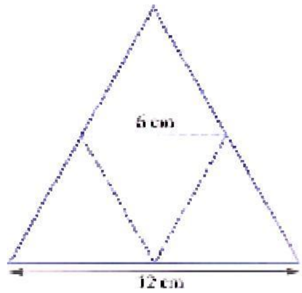
Kerjakan soal-soal berikut dengan jujur dan cermat!

1. Diketahui suatu balok *ABCD.EFGH* dengan panjang 8 cm, lebar 6 cm, dan tinggi 5 cm. Tentukan panjang diagonal bidang dan diagonal ruangnya!
2. Diketahui sebuah balok ABCD.EFGH. Panjang AB = 8cm, BC = 6 cm, dan CG = 2 cm. Jarak titik A ke garis HF adalah ...
3. Gambarlah limas segilima. Sebutkan unsur-unsurnya!
4. Tentukan luas permukaan balok dengan panjang 24 mm, lebar 18 mm, dan tinggi 5 mm!
5. Tentukan luas permukaan kubus yang panjang rusuknya *4p* !
6. Gambar di samping adalah gambar prisma tegak dengan alas persegi panjang *BCDE*. Segitiga *ABC* merupakan salah satu sisi tegaknya.

   Tentukan luas prisma bila *AB* = 3 cm, *BC* = 4 cm, dan *CD* = 7 cm.

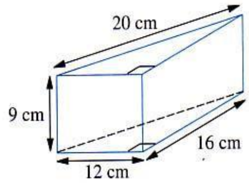


7. Gambar di samping adalah gambar limas segitiga beraturan yang biasa disebut bidang empat. Tentukan luas bidang empat tersebut.



8. Sebuah es krim yang dibeli seorang anak berbentuk kerucut dengan jari-jari lingkaran alas 14 cm dan apotema 10 cm. Tentukan luas permukaan es krim tersebut.
9. Pak Sembiring ingin membuat tempat air berbentuk silinder dengan jari-jari lingkaran alas 1 m dan tingginya juga 1 m. Tentukan luas minimal bahan yang diperlukan Pak Sembiring.
10. Sebuah bola dengan volume 4851 cm^3 akan dibuatkan selimutnya. Luas selimut untuk bola tersebut adalah ... cm^2.
11. Sebuah tangki berukuran panjang 4 m, lebar 2 m, dan tinggi 4,8 m. Mula-mula tangki tersebut diisi air separonya. Tentukan kedalaman air dalam tangki setelah 4.000 l air ditambahkan lagi ke dalam tangki tersebut.

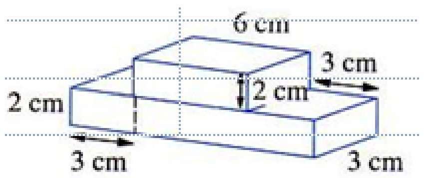
12. Tentukan volume prisma yang gambarnya seperti gambar di samping ini.



13. Sebuah pipa yang terbuat dari logam dengan diameter bagian luar 28 mm dan diameter bagian dalam 20 mm. Panjang pipa 3,5 m. Tentukan volume logam yang diperlukan untuk membuat pipa tersebut.

14. Melalui sebuah pipa dengan garis tengah atau diameter 56 mm dialirkan air dengan kecepatan 3m/det. Berapa volume air, dalam liter, yang dapat ditampung dalam pipa tersebut per 1 menit?

15. Tentukan volume dan luas permukaan bangun berikut, yang terdiri dari dua balok.



16. Pada balok *ABCD.EFGH*

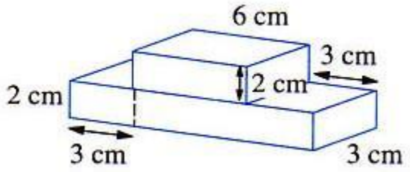
a) apakah $BG//GH$?
b) apakah *AC* proyeksi *DG* pada bidang *ABCD?*
c) tentukan sudut antara garis *DF* dengan bidang *EFGH.*

17. Apakah bentuk proyeksi suatu garis pada suatu bidang? Jelaskan jawaban Anda.

18. Pada balok *ABCD.EFGH*, apakah bidang *AFH* sejajar dengan bidang *BDG?* Jelaskan jawaban Anda.

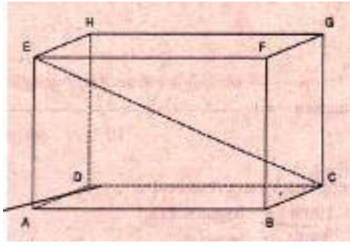
19. Suatu kubus *ABCD.EFGH* dengan rusuk 10 cm. Tentukan jarak antara bidang *BDE* dengan bidang *CFH*.

20. Tentukan jarak titik *C* ke garis *HF* pada kubus *ABCD.EFGH* yang panjang rusuknya 5.



Kunci Jawaban

1. Penyelesaian: berikut adalah gambar balok *ABCD.EFGH*. Panjang = *A B* = 8 cm



Lebar = *BC* = 6 cm Tinggi = *AE* = 5 cm

Diagonal bidang = *AC*

$= \sqrt{(AB)^2 + (BC)^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$

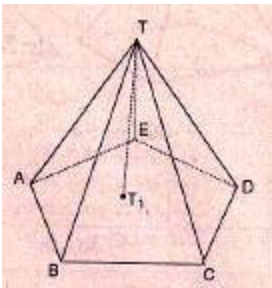
Diagonal ruang = *CE*

$= \sqrt{(AC)^2 + (AE)^2}$

$= \sqrt{10^2 + 5^2}$

$= 5\sqrt{5}$

2. $\sqrt{29}$
3. Limas *T.ABCDE* mempunyai 6 sisi, yaitu:



ABCDE sebagai **alas** dan **sisi tegak** *ABT, BCT, CDT, DET, AET*.

Limas *T.ABCDE* mempunyai 6 **titik sudut**, yaitu *T* sebagai **puncak** dan titik-titik *A, B, C,D,* dan *E.*

Limas *T.ABCDE* mempunyai 10 rusuk, yaitu *AB, BC, CD, DE, dan AE* rusuk-rusuk yang terletak pada bidang alas dan *TA, TB, TC, TD,* dan *TE* yang merupakan rusuk tegak.

4. 1284 mm^2.
5. 864.
6. 75 cm^2.

7. Tinggi setiap segitiga $3\sqrt{3}$ cm. Luas setiap segitiga $9\sqrt{3}$ cm^2.
   Jadi luas bidang empat $36\sqrt{3}$ cm^2.

8. 1.056 cm^2.
9. 4π m^2.
10. 1384,74 cm^2.
11. 2, 9 m.
12. 1.404 cm^3.
13. r_b = 14 mm = 1,4 cm, r_k = 10 mm = 1 cm, h = 3,5 m = 350 cm.
    V_b = 2156 cm^3, V_k = 1100 cm^3, V_{pipa} = 1056 cm^3
14. Volume air yang dapat dialirkan per detik = $\pi r^2 h$
    $= (\frac{22}{7} x\ 2{,}8\ x\ 2{,}8\ x\ 300)\ cm^3 = 7.392\ cm^3$.

    Volume air yang dapat ditampung per menit adalah

    $(7.392 \times 60)\ cm^3 = 443.520\ cm^3$

    = 443,5 liter (dibulatkan sampai 1 angka desimal)

15. 1.056 cm^3. Luas permukaannya
16. a) Tidak
    b) bukan.
    c) < *DFH*

17. Proyeksi suatu garis pada suatu bidang berupa titik jika garis tersebut tegak lurus pada bidang dan berupa garis jika garis tersebut tidak tegak lurus bidang.

18. Ya, karena masing-masing bidang memuat dua garis berpotongan yang sepasang-sepasang saling sejajar.
19. $\frac{10}{3}\sqrt{3}$
20. $\frac{10}{2}\sqrt{6}$

BAB III

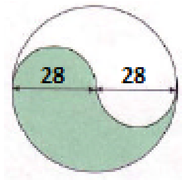
PENUTUP

Setelah menyelesaikan modul ini, peserta diklat berhak untuk mengikuti tes untuk menguji kompetensi yang telah dipelajari. Apabila peserta diklat dinyatakan memenuhi syarat kelulusan dari hasil evaluasi dalam modul ini, maka peserta berhak untuk melanjutkan ke topik/modul berikutnya.

Mintalah pada widyaiswara untuk uji kompetensi dengan sistem penilaian yang dilakukan langsung oleh pihak institusi atau asosiasi yang berkompeten apabila peserta telah menyelesaikan seluruh evaluasi dari setiap modul, maka hasil yang berupa nilai dari widyaiswara atau berupa portofolio dapat dijadikan bahan verifikasi oleh pihak institusi atau asosiasi profesi. Selanjutnya hasil tersebut dapat dijadikan sebagai penentu standar pemenuhan kompetensi dan bila memenuhi syarat peserta berhak mendapatkan sertifikat kompetensi yang dikeluarkan oleh institusi atau asosiasi profesi.

UJI KOMPETENSI

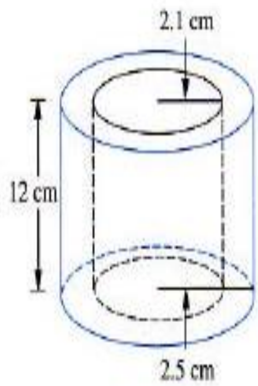
1. Sebuah lukisan pada dinding kaca sebuah rumah desainnya seperti gambar di samping. Keliling bangun yang berbayang-bayang pada gambar tersebut adalah....



   A. 174
   B. 175
   C. 176
   D. 177

2. Di sebuah wahana permainan Komedi Putar yang diberi nama Kuda Pusing Carousel tiga orang anak yaitu Andi (A), Budi (B), dan Chandra (C) berada pada koordinat yang berturut turut adalah A(2,2), B (4,5), dan C (4,2) dirotasikan sejauh 90^0 dengan arah berlawanan dengan arah jarum jam dan pusat rotasi titik O(0,0). Maka koordinat bayangannya adalah...
   A. A'(-2,2), B'(-5,4), dan C' (-2,4)
   B. A'(2,-2), B'(5,-4), dan C' (2,-4)
   C. A'(-2,-2), B'(-5-,4), dan C' (-2,-4)
   D. A'(2,2), B'(5,4), dan C' (2,4)

3. Gambar di samping menunjukkan potongan sebuah pipa logam. Jari-jari bagian dalam pipa adalah 2,1 cm, jari-jari bagian luar pipa adalah 2,5 cm dan panjang pipa 12 cm. Maka volume logam yang digunakan untuk membuat pipa adalah...cm^3



   A. 69,3
   B. 69,4
   C. 69,5
   D. 69,6

4. Sebuah bangunan berbentuk Kubus ABCD.EFGH dengan panjang rusuk 12 cm. Jarak antara rusuk AE dan diagonal sisi DF adalah... cm
   A. 6
   B. $6\sqrt{2}$

C. $6\sqrt{3}$

D. 12

5. Sebuah kebun berbentuk segitiga ABC dengan koordinat titik A(2,0), B(0,-5) dan C(-3,1). Koordinat bayangan segitiga ABC tersebut bila dicerminkan terhadap sumbu x adalah ....

A. A' (2,0) B' (0,5) C'(-3,-1)

B. A' (0,2) B' (5,0) C'(-1,-3)

C. A' (0,-2) B' (-5,0) C'(-1,-3)

D. A' (-2,0) B' (0,5) C'(3,-1)

6. Sebuah tangki berbentuk balok dengan panjang 60 cm dan lebar 40 cm berisi air dengan ketinggian 30 cm. Dalam tangki tersebut dimasukkan potongan es berbentuk balok dengan ukuran 20 cm, 15 cm, dan 12 cm. Kedalaman air setelah es mencair, anggap volumenya menyusut $\frac{1}{10}$ adalah...cm

A. 31,35

B. 31,30

C. 31,25

D. 31.20

7. Ada 500 kaleng berbentuk silinder tanpa tutup atas. Masing-masing dengan diameter 8 cm dan tinggi 14 cm. Kaleng-kaleng ini dibuat darilempengan seng. Bagian luar kaleng-kaleng ini dicat. luas seluruh bidang yang di cat adalah ...m^2

A. 20,096

B. 20,095

C. 20,094

D. 20,093

8. Berapa banyak kotak korek api yang berukuran 80 mm, 75 mm, dan 18 mm yang dapat dimasukkan ke dalam sebuah kotak yang ukuran bagian dalamnya 72 cm, 60 cm, dan 45 cm?

A. 1500

B. 1600

C. 1700

D. 1800

9. ABCDEFGH adalah segidelapan beraturan dengan pusat O. Tentukan bayangan Δ AOB jika dirotasikan dengan pusat O dan sudut rotasi: 180^0.
   A. Δ EOF
   B. Δ EFO
   C. Δ FEO
   D. Δ EDF
10. Suatu segiempat bertitik sudut (0, 0), (2, 1), (3, 2), dan (3, 5). Tentukan bayangan segiempat tersebut terhadap geseran sejauh 5 pada arah positif sumbu x dan sejauh 7 pada arah negatif sumbu y.
    A. (5, -7), (7, -6), (8, -5), (8, -2).
    B. (5, 7), (7, 6), (8, 5), (8, 2).
    C. (-5, -7), (-7, -6), (-8, -5), (-8, -2).
    D. (-5, 7), (-7, 6), (-8, 5), (-8, 2).

DAFTAR PUSTAKA

Amin, S.M. (2004). Geometri Dimensi Dua. Bagian Proyek Pengembangan Kurikulum. Depdiknas; Direktorat PMK Dirjen Dikdasmen

Amin, S.M. (2004). *Geometri Dimensi Tiga.* Bagian Proyek Pengembangan Kurikulum.Depdiknas; Direktorat PMK Dirjen Dikdasmen

Iswadji, Djoko. Dkk. 1999. Geometri ruang. Universitas Terbuka.

Lee Peng Yee, Fan Liang Huo, Teh Keng Seng, Looi Chin Keong. 2002. *New SyllabusMathematics 2*. Singapore: Shinglee Publishers PTE LTD.

------ 2001. *New Syllabus Mathematics 1*. Singapore: Shinglee Publishers PTE LTD.

Lee Peng Yee, Teh Keng Seng, Looi Chin Keong. 1997. *New Syllabus D Mathematics 4*.Singapore: Shinglee Publishers PTE LTD.

------ 1996. *New Syllabus D Mathematics 2*. Singapore: Shinglee Publishers PTE LTD.

Suwaji, U.T. dan Suharjana, A. (2015) *Geometri dan Pengukuran.* Bahan Belajar Diklat Pasca UKG. PPPPTK Matematika: Yogyakarta

Pajar Sidik, Muhamad. "*Belajar Persamaan Dua Garis Saling Sejajar dan Dua Garis Saling Tegak Lurus*."

http://matematikaakuntansi.blogspot.co.id/2015/10/belajar-persamaan-dua-garis-saling.html (Diakses tanggal 06 Februari 2017)

GLOSARIUM

ISTILAH	KETERANGAN
Dilatasi	Dilatasi merupakan transformasi yang memerlukan pusat dilatasi dan faktor dilatasi.
Keliling	Keliling suatu bangun datar yang tertutup merupakanjumlah panjang sisi-sisinya atau jarak yang andatempuh, bila anda mengitari bangun tersebut.
Luas	Luas suatu bangun datar adalah banyaknya satuanluas yang digunakan untuk menutup permukaanbangun tersebut.
Radian	1 radian = besar sudut pusat suatu lingkaran yangmenghadap busur dengan panjang sama denganjari-jari lingkaran. **1 radian = 57^0 17' 45"**
Refleksi	Refleksi merupakan suatu jenis transformasi yangmemerlukan sumbu refleksi.
Rotasi	Rotasi merupakan suatu transformasi yangmemerlukan pusat rotasi dan jarak rotasi. Jarakrotasi biasa disebut sudut putar.
Translasi	Translasi merupakan suatu transformasi yangmemerlukan besar dan arah translasi.
Diagonal bidang	Garis penghubung dua titik sudut berhadapan yang sebidang.
Diagonal ruang	Garis penghubung dua titik sudut berhadapan yang tidak sebidang.
Jaring-jaring	Jaring-jaring suatu bangun ruang terjadi bila sisi-sisinya direbahkan sehingga terletak sebidang dengan alas bangun ruang tersebut.
Luas	Jumlah luas sisi-sisinya.
Sisi	Bidang yang menyelimuti bangun ruang.
Rusuk	Perpotongan sisi bangun ruang.
Titik sudut	Perpotongan rusuk bangun ruang.
Volume	Banyak satuan volume dalam bangun ruang.

MODUL

PENGEMBANGAN KEPROFESIAN BERKELANJUTAN

C

Kelompok Kompetensi

MATEMATIKA TEKNIK

SEKOLAH MENENGAH KEJURUAN (SMK)

EDISI REVISI 2018

Terintegrasi Penguatan Pendidikan Karakter dan Pengembangan Soal Keterampilan Berpikir Aras Tinggi (HOTS)

Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan
Direktorat Jenderal Guru dan Tenaga Kependidikan
2018

Jalan Jenderal Sudirman, Gedung D Lantai 12, Senayan, Jakarta 10270 Telefon / Fax: (021)57974108

http://gtk.kemdikbud.go.id/