J

KELOMPOK KOMPETENSI

MODUL PENGEMBANGAN KEPROFESIAN BERKELANJUTAN GURU MATEMATIKA SMA

TERINTEGRASI PENGUATAN PENDIDIKAN KARAKTER

PEDAGOGIK

KRITERIA KETUNTASAN MINIMAL DAN REMEDIAL

PROFESIONAL

LOGIKA, SEJARAH DAN FILSAFAT MATEMATIKA

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
DIREKTORAT JENDERAL GURU DAN TENAGA KEPENDIDIKAN
2017

Kata Sambutan

Peran guru profesional dalam proses pembelajaran sangat penting sebagai kunci keberhasilan belajar siswa. Guru profesional adalah guru yang kompeten membangun proses pembelajaran yang baik sehingga dapat menghasilkan pendidikan yang berkualitas dan berkarakter prima. Hal tersebut menjadikan guru sebagai komponen utama yang menjadi fokus perhatian pemerintah pusat maupun pemerintah daerah dalam peningkatan mutu pendidikan terutama menyangkut kompetensi guru.

Pengembangan profesionalitas guru melalui Program Pengembangan Keprofesian Berkelanjutan merupakan upaya Kementrian Pendidikan dan Kebudayaan melalui Direktorat Jenderal Guru dan Tenaga Kependikan dalam upaya peningkatan kompetensi guru. Sejalan dengan hal tersebut, pemetaan kompetensi guru telah dilakukan melalui Uji Kompetensi Guru (UKG) untuk kompetensi pedagogik dan profesional pada akhir tahun 2015. Hasil UKG menunjukkan peta profil yang menunjukan kekuatan dan kelemahan kompetensi guru dalam penguasaan pengetahuan pedagogik dan profesional. Peta kompetensi guru tersebut dikelompokkan menjadi 10 (sepuluh) kelompok kompetensi. Tindak lanjut pelaksanaan UKG diwujudkan dalam bentuk pelatihan guru paska UKG pada tahun 2016 dan akan dilanjutkan pada tahun 2017 ini dengan Program Pengembangan Keprofesian Berkelanjutan bagi Guru. Tujuannya adalah untuk meningkatkan kompetensi guru sebagai agen perubahan dan sumber belajar utama bagi peserta didik. Program Pengembangan Keprofesian Berkelanjutan bagi Guru dilaksanakan melalui pelatihan yang langsung menyentuh guru serta selaras dengan kebutuhan guru dalam meningkatkan kompetensinya.

Pusat Pengembangan dan Pemberdayaan Pendidik dan Tenaga Kependidikan (PPPPTK), Lembaga Pengembangan dan Pemberdayaan Pendidik dan Tenaga Kependidikan Kelautan Perikanan Teknologi Informasi dan Komunikasi (LP3TK KPTK) dan Lembaga Pengembangan dan Pemberdayaan Kepala Sekolah (LP2KS) merupakan Unit Pelaksanana Teknis di lingkungan Direktorat Jenderal Guru dan Tenaga Kependidikan yang bertanggung jawab dalam mengembangkan perangkat dan melaksanakan peningkatan kompetensi guru sesuai bidangnya. Adapun perangkat pembelajaran yang dikembangkan tersebut adalah modul Program Pengembangan Keprofesian Berkelanjutan bagi semua mata pelajaran dan kelompok kompetensi. Dengan modul ini diharapkan program Pengembangan Keprofesian Berkelanjutan memberikan sumbangan yang sangat besar dalam peningkatan kualitas kompetensi guru. Mari kita sukseskan Program Pengembangan Keprofesian Berkelanjutan ini untuk mewujudkan Guru Mulia Karena Karya.

Jakarta, April 2017
Direktur Jenderal Guru dan Tenaga Kependidikan,

Sumarna Surapranata, Ph.D.
NIP 195908011985031001

J

KELOMPOK KOMPETENSI

MODUL PENGEMBANGAN KEPROFESIAN BERKELANJUTAN GURU MATEMATIKA SMA

PEDAGOGIK

KRITERIA KETUNTASAN MINIMAL DAN REMEDIAL

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
DIREKTORAT JENDERAL GURU DAN TENAGA KEPENDIDIKAN
2017

MODUL PENGEMBANGAN KEPROFESIAN BERKELANJUTAN
GURU MATEMATIKA SMA

TERINTEGRASI PENGUATAN PENDIDIKAN KARAKTER

KELOMPOK KOMPETENSI J

PEDAGOGIK

KRITERIA KETUNTASAN MINIMAL DAN REMEDIAL

DIREKTORAT JENDERAL GURU DAN TENAGA KEPENDIDIKAN
KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
2017

Penulis:
Untung Trisna S., email: untungtrisna@gmail.com

Penelaah:
1. Angga Kritiyajati, S.Si, email:kristiyajati@gmail.com
2. Jumadi, email: jumadirahman0307@yahoo.com

Ilustrator:
1. Muhammad Fauzi
2. Suhananto

Kata Pengantar

Peningkatan kualitas pendidikan saat ini menjadi prioritas, baik oleh pemerintah pusat maupun daerah. Salah satu komponen yang menjadi fokus perhatian adalah peningkatan kompetensi guru. Peran guru dalam pembelajaran di kelas merupakan kunci keberhasilan untuk mendukung keberhasilan belajar siswa. Guru yang profesional dituntut mampu membangun proses pembelajaran yang baik sehingga dapat menghasilkan *output* dan *outcome* pendidikan yang berkualitas.

Dalam rangka memetakan kompetensi guru, telah dilaksanakan Uji Kompetensi Guru (UKG) Tahun 2015. UKG tersebut dilaksanakan bagi semua guru, baik yang sudah bersertifikat maupun belum bersertifikat untuk memperoleh gambaran objektif kompetensi guru, baik profesional maupun pedagogik. Hasil UKG kemudian ditindaklanjuti melalui program peningkatan kompetensi yang untuk tahun 2017 dinamakan Program Pengembangan Keprofesian Berkelanjutan bagi Guru, sehingga diharapkan kompetensi guru yang masih belum optimal dapat ditingkatkan.

PPPPTK Matematika sebagai Unit Pelaksana Teknis Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan di bawah pembinaan Direktorat Jenderal Guru dan Tenaga Kependidikan mendapat tugas untuk menyusun modul guna mendukung pelaksanaan Program Pengembangan Keprofesian Berkelanjutan bagi Guru. Modul ini diharapkan dapat menjadi sumber belajar bagi guru dalam meningkatkan kompetensinya sehingga mampu mengambil tanggung jawab profesi dengan sebaik-baiknya.

Yogyakarta, April 2017

Kepala PPPPTK Matematika,

Dr. Dra. Daswatia Astuty, M.Pd.

NIP. 196002241985032001

Daftar Isi

Pendahuluan

A. Latar Belakang

Penyelenggaraan pendidikan sebagaimana yang diamanatkan dalam Undang-undang Nomor 20 Tahun 2003 tentang Sistem Pendidikan Nasional diharapkan dapat mewujudkan proses berkembangnya kualitas pribadi peserta didik sebagai generasi penerus bangsa di masa depan, yang diyakini akan menjadi faktor determinan bagi tumbuh kembangnya bangsa dan negara Indonesia sepanjang zaman.

Standar Proses Pendidikan Dasar dan Menengah yang tertuang dalam Permendikbud nomor 22 tahun 2016 menyatakan bahwa proses pembelajaran pada satuan pendidikan diselenggarakan secara interaktif, inspiratif, menyenangkan, menantang, memotivasi peserta didik untuk berpartisipasi aktif, serta memberikan ruang yang cukup bagi prakarsa, kreativitas, dan kemandirian sesuai dengan bakat, minat, dan perkembangan fisik serta psikologis peserta didik (Kemdikbud, 2013-b).

Dengan demikian kompetensi guru merupakan faktor yang sangat penting bagi keberhasilan upaya meningkatkan mutu pendidikan khususnya yang terkait dengan pembelajaran. Guru harus menjadi pendidik profesional yang memiliki kompetensi sebagai agen pembelajaran. Untuk standar kompetensi guru itu sendiri meliputi kompetensi pedagogi, kepribadian, profesional dan sosial. Standar ini telah ditetapkan dalam Peraturan Pemerintah nomor 19 Tahun 2005 tentang Standar Nasional Pendidikan, yang direvisi menjadi Peraturan Pemerintah nomor 32 tahun 2013. Secara lebih teknis kompetensi ini juga telah diuraikan dalam Peraturan Menteri Pendidikan Nasional nomor 16 tahun 2007 tentang Standar Kualifikasi Akademik dan Kompetensi Guru.

- Modul ini merupakan bagian dari upaya peningkatan kompetensi guru, khususnya untuk kompetensi pedagogi dan kompetensi profesional. Modul ini digunakan sebagai bahan pembelajaran untuk guru-guru matematika SMA yang mengikuti Program Pengembangan Keprofesian Berkelanjutan, khususnya terkait dengan kompetensi pengembangan kurikulum matematika.

B. Tujuan

Modul ini disusun dalam rangka memfasilitasi guru-guru matematika SMA pada Program Peningkatan Keprofesian Berkelanjutan agar dapat meningkatkan kompetensinya khususnya dalam menentukan kriteria Ketuntasan minimal (KKM), dan pembelajaran remedial.

C. Peta Kompetensi

Kompetensi yang akan ditingkatkan setelah mempelajari modul ini terkait dengan kompetensi pedagogik yaitu:

Standar Kompetensi Guru		Indikator Pencapaian Kompetensi (IPK) / Indikator Esensial
Kompetensi Inti Guru	Kompetensi Guru Mata Pelajaran	
Memanfaatkan hasil penilaian dan evaluasi untuk kepentingan pembelajaran.	Menggunakan informasi hasil penilaian dan evaluasi untuk menentukan ketuntasan belajar	Menentukan kriteria ketuntasan belajar pada suatu kompetensi tertentu
	Menggunakan informasi hasil penilaian dan evaluasi untuk merancang program remedial dan pengayaan	Menjelaskan pengertian dan tujuan pembelajaran remedial. Menjelaskan ciri dan prosedur pembelajaran remedial. Menentukan program remedial yang sesuai berdasarkan hasil penilaian dan evaluasi.

D. Ruang Lingkup

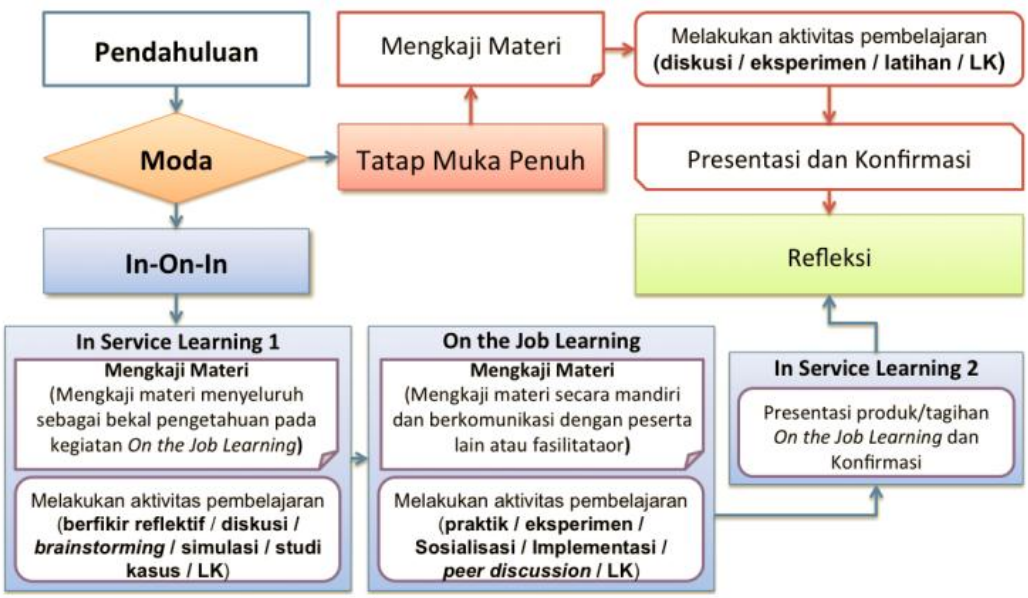
Materi yang termuat pada modul ini sesuai dengan kebutuhan peningkatan kompetensi guru khususnya yang terkait dengan pengembangan kurikulum matematika dengan fokus pada penentuan nilai kriteria kompetensi minimal dan pembelajaran remedial. Secara garis besar ruang lingkup materi yang diuraikan dalam setiap kegiatan pembelajaran adalah sebagai berikut.

Kegiatan Pembelajaran 1 meliputi Kriteria Ketuntasan Minimal (KKM), menguraikan tentang: (1) ketuntasan belajar, (2) menentukan KKM pada indikator pencapaian kompetisi, kompetensi dasar, dan mata pelajaran. Kegiatan pembelajaran 2 berisi tentang pembelajaran remedial, membahas tentang (1) pembelajaran remedial dan tujuannya, (2) penyebab kesulitan belajar, dan (3) menentukan kegiatan remedial.

Kegiatan pembelajaran 2 meliputi materi tentang 1) pengertian pembelajaran remedial, 2) ciri-ciri dan tujuan pembelajaran remedial, 3) menemukan penyebab kesulitan, dan 4) menentukan kegiatan remedial.

E. Saran Cara Penggunaan Modul

Secara umum, modul ini dapat digunakan dalam kegiatan pembelajaran guru, baik untuk moda tatap muka penuh maupun tatap muka In-On-In. Garis besar alur model pembelajaran dapat dilihat pada diagram di bawah.

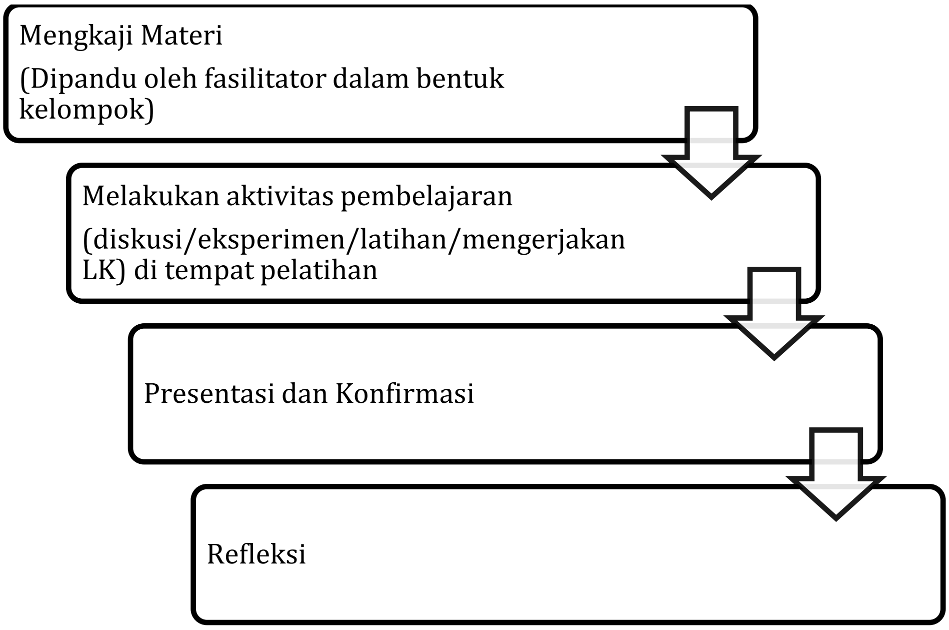


1. Deskripsi Kegiatan Diklat Tatap Muka Penuh

Kegiatan pembelajaran tatap muka penuh merupakan kegiatan fasilitasi peningkatan kompetensi guru melalui model tatap muka penuh yang dilaksanakan oleh unit pelaksana teknis di lingkungan direktorat jenderal Guru dan Tenaga

Kependidikan maupun lembaga diklat lainnya. Kegiatan tatap muka penuh ini dilaksanakan secara terstruktur pada suatu kegiatan yang dipandu oleh fasilitator.

Tatap muka penuh dilaksanakan menggunakan alur pembelajaran sebagai berikut:



Rincian kegiatan pembelajaran tatap muka penuh adalah sebagai berikut.

a. Pendahuluan

Pada kegiatan pendahuluan, fasilitator memberi kesepatan peserta diklat untuk mencermati:

- Latar belakang yang memuat gambaran materi
- Tujuan kegiatan pembelajaran untuk setiap materi
- Kompetensi yang akan dicapai
- Ruang lingkup materi
- Langkah-langkah penggunaan modul.

b. Mengkaji Materi

Pada kegiatan mengkaji materi modul, fasilitator memberi kesempatan kepada guru sebagai peserta untuk mempelajari materi yang diuraikan secara singkat sesuai dengan indikator pencapaian hasil belajar. Guru sebagai peserta dapat mempelajari materi secara individual maupun berkelompok dan dapat mengkonfirmasi permasalahan kepada fasilitator.

c. Melakukan aktivitas pembelajaran

Pada bagian ini, peserta melakukan aktivitas pembelajaran sesuai dengan rambu-rambu atau instruksi yang tertera pada modul dan dipandu oleh fasilitator. Kegiatan pembelajaran pada aktivitas pembelajaran ini berbentuk interaksi langsung di kelas pelatihan sesama peserta pelatihan dan fasilitator.

Pada saat mengikuti aktivitas pembelajaran, peserta juga aktif menggali informasi dari berbagai sumber, mengumpulkan dan mengolah data sehingga peserta dapat mengambil kesimpjulan dari kegiatan pembelajaran yang berlangsung.

d. Presentasi dan Konfirmasi

Pada kegiatan ini, peserta mempresentasikan hasil kegiatan. Fasilitator melakukan konfirmasi terhadap paparan dan hasil yang telah dicapai oleh peserta.

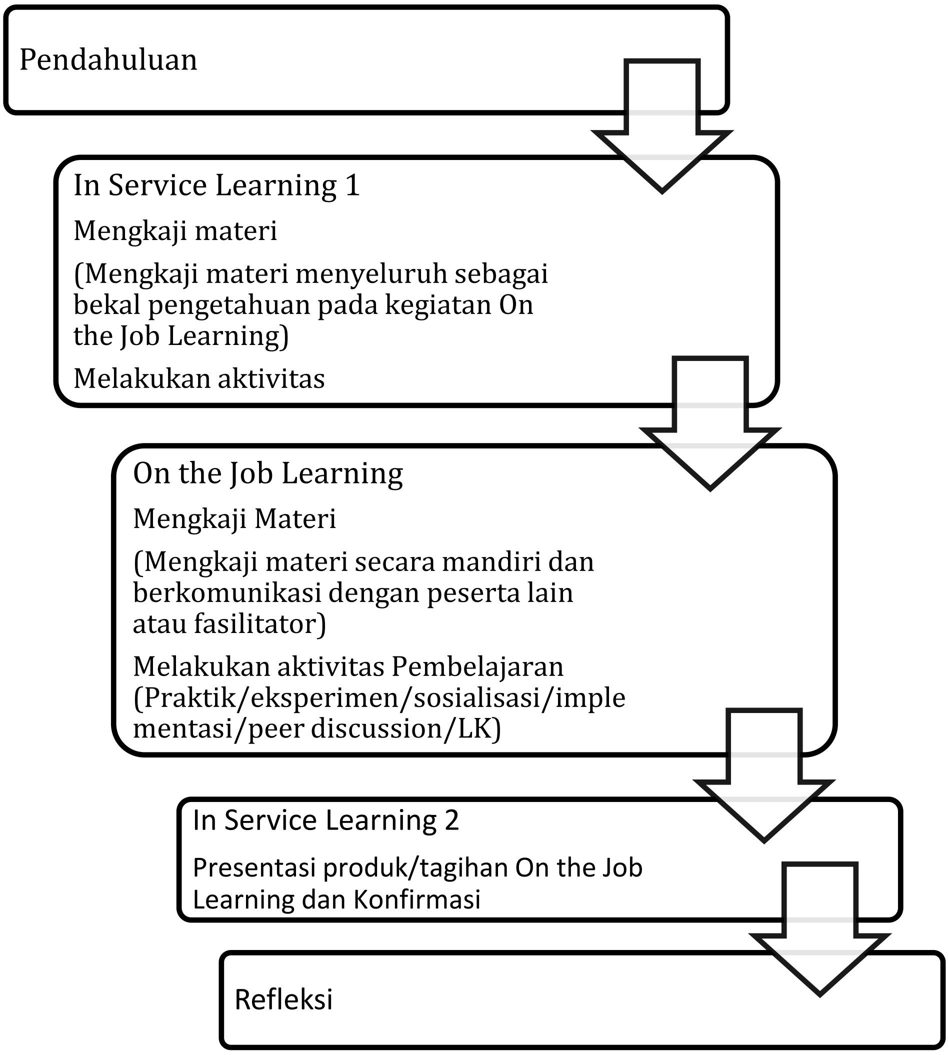
e. Refleksi

Pada bagian ini peserta dan fasilitator me-*review* atau melakukan refleksi materi berdasarkan seluruh kegiatan pembelajaran, kemudian didampingi oleh panitia menginformasikan tes akhir yang akan dilakukan oleh seluruh peserta yang dinyatakan layak tes akhir.

2. Deskripsi kegiatan diklat tatap muka In-On-In

Kegiatan diklat tatap muka dengan model In-On-In adalah kegiatan fasilitasi peningkatan kompetensi guru yang menggunakan tiga kegiatan utama yaitu *In Service Learning* 1 (In-1), *On the Job Learning* (On), dan *In Service Learning* 2 (In-2).

Garis besar alur kegiatan pembelajaran tatap muka In-On-In dapat dilihat pada diagram berikut.



Penjelasan lebih lengkap tentang alur di atas adalah sebagai berikut,

a. Pendahuluan

Kegiatan pendahuluan disampaikan pada saat In-1. Fasilitator memberi kesempatan pada peserta diklat untuk mencermati:

- latar belakang yang memuat gambaran materi,
- tujuan kegiatan pembelajaran setiap materi,
- kompetensi atau indikator yang akan dicapai melalui modul,
- ruang lingkup materi kegiatan pembelajaran,
- langkah-langkah penggunaan modul.

b. In Service Learning 1 (In-1)

- Mengkaji Materi

Pada kegiatan mengkaji materi modul ini, fasilitator memberi kesempatan kepada guru sebagai peserta untuk mempelajari materi yang diuraikan secara singkat sesuai dengan indikator pencapaian hasil belajar. Guru sebagai peserta dapat mempelajari materi secara individual maupun berkelompok dan dapat mengkonfirmasi permasalahan kepada fasilitator.

- Melakukan aktivitas pembelajaran

Pada kegiatan ini peserta melakukan kegiatan pembelajaran sesuai dengan rambu-rambu atau instruksi yang tertera pada modul dan dipandu oleh fasilitator. Kegiatan pembelajaran pada aktivitas pembelajaran berbentuk berinteraksi di kelas pelatihan, baik itu dengan menggunakan metode berfikir reflektif, diskusi, *brainstorming*, simulasi, maupun studi kasus yang kesemuanya dapat melalui Lembar Kerja yang telah disusun sesuai dengan kegiatan pada In-1.

Pada aktivitas pembelajaran materi ini peserta secara aktif menggali informasi, mengumpulkan dan mempersiapkan rencana pembelajaran pada *on the job learning*.

c. On the Job Learning (On)

- Mengkaji Materi

Pada tahap ini, guru mempelajari materi yang telah diuraikan pada In-1. Guru sebagai peserta membuka dan mempelajari kembali materi sebagai bahan dalam mengerjakan tugas-tugas yang ditagihkan.

- Melakukan aktivitas Pembelajaran

Pada kegiatan ini peserta melakukan kegiatan pembelajaran di sekolah maupun di kelompok kerja berbasis pada rencana yang telah disusun pada IN1 dan sesuai dengan rambu-rambu atau instruksi yang tertera pada modul. Kegiatan pembelajaran pada aktivitas pembelajaran ini akan menggunakan pendekatan/metode praktik, eksperimen, sosialisasi, implementasi, *peer discussion* yang secara langsung di dilakukan di sekolah maupun kelompok kerja melalui tagihan berupa Lembar Kerja yang telah disusun sesuai dengan kegiatan pada ON.

Selama aktivitas pembelajaran On berlangsung, peserta secara aktif menggali informasi, mengumpulkan dan mengolah data dengan melalukan aktivitas yang telah ditentukan dan menyelesaikan tagihan pada on the job learning.

d. In Service Learning 2 (In-2)

Pada tahap ini, peserta memaparkan produk-produk tagihan On yang akan dikonfirmasi bersama oleh teman sejawat dan fasilitator.

e. Refleksi

Peserta bersama fasilitator me-review atau melakukan refleksi materi berdasarkan pengalaman selama mengikuti kegiatan pembelajaran. Fasilitator didampingi panitia menginformasikan tes akhir yang akan dilakukan oleh seluruh peserta yang dinyatakan layak mengikuti tes akhir.

3. Lembar Kerja

Modul pengembangan keprofesian berkelanjutan kelompok kompetensi J terdiri dari beberapa kegiatan pembelajaran yang di dalamnya terdapat aktivitas pembelajaran sebagai sarana untuk pendalaman dan penguatan materi. Untuk itu, pada modul ini disediakan lembar kerja sebagai berikut:

Daftar Lembar Kerja Modul

No.	Kode LK	Nama LK	Keterangan
1	LK 1.1	Menentukan KKM Kompetensi Dasar	TM, In-1
2	LK 1.2	Menentukan KKM Mapel	On
3	LK 2.1	Analisis Kesalahan Pekerjaan Siswa	TM, In-1
4	LK 2.2	Analisis Kesalahan Pekerjaan Siswa (lanjutan) dan rencana pembelajaran remedial	On

Kegiatan Pembelajaran 1
Kriteria Ketuntasan Minimal

A. Tujuan

Melalui kegiatan pembelajaran ini, diharapkan pembaca dapat meningkatkan wawasan dan kompetensi khususnya dalam memahami tentang ketuntasan belajar, dan penentuan Kriteria Ketuntasan Minimal (KKM).

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

Setelah mengikuti pembelajaran, peserta diharapkan dapat:

1. Menjelaskan prinsip ketuntasan belajar.
2. Menentukan kriteria ketuntasan minimal indikator pencapaian kompetensi.
3. Menentukan kriteria ketuntasan minimal kompetensi dasar.
4. Menentukan kriteria ketuntasan minimal mata pelajaran.

C. Uraian Materi

Guru sebagai profesi memiliki peran penting dalam peningkatan mutu. Dalam Permendikbud nomor 22 tahun 2016 tentang Standar Proses, proses pembelajaran diharapkan berlangsung secara interaktif, inspiratif, menyenangkan, menantang, efisien, memotivasi peserta didik untuk berpartisipasi aktif, serta memberikan ruang yang cukup bagi prakarsa, kreativitas, dan kemandirian sesuai dengan bakat, minat, dan perkembangan fisik serta psikologis peserta didik. Selanjutnya untuk mengetahui seberapa besar keberhasilan peserta didik menguasai kompetensi diperlukan suatu penilaian.

Pada kurikulum 2013, peserta didik harus mencapai Standar Kompetensi Lulusan (SKL) yang meliputi ranah sikap, pengetahuan, dan ketrampilan. Pencapaian kompetensi ini harus benar-benar terukur. Kunandar (2013) menyatakan bahwa kriteria kompeten meliputi (1) mampu memahami konsep yang mendasari standar kompetensi yang harus dikuasai atau dicapai, (2) mampu melakukan pekerjaan sesuai dengan tuntutan standar kompetensi yang harus dicapai dengan cara dan prosedur yang benar serta hasil yang baik, dan (3) mampu mengaplikasikan kemampuannya dalam kehidupan sehari-hari (di dalam maupun di luar sekolah).

Peserta didik yang memenuhi kriteria di atas akan benar-benar memiliki kompetensi yang nyata (*real competence*) dan bersifat relatif permanen.

Ketuntasan Belajar dan Kriteria Ketuntasan Minimal

Pembelajaran tuntas merupakan pendekatan dalam pembelajaran yang mensyaratkan peserta didik menguasai secara tuntas kompetensi dasar mata pelajaran. Tujuan utama dari proses pembelajaran dengan pendekatan belajar tuntas adalah mempertinggi rata-rata prestasi seluruh peserta didik. Dengan demikian, dalam proses pembelajaran diperlukan bantuan, serta perhatian khusus bagi peserta didik yang lambatpun dapat menguasai standar kompetensi yang ditentukan.

Ketuntasan belajar merupakan tingkat minimal pencapaian kompetensi sikap, pengetahuan, dan ketrampilan yang meliputi ketuntasan penguasaan substansi dan ketuntasan belajar dalam konteks kurun waktu belajar. Selanjutnya ketuntasan penguasaan substansi merupakan ketuntasan belajar peserta didik untuk setiap kompetensi dasar (KD) yang ditetapkan.

Pada kurikulum KTSP (2006), kriteria ketuntasan minimal (KKM) adalah kriteria ketuntasan belajar (KKB) yang ditentukan oleh satuan pendidikan. KKM pada akhir jenjang satuan pendidikan atau kelompok mata pelajaran selain ilmu pengetahuan dan teknologi merupakan batas ambang kompetensi (Permendiknas no. 20/2007 tentang Standar Penilaian Pendidikan).

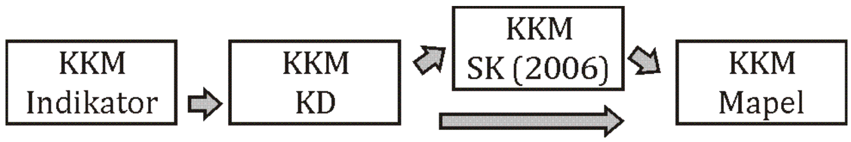
Sementara itu pada Permendikbud no. 23 tahun 2016 tentang Standar Penilaian Pendidikan dinyatakan bahwa Kriteria Ketuntasan Minimal adalah kriteria ketuntasan belajar yang ditentukan oleh Satuan Pendidikan yang mengacu pada standar kompetensi lulusan dengan mempertimbangkan karakteristik peserta didik, karakteristik mata pelajaran, dan kondisi satuan pendidikan.

Dalam Panduan Penilaian Oleh Pendidik dan Satuan Pendidikan untuk SMA yang dikeluarkan oleh Direktorat Pendidikan SMA tahun 2016 dinyatakan bahwa untuk mengetahui ketercapaian KD (Kompetensi Dasar), guru harus merumuskan sejumlah indikator sebagai acuan penilaian dan sekolah juga harus menentukan ketuntasan belajar minimal atau kriteria ketuntasan minimal (KKM) untuk memutuskan seorang peserta didik sudah tuntas atau belum.

Bagi pendidik, KKM dapat dijadikan acuan untuk menindaklanjuti hasil penilaian peserta didik untuk menentukan respon dalam bentuk remedial bagi yang belum mencapai atau layanan pengayaan bagi yang sudah melampaui KKM.

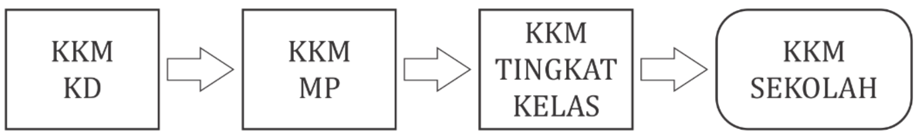
Rambu-rambu Penetapan KKM

1. KKM ditentukan oleh satuan pendidikan mengacu pada Standar Kompetensi Lulusan dengan mempertimbangkan karakteristik peserta didik, karakteristik mata pelajaran, dan kondisi satuan pendidikan.
2. Secara bertahap satuan pendidikan terus meningkatkan kriteria ketuntasan belajar dengan mempertimbangkan potensi dan karakteristik masing-masing satuan pendidikan sebagai bentuk peningkatan kualitas hasil belajar.
3. Alur penentuan KKM secara umum



   a) Penetapan nilai KKM diawali dengan melakukan analisis ketuntasan belajar minimal pada setiap indikator.
   b) KKM Kompetensi Dasar (KD) diperoleh dari rata-rata KKM semua indikator pada KD tersebut.
   c) KKM Mata Pelajaran diperoleh dari rata-rata KKM semua KD pada mata pelajaran tersebut.
   d) Pada kurikulum KTSP (2006) sebelum penetapan KKM Mata pelajaran, didahului dengan KKM Standar Kompetensi (SK).

   Alur penentuan KKM pada Pedoman Penilaian oleh Pendidik dan Satuan Pendidikan untuk Sekolah Menengah Atas tahun 2017 adalah sebagai berikut:



   Penjelasan:

   - KKM setiap KD ditetapkan menggunakan kriteria analisis dengan mempertimbangkan aspek karakteristik peserta didik (intake), karakteristik mata pelajaran (kompleksitas materi/kompetensi) serta guru dan kondisi satuan pendidikan (daya dukung);

- KKM mata pelajaran merupakan rata-rata dari semua KKM kompetensi dasar yang terdapat dalam satu mata pelajaran;
- KKM pada tingkatan kelas merupakan rata-rata dari semua KKM mata pelajaran pada setiap tingkatan kelas; dan
- KKM satuan pendidikan merupakan rata-rata dari semua KKM pada setiap tingkatan kelas X, XI, dan XII dalam satu semester atau satu tahun pembelajaran.

4. Teknik Penetapan KKM

Untuk menentukan KKM, perlu diperhatikan hal-hal sebagai berikut:

a) Karakteristik mata pelajaran. Karakteristik mata pelajaran dapat dilihat dari tingkat kesulitan atau kerumitan (kompleksitas) setiap indikator pencapaian atau KD yang harus dicapai siswa. Kompleksitas dinyatakan tinggi jika dalam penyampaiannya menuntut (1) pendidik yang memahami dengan benar kompetensi yang harus dicapai oleh peserta didik, (2) guru yang kreatif dan inovatif dalam melaksanakan pembelajaran, (3) waktu yang diperlukan cukup lama untuk memahami materi, (4) menuntut penalaran dan kecermatan yang tinggi bagi siswa untuk mencapai kompetensi. Dalam Panduan Penilaian SMA tahun 2016 dinyatakan bahwa Aspek karakteristik materi/kompetensi ditentukan dengan memperhatikan kompleksitas KD dengan mencermati kata kerja yang terdapat pada KD tersebut dan berdasarkan data empiris dari pengalaman guru dalam membelajarkan KD tersebut pada waktu sebelumnya. Semakin tinggi aspek kompleksitas materi/kompetensi, semakin menantang guru untuk meningkatkan kompetensinya.

b) Kondisi satuan pendidikan. Aspek guru dan daya dukung antara lain dengan memperhatikan ketersediaan guru, kesesuaian latar belakang pendidikan guru dengan mata pelajaran yang diampu, kompetensi guru (misal hasil Uji Kompetensi Guru), rasio jumlah peserta didik dalam satu kelas, sarana prasarana pembelajaran, dukungan dana, kebijakan sekolah, kepedulian *stakeholders* sekolah merupakan contoh dari unsur kondisi satuan pendidikan. Semakin tinggi aspek guru dan daya dukung, semakin tinggi pula nilai KKM-nya.

c) Karakteristik peserta didik (aspek intake). Kondisi sosial lingkungan mayoritas peserta didik, kemampuan peserta didik dari hasil seleksi PPDB, Nilai UN, Rapor kelas IX, atau psikotes bagi kelas X, dan tingkat pencapaian peserta didik pada semester atau kelas sebelumnya dapat dijadikan pertimbangan penentuan KKM dari unsur karakteristik peserta didik. Semakin tinggi aspek intake, semakin tinggi pula nilai KKM-nya.

Teknik penentuan KKM dapat dilakukan dengan barbagai cara. Di antaranya a) dengan teknik memberi poin pada setiap aspek yang akan ditetapkan, dan b) menggunakan rentang nilai pada setiap aspek. Berikut contoh kedua teknik penentuan KKM dengan kedua teknik tersebut.

Contoh 1. Teknik menentukan KKM dengan pemberian poin.

Teknik ini dilakukan dengan memberikan poin pada setiap aspek yang ditetapkan. Sebagai contoh, untuk kriteria karakteristik mata pelajaran (kompleksitas), kondisi satuan pendidikan, dan karakteristik siswa pemberian poin menurut tabel berikut.

	Karakteristik Mapel (Kompleksitas)	Kondisi Satuan Pendidikan (Daya Dukung)	Karakteristik Siswa (Intake)
Tinggi	1	3	3
Sedang	2	2	2
Rendah	3	1	1

Misal pada KD “Menentukan nilai kebenaran dari suatu pernyataan majemuk dan pernyataan berkuantor” dapat diturunkan 4 indikator, 1) menentukan nilai kebenaran suatu pernyataan berkuantor, 2) menentukan ingkaran suatu pernyataan berkuantor, 3) menentukan nilai kebenaran suatu pernyataan majemuk, dan 4) menentukan ingkaran suatu pernyataan majemuk.

Untuk indikator (1), kompleksitas rendah (skor 3), daya dukung sedang (skor 2), dan intake sedang (skor 2), maka

$$KKM\ indikator = \frac{3+2+2}{9} \times 100\% = 77{,}78\% \approx 78\% \text{ (dibulatkan)}$$

KD dan Indikator	Unsur Penetapan Kriteria			Nilai KKM (%)
	Kom-pleksitas	Daya Dukung	Intake	
KD: Menentukan nilai kebenaran dari suatu pernyataan majemuk dan pernyataan berkuantor				**70**
1) Menentukan nilai kebenaran suatu pernyataan berkuantor	Rendah (3)	Sedang (2)	Sedang (2)	78
2) Menentukan ingkaran suatu pernyataan berkuantor	Sedang (2)	Sedang (2)	Sedang (2)	67
3) Menentukan nilai kebenaran suatu pernyataan majemuk	Rendah (3)	Sedang (2)	Sedang (2)	78
4) Menentukan ingkaran suatu pernyataan majemuk	Tinggi (1)	Sedang (2)	Sedang (2)	56

Indikator keempat dipandang memiliki tingkat kesulitan yang tinggi, karena ingkaran suatu pernyataan majemuk melibatkan bentuk-bentuk yang relatif rumit seperti $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$, $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$, $\neg(p \rightarrow q) \equiv \neg p \vee q$.

Rata-rata KKM semua indikator menyatakan KKM KD, sehingga

$$KKM\ KD = \frac{78+67+78+56}{4} = 69{,}75 \approx 70$$

Contoh 2: teknik penentuan KKM dengan rentang nilai

Pada penentuan KKM denggan rentang nilai, seperti contoh berikut:

Karakteristik materi (Kompleksitas):

Tinggi, dengan rentang kurang dari 65
Sedang, dengan rentang 65 – 79
Rendah, dengan rentang 80 – 100

Kondisi satuan pendidikan (Guru dan Daya Dukung):

Tinggi, dengan rentang 80 – 100
Sedang, dengan rentang 65 – 79
Rendah, dengan rentang kurang dari 65

Karakteristik peserta didik (Intake peserta didik)

Tinggi, dengan renang 80 – 100
Sedang, dengan rentang 65 – 79
Rendah, dengan rentang kurang dari 65.

Perlu diperhatikan bahwa skala penilaian hanya sebagai contoh, dalam pelaksanaan di sekolah disepakati oleh guru mata pelajaran.

Contoh penentuan KKM dengan menggunakan rentang nilai.

Sekolah telah memiliki fasilitas lengkap seperti LCD proyektor, sehingga guru dapat melakukan visualisasi dinamis menggunakan aplikasi komputer tentang konsep dan aplikasi turunan, memiliki koleksi buku perpustakaan yang lengkap sehingga pada bagian daya dukung diberi skor tinggi.

Mayoritas siswa tinggal di lingkungan masyarakat yang terdidik, dan nilai yang tinggi pada semester sebelumnya, sehingga diberi skor 80.

KD dan Indikator	Unsur Penetapan Kriteria			Nilai KKM (%)
	Kom-pleksi-tas (Kar. Materi)	Daya Dukung (Kondisi Satuan Pendidikan)	Intake (Kar. Siswa)	
KD: Menggunakan turunan perta-ma fungsi untuk menentukan titik maksimum, titik minimum, dan selang kemonotonan fungsi, serta kemiringan garis singgung kurva, persamaan garis singgung, dan garis normal kurva berkaitan dengan masalah kontekstual				**80**
1) Menggunakan turunan untuk menentukan nilai maksimum fungsi	75	90	80	82
2) Menggunakan turunan untuk menentukan nilai minimum fungsi	75	90	80	82
3) Menggunakan turunan untuk menentukan selang kemonotonan fungsi	75	90	80	82
4) Menggunakan turunan untuk menentukan gradien garis singgung	75	90	80	82
5) Menentukan persamaan garis singgung	70	90	80	80
6) Menentukan persamaan garis normal suatu kurva	65	90	80	78
7) Menggunakan konsep turunan untuk menyelesaikan permasalahan kontekstual	55	90	80	75

Indikator 7 dipandang memiliki tingkat kesulitan yang tinggi karena siswa ditantang untuk sanggup mengubah kalimat-kalimat verbal menjadi kalimat matematika, menyelesaikan secara matematis, dan menerjemahkan hasil penyelesaian ke permasalahan kontekstual.

Proses penghitungan KKM tiap indikator dilakukan dengan mengambil rata-rata semua komponen. Pada indikator pertama, maka nilai KKM-nya adalah $\frac{75+90+80}{3} = 81,67 \approx 82$ (dibulatkan ke satuan terdekat). Dengan cara yang sama untuk indikator ke-2 sampai ke-7 beturut-turut diperoleh nilai KKM 82, 82, 82, 80, 78, 75. Dari rata-rata ketujuh KKM untuk indikator di atas, diperoleh nilai KKM KD sebesar 80,14, dibulatkan menjadi 80.

D. Aktivitas Pembelajaran

LK 1.1. Menentukan KKM Kompetensi Dasar.

Pilihlah salah satu KD Matematika SMA, kemudian

a. rumuskan indikator-indikator pencapaian kompetensi KD tersebut,

b. tentukan KKM untuk masing-masing indikator, berikan alasan poin/bobot masing-masing unsur sesuai kondisi satuan pendidikan Anda.

c. Tentukan KKM untuk KD tersebut.

2. Jelaskan prosedur penentuan KKM Mapel.

LK 1.2. Menentukan KKM Mata Pelajaran

Lanjutkan LK 1.1 dengan melengkapi untuk seluruh KD pada salah satu kelas yang Anda ampu, kemudian tentukan KKM Mapel untuk kelas tersebut.

a. rumuskan indikator-indikator pencapaian kompetensi masing-masing KD.

b. tentukan KKM untuk masing-masing indikator, berikan alasan poin/bobot masing-masing unsur sesuai kondisi satuan pendidikan Anda.

c. Tentukan KKM untuk setiap KD tersebut.

d. Tentukan KKM mata pelajaran.

E. Latihan

1. Berikut ini merupakan unsur-unsur yang harus diperhatikan dalam penentuan nilai KKM, **kecuali** ... .
   a. Karakteristik mata pelajaran
   b. Karakteristik siswa
   c. Kondisi satuan pendidikan
   d. Kondisi kebersihan sekolah

2. Berikut ini merupakan aspek yang harus diperhatikan dalam pemberian skor pada unsur kompleksitas materi pembelajaran, **kecuali** ...
   a. Waktu yang diperlukan untuk memahami materi.
   b. Tingkat kreativitas yang diperlukan untuk menyampaikan materi.
   c. Tersedianya bahan bacaan materi terkait di perpustakaan sekolah.
   d. Tingkat penalaran yang dibutuhkan siswa untuk mencapai kompetensi.

3. Tabel yang benar untuk pemberian poin pada penentuan KKM adalah ....

a.

	Tinggi	Sedang	Rendah
Kompleksitas	1	2	3
Daya dukung	1	2	3
Intake	1	2	3

b.

	Tinggi	Sedang	Rendah
Kompleksitas	1	2	3
Daya dukung	3	2	1
Intake	3	2	1

c.

	Tinggi	Sedang	Rendah
Kompleksitas	3	2	1
Daya dukung	1	2	3
Intake	3	2	1

d.

	Tinggi	Sedang	Rendah
Kompleksitas	3	2	1
Daya dukung	3	2	1
Intake	1	2	3

4. Nilai KKM suatu indikator pencapaian kompetensi ditentukan dengan poin yang nilainya 1 sampai 3. Poin unsur kompleksitas, daya dukung, dan intake berturut-turut 2, 2, 3. Nilai KKM indikator pencapaian kompetensi tersebut adalah ... .
   a. 2,33
   b. 23
   c. 67
   d. 78

5. Suatu kompetensi dasar dapat dirumuskan 4 indikator pencapaian kompetensi. Nilai KKM untuk keempat indikator tersebut berturut-turut 67, 67, 67, 78. Nilai KKM untuk kompetensi dasar tersebut adalah ... .
   a. 67
   b. 69,75
   c. 70
   d. 78

F. Rangkuman

Ketuntasan belajar merupakan tingkat minimal pencapaian kompetensi sikap, pengetahuan, dan ketrampilan yang meliputi ketuntasan penguasaan substansi dan ketuntasan belajar dalam konteks kurun waktu belajar.

Kriteria Ketuntasan Minimal adalah kriteria ketuntasan belajar yang ditentukan oleh Satuan Pendidikan yang mengacu pada standar kompetensi lulusan dengan mempertimbangkan karakteristik peserta didik, karakteristik mata pelajaran, dan kondisi satuan pendidikan.

Penentuan KKM bisa dilakukan dengan cara memberikan poin atau dengan pemberian rentang nilai untuk masing-masing unsur. Urutan penentuan KKM adalah 1) KKM Indikator, 2) KKM KD, 3) KKM SK (khusus untuk kurikulum KTSP/2006), dan 4) KKM mata pelajaran.

G. Umpan Balik

Sampai di sini, Anda telah mempelajari tentang ketuntasan belajar dan penentuan KKM. Anda dianggap menguasai materi yang diberikan jika dapat menjawab dengan benar 5 soal yang diberikan. Jika belum dapat mencapai target tersebut, pembaca dapat mempelajari kembali dan berdiskusi dengan teman sejawat tentang bagian-bagian yang belum dipahami. Perlu diperhatikan bahwa kebijakan tentang KKM sangat dinamis, sehingga sangat dianjurkan bagi pembaca untuk mencari literatur/dasar peraturan yang terkini.

Kegiatan Pembelajaran 2

REMEDIAL

A. Tujuan

Melalui kegiatan pembelajaran ini, diharapkan pembaca dapat meningkatkan wawasan dan kompetensi khususnya dalam menentukan program remedial yang sesuai berdasarkan hasil penilaian dan evaluasi.

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

Setelah mengikuti pembelajaran, peserta diharapkan dapat:

1. Menjelaskan pengertian pembelajaran remedial.
2. Menjelaskan tujuan pembelajaran remedial.
3. Menemukan penyebab kesulitan.
4. Menentukan kegiatan remedial.

C. Uraian Materi

Pembelajaran Remedial dan Tujuannya

Istilah remedial berasal dari kata *remedy*, yang berarti memperbaiki atau menolong. Dalam bidang pendidikan, remedial dapat diartikan sebagai tindakan atau proses penyembuhan atau penanggulangan ketidakmampuan atau masalah-masalah yang muncul dalam pembelajaran.

Dalam pedoman penilaian 2017, dinyatakan bahwa remedial merupakan program pembelajaran yang diperuntukkan bagi peserta didik yang belum mencapai KKM pada satu KD tertentu. Pembelajaran remedial diberikan segera setelah peserta didik diketahui belum mencapai KKM. Dalam pembelajaran remedial, pendidik membantu peserta didik untuk memahami kesulitan belajar yang dihadapi secara mandiri, mengatasi kesulitan dengan memperbaiki sendiri cara belajar dan sikap belajarnya sehingga dapat tercapai hasil belajar yang optimal. dalam hal ini penilaian berfungsi sebagai *assesment as learning*.

Pada proses pembelajaran, setelah satu atau lebih kompetensi dasar selesai maka dilaksanakan ulangan harian. Dari ulangan harian ini dapat diketahui kondisi perolehan nilai masing-masing siswa berdasarkan KKM yang telah ditentukan. Peserta didik yang nilainya di atas KKM, maka dikatakan sudah tuntas, sementara itu yang nilainya di bawah KKM dikatakan belum tuntas. Peserta didik sudah tuntas atau melampaui KKM, bisa diberikan program pengayaan, sedangkan yang belum tuntas akan diberikan remedial.

Pada Kurikulum 2013, pengayaan dan remedial dilaksanakan untuk kompetensi pengetahuan dan ketrampilan. Peserta didik yang belum mencapai kriteria minimal wajib mengikuti remedial. Tidak ada remedial untuk kompetensi sikap.

Penyebab Kesulitan Belajar Siswa

Menurut Made Alit (2003), siswa yang harus mendapatkan pembelajaran remedial, biasanya mengalami kesulitan dalam hal sebagai berikut:

1. Kemampuan mengingat relatif kurang.
2. Perhatian (konsentrasi) yang sangat kurang dan mudah terganggu dengan sesuatu yang lain di sekitarnya pada saat belajar.
3. Relatif lemah dalam kemampuan memahami secara menyeluruh.
4. Kurang dalam hal memotivasi diri dalam belajar.
5. Kurang dalam hal kepercayaan diri dan rendah harapan dirinya.
6. Lemah dalam kemampuan memecahkan masalah.
7. Sering gagal dalam menyimak suatu gagasan dari suatu informasi.
8. Mengalami kesulitan dalam memahami suatu konsep yang abstrak.
9. Gagal menghubungkan suatu konsep dengan konsep lain yang relevan
10. Memerlukan waktu relatif lebih lama daripada yang lain untuk menyelesaikan tugas-tugas.

Pada dasarnya, kesulitan yang dialami siswa bersifat individual. Ada beberapa sumber atau faktor yang menjadi penyebab kesulitan belajar siswa baik itu dari dalam diri siswa maupun dari luar diri siswa. Dari diri siswa, dapat disebabkan karena faktor biologis dan psikologis. Sementara itu dari luar diri siswa, kesulitan dapat bersumber dari keluarga, lingkungan, dan masyarakat secara umum. Kesulitan dapat menimpa semua siswa baik yang berkemampuan rendah maupun tinggi. Brueckner dan Bond, Cooney, Davis, dan Henderson (dalam Rachmadi 2010) mengelompokkan sumber kesulitan menjadi 5, yaitu:

e. Faktor fisiologis

   Kesulitan belajar karena faktor fisiologis ditunjukkan oleh fakta bahwa tingkat kesulitan belajar bagi siswa yang mengalami gangguan penglihatan dan pendengaran akan lebih tinggi daripada yang tidak mengalami. Dalam mengatasi permasalahan ini guru dapat memberikan kesempatan kepada siswa yang mengalami gangguan untuk lebih dekat ke meja guru.

f. Faktor Sosial

   Hubungan orang tua dengan anak, tingkat kepedulian orang tua tentang pendidikan, dan kondisi ekonomi, lingkungan sekolah dan tempat tinggal menjadi faktor keberhasilan dalam belajar. Contoh kecil dari faktor ini misalnya, seorang ayah sering mengatakan "saya dulu tidak pernah belajar matematika, tetapi toh berhasil juga jadi orang kaya", meskipun kelihatannya sepele ungkapan tadi dapat menurunkan motivasi anak dalam belajar.

g. Faktor Emosional

   Siswa yang sering gagal dalam matematika lebih mudah berfikir tidak rasional, takuc, cemas, dan benci pada matematika. Beberapa penyebabnya antara lain;

   1) Obat-obat tertentu seperti obat penenang, ekstasi, dan obat lain yang sejenis.
   2) Kurang tidur
   3) Diet yang tidak tepat
   4) Hubungan yang renggang dengan teman terdekat
   5) Masalah tekanan dari sisi keluarga

   Penanganan kesulitan belajar karena faktor emosional sebaiknya melibatkan orang yang memiliki kompetensi baik psikologis, medis, maupun agamis.

h. Faktor Intelektual

   Siswa yang mengalami kesulitan karena faktor intelektual umumnya kurang berhasil dalam menguasai konsep, prinsip, atau algoritma walaupun sudah mempelajarinya. Siswa yang mengalami kesulitan mengabstraksi, menggeneralisasi, dan menalar akan selalu merasa bahwa matematika itu sulit.

Mereka akan mengalami kesulitan dalam memecahkan masalah terapan atau soal cerita.

i. Faktor Pedagogis.

Kesulitan karena faktor pedagogis dapat disebabkan karena guru kurang tepat dalam mengelola pembelajaran dan menerapkan metodologi. Misalnya, guru kurang memperhatikan kemampuan awal siswa, tanpa memberikan pengantar langsung masuk ke materi yang abstrak. Ungkapan yang sering muncul "ketika dijelaskan siswa mengerti, tetapi ketika mengerjakan sendiri, mereka tidak bisa", merupakan indikasi bahwa terjadi kesulitan karena faktor pedagogis. Kesulitan ini juga dapat disebabkan karena guru kurang memberikan latihan yang cukup, kurang memberikan ruang tanya jawab yang lebih luas, kurangnya guru dalam memberikan *scaffolding* sehingga siswa hanya menerima pengetahuan secara pasif, tidak mengkonstruksi sendiri pengetahuannya.

Kegagalan peserta didik dapat juga disebabkan karena masalah perilaku peserta didik. Beberapa pedoman untuk menangani masalah perilaku peserta didik, di antaranya sebagai berikut:

1. Selalu amati kinerja siswa dalam kelas dan perilaku mereka dalam kelompok.
2. Membangun hubungan dengan siswa, mengembangkan hubungan saling percaya dan mendengar apa yang mereka katakan.
3. Membantu siswa memahami pengaruh perilaku mereka terhadap siswa lain dan diri mereka sendiri.
4. Jangan mencoba mengubah semua perilaku menyimpang semua siswa sekaligus. Guru harus membuat daftar permasalahan dan menetapkan prioritas dengan tujuan untuk memperbaiki satu atau dua dari mereka pada suatu waktu.
5. Jika perlu, guru dapat merujuk ke bagian Psikologi (bimbingan dan konseling) untuk mengatasi masalah secara individu.

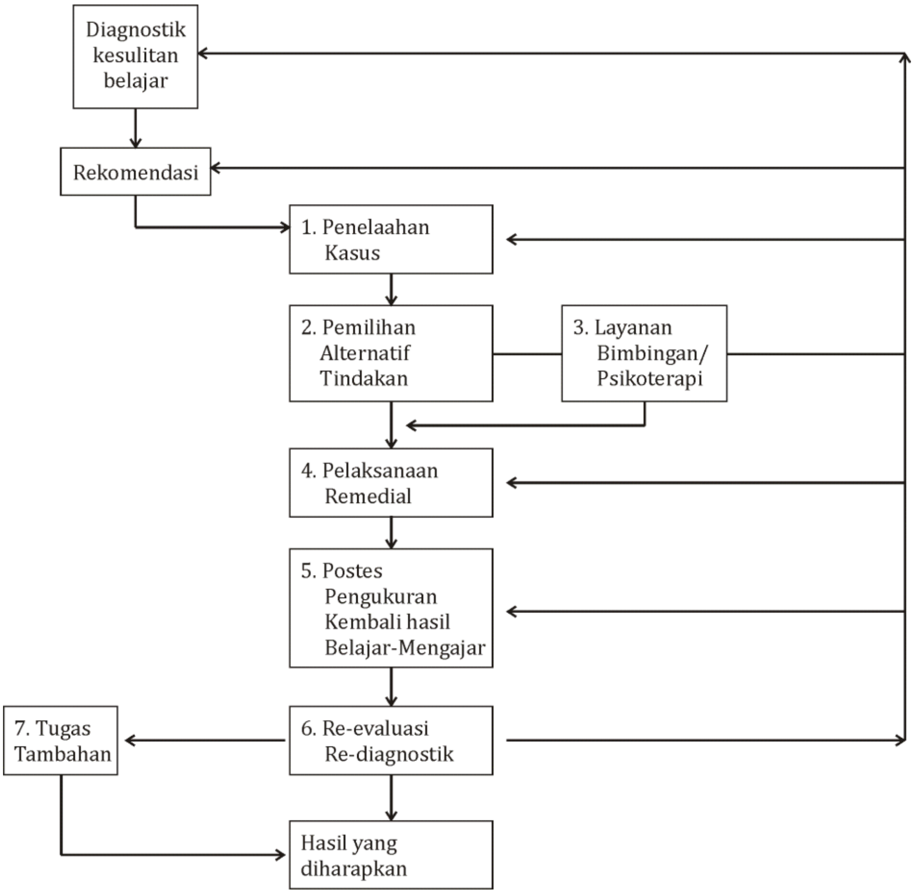
Ciri-ciri Pembelajaran Remedial

Berdasarkan pengertian dan faktor-faktor penyebab kesulitan belajar, maka pembelajaran remedial memiliki ciri-ciri antara lain:

1. Dilakukan setelah diketahui kesulitan belajar, dan kemudian diberikan layanan khusus bagi peserta didik sesuai dengan jenis, sifat, dan latar belakang.
2. Metode yang digunakan disesuaikan dengan kondisi peserta didik.
3. Pendidik dapat bekerja sama dengan berbagai pihak, seperti rekan sejawat, pembimbing, dan sebagainya.

Prosedur Pengajaran Remedial

Uzer Usman (1993) memberikan prosedur remedial seperti skema di bawah.



Dari skema di atas dapat dikembangkan empat alternatif prosedur yang dapat dilakukan sesuai keperluan:

1) Mencakup langkah 1 – 2 – 4 – 5 – 6
2) Mencakup langkah 1 – 2 – (3) – 4 – 5 – 6
3) Mencakup langkah 1 – 2 – 4 – 6 – (7)
4) Mencakup langkah 1 – 2 – (3) – 4 – 5 – 6 – 7

Sasaran pokok pada kegiatan penelaahan kasus (1) adalah untuk memperoleh gambaran tentang karakteristik dan permasalahan kasus, serta feasibilitas alternatif tindakan remedial yang dapat direkomendasikan.

Pada langkah kedua, pemilihan alternatif tindakan harus diperhatikan apakah memerlukan keterlibatan pihak luar (misal layanan bimbingan/psikoterapi) atau langsung ke langkah keempat yaitu pelaksanaan pengajaran remedial. Sasaran utama langkah ini adalah membuat keputusan pilihan alternatif berdasarkan berbagai pertimbangan rasional.

Langkah ke tiga, layanan bimbingan merupakan langkah opsional. Pada praktiknya langkah ini dapat ditangani guru jika memungkinkan. Jika dirasa guru mata pelajaran tidak sanggup maka disarankan melibatkan pihak lain yang berkompeten.

Langkah keempat, pelaksanaan remedial yang berfungsi untuk mencapai peningkatan prestasi sehingga kriteria kompetensi tercapai. Beberapa strategi pelaksanaan pembelajaran remedial berikut dapat digunakan sesuai dengan jenis dan tingkat kesulitan.

1. Pemberian bimbingan secara individu. Dilakukan apabila ada beberapa peserta didik yang mengalami kesulitan yang berbeda-beda sehingga memerlukan bimbingan secara individual.
2. Pemberian bimbingan secara kelompok. Dilakukan apabila dalam pembelajaran klasikal ada beberapa peserta didik yang mengalami kesulitan yang sama.
3. Pemberian pembelajaran ulang dengan metode dan media yang berbeda. Pembelajaran ulang dapat diberikan dengan variasi cara penyajian dan penyederhanaan tes/pertanyaan. Pembelajaran ini dilakukan jika sebagian besar atau semua peserta didik belum mencapai ketuntasan belajar atau mengalami kesulitan belajar. Karena materi yang diberikan bersifat pengulangan guru perlu menggunakan metode dan/atau media yang lebih tepat.
4. Pemberian tugas-tugas latihan secara khusus. Tugas latihan dapat diperbanyak agar peserta didik tidak mengalami kesulitan dalam mengerjakan tes ulang.

5. Pemanfaatan tutor sebaya. Yang dimaksud tutor sebaya adalah teman sekelas atau lain kelas yang memiliki kecepatan belajar lebih. Mereka dapat dimanfaatkan untuk memberikan tutorial kepada rekan atau adik kelas yang mengalami kesulitan belajar. Salah satu kelebihan pemanfaatan tutor sebaya adalah peserta didik yang mengalami kesulitan belajar akan lebih akrab dan leluasa untuk berdiskusi.

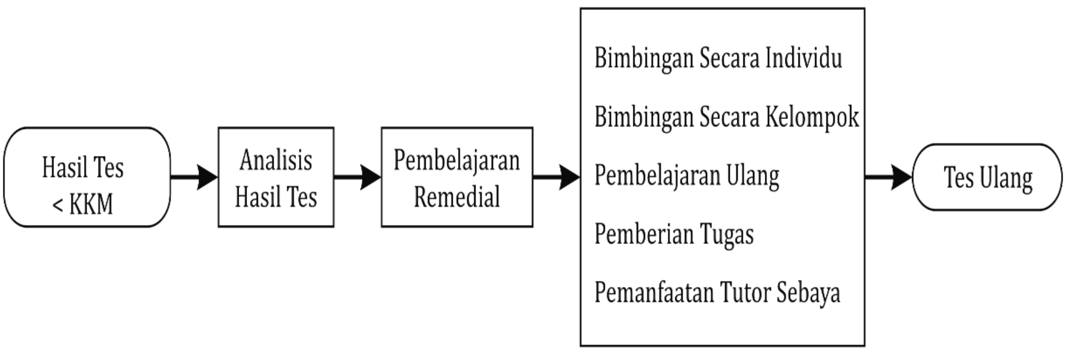
Langkah kelima, pengukuran capaian pembelajaran penting dilaksanakan untuk mengetahui ada tidaknya perubahan pada peserta didik tentang ketercapaian kompetensi yang diharapkan.

Langkah keenam, mengadakan re-evaluasi dan re-diagnostik dilaksanakan setelah pengukuran capaian pembelajaran. Pada tahap ini dilihat beberapa kasus.

Kasus 1, target kompetensi tercapai, maka dapat dilanjutkan ke kompetensi berikutnya.

Kasus 2, target kompetensi tidak tercapai, maka dilakukan re-diagnostik untuk melihat kelemahan pelaksanaan pembelajaran remedial dan dimungkinkan untuk dilanjutkan ke langkah 7 agar target kompetensi tercapai.

Sementara itu, pada Panduan Penilaian oleh Pendidik dan Satuan pendidikan Sekolah Menengah Atas tahun 2017 diberikan alur pembelajaran remedial seperti diagram di bawah.



Pelaksanaan pembelajaran remedial dilakukan di luar jam pelajaran. Hal ini dimaksudkan agar hak peserta didik yang sudah tuntas tidak terganggu.

Peserta didik diberi nilai sesuai capaian yang diperoleh peserta didik setelah mengikuti remedial pembelajaran. Misalnya, KKM Matematika yang ditetapkan adalah 70. Iwan memperoleh nilai harian-1 (KD 3.1) sebesar 50, karena beberapa butir soal yang tidak dapat dijawab dengan benar. Berdasarkan kondisi ini, Iwan harus mengikuti remedial untuk KD 3.1. Pada tes ulang setelah mengikuti remedial, Iwan memperoleh nilai 80. Dengan hasil ini, maka nilai harian-1 (KD 3.1) yang diperoleh Iwan adalah 80.

Manfaat dari ketentuan di atas adalah 1) meningkatkan motivasi peserta didik selama mengikuti pembelajaran remedial karena memiliki kesempatan untuk memperoleh nilai maksimal, 2) sesuai dengan prinsip belajar tuntas (*mastery learning*), sehingga peserta didik berhak untuk mendapatkan capaian kompetensi terbaiknya.

Pembelajaran remedial dapat diberikan berulang-ulang sampai mencapai KKM dengan batas waktu akhir semester. Jika sampai akhir semester peserta didik belum mencapai KKM, pembelajaran remedial dapat dihentikan dan pendidik tidak dianjurkan memaksakan diri untuk memberi nilai tuntas.

Contoh Program Pembelajaran Remedial

SMA : SMA Unggul
Mata Pelajaran : Matematika
Kelas : X
Ulangan ke : 4
Tgl. Ulangan : 30 Mei 2016
Kompetensi Dasar dan Indikator Pencapaian Kompetensi:

3.7. Menjelaskan rasio trigonometri (sinus, cosinus, tangen, cosecan, secan, dan cotangen) pada segitiga siku-siku
- 3.7.1. Mengidentifikasi unsur-unsur pada segitiga siku-siku
- 3.7.2. Menjelaskan definisi sinus suatu sudut pada segitiga siku-siku dalam berbagai posisi.
- 3.7.3. Menjelaskan definisi sinus suatu sudut pada segitiga siku-siku dalam berbagai posisi.
- 3.7.4. Menjelaskan definisi cosinus suatu sudut pada segitiga siku-siku dalam berbagai posisi.
- 3.7.5. Menjelaskan definisi tangen suatu sudut pada segitiga siku-siku dalam berbagai posisi.
- 3.7.6. Menjelaskan definisi cotangen suatu sudut pada segitiga siku-siku dalam berbagai posisi.
- 3.7.7. Menjelaskan definisi secan suatu sudut pada segitiga siku-siku dalam berbagai posisi.
- 3.7.8. Menjelaskan definisi cosecan suatu sudut pada segitiga siku-siku dalam berbagai posisi.

4.7. Menyelesaikan masalah kontekstual yang berkaitan dengan rasio trigonometri (sinus, cosinus, tangen, cosecan, secan, & cotangen) pada segitiga siku-siku.
- 4.7.1. Menentukan panjang salah satu sisi segitiga siku-siku jika syarat-syaratnya dipenuhi.
- 4.7.2. Menentukan besar salah satu sudut segitiga siku-siku jika syarat-syaratnya dipenuhi.
- 4.7.3. Menggunakan rasio trigonometri untuk menyelesaikan jarak antara dua obyek.

Rencana Ulangan Ulang: 5 Juni 2016
KKM Mapel: 75

No.	Nama Siswa	Nilai Ulang-an	Indikator yang tidak dikuasai	Bentuk Pelaksanaan Pembelajaran Remedial	Soal untuk tes Remedial	Nilai Tes Remedial	Keterangan (Tuntas/ Belum tuntas)
1.	Andi	40	3.7.6, 3.7.7, 3.7.8, 4.7.1, 4.7.2 4.7.3	bimbingan khusus			
2.	Budi	60	3.7.8, 4.7.1, 4.7.2 4.7.3	bimbingan kelompok			
3.	Citra	70	4.7.1, 4.7.2, 4.7.3	Tutor sebaya			
4.	Dinda	60	3.7.8, 4.7.1, 4.7.2 4.7.3	bimbingan Kelompok			
5.	Erik	60	3.7.8, 4.7.1, 4.7.2 4.7.3	bimbingan Kelompok			
6.	Fitri	60	3.7.8, 4.7.1, 4.7.2 4.7.3	bimbingan Kelompok			
7.	Gilang	60	1,2	bimbingan Kelompok			

Analisis Pekerjaan Siswa

Salah satu hal penting yang harus diperhatikan sebelum pelaksanaan pembelajaran remedial adalah menganalisis hasil pekerjaan siswa. Berdasarkan analisis kesalahan yang dilakukan siswa, guru dapat membantu siswa menuntaskan tugas atau konsep yang belum dikuasai siswa. Bantuan sebaiknya diberikan secara langsung berupa jawaban atau penyelesaian permasalahan, namun dalam bentuk pertanyaan-pertanyaan kecil terhadap materi-materi krusial yang dapat menuntun siswa menuju ke arah penyelesaian masalah. Berikut ini contoh sebuah masalah yang dihadapi siswa, analisis kesalahan, dan alternatif-alternatif pertanyaan untuk membantu siswa.

Contoh:

Mendeskripsikan kesalahan dan merencanakan pertanyaan untuk mendiskusikan kesalahan.

	Siswa A (Jawaban benar)	Siswa B (Jawaban Salah)	Siswa C (Jawaban Salah)
Soal: Tentukan nilai x yang memenuhi $x^2 + 6x = 27$	$x^2 + 6x = 27$ $x^2 + 6x + 9 = 27 + 9$ $(x+3)^2 = 36$ $x + 3 = \pm 6$ $x + 3 = 6$ $\quad x + 3 = -6$ $x = 6 - 3$ $\quad x = -6 - 3$ $x = 3$ $\quad x = -9$	$x^2 + 6x = 27$ $x^2 + 6x + 9 = 27 + 9$ $(x+3)^2 = 36$ $\mathbf{x + 3 = 6}$ $x = 6 - 3$ $x = 3$	$x^2 + 6x = 27$ $\mathbf{x^2 + 6x + 9 = 27}$ $(x+3)^2 = 27$ $x + 3 = \pm 3\sqrt{3}$ $x = -3 + 3\sqrt{3}$ $\quad x = -3 - 3\sqrt{3}$
Deskripsi kesalahan	Tidak ada	Siswa tidak mem-perhitungkan hasil negatif pada lang-kah penarikan akar.	Siswa tidak menambahkan bilangan yang sama ke kedua ruas, sehingga persamaan yang dihasilkan tidak ekuivalen dengan persamaan sebelumnya.
Pertanyaan untuk mendis-kusikan kesa-lahan	Tidak ada, Dapat juga berupa pujian dilanjutkan dengan tantangan untuk masalah yang lebih menantang, misal: “Bagus, adakah cara lain untuk menyelesaikan permasalahan tersebut?”	Jika suatu bilangan dikuadratkan meng-hasilkan 36, berapa-kah bilangan tersebut? Apa yang kamu peroleh tentang nilai b pada persamaan $b^2 = 36$	Coba kamu cek penyelesaiannya dengan mensubstitusi ke persamaan semula .... apakah mendapatkan hasil yang benar? (disarankan menggunakan kalkulator) Jika kamu menambahkan sesuatu ke salah satu ruas, apa yang harus kamu lakukan untuk ruas yang lain? Mengapa? Sifat apa yang dapat kamu gunakan?

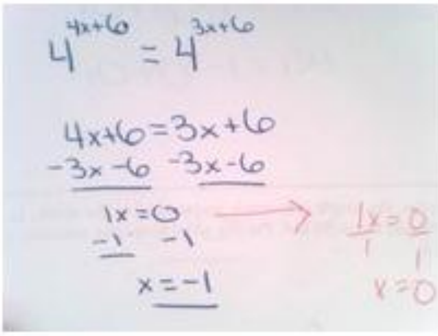
D. Aktivitas pembelajaran

Berikut diberikan contoh-contoh hasil pekerjaan peserta didik. Lakukan analisis kesalahan yang dilakukan, berikan penjelasan konsep yang benar, langkah-langkah untuk memperbaiki kesalahan tersebut, susun juga daftar pertanyaan untuk memancing agar siswa dapat memperbaiki kesalahan sendiri.

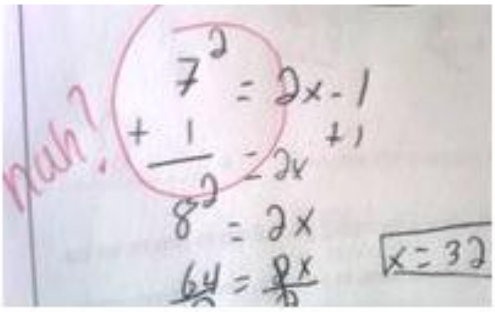
LK 2.1. Menganalisis Kesalahan Pekerjaan Siswa

Pilihlah 3 dari 10 permasalahan di bawah, kemudian buatlah analisis seperti contoh di atas.

1. Persamaan eksponen. Soal tentukan penyelesaian dari $4^{4x+6} = 4^{3x+6}$. Hasil pekerjaan siswa:

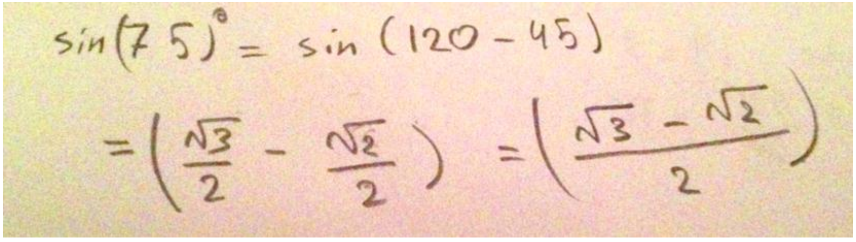


2. Logaritma. Soal: Tentukan nilai x yang memenuhi ${}^{7}\log(2x-1) = 2$. Hasil pekerjaan siswa:

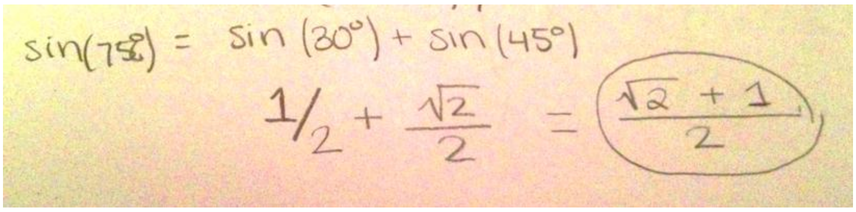


3. Trigonometri. Soal: Tanpa menggunakan tabel dan kalkulator, tentukan nilai dari $\sin 75°$. Jawaban siswa:

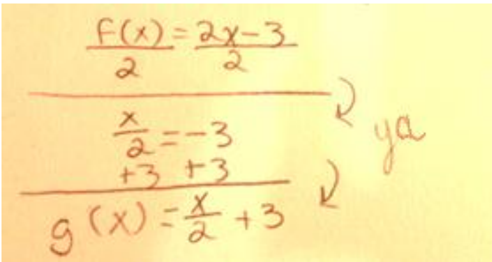
a.



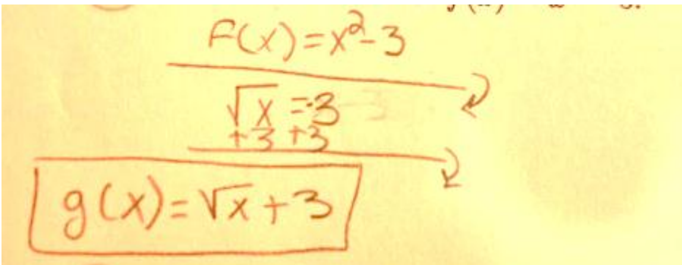
b.



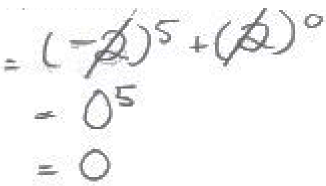
4. Invers fungsi. Soal: Apakah $f(x) = 2x - 3$ dan $g(x) = \frac{x}{2} + 3$ saling invers? Jika ya, buktikan. Jika tidak, tentukan invers dari $f(x)$. Jawaban siswa:



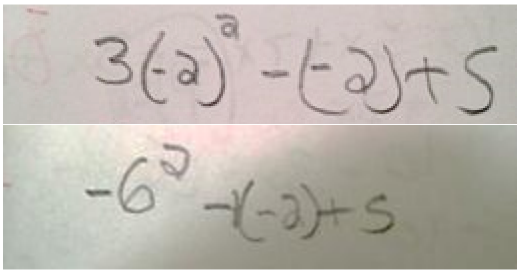
5. Invers fungsi. Soal: Tentukan invers $f(x) = x^2 - 3$. Jawaban siswa:



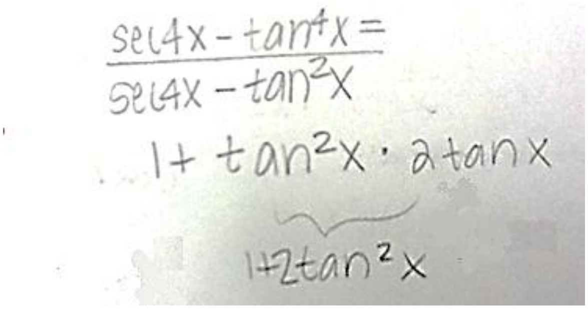
6. Eksponen. Soal: Tentukan nilai dari $(-2)^5 + 2^0$. Jawaban siswa:



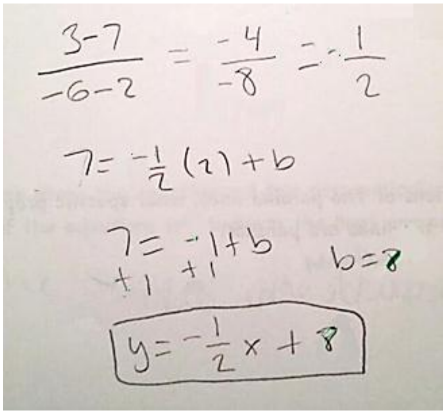
7. Persamaan Kuadrat. Soal: Tentukan nilai $3x^2 - x + 5$ jika $x = -2$. Jawaban siswa:



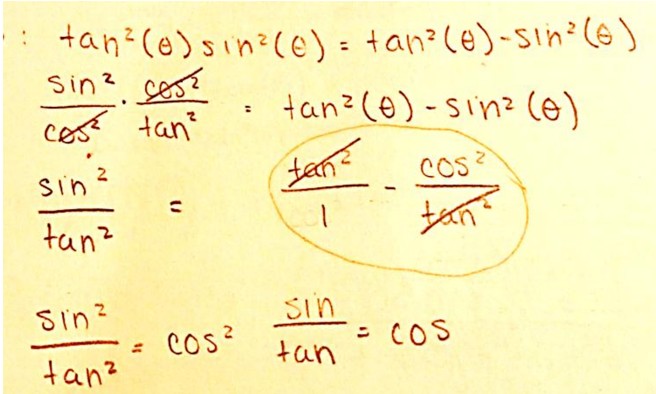
8. Trigonometri. Soal: Buktikan bahwa $\sec^4 x - \tan^4 x = 1 + 2\tan^2 x$. Jawaban siswa:

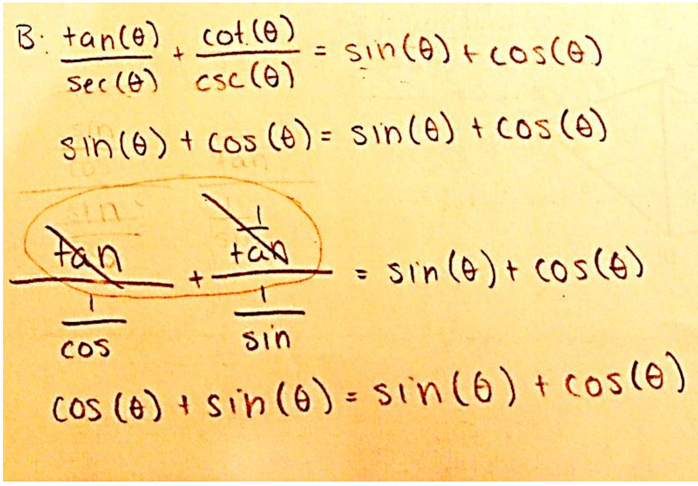


9. Persamaan garis. Soal: Persamaan garis melalui 2, 7) dan $(-6, 3)$ adalah ... .
   Jawaban siswa:



10. Identitas Trigonometri. Soal: Buktikan identitas berikut,
    a. $\tan^2\theta \cdot \sin^2\theta \ = \tan^2\theta - \sin^2\theta$
    b. $\frac{\tan\theta}{\sec\theta} + \frac{\cot\theta}{\csc\theta} = \sin\theta + \cos\theta$
    Jawaban siswa:





LK 2.2. Menganalisis Kesalahan Pekerjaan Siswa (lanjutan)

- Cermati hasil ulangan matematika untuk KD tertentu, berdasarkan KD yang telah ditetapkan, tentukan siswa yang belum mencapai ketuntasan belajar.
- Lakukan analisis hasil pekerjaan siswa yang belum mencapai ketuntasan.
- Buat laporan hasil kesalahan pekerjaan siswa dalam bentuk tabel seperti pada LK 2.1.
- Susunlah pembelajaran remedial bagi siswa yang belum mencapai ketuntasan belajar.

E. Latihan

1. Esensi dari pembelajaran remedial adalah ... .
    a. Memperbaiki nilai peserta didik yang belum tuntas dengan memberikan tugas tambahan.
    b. Melaksanakan tes ulang untuk mendapatkan nilai yang lebih baik.

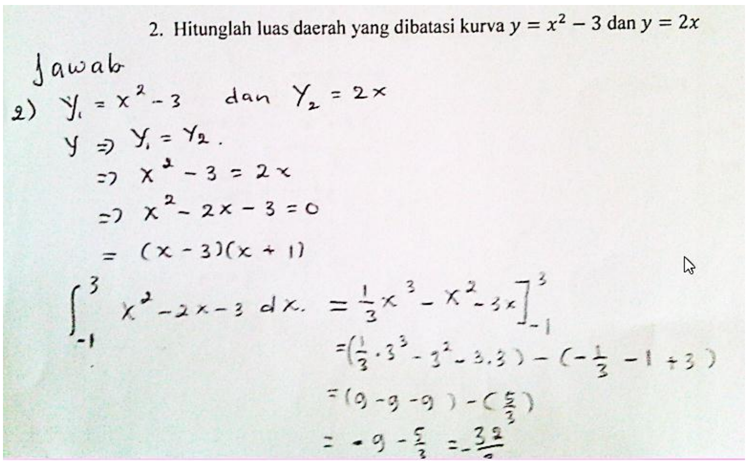
c. Memberikan tugas terstruktur maupun tidak terstruktur setelah ujian akhir semester.

d. Memberikan perlakuan khusus peserta didik yang mengalami hambatan dalam pencapaian kompetensi yang telah ditetapkan.

2. Berikut ini merupakan hal-hal yang harus menjadi perhatian utama dalam membuat rancangan program remedial, **kecuali** ... .
   a. hasil analisis evaluasi belajar peserta didik
   b. perilaku peserta didik di dalam maupun di luar kelas
   c. nilai rapor peserta didik pada kelas sebelumnya
   d. metode yang telah digunakan dalam pembelajaran

3. Kelebihan pembelajaran remedial dengan menggunakan tutor sebaya di antaranya adalah ... .
   a. pendidik tidak perlu membuat rencana pembelajaran, cukup diserahkan kepada tutor sebaya
   b. dengan usia yang setara, hubungan tanya jawab berlangsung lebih akrab
   c. pendidik tidak perlu membuat media untuk mempermudah pemahaman materi yang diremedi
   d. beban pendidik dapat dikurangi sehingga dapat fokus ke materi berikutnya.

4. Berikut ini diberikan soal dan jawaban siswa. Dari proses yang ia lakukan, ia mendapatkan jawaban $-\frac{32}{3}$. Berikut merupakan pernyataan yang mungkin untuk kasus tersebut, **kecuali** ... .



2. Hitunglah luas daerah yang dibatasi kurva $y = x^2 - 3$ dan $y = 2x$

Jawab

2) $Y_1 = x^2 - 3$ dan $Y_2 = 2x$

$y \Rightarrow Y_1 = Y_2$.

$\Rightarrow x^2 - 3 = 2x$

$\Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$

$= (x-3)(x+1)$

$\int_{-1}^{3} x^2 - 2x - 3 \, dx. = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x \Big]_{-1}^{3}$

$= (\frac{1}{3} \cdot 3^3 - 3^2 - 3.3) - (-\frac{1}{3} - 1 + 3)$

$= (9 - 9 - 9) - (\frac{5}{3})$

$= -9 - \frac{5}{3} = -\frac{32}{3}$

   a. kemampuan komunikasi tertulis siswa perlu ditingkatkan

b. siswa sudah menjawab dengan benar, hanya saja perlu perhatian lebih pada cara penulisan
c. siswa belum memahami konsep luas
d. siswa belum menguasai prosedur yang benar dalam penentuan luas menggunakan integral

5. Berikut ini, yang bukan termasuk ciri pembelajaran remedial adalah ... .
   a. Dilakukan setelah diketahui kesulitan belajar
   b. Metode yang digunakan sesuai dengan jenis, sifat dan latar belakang peserta didik
   c. Pendidik dapat bekerja sama dengan berbagai pihak dalam mengatasi permasalahan
   d. Dilakukan dengan cara memberikan tugas tambahan

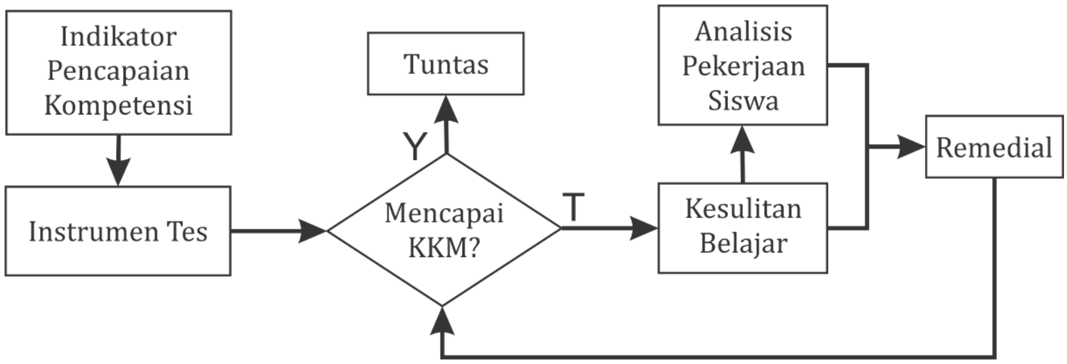
F. Rangkuman

Pembelajaran remedial merupakan tindakan atau proses penanggulangan ketidakmampuan atau penanggulangan masalah yang muncul dalam pembelajaran. Pembelajaran remedial diberikan kepada peserta didik yang nilainya di bawah KKM dengan tujuan kriteria ketuntasan yang telah ditetapkan dapat tercapai.

Terdapat berbagai faktor penyebab tidak tercapainya KKM peserta didik, di antaranya faktor fisiologis, faktor sosial, faktor emosional, faktor intelektual, dan faktor pedagogis. Dalam pelaksanaan remedial, pendidik dapat melibatkan unsur-unsur lain untuk mengatasi permasalahan.

Secara garis besar pelaksanaan pembelajaran remedial meliputi diagnostik kesulitan belajar, analisis permasalahan, pemilihan alternatif tindakan, pelaksanaan remedial, dan pengukuran kembali hasil belajar.

Secara umum, alur proses pembelajaran remedial adalah seperti diagram di bawah.



G. Umpan Balik

Sampai di sini, Anda telah mempelajari tentang pembelajaran Remedial. Anda dianggap menguasai materi yang diberikan jika dapat menjawab dengan benar 4 dari 5 soal yang diberikan. Jika belum dapat mencapai target tersebut, pembaca dapat mempelajari kembali dan berdiskusi dengan teman sejawat tentang bagian-bagian yang belum dipahami. Perlu diperhatikan bahwa dalam merencanakan pembelajaran remedial, dibutuhkan penguasaan substansi matematika, media pembelajaran, dan berbagai variasi cara penyampaian materi.

Kunci Jawaban Latihan

Kunci Jawaban Latihan Kegiatan Pembelajaran 1:

1. D
2. C
3. B
4. D
5. C

Kunci Jawaban Latihan Kegiatan Pembelajaran 2:

1. D
2. C
3. B
4. B
5. D

Evaluasi

Pilihlah jawaban yang paling tepat!

1. Seorang siswa menjawab soal trigonometri "tentukan nilai $\sin 15°$ tanpa kalkulator dan tabel trigonometri" sebagai berikut:

$$\sin 75° = \sin(45° + 30°) = \sin 45° + \sin 30° = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + 1\right).$$

   Berikut ini merupakan pertanyaan/pernyataan/perintah yang dapat digunakan untuk memancing diskusi dengan siswa, **kecuali** ... .

   a. Coba kamu cocokkan menggunakan kalkulator, periksa apakah jawabanmu benar?

   b. Ingat bentuk grafik $y = \sin(x)$? Berapakah nilai maksimumnya? Bandingkan dengan jawabanmu.

   c. Ingat, dalam sinus jumlah dua sudut berlaku sifat distributif. Apakah sudah kamu gunakan?

   d. Bandingkan dengan jawaban temanmu ... diskusikan jika hasilnya berbeda.

2. Seorang siswa mengerjakan perkalian matriks sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

   Pertanyaan/pernyataan/perintah berikut dapat digunakan untuk menanggapi pekerjaan tersebut, **kecuali** ... .

   a. Bagus ... lanjutkan nomor berikutnya tentang soal cerita aplikasi perkalian matriks.

   b. Buka kembali catatan pelajaran perkalian matriks, cocokkan prosedur mengalikan matriks dengan matriks.

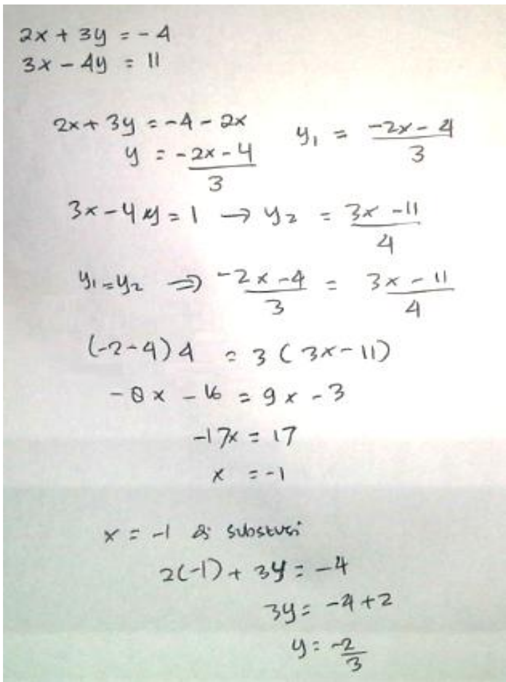
   c. Coba cocokkan hasil yang kamu peroleh menggunakan microsoft excel, kemarin sudah saya ajarkan caranya.

   d. Diskusikan hasil yang kamu dapatkan dengan temanmu.

3. Urutan penentuan Kriteria Ketuntasan Minimal yang benar adalah ... .
    a. KKM indikator pencapaian kompetensi – KKM kompetensi dasar – KKM mata pelajaran.
    b. KKM mata pelajaran – KKM kompetensi dasar – KKM indikator pencapaian kompetensi.
    c. KKM kompetensi dasar – KKM indikator pencapaian kompetensi – KKM mata pelajaran
    d. KKM mata pelajaran – KKM indikator pencapaian kompetensi – KKM kompetensi dasar.

4. Berikut merupakan cara yang lazim ditempuh dalam pelaksanaan pembelajaran remedial terhadap siswa yang belum memenuhi kriteria ketuntasan minimal, **kecuali** ... .
    a. memberikan kesempatan untuk belajar dari temannya yang kompeten
    b. memberikan pengulangan materi yang dibutuhkan untuk mempelajari materi yang belum tuntas
    c. memberikan bimbingan secara khusus secara kelompok atau individu
    d. memberikan tugas tambahan dengan materi yang sedikit lebih sulit

5. Berikut contoh hasil pekerjaan siswa terkait mencari penyelesaian sistem persamaan linear dua variabel $2x + 3y = -4$, dan $3x - 4y = 11$. Berikut merupakan pernyataan yang mungkin untuk pekerjaan siswa tersebut, ***kecuali*** ...



$2x + 3y = -4$
$3x - 4y = 11$

$2x + 3y = -4 - 2x$ $\qquad y_1 = \dfrac{-2x-4}{3}$
$y = -\dfrac{2x-4}{3}$

$3x - 4y = 1 \rightarrow y_2 = \dfrac{3x-11}{4}$

$y_1 = y_2 \Rightarrow \dfrac{-2x-4}{3} = \dfrac{3x-11}{4}$

$(-2-4)4 = 3(3x-11)$
$-8x - 16 = 9x - 3$
$-17x = 17$
$x = -1$

$x = -1$ di substusi
$2(-1) + 3y = -4$
$3y = -4 + 2$
$y = \dfrac{-2}{3}$

a. perlu diselidiki lebih lanjut tentang kemungkinan siswa mencontek
b. tidak ada kesalahan pada pekerjaan siswa, hanya saja ia belum membuat kesimpulan
c. dari pekerjaan di atas, setidaknya terdapat dua kesalahan yang telah dilakukan siswa
d. kemampuan komunikasi tertulis siswa perlu ditingkatkan

Kunci Jawaban Evaluasi:

1. C
2. A
3. A
4. D
5. B

Penutup

Kami sangat berharap tingkat penguasaan Anda minimal 80%. Jika benar maka upaya Anda untuk mengikuti kegiatan ini telah berhasil. Semoga, Anda semakin sukses dalam membawa anak didik menjadi lebih baik lagi, berguna bagi nusa dan bangsa, dan dapat membawa nama harum Bangsa dan Negara Indonesia yang kita cintai ini.

Glosarium

Pembelajaran Tuntas	Pendekatan dalam pembelajaran yang mensyaratkan peserta didik menguasai secara tuntas kompetensi dasar mata pelajaran
Ketuntasan Belajar	Ketuntasan penguasaan substansi materi peserta didik
Kriteria Ketuntasan Minimal (KKM)	Kriteria ketuntasan belajar yang ditentukan oleh satuan pendidikan (KTSP 2006)
	Kriteria Ketuntasan Minimal (KKM) adalah kriteria ketuntasan belajar yang ditentukan oleh satuan pendidikan yang mengacu pada standar kompetensi kelulusan, dengan mempertimbang-kan karakteristik peserta didik, karakteristik mata pelajaran, dan kondisi satuan pendidikan. (Permendikbud no. 23 tahun 2016)

Daftar Pustaka

____ . 2015. *Teaching Strategies for Improving Algebra Knowledge in Middle and High School Students*. U.S. Departement of Education

____ . 2017. *Panduan Penilaian oleh Pendidik dan Satuan Pendidikan untuk Sekolah Menengah Atas*. Jakarta: Direktorat Pembinaan Sekolah Kementrian Pendidikan dan Kebudayaan.

Abdul Majid. 2005. *Perencanaan Pembelajaran*. Bandung: PT Remaja Rosdakarya.

Abdul Majid. 2013. *Strategi Pembelajaran*. Bandung: PT Remaja Rosdakarya.

http://www.edb.gov.hk/en/edu-system/special/resources/serc/irtp/book-3.html. Chapter 3 – Remedial Teaching Strategies. diakses Maret 2016.

Made Alit Mariana. 2003. *Pembelajaran Remedial*. Jakarta: Departemen Pendidikan Nasional.

Muh Uzer Usman & Lilis Setiawati. 1993. *Upaya Optimalisasi Kegiatan Belajar Mengajar*. Bandung: PT Remaja Rosdakarya.

Rachmadi Widdiharto. 2008. *Diagnosis Kesulitan Belajar Matematika SMP dan Alternatif Proses Remidinya*. Yogyakarta: PPPPTK Matematika.

Setiawan. 2008. *Prinsip-prinsip Penilaian Pembelajaran Matematika SMA*. Yogyakarta: PPPPTK Matematika.

Suryanih. 2011. *Skripsi: Diagnosis Kesulitan Belajar Matematika Siswa dan Solusinya dengan Pembelajaran Remedial*. Jakarta: UIN Syarif Hidayatullah

J

KELOMPOK KOMPETENSI

MODUL PENGEMBANGAN KEPROFESIAN BERKELANJUTAN GURU MATEMATIKA SMA

PROFESIONAL

LOGIKA, SEJARAH DAN FILSAFAT MATEMATIKA

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
DIREKTORAT JENDERAL GURU DAN TENAGA KEPENDIDIKAN
2017

MODUL PENGEMBANGAN KEPROFESIAN BERKELANJUTAN
GURU MATEMATIKA SMA

TERINTEGRASI PENGUATAN PENDIDIKAN KARAKTER

KELOMPOK KOMPETENSI J

PROFESIONAL

LOGIKA, SEJARAH DAN FILSAFAT MATEMATIKA

DIREKTORAT JENDERAL GURU DAN TENAGA KEPENDIDIKAN
KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
2017

Penulis:
1. Untung Trisna S., S.Pd., M.Si., email: untungtrisna@gmail.com
2. Dr. Sumardyono, M.Pd., email: smrdyn2007@gmail.com
3. Titik Sutanti, S.Pd.Si, M.Ed., email: titik.sutanti@p4tkmatematika.org
4. Musthofa, M.Sc., email: musthofa@uny.ac.id

Penelaah:
1. Angga Kritiyajati, S.Si, email:kristiyajati@gmail.com
2. Drs. Jumadi, email: jumadirahman0307@yahoo.com

Ilustrator:
Muhammad Fauzi
Suhananto

Kata Pengantar

Peningkatan kualitas pendidikan saat ini menjadi prioritas, baik oleh pemerintah pusat maupun daerah. Salah satu komponen yang menjadi fokus perhatian adalah peningkatan kompetensi guru. Peran guru dalam pembelajaran di kelas merupakan kunci keberhasilan untuk mendukung keberhasilan belajar siswa. Guru yang profesional dituntut mampu membangun proses pembelajaran yang baik sehingga dapat menghasilkan *output* dan *outcome* pendidikan yang berkualitas.

Dalam rangka memetakan kompetensi guru, telah dilaksanakan Uji Kompetensi Guru (UKG) Tahun 2015. UKG tersebut dilaksanakan bagi semua guru, baik yang sudah bersertifikat maupun belum bersertifikat untuk memperoleh gambaran objektif kompetensi guru, baik profesional maupun pedagogik. Hasil UKG kemudian ditindaklanjuti melalui program peningkatan kompetensi yang untuk tahun 2017 dinamakan Program Pengembangan Keprofesian Berkelanjutan bagi Guru, sehingga diharapkan kompetensi guru yang masih belum optimal dapat ditingkatkan.

PPPPTK Matematika sebagai Unit Pelaksana Teknis Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan di bawah pembinaan Direktorat Jenderal Guru dan Tenaga Kependidikan mendapat tugas untuk menyusun modul guna mendukung pelaksanaan Program Pengembangan Keprofesian Berkelanjutan bagi Guru. Modul ini diharapkan dapat menjadi sumber belajar bagi guru dalam meningkatkan kompetensinya sehingga mampu mengambil tanggung jawab profesi dengan sebaik-baiknya.

Yogyakarta, April 2017
Kepala PPPPTK Matematika,

Dr. Dra. Daswatia Astuty, M.Pd.
NIP. 196002241985032001

Daftar Isi

Daftar Gambar

Daftar Tabel

Pendahuluan

A. Latar Belakang

Pendidik adalah tenaga kependidikan yang berkualifikasi sebagai guru, dosen, konselor, pamong belajar, widyaiswara, tutor, instruktur, fasilitator, dan sebutan lain yang sesuai dengan kekhususannya, serta berpartisipasi dalam menyelenggarakan pendidikan. Guru dan tenaga kependidikan wajib melaksanakan kegiatan pengembangan keprofesian secara berkelanjutan agar dapat melaksanakan tugas profesionalnya. Program Pengembangan Keprofesian Berkelanjutan (PKB) adalah pengembangan kompetensi Guru dan Tenaga Kependidikan yang dilaksanakan sesuai kebutuhan, bertahap, dan berkelanjutan untuk meningkatkan profesionalitasnya.

Pengembangan keprofesian berkelanjutan sebagai salah satu strategi pembinaan guru dan tenaga kependidikan diharapkan dapat menjamin guru dan tenaga kependidikan agar secara terus menerus memelihara, meningkatkan, dan mengembangkan kompetensi sesuai dengan standar yang telah ditetapkan. Pelaksanaan kegiatan PKB akan mengurangi kesenjangan antara kompetensi yang dimiliki guru dan tenaga kependidikan dengan tuntutan profesional yang dipersyaratkan.

Guru dan tenaga kependidikan wajib melaksanakan PKB baik secara mandiri maupun kelompok. Khusus untuk PKB dalam bentuk diklat dilakukan oleh lembaga pelatihan sesuai dengan jenis kegiatan dan kebutuhan guru. Penyelenggaraan Guru Pembelajar merupakan salah satu bentuk PKB yang dilaksanakan oleh PPPPTK dan LPPPTK KPTK. Pelaksanaan Program Pengembangan Keprofesian Berkelanjutan tersebut memerlukan modul sebagai salah satu sumber belajar bagi peserta diklat. Modul merupakan bahan ajar yang dirancang untuk dapat dipelajari secara mandiri oleh peserta, berisi materi, metode, batasan-batasan, dan cara mengevaluasi yang disajikan secara sistematis dan menarik untuk mencapai tingkatan kompetensi yang diharapkan sesuai dengan tingkat kompleksitasnya.

Modul PKB untuk materi Logika, Sejarah, dan Filsafat Matematika ini merupakan suatu usaha untuk membantu guru dan tenaga kependidikan matematika meningkatkan profesinya dalam kompetensi keilmuan, khususnya logika matematika serta sejarah dan filsafat matematika. Modul ini sebagai sarana untuk meningkatkan penguasaan materi pada logika, sejarah, dan filsafat matematika yang dikemas secara sistematis untuk mempermudah menguasai kompetensi tersebut.

B. Tujuan

Tujuan disusunnya modul materi Logika, Sejarah dan Filsafat ini adalah memberikan fasilitas bagi guru dan tenaga pendidik untuk mempelajari konsep dasar logika, sejarah dan filsafat dengan mengintegrasikan penguatan pendidikan karakter.

C. Peta Kompetensi

Kompetensi yang dituju dalam mempelajari modul ini sesuai dengan standar kompetensi guru yang termuat dalam Permendiknas No.16 tahun 2007 tentang Standar Kualifikasi Akademik dan Kompetensi Guru yaitu menjelaskan sejarah dan filsafat matematika serta menggunakan logika matematika.

STANDAR KOMPETENSI GURU		INDIKATOR PENCAPAIAN KOMPETENSI
KOMPETENSI INTI GURU	KOMPETENSI GURU MATA PELAJARAN	
Menguasai materi, struktur, konsep, dan pola pikir keilmuan yang mendukung mata pelajaran yang diampu.	Menggunakan logika matematika.	Mengidentifikasi kalimat terbuka dan bukan terbuka
		Menentukan nilai kebenaran suatu pernyataan.
		Menerapkan logika matematika dalam pemecahan masalah yang berkaitan dengan pernyataan majemuk dan pernyataan berkuantor
		Menerapkan modus ponens, modus tollens dan prinsip silogisme dalam menarik kesimpulan
	Menjelaskan sejarah dan filsafat matematika	Mengidentifikasi manfaat sejarah matematika untuk memotivasi siswa dalam pembelajaran matematika
		Menjelaskan aliran-aliran dalam filsafat matematika.
		Mengidentifikasi karakteristik pembelajaran matematika di sekolah sesuai dengan aliran filsafat matematikanya

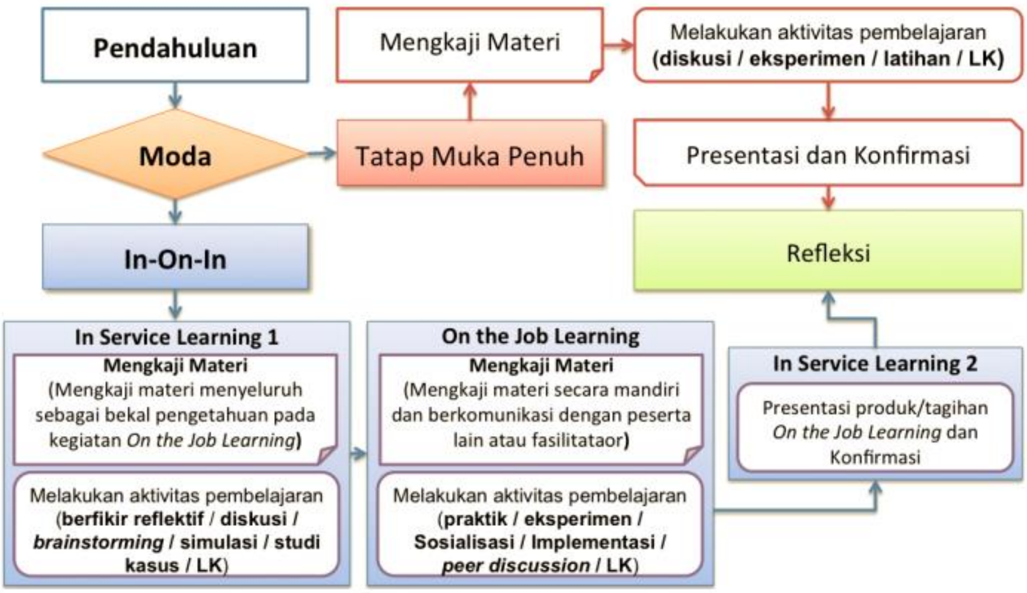
D. Ruang Lingkup

Modul ini terdiri atas 7 kegiatan belajar yang mencakup logika, sejarah dan filsafat. Pokok-pokok materi dalam modul ini adalah sebagai berikut:

1. Pernyataan, pernyataan majemuk dan kuantor.
2. Ingkaran dari suatu pernyataan.
3. Invers, konvers dan kontraposisi.
4. Penarikan kesimpulan.
5. Garis Besar Sejarah Matematika.
6. Sejarah Matematika: Beberapa Konsep dan Tokoh Penting Terkait Topik Matematika di Sekolah.
7. Pengertian Filsafat dan Alirannya serta Implikasi Filsafat Matematika pada Pembelajaran.

E. Saran Cara Penggunaan Modul

Modul ini disusun untuk digunakan dalam pelatihan model tatap muka penuh maupun model tatap muka In-On-In. Materi disajikan secara berjenjang sesuai urutan kompetensi yang dibutuhkan. Diharapkan Anda mempelajari modul ini sesuai urutan. Anda dapat mengukur kemampuan penguasaan kompetensi dengan mengerjakan soal latihan yang diberikan dan kemudian mencocokkan dengan kunci jawaban yang disediakan.

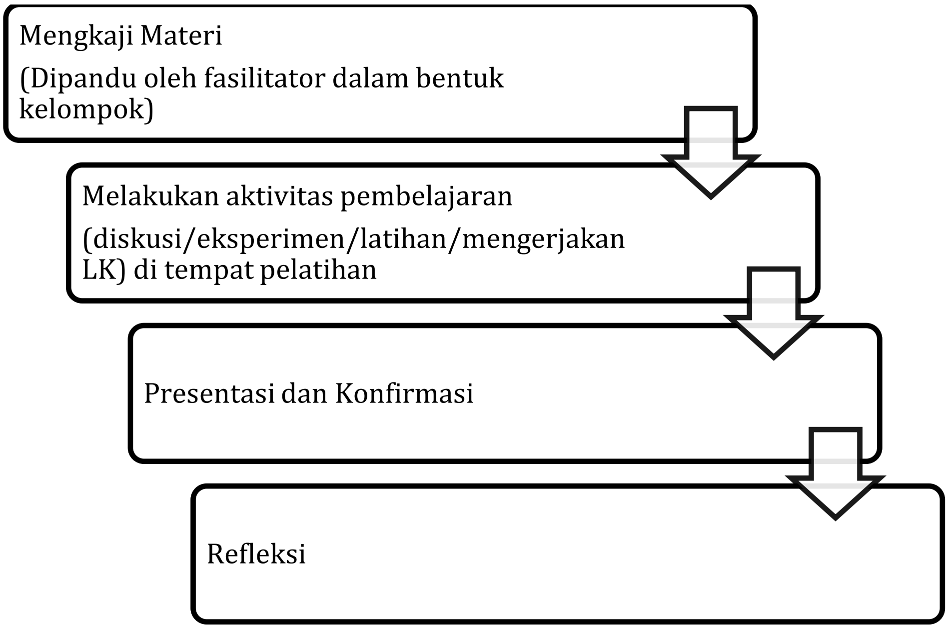


Alur Model Pembelajaran Tatap Muka

1. Deskripsi Kegiatan Diklat Tatap Muka Penuh

Kegiatan pembelajaran diklat tatap muka penuh adalah kegiatan fasilitasi peningkatan kompetensi guru melalui model tatap muka penuh yang dilaksanakan oleh unit pelaksana teknis di lingkungan ditjen. GTK maupun lembaga diklat lainnya. Kegiatan tatap muka penuh ini dilaksanakan secara terstruktur pada suatu waktu yang dipandu oleh fasilitator.

Tatap muka penuh dilaksanakan menggunakan alur pembelajaran sebagai berikut.



Rincian kegiatan pembelajaran tatap muka penuh adalah sebagai berikut.

a. Pendahuluan

Pada kegiatan pendahuluan, fasilitator memberi kesepatan peserta diklat untuk mencermati:

- Latar belakang yang memuat gambaran materi
- Tujuan kegiatan pembelajaran untuk setiap materi
- Kompetensi yang akan dicapai
- Ruang lingkup materi
- Langkah-langkah penggunaan modul.

b. Mengkaji Materi

Pada kegiatan mengkaji materi modul, fasilitator memberi kesempatan kepada guru sebagai peserta untuk mempelajari materi yang diuraikan secara singkat sesuai dengan indikator pencapaian hasil belajar. Guru sebagai peserta dapat mempelajari materi secara individual maupun berkelompok dan dapat mengkonfirmasi permasalahan kepada fasilitator.

c. Melakukan aktivitas pembelajaran

Pada bagian ini, peserta melakukan aktivitas pembelajaran sesuai dengan rambu-rambu atau instruksi yang tertera pada modul dan dipandu oleh fasilitator. Kegiatan pembelajaran pada aktivitas pembelajaran ini berbentuk interaksi langsung di kelas pelatihan sesama peserta pelatihan dan fasilitator.

Pada saat mengikuti aktivitas pembelajaran, peserta juga aktif menggali informasi dari berbagai sumber, mengumpulkan dan mengolah data sehingga peserta dapat mengambil kesimpjulan dari kegiatan pembelajaran yang berlangsung.

d. Presentasi dan Konfirmasi

Pada kegiatan ini, peserta mempresentasikan hasil kegiatan. Fasilitator melakukan konfirmasi terhadap paparan dan hasil yang telah dicapai oleh peserta.

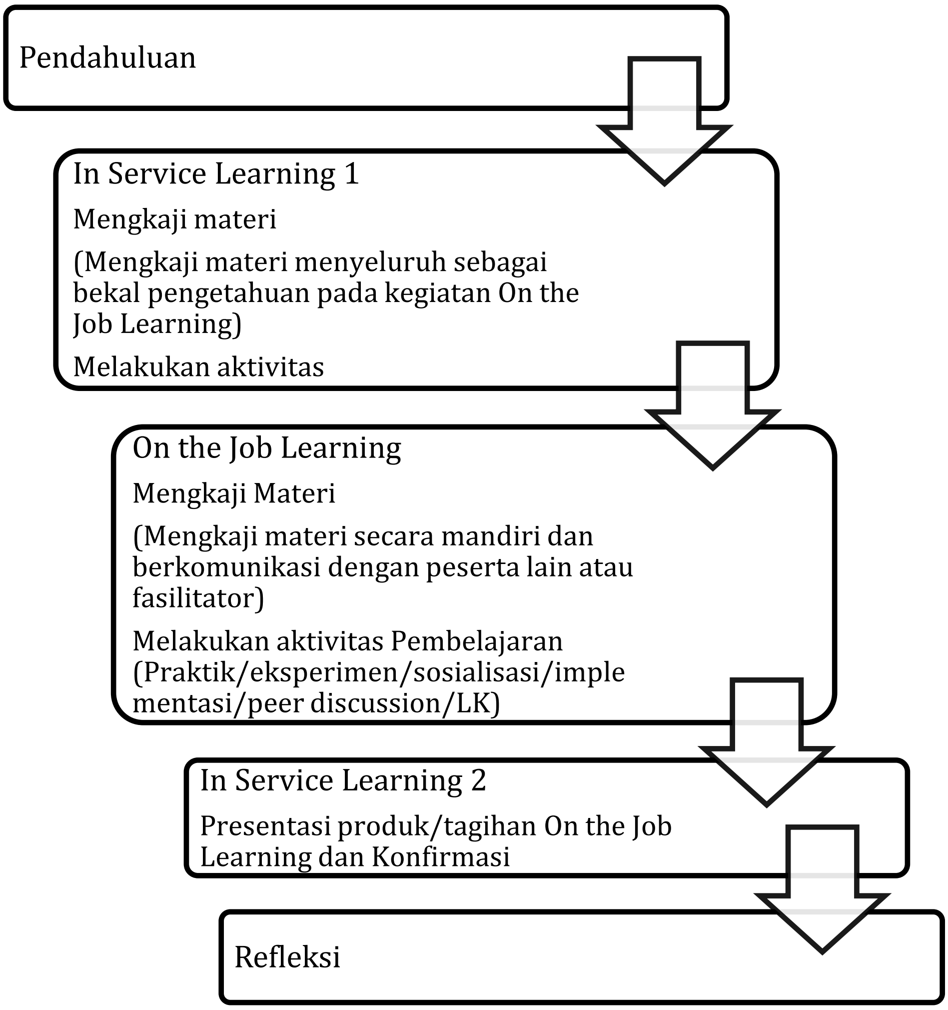
e. Refleksi

Pada bagian ini peserta dan fasilitator me-*review* atau melakukan refleksi materi berdasarkan seluruh kegiatan pembelajaran, kemudian didampingi oleh panitia menginformasikan tes akhir yang akan dilakukan oleh seluruh peserta yang dinyatakan layak tes akhir.

1. Deskripsi kegiatan diklat tatap muka In-On-In

Kegiatan diklat tatap muka dengan model In-On-In adalah kegiatan fasilitasi peningkatan kompetensi guru yang menggunakan tiga kegiatan utama yaitu *In Service Learning* 1 (In-1), *On the Job Learning* (On), dan *In Service Learning* 2 (In-2).

Garis besar alur kegiatan pembelajaran tatap muka In-On-In dapat dilihat pada diagram berikut.



Penjelasan lebih lengkap tentang alur di atas adalah sebagai berikut,

a. Pendahuluan

Kegiatan pendahuluan disampaikan pada saat In-1. Fasilitator memberi kesempatan pada peserta diklat untuk mencermati:

- latar belakang yang memuat gambaran materi,
- tujuan kegiatan pembelajaran setiap materi,
- kompetensi atau indikator yang akan dicapai melalui modul,
- ruang lingkup materi kegiatan pembelajaran,
- langkah-langkah penggunaan modul.

b. In Service Learning 1 (In-1)

- Mengkaji Materi

Pada kegiatan mengkaji materi modul ini, fasilitator memberi kesempatan kepada guru sebagai peserta untuk mempelajari materi yang diuraikan secara singkat sesuai dengan indikator pencapaian hasil belajar. Guru sebagai peserta dapat mempelajari materi secara individual maupun berkelompok dan dapat mengkonfirmasi permasalahan kepada fasilitator.

- Melakukan aktivitas pembelajaran

Pada kegiatan ini peserta melakukan kegiatan pembelajaran sesuai dengan rambu-rambu atau instruksi yang tertera pada modul dan dipandu oleh fasilitator. Kegiatan pembelajaran pada aktivitas pembelajaran berbentuk berinteraksi di kelas pelatihan, baik itu dengan menggunakan metode berfikir reflektif, diskusi, *brainstorming*, simulasi, maupun studi kasus yang kesemuanya dapat melalui Lembar Kerja yang telah disusun sesuai dengan kegiatan pada In-1.

Pada aktivitas pembelajaran materi ini peserta secara aktif menggali informasi, mengumpulkan dan mempersiapkan rencana pembelajaran pada *on the job learning*.

c. On the Job Learning (On)

- Mengkaji Materi

Pada tahap ini, guru mempelajari materi yang telah diuraikan pada In-1. Guru sebagai peserta membuka dan mempelajari kembali materi sebagai bahan dalam mengerjakan tugas-tugas yang ditagihkan.

- Melakukan aktivitas Pembelajaran

Pada kegiatan ini peserta melakukan kegiatan pembelajaran di sekolah maupun di kelompok kerja berbasis pada rencana yang telah disusun pada IN1 dan sesuai dengan rambu-rambu atau instruksi yang tertera pada modul. Kegiatan pembelajaran pada aktivitas pembelajaran ini akan menggunakan pendekatan/metode praktik, eksperimen, sosialisasi, implementasi, *peer discussion* yang secara langsung di dilakukan di sekolah maupun kelompok kerja melalui tagihan berupa Lembar Kerja yang telah disusun sesuai dengan kegiatan pada ON.

Selama aktivitas pembelajaran On berlangsung, peserta secara aktif menggali informasi, mengumpulkan dan mengolah data dengan melalukan aktivitas yang telah ditentukan dan menyelesaikan tagihan pada *on the job learning*.

d. In Service Learning 2 (In-2)

Pada tahap ini, peserta memaparkan produk-produk tagihan On yang akan dikonfirmasi bersama oleh teman sejawat dan fasilitator.

e. Refleksi

Peserta bersama fasilitator me-*review* atau melakukan refleksi materi berdasarkan pengalaman selama mengikuti kegiatan pembelajaran. Fasilitator didampingi panitia menginformasikan tes akhir yang akan dilakukan oleh seluruh peserta yang dinyatakan layak mengikuti tes akhir.

2. Lembar Kerja

Modul pengembangan keprofesian berkelanjutan kelompok kompetensi J terdiri dari beberapa kegiatan pembelajaran yang di dalamnya terdapat aktivitas pembelajaran sebagai sarana untuk pendalaman dan penguatan materi. Untuk itu, pada modul ini disediakan lembar kerja sebagai berikut:

Daftar Lembar Kerja Modul

No.	**Kode LK**	**Nama LK**	**Keterangan**
1.	LK 1.1.	Pernyataan dan Kalimat Terbuka (In-1)	TM, IN-1
2.	LK 1.2.	Pernyataan dan Kalimat Terbuka (On)	TM, ON
3.	LK 1.3.	Soal HOTS tentang Pernyataan dan Kalimat Terbuka (On)	TM, ON
4.	LK 2.1.	Ekuivalensi Logis dan Ingkaran (In-1)	TM, IN-1
5.	LK 2.2.	Ekuivalensi Logis dan Ingkaran (On)	TM, ON
6.	LK 2.3.	Soal HOTS tentang Ekuivalensi Logis dan Ingkaran (On)	TM, ON

No.	Kode LK	Nama LK	Keterangan
7.	LK 3.1.	Invers, Konvers, dan Kontraposisi (In-1)	TM, IN-1
8.	LK 3.2.	Invers, Konvers, dan Kontraposisi (On)	TM, ON
9.	LK 3.3.	Soal HOTS tentang Invers, Konvers, dan Kontraposisi	TM, ON
10.	LK 4.1.	Tautologi, Kontradiksi, dan Kontingensi (In-1)	TM, IN-1
11.	LK 4.2.	Tautologi, Kontradiksi, dan Kontingensi (On)	TM, ON
12.	LK 4.3.	Soal HOTS tentang Tautologi, Kontradiksi, dan Kontingensi.	TM, ON
13.	LK 5.1.	Penarikan Kesimpulan (In-1)	TM, IN-1
14.	LK 5.2.	Penarikan Kesimpulan (On)	TM, ON
15.	LK 5.3.	Soal HOTS tentang Penarikan Kesimpulan.	TM, ON
16.	LK 6.1.	World Café of The History of Mathematics (In-1)	TM, IN-1
17.	LK 6.2.	Pemetaan KI-KD dan Sejarah Matematika (On)	TM, ON
18,	LK 6.3.	Menyusun Ide/Rancangan Pembelajaran Menggunakan Sejarah Matematika (On)	TM, ON
19.	LK 7	Memahami Filsafat Matematika dan Implikasinya (In)	TM, IN-1

Keterangan:

TM : Digunakan pada Tatap Muka Penuh

IN-1 : Digunakan pada *In service Learning* 1

ON : Digunakan pada *On the Job Learning*

Kegiatan Pembelajaran 1: Pernyataan dan Kalimat Terbuka

A. Tujuan

Setelah mempelajari modul ini diharapkan anda dapat menjelaskan pengertian pernyataan dan kalimat terbuka, membedakan pernyataan dengan bukan pernyataan, menentukan kebenaran dari suatu pernyataan majemuk meliputi konjungsi, disjungsi, implikasi, dan biimplikasi, serta menyatakan suatu pernyataan menggunakan kuantor.

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

Setelah menyelesaikan modul ini diharapkan anda dapat:

1. Membedakan pernyataan dan bukan pernyataan.
2. Menentukan nilai kebenaran suatu pernyataan.
3. Menentukan ingkaran dari suatu pernyataan.
4. Menyatakan suatu pernyataan majemuk dengan menggunakan simbol logika yang tepat.
5. Membuat tabel kebenaran dari suatu pernyataan majemuk.
6. Menyatakan suatu pernyataan menggunakan kuantor.

C. Uraian Materi

1. PENGERTIAN PERNYATAAN

Dalam mempelajari logika, pernyataan merupakan bagian pertama yang diperhatikan. Oleh karena itu, kita harus memahami dengan baik definisi dari pernyataan. Perhatikan beberapa kalimat berikut:

1) Banyaknya bilangan prima adalah tak hingga.
2) Matahari terbit dari selatan.
3) Dua buah bilangan ganjil jika dikalikan akan menghasilkan bilangan ganjil
4) Siapakah nama anak itu?
5) Semoga kamu lekas sembuh.
6) Selesaikan segera pekerjaanmu!
7) Harga makanan di warung pak Ahmad murah.

Tiga kalimat pertama di atas mempunyai nilai kebenaran, artinya dapat ditentukan apakah kalimat tersebut bernilai benar atau salah, tetapi tidak kedua-duanya. Kalimat 1 dan 3 bernilai benar, sedangkan kalimat 2 bernilai salah. Berbeda halnya dengan empat kalimat terakhir, kita tidak dapat menentukan kebenaran dari kalimat tersebut. Kalimat 4, 5 dan 6 berturut-turut merupakan pertanyaan, harapan dan perintah yang tidak dapat dikatakan benar ataupun salah, sedangkan kalimat 7 kebenarannya tidak dapat ditentukan karena merupakan sesuatu yang relatif.

DEFINISI: Pernyataan adalah kalimat (deklaratif) yang mempunyai tepat satu nilai kebenaran, yaitu benar atau salah.

Secara umum, kebenaran suatu pernyataan dapat ditentukan melalui:

1) Pengamatan
   Nilai kebenaran suatu pernyataan didasarkan pada fakta yang diamati pada waktu dan tempat tertentu.
   Contoh:
   a) Jakarta adalah ibu kota Indonesia.
   b) Jumlah pengguna narkoba di Indonesia semakin meningkat dalam tiga tahun terakhir.
   c) Rata-rata tinggi badan usia 25-40 tahun penduduk Indonesia adalah 160 cm.
2) Aturan Hukum/Kaidah yang Berlaku
   Nilai kebenaran suatu pernyataan didasarkan pada aturan hukum atau kaidah yang sudah diakui kebenarannya.
   Contoh:
   a) Jumlah dua bilangan genap merupakan bilangan genap.
   b) Pengendara wajib berhenti pada saat lampu lalu lintas berwarna merah.
   c) Menjiplak hasil karya orang lain merupakan tindakan melanggar hukum.

Selanjutnya suatu pernyataan dinotasikan dengan huruf kecil seperti p, q, r, dan sebagainya.

Contoh 2.

p: Hasil kali dua bilangan genap adalah genap

q: Indonesia adalah negara kesatuan yang berbentuk republik.

r: Jumlah semua besar sudut dalam segitiga adalah 180°.

2. INGKARAN DARI SUATU PERNYATAAN

Misalkan diberikan sebuah pernyataan p, pernyataan "$\sim p$" dibaca “tidak p”, “bukan p”, atau “tidak benar bahwa p” dinamakan **negasi dari p** atau **ingkaran dari p**. Notasi “¬” kadang-kadang digunakan sebagai pengganti notasi “∼". Nilai kebenaran $\sim p$ berlawanan dengan nilai kebenaran p.

Contoh:

Misalkan p: 4 merupakan bilangan positif, maka $\sim p$ dapat dinyatakan dalam berbagai bentuk, seperti

$\sim p$: Tidak benar bahwa 4 merupakan bilangan positif.

$\sim p$: 4 bukan bilangan positif.

Harus dicatat bahwa “4 merupakan bilangan negatif” bukanlah negasi dari p, karena **bukan bilangan positif** meliputi 0 dan bilangan negatif.

3. PERNYATAAN MAJEMUK

Pada praktiknya, suatu pernyataan dalam matematika tidak hanya terdiri atas pernyataan tunggal saja, namun seringkali melibatkan beberapa pernyataan tunggal yang dihubungkan dengan kata hubung seperti ***atau***, ***dan***, ***jika***… ***maka***… serta ***jika dan hanya jika***. Sebagai contoh dalam teori bilangan ada suatu teorema “jika bilangan bulat *p* terbagi oleh 2 dan terbagi oleh 3, maka bilangan bulat *p* terbagi oleh 6“.

Pernyataan yang dihubungkan dengan kata hubung tersebut dinamakan dengan pernyataan majemuk. Pernyatan majemuk adalah pernyataan yang terdiri atas beberapa pernyataan tunggal. Simbol-simbol logika yang digunakan dalam pernyataan majemuk disajikan dalam tabel berikut.

Tabel 1. Penghubung Pernyataan dan Lambangnya

No	Nama	Lambang	Makna
1	Konjungsi	$\wedge$	dan, tetapi, meskipun, walaupun
2	Disjungi	$\vee$	atau
3	Implikasi	$\Rightarrow$	jika ... maka ...
4	Biimplikasi	$\Leftrightarrow$	jika dan hanya jika

Jika beberapa pernyataan dihubungkan dengan penghubung seperti di atas, maka pernyataan tersebut dinamakan pernyataan majemuk. Oleh karena itu untuk menilai kebenaran suatu pernyataan dapat digunakan suatu tabel yang merepresentasikan kebenaran dari pernyataan tersebut.

Untuk itu berikut ini akan dibahas setiap pernyatan majemuk tersebut dan tabel kebenarannya.

a. KONJUNGSI

Konjungsi merupakan pernyataan majemuk dengan kata penghubung "dan". Dua pernyataan p dan q yang dinyatakan dalam bentuk $p \wedge q$ disebut konjungsi dan dibaca p dan q. Sebagai contoh, pernyataan "peserta diklat wajib menyerahkan foto dan membawa KTP" adalah suatu konjungsi yang terdiri atas dua pernyataan tunggal:

p: peserta diklat wajib menyerahkan foto;

q: peserta diklat wajib membawa KTP.

Seandainya kedua pernyataan tunggalnya yaitu p, q semuanya bernilai benar, maka pernyataan $p \wedge q$ (peserta diklat menyerahkan foto dan membawa KTP) juga bernilai benar. Jika salah satu diantara p, q ada yang salah atau bahkan keduanya salah, misalnya peserta diklat tersebut tidak membawa KTP atau tidak menyerahkan foto, maka peserta diklat tersebut telah melanggar ketentuan. Hal ini mengakibatkan pernyataan $p \wedge q$ bernilai salah.

Oleh karena itu, suatu konjungsi akan bernilai benar, hanya apabila kedua pernyataan tunggalnya bernilai benar. Secara umum, tabel kebenaran dari konjungsi adalah sebagai berikut.

Tabel 2. Tabel Kebenaran Konjungsi

p	q	$p \wedge q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	S

b. DISJUNGSI

Disjungsi merupakan pernyataan majemuk dengan kata penghubung "atau". Dua pernyataan p dan q yang dinyatakan dalam bentuk $p \vee q$ disebut disjungsi dan dibaca p atau q. Sebagai contoh, peraturan "peserta diklat wajib membawa KTP atau NPWP" merupakan disjungsi dengan pernyataan tunggalnya adalah:

p: peserta diklat wajib membawa KTP;

q: peserta diklat wajib membawa NPWP.

Jika peserta diklat membawa salah satu diantara KTP atau NPWP, maka peserta diklat itu telah menaati peraturan (pernyataan) tersebut. Seandainya peserta diklat tidak membawa kedua identitas tersebut, maka peserta diklat itu tidak memenuhi atau tidak menaati peraturan tersebut.

Oleh karena itu, suatu disjungsi akan bernilai benar apabila salah satu diantara pernyataan tunggalnya bernilai benar. Disjungsi seperti ini yang umum digunakan dalam pernyataan matematis dan dinamakan disjungsi inklusif. Selengkapnya nilai kebenaran suatu disjungsi inklusif disajikan dalam tabel berikut.

Tabel 3. Tabel Kebenaran Disjungsi Inklusif

p	q	$p \vee q$
B	B	B
B	S	B
S	B	B
S	S	S

Dalam tabel di atas, apabila dua pernyataan p, q masing-masing bernilai benar, maka pernyataan disjungsi ($p \vee q$) juga bernilai benar. Akan tetapi, dalam beberapa kasus hal tersebut tidak berlaku,sebagai contoh perhatikan pernyataan berikut:

p: Rizal lahir di Bali

q: Rizal lahir di Yogyakarta

pernyataan $p \vee q$, yaitu Rizal lahir di Bali atau Rizal lahir di Yogyakarta akan bernilai benar apabila hanya satu (p saja atau q saja) yang bernilai benar. Oleh karena itu, kondisi ini dinamakan **disjungsi ekslusif**, dilambangkan dengan $p \veebar q$. Tabel kebenaran dari disjungsi ekslusif adalah sebagai berikut:

Tabel 4. Tabel Kebenaran Disjungsi Ekslusif

p	q	$p \veebar q$
B	B	S
B	S	B
S	B	B
S	S	S

c. IMPLIKASI

Dua pernyataan p dan q yang dinyatakan dalam bentuk kalimat "jika p maka q" disebut implikasi/kondisional/pernyataan bersyarat dan dilambangkan sebagai $p \Rightarrow q$. Pada implikasi $p \Rightarrow q$, pernyataan p dinamakan pendahulu atau syarat cukup atau anteceden, sedangkan q dinamakan pengikut atau syarat perlu atau konsekuen. Nilai kebenaran dari suatu implikasi dapat dijelaskan sebagai berikut. Misalnya kita berjanji pada anak kita Ahmad, jika (Ahmad) naik kelas 3 SD, maka Ahmad akan dibelikan sepeda. Disini ada dua pernyataan tunggal, yaitu:

p: Ahmad naik kelas 3 SD

q: Ahmad dibelikan sepeda

Seandainya p bernilai benar, yaitu Ahmad naik kelas 3 SD dan q juga benar, yaitu Ahmad dibelikan sepeda, maka kita tidak melanggar janji kita sehingga pernyataan $p \Rightarrow q$ bernilai benar. Adapun jika p benar, tetapi ternyata q salah, yaitu Ahmad tidak jadi dibelikan sepeda, maka kita telah melanggar janji kita, sehingga pernyataan

$p \Rightarrow q$ bernilai salah.

Selanjutnya bagaimanakah apabila p bernilai salah, yaitu Ahmad tidak naik kelas 3 SD? Pada kasus ini kita diberi kebebasan apakah tetap akan membelikan sepeda atau tidak. Oleh karena itu, apapun nilai kebenaran dari pernyataan q, maka pernyataan

$p \Rightarrow q$ tetap bernilai benar.

Secara ringkas, tabel kebenaran dari implikasi dapat disajikan sebagai berikut.

Tabel 5. Tabel Kebenaran Implikasi

p	q	$p \Rightarrow q$
B	B	B
B	S	S
S	B	B
S	S	B

d. BIIMPLIKASI

Biimplikasi adalah pernyataan p dan q, yaitu $p \Leftrightarrow q$ bernilai benar jika p dan q mempunyai nilai kebenaran yang sama. Pernyataan $p \Leftrightarrow q$ dibaca "p jika dan hanya jika q".

Biimplikasi sebenarnya merupakan pernyataan majemuk kombinasi antara implikasi dan konjungsi, yaitu bahwa:

$p \Leftrightarrow q$ setara dengan $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$.

Tabel kebenaran dari implikasi disajikan sebagai berikut.

Tabel 6. Tabel Kebenaran Bimplikasi

p	q	$p \Leftrightarrow q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	B

PENTING:

Pada operasi bilangan real, misalnya $2 + 3 \times 5$, maka kita sudah mengetahui bahwa urutan operasi yang benar adalah $2 + (3 \times 5)$. Demikian pula, pada logika berlaku ketentuan sebagai berikut:

1) $\sim$ atau $\neg$ merupakan lambang operasi negasi (dibahas di materi berikutnya) dioperasikan terlebih dahulu.

2) Operasi $\wedge$, $\vee$ mempunyai kekuatan yang sama, jika keluar bersamaan harus diberi tanda kurung.

3) Operasi $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ merupakan penghubung yang dioperasikan paling akhir

Contoh.

1) $a \wedge b \Rightarrow c$ artinya $(a \wedge b) \Rightarrow c$

2) $a \Leftrightarrow b \Rightarrow c$ artinya $a \Leftrightarrow (b \Rightarrow c)$

3) $\sim p \wedge r \Rightarrow s$ artinya $[(\sim p) \wedge r] \Rightarrow s$

4) $a \Rightarrow b \vee \sim c$ artinya $a \Rightarrow [b \vee (\sim c)]$

5) $a \vee b \wedge c$ merupakan penulisan yang salah, artinya pada kasus seperti ini harus dilakukan pemberian tanda kurung ( ) untuk menentukan operasi mana yang akan dikerjakan terlebih dahulu.

3. KALIMAT TERBUKA DAN KUANTOR

Kalimat terbuka adalah suatu kalimat yang memuat variabel sehingga belum dapat ditetukan kebenarannya. Sebagai contoh, $5 + a = 9$ merupakan kalimat terbuka yang belum dapat ditentukan nilai kebenarannya. Namun, jika kita tambahkan kalimat tersebut dengan kata "terdapat suatu a", yaitu kalimat tersebut berubah menjadi, "terdapat suatu a, sehingga $5 + a = 9$", maka kalimat tersebut merupakan pernyataan yang bernilai BENAR.

Demikian pula, apabila pernyataan tersebut kita ubah menjadi "untuk setiap a, $5 + a = 9$", maka kalimat terbuka tersebut sudah menjadi suatu pernyataan. Dalam hal ini, pernyataan "untuk setiap a, $5 + a = 9$" merupakan pernyataan yang bernilai SALAH, misalnya untuk $a = 1$, jelas pernyataan tersebut tidak benar.

Jadi suatu kalimat terbuka akan berubah menjadi suatu pernyataan jika ditambahkan suatu pencacah seperti kata-kata (kuantor): setiap, terdapat, ada, beberapa, dan semua. Pernyataan yang dilengkapi dengan kata-kata ini dinamakan pernyataan berkuantor.

Selanjutnya, kuantor hanya dibedakan menjadi dua, yaitu:

1. Kuantor Universal

   Kata-kata yang biasa digunakan dalam kuantor universal adalah “semua” dan “untuk setiap”. Kuantor universal dilambangkan dengan ∀.

   Contoh:

   a) Semua bilangan real kuadrat merupakan bilangan real positif atau nol (dapat ditulis dengan notasi $\forall x \in R, x^2 \geq 0$).
   b) Untuk setiap segitiga siku-siku ABC dengan sisi a, b dan sisi miring c, maka berlaku $a^2 + b^2 = c^2$.

2. Kuantor Eksistensial.

   Pernyataan matematika yang dilengkapi dengan kata-kata “terdapat”, “ada”, dan “beberapa” merupakan pernyataan berkuantor eksistensial. Kuantor eksistensial dilambangkan dengan ∃.

   Contoh:

   a) Jika FPB $(a, b) = 1$, maka terdapat bilangan bulat x dan y sehingga $ax + by = 1$ (dapat ditulis dengan notasi $\text{FPB}(a, b) = 1 \Rightarrow \exists x, y \in Z$, $ax + by = 1$).
   b) Terdapat beberapa pasangan bilangan bulat m dan n, sehingga $\frac{4}{m} + \frac{2}{n} = 1$ (dapat ditulis dengan notasi $\exists m, n \in Z$, $\frac{4}{m} + \frac{2}{n} = 1$).

D. Aktivitas Pembelajaran

LK 1.1. Pernyataan dan Kalimat Terbuka (In-1)

Dari masing-masing nomor di bawah, pilihlah 3 item untuk dikerjakan di In-1.

1. Diantara kalimat berikut, kelompokan mana yang merupakan pernyataan dan mana yang bukan pernyataan.

   a) $10 + 3 < 5 + 11$
   b) $2a + 5 = 16$
   c) x^2 merupakan bilangan prima
   d) Matahari terbit dari timur.
   e) Siapakah nama anakmu?
   f) Semoga kondisi kesehatanmu baik baik saja.
   g) Tugas logika wajib dikumpulkan minggu depan.

2. Tentukan kebenaran dari pernyataan berikut.
    a) $5 + 4 > 3 + 4$
    b) Bilangan 131 merupakan bilangan prima
    c) Jumlah dua bilangan ganjil merupakan bilangan ganjil
    d) Ada bilangan prima yang terbesar.
    e) Tidak ada bilangan prima yang merupakan bilangan genap.
3. Buatlah tabel kebenaran dari pernyataan berikut.
    a) $p \Rightarrow q \vee r$
    b) $p \wedge q \Rightarrow r$
    c) $(p \vee q) \Leftrightarrow (p \wedge q)$
    d) $(p \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow s) \Rightarrow (p \Rightarrow s)$
    e) $p \vee q \Rightarrow q$
4. Tuliskan pernyataan berikut menggunakan lambang kuantor yang tepat.
    a) Terdapat suatu bilangan bulat m sehingga $m + 6 = 10$.
    b) Untuk setiap bilangan real x, berlaku $x^2 \geq 0$.
    c) Ada suatu bilangan real c, sehingga untuk setiap bilangan real x berlaku $f(x) - f(c) \geq 0$
    d) Untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat suatu $\delta > 0$ sehingga jika$|x - c| < \delta$, maka $|f(x) - L| < \varepsilon$.

LK 1.2. Pernyataan dan Kalimat Terbuka (On)

1. Kerjakan sisa soal yang belum diselesaikan di In-1.
2. Nyatakan dengan ekspresi logika makna dari
    a. $x \leq a$
    b. $a \leq x \leq b$
3. Tentukan tabel kebenaran dari $(p \vee q) \wedge \sim(p \wedge q)$ dan bandingkan hasilnya dengan $p \veebar q$.

LK 1.3. Soal HOTS tentang Pernyataan dan Kalimat Terbuka (On)

Bersama kelompok, Anda diharapkan saling berdiskusi dan bekerja sama mempelajari teknik penyusunan soal *high order thinking skills* (HOTS). Dengan kreativitas Anda, susunlah 2 soal HOTS terkait dengan pernyataan dan kalimat terbuka. Isikan pada kartu soal berikut. Soal yang Anda susun dapat berupa pilihan ganda atau uraian yang disertai dengan kunci jawaban atau pedoman pensekoran. Diutamakan merujuk pada kisi-kisi UN matematika SMA tahun 2017.

KARTU SOAL	
Jenjang	: Sekolah Menengah Atas
Mata Pelajaran	: Matematika
Kelas	:
Kompetensi Dasar	:
Indikator	:
Level	: Pengetahuan dan Pemahaman/Aplikasi/Penalaran *)
Materi	:
Bentuk Soal	: Pilihan Ganda
BAGIAN SIAL DISINI	
Kunci Jawaban	:

E. Latihan/Kasus/Tugas

Pilihlah jawaban yang paling tepat.

1. Pernyataan adalah kalimat deklaratif yang … .
   A. Memuat variabel
   B. Memiliki tepat satu nilai kebenaran
   C. Memerlukan jawaban
   D. Menunjukan maksud tertentu

2. Diantara kalimat berikut merupakan pernyataan, **kecuali**….
   A. 27 merupakan bilangan prima
   B. Matahari terbit dari barat
   C. Siapakah nama anak itu?
   D. $3+8=11$

3. Pernyataan yang bernilai salah di bawah ini adalah … .
   A. Kuadrat bilangan prima merupakan bilangan prima.
   B. $3-1=2$.
   C. $3 \leq 10-7$.
   D. Jumlah semua besar sudut suatu segitiga adalah 180°.

4. Kalimat terbuka adalah kalimat yang … .
   A. Memuat variabel sehingga belum dapat ditentukan nilai kebenarannya.
   B. Belum jelas kebenarannya.
   C. Sulit ditentukan nilai kebenarannya.
   D. Tidak mungkin dapat ditentukan nilai kebenarannya.

5. Semua pernyataan di bawah ini merupakan kalimat terbuka, kecuali … .
   A. $x = y + 3$.
   B. $18 < a$.
   C. Untuk semua bilangan cacah k, $2k + 1$ merupakan bilangan ganjil.
   D. $5k + 1$ merupakan bilangan ganjil.

6. Supaya kalimat terbuka $2x + 3y = 1$, bernilai benar, maka nilai (x, y) yang memenuhi adalah … .
   A. $(1, -1)$
   B. $(5, -3)$
   C. $(2, 1)$
   D. $(-1, -1)$

7. Pernyataan $p \Rightarrow \sim q \wedge r$ dibaca sebagai ... .
   A. $\big(p \Rightarrow (\sim q)\big) \wedge r$
   B. $(p \Rightarrow \sim q) \wedge r$
   C. $p \Rightarrow \sim(q \wedge r)$
   D. $p \Rightarrow ((\sim q) \wedge r)$

8. "Untuk setiap bilangan real x, berlaku $x^2 > 0$" merupakan pernyataan yang … .
   A. Benar
   B. Salah
   C. Belum dapat ditentukan nilai kebenarannya
   D. Belum lengkap

9. Misalkan a adalah pernyataan bernilai benar, maka $\sim a \Rightarrow b \vee c$ ... .
   A. Bernilai benar
   B. Bernilai salah
   C. Selalu bernilai salah
   D. Dapat bernilai benar atau salah

10. "Untuk setiap bilangan bulat x, $3x + 6$ selalu terbagi habis oleh 3" merupakan pernyataan yang … .
    A. dapat bernilai benar
    B. benar
    C. dapat bernilai salah
    D. salah

F. Rangkuman

Secara umum, materi yang dibahas pada kegiatan belajar 1 adalah sebagai berikut:

1. Pernyataan adalah kalimat (deklaratif) yang mempunyai tepat satu nilai kebenaran, yaitu benar atau salah, tetapi tidak kedua-duanya.
2. Kalimat terbuka adalah kalimat yang memuat variabel, sehingga belum dapat ditentukan nilai kebenarannya.
3. Pernyataan biasanya dinotasikan dengan huruf kecil seperti p, q, r, dan sebagainya.
4. Konjungsi adalah pernyataan majemuk yang dihubungkan dengan kata hubung "dan" yang dilambangkan dengan "$\wedge$". Suatu konjungsi akan bernilai benar apabila semua pernyataan tunggalnya bernilai benar.
5. Disjungsi (inklusif) adalah pernyataan majemuk yang dihubungkan dengan kata "atau" yang dinotasikan dengan "$\vee$". Disjungsi inkusif akan bernilai benar apabila ada salah satu pernyataan tunggal penyusunnya yang bernilai benar. Disjungsi ekslusif dilambangkan dengan "$\underline{\vee}$". Disjungsi ekslusif akan bernilai benar apabila hanya tepat satu diantara pernyataan tunggal penyusunnya yang bernilai benar.
6. Implikasi $p \Rightarrow q$ akan bernilai benar apabila p bernilai salah, atau q bernilai benar.
7. Biimplikasi $p \Leftrightarrow q$ akan bernilai benar apabila p dan q mempunyai nilai kebenaran yang sama.
8. Kuantor universal adalah pernyataan yang menggunakan kata-kata "untuk setiap", "untuk semua" dan dilambangkan dengan "$\forall$".

9. Kuantor eksistensial adalah pernyataan yang menggunakan kata-kata “terdapat”, “ada”, dan dilambangkan dengan “∃”.

G. Umpan Balik dan Tindak Lanjut

Periksalah jawaban Anda pada soal latihan dengan kunci jawaban di modul ini. Hitunglah jawaban yang benar, kemudian gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap kompetensi dalam kegiatan belajar 1.

$$\text{Tingkat penguasaan kompetensi} = \frac{jumlah\ jawaban\ benar}{10} \times 100\%$$

Tingkat penguasaan kompetensi	Keterangan
90 – 100 %	Baik sekali
80 – 89 %	Baik
70 – 79 %	Cukup
0 – 69 %	Kurang

Jika pencapaian tingkat kompetensi Anda lebih atau sama dengan 80%, maka Anda dapat meneruskan ke kegiatan belajar selanjutnya. Apabila masih dibawah 80%, sebaiknya Anda mengulangi lagi untuk mempelajari bagian-bagian yang masih kurang tersebut.

Kegiatan Pembelajaran 2: Ingkaran Pernyataan dan Ekuivalensi Logis

A. Tujuan

Setelah mempelajari modul ini diharapkan anda dapat menentukan ingkaran dari suatu pernyataan majemuk dan pernyataan berkuantor, serta menentukan pernyataan yang ekuivalen dengan suatu pernyataan yang diberikan.

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

Setelah menyelesaikan modul ini diharapkan anda dapat:

1. Menentukan ingkaran dari disjungsi.
2. Menentukan ingkaran dari konjungsi.
3. Menentukan ingkaran dari implikasi.
4. Menentukan ingkaran dari biimplikasi.
5. Menentukan ingkaran pernyataan berkuantor.
6. Menentukan ekuivalensi dua buah pernyataan.

C. Uraian Materi

Pada bagian ini akan dibahas ingkaran dari bentuk-bentuk pernyataan majemuk yang telah dipelajari pada kegiatan belajar 1 . Jika p adalah suatu pernyataan, maka $\sim p$ adalah ingkaran dari pernyataan tersebut yang nilai kebenarannya adalah salah jika p benar, dan sebaliknya $\sim p$ bernilai benar, jika p bernilai salah.

1. EKUIVALENSI

Perhatikan dua pernyataan berikut:

“6 lebih besar daripada 2” dan “2 lebih kecil daripada 6”

Pernyataan di atas merupakan 2 cara berbeda untuk menyatakan sesuatu yang sama. Contoh lain adalah (1) Anjing menggonggong dan ayam berkokok dengan (2) Ayam berkokok dan anjing menggonggong. Pernyataan (1) dan (2) memiliki makna yang sama. Misalkan p dan q berturut-turut menyatakan “Anjing menggonggong” dan “ayam berkokok” maka pernyataan (1) dapat dinyatakan sebagai $p \wedge q$ sedangkan pernyataan (2) sebagai $q \wedge p$. Jika dibuat tabel kebenaran, maka $p \wedge q$

dengan $q \wedge p$ akan memiliki nilai kebenaran yang sama. Dalam logika matematika dikatakan bahwa $p \wedge q$ ekuivalen dengan $q \wedge p$, dan biasa dituliskan sebagai $p \wedge q \equiv q \wedge p$.

p	q	$p \wedge q$	$q \wedge p$
B	B	B	B
B	S	S	S
S	B	S	S
S	S	S	S

2. NEGASI DARI KONJUNGSI

Untuk menghindari persaingan negatif dan menjaga kebersamaan, misal ditetapkan aturan bahwa siswa diwajibkan memakai sepatu hitam dan kaos kaki putih. Pernyataan yang sesuai untuk kondisi ini adalah "siswa wajib memakai sepatu hitam dan kaos kaki putih". Apabila seorang siswa memakai sepatu hitam tetapi dia tidak memakai kaos kaki putih, maka siswa tersebut melanggar ketentuan. Demikian pula ketika ada siswa yang memakai kaos kaki putih, tetapi sepatunya tidak hitam, maka dia juga melanggar ketentuan. Terlebih lagi ketika siswa tidak memakai sepatu hitam maupun kaos kaki putih.

Berdasarkan ilustrasi ini, pernyataan $p \wedge q$ akan teringkar apabila salah satu diantara p atau q ada yang teringkar. Oleh karena itu ingkaran dari $p \wedge q$ adalah pernyataan $\sim p \vee \sim q$. Hal ini dapat ditunjukkan dalam tabel berikut.

Tabel 7. Tabel Kebenaran Negasi dari Konjungsi

p	q	$p \wedge q$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$
B	B	**B**	S	S	**S**
B	S	**S**	S	B	**B**
S	B	**S**	B	S	**B**
S	S	**S**	B	B	**B**

Dalam tabel di atas, terlihat bahwa pada kolom $p \wedge q$ dan kolom $\sim p \vee \sim q$, nilai kebenarannya saling berkebalikan. Dengan kata lain terlihat bahwa ingkaran dari $p \wedge q$ adalah pernyataan $\sim p \vee \sim q$.

3. NEGASI DARI DISJUNGSI

Kita sudah sering melihat pernyataan “$3 \leq 4$”. Beberapa kesalahan dalam membaca notasi tersebut adalah “tiga kurang dari sama dengan 4”. Seharusnya yang benar pernyataan tersebut dibaca “tiga kurang dari atau sama dengan 4”. Pernyataan ini merupakan salah satu contoh disjungsi yang sering kita jumpai dalam pembelajaran matematika.

Dalam kehidupan sehari-hari kita juga sering menggunakan bentuk disjungsi, misalnya pada waktu ujian, siswa diperkenankan mengerjakan menggunakan pensil atau bolpoint. Dalam hal ini pernyataan tersebut merupakan disjungsi $(p \vee q)$. Selanjutnya apabila ada seorang siswa yang mengerjakan soal ujian menggunakan spidol, maka siswa tesebut telah melanggar ketentuan. Artinya seoarang siswa dikatakan melanggar ketentuan apabila tak satupun diantara p atau q dia penuhi. Jadi ingkaran dari pernyataan $p \vee q$ adalah pernyataan $(\sim p \wedge \sim q)$. Hal ini ditunjukkan dalam tabel berikut.

Tabel 8. Tabel Kebenaran Negasi dari Disjungsi

p	q	$p \vee q$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$
B	B	**B**	S	S	**S**
B	S	**B**	S	B	**S**
S	B	**B**	B	S	**S**
S	S	**S**	B	B	**B**

Pada tabel di atas, terlihat bahwa pada kolom $p \vee q$ dan kolom $\sim p \wedge \sim q$, nilai kebenarannya saling berkebalikan. Dengan kata lain terlihat bahwa ingkaran dari $p \vee q$ adalah pernyataan $\sim p \wedge \sim q$.

PENTING:

Augustus de Morgan, seorang matematikawan asal Britania, menemukan hukum yang dikenal dengan hukum de Morgan yaitu:

Negasi dari konjungsi adalah disjungsi dari negasinya
Negasi dari disjungsi adalah konjungsi dari negasinya.

Atau dalam simbol logika matematika:

$$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$
$$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

4. NEGASI DARI IMPLIKASI

Misalnya kita berjanji pada anak kita, "jika kamu juara 1 dalam lomba matematika, maka kamu saya belikan sepeda". Pernyataan ini, merupakan bentuk implikasi. Kita dikatakan melanggar janji ini, apabila sang anak juara dan kita tidak jadi membelikan hadiah sepeda.

Berdasarkan ilustrasi di atas, ingkaran pernyataan jika p, maka q adalah suatu pernyataan $p \wedge {\sim}q$. Hal ini dapat ditunjukkan dalam tabel berikut.

Tabel 9. Tabel Kebenaran Negasi dari Implikasi

p	q	$p \Rightarrow q$	${\sim}q$	$p \wedge {\sim}q$
B	B	**B**	S	**S**
B	S	**S**	B	**B**
S	B	**B**	S	**S**
S	S	**B**	B	**S**

Pada tabel tersebut, terlihat bahwa pada kolom $p \Rightarrow q$ dan kolom $p \wedge {\sim}q$, nilai kebenarannya saling berkebalikan. Dengan kata lain terlihat bahwa ingkaran dari $p \Rightarrow q$ adalah pernyataan $p \wedge {\sim}q$.

5. NEGASI DARI BIIMPLIKASI

Karena biimplikasi $p \Leftrightarrow q$ merupakan pernyataan yang setara dengan pernyataan $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$, maka untuk menentukan negasi dari dari suatu biimplikasi cukup dengan mengingkar pernyataan $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$. Oleh karena negasi dari suatu konjungsi sudah diketahui, maka dapat disimpulkan bahwa negasi dari $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ adalah $(p \wedge {\sim}q) \vee (q \wedge {\sim}p)$. Hal ini dapat ditunjukkan dalam tabel kebenaran berikut ini.

Tabel 10. Tabel Kebenaran Negasi dari Biimplikasi

p	q	$p \Leftrightarrow q$	${\sim}p$	${\sim}q$	$p \wedge {\sim}q$	$q \wedge {\sim}p$	$(p \wedge {\sim}q) \vee (q \wedge {\sim}p)$
B	B	**B**	S	S	**S**	**S**	**S**
B	S	**S**	S	B	**B**	**S**	**B**
S	B	**S**	B	S	**S**	**B**	**B**
S	S	**B**	B	B	**S**	**S**	**S**

6. NEGASI DARI PERNYATAAN BERKUANTOR

Perhatikan pernyataan-pernyataan berikut:

1) Semua manusia menyukai perbuatan baik.
2) Semua gajah memiliki gading.
3) Terdapat bilangan bulat a, sehingga $a - 2 = 6$.
4) Ada garis l yang tegak lurus dengan garis k.
5) Untuk setiap bilangan real positif a dan b, berlaku $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

Negasi atau ingkaran dari pernyataan di atas adalah:

1) Tidak semua manusia menyukai perbuatan baik.
   Pernyataan ini setara atau ekuivalen dengan pernyataan
   "Ada manusia yang tidak menyukai perbuatan baik".
2) Tidak semua gajah memiliki gading.
   Pernyataan ini setara atau ekuivalen dengan pernyataan
   "Ada gajah yang tidak memiliki gading".
3) Tidak ada bilangan bulat a sehingga $a - 2 = 6$.
   Pernyataan ini setara atau ekuivalen dengan pernyataan
   "Untuk setiap bilangan bulat a, tidak ada a sehingga $a - 2 = 6$".
4) Tak ada garis l yang tegak lurus dengan garis k.
5) Terdapat bilangan real positif a, b sehingga $\frac{a+b}{2} < \sqrt{ab}$

Berdasarkan contoh-contoh di atas, dapat diperoleh suatu kesimpulan sebagai berikut:

a) Negasi dari "semua x adalah y" adalah "ada x yang bukan y"
b) Negasi dari "Ada x yang bersifat y" adalah "Semua x tidak bersifat y".

D. Aktivitas Pembelajaran

LK 2.1. Ekuivalensi Logis dan Ingkaran (In-1)

Dari masing-masing nomor, pilihlah 2 (dua) item untuk diselesaikan dalam kelompok.

1. Tentukan ingkaran dari pernyataan berikut.
   a) 9 merupakan bilangan kuadrat sempurna.
   b) $9 + 6 > 12$

c) Iwan adalah seorang laki-laki.

d) Banyaknya bilangan prima adalah berhingga.

e) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

2. Tentukan negasi dari pernyataan majemuk berikut.

   a) $\sim a \vee b$

   b) $p \wedge \sim r$

   c) $\sim p \Rightarrow s$

   d) $p \Rightarrow (r \vee s)$

   e) $a \Leftrightarrow (b \Rightarrow c)$

3. Tentukan negasi dari pernyataan berkuantor berikut.

   a) Setiap peserta diklat wajib memakai batik.

   b) Ada peserta diklat yang mahir menggunakan komputer.

   c) Tidak semua peserta diklat memiliki buku referensi.

   d) Beberapa peserta diklat merupakan guru teladan.

4. Dengan menggunakan tabel kebenaran, tunjukkan bahwa

   a) $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$

   b) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

   c) $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

   d) $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

LK 2.2. Ekuivalensi Logis dan Ingkaran (On)

1. Kerjakan sisa LK 2.1. yang belum diselesaikan.
2. Tentukan negasi dari:
   a. Jika $ABCD$ adalah persegi, maka $ABCD$ merupakan persegi panjang.
   b. Jika ekspansi desimal bilangan r berhingga, maka r bilangan rasional.
3. Tunjukkan bahwa $p \vee q \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$, kemudian gunakan sifat tersebut untuk mengubah pernyataan “Jika $x > 2$ atau $x < -2$ maka $x^2 > 4$” ke bentuk ekuivalen yang berbeda.

LK 2.3. Soal HOTS tentang Ekuivalensi Logis dan Ingkaran (On)

Bersama kelompok, Anda diharapkan saling berdiskusi dan bekerja sama mempelajari teknik penyusunan soal *high order thinking skills* (HOTS).

Dengan kreativitas Anda, susunlah 2 soal HOTS terkait dengan ekuivalensi dan negasi dari suatu pernyataan. Isikan pada kartu soal berikut. Soal yang Anda susun dapat berupa pilihan ganda atau uraian yang disertai dengan kunci jawaban atau pedoman pensekoran. Diutamakan merujuk pada kisi-kisi UN matematika SMA tahun 2017.

KARTU SOAL	
Jenjang	: Sekolah Menengah Atas
Mata Pelajaran	: Matematika
Kelas	:
Kompetensi Dasar	:
Indikator	:
Level	: Pengetahuan dan Pemahaman/Aplikasi/Penalaran *)
Materi	:
Bentuk Soal	: Pilihan Ganda
BAGIAN SIAL DISINI	
Kunci Jawaban	:

E. Latihan/Kasus/Tugas

Pilihlah jawaban yang paling tepat.

1. Negasi dari “jika kamu bersungguh-sungguh maka cita-citamu tercapai” adalah ... .
   A. Kamu bersungguh-sungguh atau cita-citamu tidak tercapai
   B. Kamu bersungguh-sungguh dan cita-citamu tidak tercapai
   C. Kamu tidak bersungguh-sungguh atau cita-citamu tercapai
   D. Kamu tidak bersungguh-sungguh dan cita-citamu tercapai
2. Negasi dari pernyataan $a \Rightarrow (b \wedge c)$ adalah ... .
   A. $(a \wedge \sim b) \vee (a \wedge \sim c)$
   B. $(\sim a \vee \sim b) \wedge (\sim a \vee \sim c)$
   C. $(\sim a \vee b) \wedge (\sim a \vee c)$
   D. $(\sim a \wedge \sim b) \vee (\sim a \wedge \sim c)$
3. Negasi dari “warga negara giat bekerja dan negaranya maju” adalah suatu ... .
   A. warga negara tidak giat bekerja dan negaranya tidak maju

B. warga negara tidak giat bekerja dan negaranya maju

C. warga negara tidak giat bekerja atau negaranya tidak maju

D. warga negara tidak giat bekerja atau negaranya maju

4. Negasi dari pernyataan $2 < 6 - 2$ adalah….

A. $2 = 4$

B. $2 \neq 6 - 2$

C. $2 > 6 - 2$

D. $2 \geq 6 - 2$

5. Pernyataan $p \Rightarrow \sim q$ ekuivalen dengan …..

A. $\sim(p \wedge q)$

B. $\sim p \vee q$

C. $p \vee \sim q$

D. $p \wedge \sim q$

6. Ingkaran yang tepat dari "setiap warga harus menghadiri gotong royong" adalah … .

A. Setiap warga tidak harus menghadiri gotong royong

B. Setiap warga sebaiknya menghadiri gotong royong

C. Ada warga yang tidak harus menghadiri gotong royong

D. Tak ada warga yang menghadiri gotong royong

7. Ingkaran yang tepat dari "beberapa peserta diklat merupakan guru teladan" adalah ….

A. Tidak satupun peserta diklat bukan guru teladan

B. Semua peserta diklat merupakan guru teladan

C. Semua peserta diklat bukan guru teladan

D. Beberapa peserta diklat bukan guru teladan

8. Pernyataan majemuk yang ekuivalen dengan $\sim a \Rightarrow b \vee \sim c$ adalah ….

A. $a \vee b \vee c$

B. $a \vee (c \Rightarrow b)$

C. $a \wedge b \wedge \sim c$

D. $\sim a \vee \sim b \vee c$

9. Dua pernyataan majemuk dikatakan ekuivalen apabila ....

A. Mempunyai nilai kebenaran yang sama untuk setiap kondisi.

B. Merupakan hasil negasi dari pernyataan yang berkaitan

C. Dapat dibuat tabel kebenarannya

D. Dapat dibentuk pernyataan yang bernilai benar

10. Jika pernyataan $a \Rightarrow b$ bernilai salah, maka pernyataan $\sim a \wedge b \Leftrightarrow a \vee b$

A. benar

B. salah

C. belum dapat ditentukan kebenarannya

D. bisa benar atau salah

F. Rangkuman

Secara umum, materi yang dibahas pada kegiatan belajar 2 adalah sebagai berikut:

1. Negasi dari suatu konjungsi adalah suatu disjungsi dan sebaliknya.

   Jadi, $\sim(p \wedge q) = \sim p \vee \sim q$;

   $\sim(p \vee q) = \sim p \wedge \sim q$

2. Negasi dari suatu pernyataan berkuantor adalah sebagai berikut.

p	$\sim p$
$(\forall x)\ p_x$	$(\exists x) \sim p_x$
$(\exists x)\ p_x$	$(\forall x) \sim p_x$

3. Untuk menentukan ekuivalensi dari suatu pernyataan dapat digunakan aturan negasi dua kali, yaitu $p = \sim(\sim p)$.

G. Umpan Balik dan Tindak Lanjut

Periksalah jawaban Anda pada soal latihan dengan kunci jawaban di modul ini. Hitunglah jawaban yang benar, kemudian gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap kompetensi dalam kegiatan belajar 2.

$$\text{Tingkat penguasaan kompetensi} = \frac{jumlah\ jawaban\ benar}{10} \times 100\%$$

Tingkat penguasaan kompetensi	Keterangan
90 – 100 %	Baik sekali
80 – 89 %	Baik
70 – 79 %	Cukup
0 – 69 %	Kurang

Jika pencapaian tingkat kompetensi Anda lebih atau sama dengan 80%, maka Anda dapat meneruskan ke kegiatan belajar selanjutnya. Apabila masih di bawah 80%, sebaiknya Anda mengulangi lagi untuk mempelajari bagian-bagian yang masih kurang tersebut.

Kegiatan Pembelajaran 3: Invers, Konvers dan Kontraposisi

A. Tujuan

Setelah mempelajari modul ini diharapkan anda dapat menentukan invers, konvers dan kontraposisi dari suatu implikasi.

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

Setelah menyelesaikan modul ini diharapkan anda dapat:

1. Menentukan invers dari implikasi
2. Menentukan konvers dari implikasi
3. Menentukan kontraposisi dari implikasi

C. Uraian Materi

Pada bagian ini akan dibahas secara khusus tentang pernyataan yang berbentuk implikasi. Implikasi $p \Rightarrow q$ merupakan bentuk pernyataan yang sering digunakan untuk menyatakan suatu teorema atau sifat-sifat dalam matematika. Berikut beberapa contoh teorema atau sifat dalam matematika yang sudah biasa kita gunakan.

1) Jika $ABCD$ adalah belah ketupat, maka kedua diagonalnya berpotongan tepat di tengah-tengah.
2) Jika ABC adalah segitiga sama kaki, maka segitiga ABC memiliki 2 sudut yang sama besar.
3) Jika segiempat $ABCD$ memiliki empat sisi yang sama panjang, maka $ABCD$ adalah suatu jajar genjang.
4) Jika a adalah bilangan ganjil, maka $a + 1$ merupakan bilangan genap.
5) Jika bilangan bulat a terbagi oleh 4, maka a terbagi oleh 2.

Pada pembahasan sebelumnya, telah dipelajari bahwa pada implikasi $p \Rightarrow q$

a) pernyataan p dinamakan pendahulu atau anteceden atau syarat cukup

b) pernyataan q dinamakan pengikut atau konsekuen atau syarat perlu.

c) Implikasi bernilai salah hanya apabila pendahulu (anteceden) bernilai benar, tetapi konsekuen bernilai salah

d) Implikasi bernilai benar apabila anteceden bernilai salah atau konsekuen bernilai benar.

1. INVERS

Berdasarkan pernyataan-pernyataan di atas, kita dapat membuat suatu implikasi baru sebagai berikut:

1) Jika $ABCD$ adalah BUKAN belah ketupat, maka kedua diagonalnya TIDAK berpotongan tepat di tengah-tengah.

2) Jika ABC BUKAN segitiga sama kaki, maka segitiga ABC TIDAK memiliki 2 sudut yang sama besar.

3) Jika segiempat $ABCD$ TIDAK memiliki empat sisi yang sama panjang, maka $ABCD$ BUKAN suatu jajaran genjang.

4) Jika a BUKAN bilangan ganjil, maka $a + 1$ BUKAN bilangan genap.

5) Jika bilangan bulat a TIDAK terbagi oleh 4, maka a TIDAK terbagi oleh 2.

Implikasi baru berbentuk $\sim p \Rightarrow \sim q$ yang diperoleh dari implikasi $p \Rightarrow q$ seperti di atas dinamakan invers dari $p \Rightarrow q$. Tabel kebenaran dari invers disajikan dalam tabel berikut:

Tabel 11. Tabel Kebenaran Invers

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \Rightarrow \sim q$
B	B	**B**	S	S	**B**
B	S	**S**	S	B	**B**
S	B	**B**	B	S	**S**
S	S	**B**	B	B	**B**

Dalam tabel di atas, terlihat bahwa pada kolom $p \Rightarrow q$ dan kolom $\sim p \Rightarrow \sim q$, nilai kebenarannya tidak sama. Dengan kata lain invers dari suatu implikasi tidak ekuivalen dengan implikasi semula.

2. KONVERS

Seperti halnya dengan invers, berdasarkan teorema atau sifat matematika yang berbentuk $p \Rightarrow q$ yang telah disajikan di atas, dapat dibentuk suatu implikasi baru sebagai berikut.

1) Jika segiempat $ABCD$ kedua diagonalnya berpotongan tepat di tengah-tengah, maka $ABCD$ adalah belah ketupat.
2) Jika segitiga ABC memiliki 2 sudut yang sama besar, maka ABC adalah segitiga sama kaki.
3) Jika segiempat $ABCD$ adalah suatu jajaran genjang, maka memiliki empat sisi yang sama panjang.
4) Jika $a + 1$ merupakan bilangan genap, maka a adalah bilangan ganjil.
5) Jika bilangan bulat a terbagi oleh 2, maka a terbagi oleh 4.

Implikasi baru berbentuk $q \Rightarrow p$ yang diperoleh dari implikasi $p \Rightarrow q$ seperti di atas dinamakan konvers dari $q \Rightarrow p$. Tabel kebenaran dari konvers disajikan dalam tabel berikut:

Tabel 12. Tabel Kebenaran Konvers

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$
B	B	**B**	**B**
B	S	**S**	**B**
S	B	**B**	**S**
S	S	**B**	**B**

Dalam tabel di atas, terlihat bahwa pada kolom $p \Rightarrow q$ dan kolom $q \Rightarrow p$, nilai kebenarannya tidak sama. Dengan kata lain konvers dari suatu implikasi tidak ekuivalen dengan implikasi semula. Apakah ada suatu implikasi baru yang dibentuk dari suatu implikasi tertentu yang ekuivalen dengan implikasi semula? Implikasi baru yang ekuivalen dengan implikasi semula tersebut adalah sebagai berikut.

3. KONTRAPOSISI

Perhatikan implikasi baru yang diperoleh dari implikasi pada awal bagian kegiatan belajar 3 di atas berikut ini.

1) Jika segiempat $ABCD$ kedua diagonalnya TIDAK berpotongan tepat di tengah-tengah, maka segiempat $ABCD$ BUKAN belah ketupat.
2) Jika segitiga ABC TIDAK memiliki 2 sudut yang sama besar, maka ABC BUKAN segitiga sama kaki.
3) Jika segiempat $ABCD$ BUKAN suatu jajaran genjang, maka segimpat $ABCD$ TIDAK memiliki empat sisi yang sama panjang.
4) Jika $a + 1$ BUKAN bilangan genap, maka a BUKAN bilangan ganjil.
5) Jika bilangan bulat a TIDAK terbagi oleh 2, maka a TIDAK terbagi oleh 4.

Implikasi baru berbentuk $\sim q \Rightarrow \sim p$ yang diperoleh dari implikasi $p \Rightarrow q$ seperti di atas dinamakan kontrapositif dari $q \Rightarrow p$. Tabel kebenaran dari kontraposisi disajikan dalam tabel berikut:

Tabel 13. Tabel Kebenaran Kontraposisi

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
B	B	**B**	S	S	**B**
B	S	**S**	S	B	**S**
S	B	**B**	B	S	**B**
S	S	**B**	B	B	**B**

Dalam tabel di atas, terlihat bahwa pada kolom $p \Rightarrow q$ dan kolom $\sim q \Rightarrow \sim p$, nilai kebenarannya **sama**. Dengan kata lain kontraposisi dari suatu implikasi **ekuivalen** dengan implikasi semula. Oleh karena itu kontrapsosisi menjadi bagian yang penting dalam pernyataan matematika dan digunakan sebagai metode untuk membuktikan suatu teorema atau sifat tertentu.

D. Aktivitas Pembelajaran

LK 3.1. Invers, Konvers, dan Kontraposisi (In-1)

Untuk soal yang terdiri dari beberapa item, pilihlah 2 (dua) item untuk diselesaikan dalam kelompok.

1. Misalkan ada pernyataan dalam berbentuk implikasi $p \Rightarrow q$.
   Buatlah skema hubungan antara invers, konvers dan kontraposisi dari implikasi tersebut.
2. Tentukan invers, konvers dan kontraposisi dari pernyataan berikut.
   a) $\sim a \Rightarrow b \vee c$
   b) $a \vee b \Rightarrow c$
   c) $(a \Rightarrow b) \Rightarrow a$
   d) $a \wedge b \Rightarrow a$
   e) $(a \wedge \sim a) \vee b \Rightarrow c$
3. Gunakan negasi dua kali pada pernyataan berikut untuk menunjukkan bahwa implikasi ekuivalen dengan kontraposisinya. Sebagai contoh,
   $\sim\big(\sim(p \Rightarrow q\ )\big) \equiv \sim(p \wedge \sim q) \equiv \sim p \vee q \equiv q \vee \sim p \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$.
   a) $a \Rightarrow b \vee c$
   b) $a \vee b \Rightarrow c$
   c) $a \Rightarrow b \wedge c$
   d) $a \wedge b \Rightarrow c$
   e) $a \wedge b \Rightarrow a$
4. Nyatakan pernyataan-pernyataan berikut hanya dengan notasi $\wedge$ dan $\sim$.
   a) $p \wedge \sim q \Rightarrow r$
   b) $(p \Rightarrow r) \Leftrightarrow (q \Rightarrow r)$
   c) $p \vee \sim q \Rightarrow r \vee q$

LK 3.2. Invers, Konvers, dan Kontraposisi (On)

1. Selesaikan soal yang belum terpilih di LK 3.1.
2. Nyatakan kontraposisi dari pernyataan-pernyataan berikut:
   a. Jika suatu bilangan habis dibagi 9, maka bilangan tersebut habis dibagi 3.
   b. Jika ingin masuk perguruan tinggi favorit maka kamu harus belajar lebih giat.

3. "Jika cairan X dididihkan, maka diperlukan suhu setidaknya 150°C".
   Diasumsikan pernyataan ini benar, manakah di antara pernyataan berikut yang bernilai benar?
   a. Jika suhu cairan X setidaknya 150°C, maka cairan X akan mendidih.
   b. Jika suhu cairan X kurang dari 150°C, maka cairan X tidak mendidih.
   c. Cairan X akan mendidih jika suhunya setidaknya 150°C.
   d. Jika cairan X tidak mendidih, maka suhunya kurang dari 150°C.
   e. Kondisi yang dibutuhkan cairan X untuk mendidih adalah bersuhu setidaknya 150°C.

LK 3.3. Soal HOTS tentang Invers, Konvers, dan Kontraposisi

Bersama kelompok, Anda diharapkan saling berdiskusi dan bekerja sama mempelajari teknik penyusunan soal *high order thinking skills* (HOTS). Dengan kreativitas Anda, susunlah 2 soal HOTS terkait dengan invers, konvers, dan kontraposisi. Isikan pada kartu soal berikut. Soal yang Anda susun dapat berupa pilihan ganda atau uraian yang disertai dengan kunci jawaban atau pedoman pensekoran. Diutamakan merujuk pada kisi-kisi UN matematika SMA tahun 2017.

KARTU SOAL	
Jenjang	: Sekolah Menengah Atas
Mata Pelajaran	: Matematika
Kelas	:
Kompetensi Dasar	:
Indikator	:
Level	: Pengetahuan dan Pemahaman/Aplikasi/Penalaran *)
Materi	:
Bentuk Soal	: Pilihan Ganda
BAGIAN SIAL DISINI	
Kunci Jawaban	:

E. Latihan/Kasus/Tugas

Pilihlah jawaban yang paling tepat.

1. Pernyataan $\sim q \Rightarrow \sim p$ merupakan … dari pernyataan $q \Rightarrow p$
   A. Konjungsi
   B. Konvers
   C. Invers
   D. Kontraposisi
2. Kontraposisi $a \Rightarrow (\sim b \wedge c)$ adalah.....
   A. $b \vee \sim c \Rightarrow \sim a$
   B. $\sim b \vee c \Rightarrow a$
   C. $b \vee \sim c \Rightarrow a$
   D. $\sim b \vee c \Rightarrow \sim a$
3. Konvers dari pernyataan $\sim(a \wedge b) \Rightarrow c$ adalah .....
   A. $\sim c \Rightarrow \sim a \vee \sim b$
   B. $c \Rightarrow a \wedge b$
   C. $\sim c \Rightarrow a \wedge b$
   D. $c \Rightarrow \sim a \vee \sim b$
4. Jika dari suatu implikasi dibentuk suatu kontraposisinya, maka hasil kontraposisi tersebut akan sama dengan .....
   A. Invers dari konvers pernyataan semula.
   B. Kontraposisi dari invers pernyataan semula.
   C. Negasi dari konvers pernyataan semula
   D. Negasi dari invers pernyataan semula
5. Pernyataan yang nilai kebenarannya ekuivalen dengan pernyataan semula adalah .....
   A. Invers
   B. Konvers
   C. Kontraposisi
   D. Negasi
6. Invers dari kontraposisi suatu implikasi akan ekuivalen dengan ….
   A. Konvers dari pernyataan semula
   B. Negasi dari invers pernyataan semula
   C. Invers dari negasi pernyataan semula

D. Negasi dari kontraposisi pernyataan semula

7. Di bawah ini pernyataan yang **<u>ekuivalen</u>** dengan invers dari $a \wedge b \Rightarrow c$ adalah .....
   A. $\sim a \wedge \sim b \Rightarrow \sim c$
   B. $c \Rightarrow a \wedge b$
   C. $\sim c \Rightarrow a \wedge b$
   D. $\sim a \wedge \sim b \Rightarrow c$

8. Pernyataan majemuk yang ekuivalen dengan kontraposisi dari
   $\sim a \Rightarrow b \wedge \sim c$ adalah ....
   A. $(b \Rightarrow \sim c) \Rightarrow a$
   B. $b \wedge \sim c \Rightarrow \sim a$
   C. $a \vee (b \wedge \sim c)$
   D. $\sim a \vee (b \wedge \sim c)$

9. Pernyataan majemuk yang ekuivalen dengan konvers dari $p \vee q \Rightarrow \sim r$ adalah .....
   A. $\sim r \Rightarrow p \wedge q$
   B. $r \Rightarrow p \vee q$
   C. $p \vee q \vee r$
   D. $p \vee q \vee \sim r$

10. Jika pernyataan $a \Rightarrow b$ bernilai salah, maka pernyataan $\sim b \Rightarrow \sim a$ bernilai ....
    A. benar
    B. salah
    C. belum dapat ditentukan kebenarannya
    D. bisa benar atau salah

F. Rangkuman

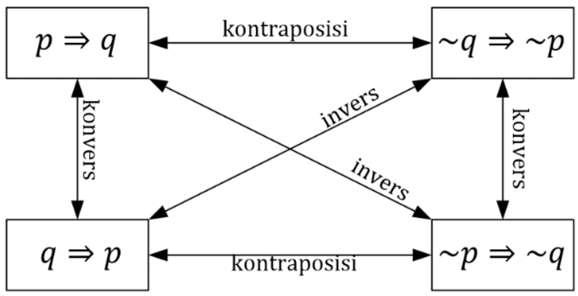
Secara umum, materi yang dibahas pada kegiatan belajar 3 adalah sebagai berikut:

1. Berdasarkan implikasi $p \Rightarrow q$, dapat dibentuk suatu implikasi yaitu:
   a) $\sim p \Rightarrow \sim q$, dinamakan invers
   b) $q \Rightarrow p$, dinamakan konvers
   c) $\sim q \Rightarrow \sim p$, dinamakan kontraposisi

2. Suatu implikasi mempunyai nilai kebenaran yang ekuivalen dengan kontraposisinya, sebab

$$\sim\left(\sim(p \Rightarrow q)\right) = \sim(p \wedge \sim q) = \sim p \vee q = q \vee \sim p = \sim q \Rightarrow \sim p$$

3. Hubungan antara implikasi, invers, konvers dan kontraposisi disajikan dalam skema berikut:



G. Umpan Balik dan Tindak Lanjut

Periksalah jawaban Anda pada soal latihan dengan kunci jawaban di modul ini. Hitunglah jawaban yang benar, kemudian gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap kompetensi dalam kegiatan belajar 3.

$$\text{Tingkat penguasaan kompetensi} = \frac{\text{jumlah jawaban benar}}{10} \times 100\%$$

Tingkat penguasaan kompetensi	Keterangan
90 – 100 %	Baik sekali
80 – 89 %	Baik
70 – 79 %	Cukup
0 – 69 %	Kurang

Jika pencapaian tingkat kompetensi Anda ≥ 80%, maka Anda dapat meneruskan ke kegiatan belajar selanjutnya. Apabila masih di bawah 80%, sebaiknya Anda mengulangi lagi untuk mempelajari bagian-bagian yang masih kurang tersebut.

Kegiatan Pembelajaran 4: Tautologi, Kontradiksi dan Kontingensi

A. Tujuan

Setelah mempelajari modul ini diharapkan anda dapat menentukan suatu pernyataan merupakan tautologi, kontradiksi atau kontingensi.

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

Setelah menyelesaikan modul ini diharapkan anda dapat:

1. Memberikan contoh pernyataan yang merupakan tautologi
2. Memberikan contoh pernyataan yang merupakan kontradiksi
3. Memberikan contoh pernyataan yang merupakan kontingensi
4. Membuktikan suatu pernyataan merupakan tautologi, kontradiksi atau kontingensi

C. Uraian Materi

Pada kegiatan belajar sebelumnya telah dibahas tentang tabel kebenaran dari suatu pernyataan. Jika terdapat dua pernyataan tunggal, misalnya p, q, maka selanjutnya dapat dibentuk pernyataan majemuk seperti $p \Rightarrow q \wedge p$, $p \vee \sim p$, $p \wedge \sim p$, dan seterusnya. Tabel kebenaran dari pernyataan-pernyataan ini adalah sebagai berikut.

p	q	$p \wedge q$	$\sim p$	$p \Rightarrow q \wedge p$	$p \vee \sim p$	$p \wedge \sim p$
B	B	B	S	B	B	S
B	S	S	S	S	B	S
S	B	S	B	B	B	S
S	S	S	B	B	B	S

Pada tabel di atas, terlihat bahwa ada pernyataan majemuk yang selalu benar untuk setiap substitusi pernyataan tunggalnya, ada juga pernyataan yang justru selalu salah untuk setiap substitusi pernyataan tunggalnya, ada juga pernyataan yang dapat bernilai benar atau salah tergantung pernyataan tunggalnya. Hal ini dibahas pada bagian berikut ini.

1. TAUTOLOGI

Pernyataan majemuk yang selalu bernilai benar untuk setiap substitusi pernyataan tunggalnya dinamakan tautologi. Dengan kata lain, tautologi merupakan pernyataan yang selalu bernilai benar dalam kondisi apapun. Tautologi digunakan sebagai dasar dalam pengambilan keputusan atau pembuktian matematis. Berdasarkan tabel di atas, pernyataan $p \vee {\sim}p$ merupakan tautologi.

Untuk mengetahui apakah suatu pernyataan merupakan tautologi atau bukan dapat digunakan tabel kebenaran seperti dalam tabel di atas. Selain itu, untuk menentukan apakah suatu pernyataan merupakan tautologi atau bukan, terdapat suatu cara atau teknik lain yang dinamakan dengan prosedur aritmetika. Teknik ini sangat sesuai apabila ingin diterapkan pada pemrograman komputer. Dalam prosedur aritmetika, jika pernyataan bernilai benar nilainya adalah 0, dan pernyataan yang salah nilainya adalah 1. Karena sudah diketahui bahwa $p \vee {\sim}p$ bernilai benar, maka dalam prosedur aritmetika digunakan ketentuan sebagai berikut.

a) Benar = 0, salah = 1
b) $1 + 0 = 0 + 1 = 1$
c) $1 \times 0 = 0 \times 1 = 0$
d) $1 + 1 = 0$
e) $p + p = 2p = 0$
f) $p^n = p$, untuk setiap bilangan asli n.

Selanjutnya operasi pada prosedur aritmetika didasarkan pada ketentuan berikut.

Tabel 14. Prosedur Aritmetika

Operasi	Prosedur aritmetika
${\sim}p$	$1 + p$
$p \wedge q$	$p + q + pq$
$p \vee q$	pq
$p \Rightarrow q$	$(1 + p)q$
$p \Leftrightarrow q$	$p + q$

Contoh 1.

Misalnya akan dicari nilai kebenaran dari pernyataan $p \wedge q \Rightarrow p$ dengan tabel kebenaran dan prosedur aritmetika.

a) Tabel Kebenaran

p	q	$p \wedge q$	$p \wedge q \Rightarrow p$
B	B	B	B
B	S	S	B
S	B	S	B
S	S	S	B

Berdasarkan tabel di atas, terlihat bahwa $p \wedge q \Rightarrow p$ merupakan tautologi.

b) Prosedur Aritmetika

$$\begin{aligned}
p \wedge q \Rightarrow p &= (p + q + pq) \Rightarrow p \\
&= (1 + p + q + pq)p \\
&= p + p^2 + pq + p^2q \\
&= p + p + pq + pq \\
&= 2p + 2pq \\
&= 0 + 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Berdasarkan hasil yang diperoleh dalam prosedur aritmetika di atas, pernyataan $p \wedge q \Rightarrow p$ merupakan tautologi.

Contoh 2.

Selidiki apakah pernyataan $p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow p$ merupakan tautologi atau bukan.

Penyelesaian:

Tabel kebenaran dari pernyataan tersebut adalah sebagai berikut.

p	q	$p \Rightarrow q$	$p \wedge (p \Rightarrow q)$	$p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow p$
B	B	B	B	B
B	S	S	S	B
S	B	B	S	B
S	S	B	S	B

Menggunakan prosedur aritmetika diperoleh:

$$
\begin{aligned}
p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow p \quad &= \quad p \wedge (1+p)q \Rightarrow p \\
&= \quad p \wedge (q + pq) \Rightarrow p \\
&= \quad p + (q + pq) + p(q + pq) \Rightarrow p \\
&= \quad p + q + pq + pq + pq \Rightarrow p \\
&= \quad p + q + 0 + pq \Rightarrow p \\
&= \quad p + q + pq \Rightarrow p \\
&= \quad (1 + p + q + pq)p \\
&= \quad p + p^2 + pq + pq \\
&= \quad p + p + 2pq \\
&= \quad 2p + 2q \\
&= \quad 0 + 0 \\
&= \quad 0
\end{aligned}
$$

Berdasarkan hasil di atas, diperoleh kesimpulan bahwa $p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow p$ merupakan tautologi.

Jika suatu pernyataan majemuk melibatkan lebih dari 3 pernyataan tunggal, maka penggunaan tabel kebenaran akan memerlukan minimal 16 baris. Oleh karena itu, apakah terdapat cara lain yang juga bisa digunakan untuk mengetahui apakah suatu pernyataan majemuk merupakan tautologi atau bukan.

Karena kita sudah mengetahui bahwa $p \vee \sim p$ selalu bernilai benar, dan sudah diketahui bahwa suatu disjungsi bernilai benar, apabila terdapat pernyataan yang bernilai benar dan suatu konjungsi akan bernilai salah apabila terdapat pernyataan yang bernilai salah, maka diperoleh suatu kesimpulan:

a) $a \vee \mathrm{B} = \mathrm{B}$
b) $a \wedge \mathrm{B} = a$
c) $\mathrm{S} \vee a = a$
d) $\mathrm{S} \wedge a = \mathrm{S}$

Menggunakan sifat **EKUIVALENSI** di atas, kita bisa membuktikan bahwa pernyataan $p \wedge q \Rightarrow p$ selalu bernilai benar sebagai berikut.

$$
\begin{aligned}
p \wedge q \Rightarrow p \quad &= \quad \sim(p \wedge q) \vee p \\
&= \quad \sim p \vee \sim q \vee p \\
&= \quad (p \vee \sim p) \vee \sim q \\
&= \quad \mathrm{B} \vee \sim q \\
&= \quad \mathrm{B}
\end{aligned}
$$

Contoh 3.

Menggunakan sifat ekuivalensi, pernyataan $p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow p$ merupakan tautologi, sebab:

$$
\begin{aligned}
p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow p \quad &= \quad \sim[p \wedge (p \Rightarrow q)] \vee p \\
&= \quad [\sim p \vee (p \wedge \sim q)] \vee p \\
&= \quad [(\sim p \vee p) \wedge (\sim p \vee \sim q)] \vee p \\
&= \quad [B \wedge (\sim p \vee \sim q)] \vee p \\
&= \quad (\sim p \vee \sim q) \vee p \\
&= \quad (\sim p \vee p) \vee \sim q \\
&= \quad B \vee \sim q \\
&= \quad \mathrm{B}
\end{aligned}
$$

2. KONTRADIKSI

Jika tautologi adalah pernyataan yang selalu bernilai benar, maka sebaliknya kontradiksi adalah pernyataan yang selalu bernilai salah untuk setiap substitusi nilai kebenaran pernyataan tunggalnya. Sebagaimana telah dibahas sebelumnya, pernyataan $p \wedge \sim p$ merupakan kontradiksi sebab selalu bernilai salah. Bentuk ini merupakan bentuk utama dari suatu kontradiksi. Bentuk yang lain merupakan pengembangan dari bentuk tersebut

Contoh 4.

Akan ditunjukkan bahwa $(p \wedge q) \wedge \sim p$ merupakan kontradiksi.

a) Menggunakan Tabel Kebenaran

p	q	$\sim p$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \wedge \sim p$
B	B	S	B	S
B	S	S	S	S
S	B	B	S	S
S	S	B	S	S

b) Menggunakan prosedur aritmetika.

$$
\begin{aligned}
(p \wedge q) \wedge {\sim}p &= (p + q + pq) \wedge (1 + p) \\
&= (p + q + pq + 1 + p) + (p + q + pq)(1 + p) \\
&= 2p + q + pq + 1 + (p + q + pq) + (p + q + pq)p \\
&= 0 + 2q + 2pq + 1 + p + p^2 + pq + p^2q \\
&= 0 + 0 + 0 + 1 + p + p + pq + pq \\
&= 1 + 2p + 2q \\
&= 1 + 0 + 0 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

c) Menggunakan sifat ekuivalensi

$$
\begin{aligned}
(p \wedge q) \wedge {\sim}p &= {\sim}({\sim}((p \wedge q) \wedge {\sim}p)) \\
&= {\sim}({\sim}(p \wedge q) \vee p) \\
&= {\sim}({\sim}p \vee {\sim}q \vee p) \\
&= {\sim}({\sim}p \vee p \vee q) \\
&= {\sim}(({\sim}p \vee p) \vee q) \\
&= {\sim}(B \vee q) \\
&= {\sim}\mathrm{B} \\
&= \mathrm{S}
\end{aligned}
$$

3. KONTINGENSI

Kontingensi merupakan pernyataan yang dapat bernilai benar atau salah tergantung kondisi pernyataan tunggalnya. Secara umum, jika suatu pernyataan bukan tautologi dan bukan kontradiksi, maka pasti pernyataan tersebut merupakan kontingensi.

Contoh 5.

$(p \Rightarrow p) \Rightarrow p \vee q$ merupakan kontingensi. Tabel kebenaran dari pernyataan ini adalah sebagai berikut.

p	q	$p \Rightarrow p$	$p \vee q$	$(p \Rightarrow p) \Rightarrow p \vee q$
B	B	B	B	B
B	S	B	B	B
S	B	B	B	B
S	S	B	S	S

Menggunakan prosedur aritmetika, diperoleh:

$$
\begin{aligned}
(p \Rightarrow p) \Rightarrow p \vee q &= (1+p)p \Rightarrow pq \\
&= p + p^2 \Rightarrow pq \\
&= p + p \Rightarrow pq \\
&= 2p \Rightarrow pq \\
&= (1+2p)pq \\
&= (1+0)pq \\
&= pq
\end{aligned}
$$

Menggunakan sifat ekuivalensi diperoleh:

$$
\begin{aligned}
(p \Rightarrow p) \Rightarrow p \vee q &= \sim(p \Rightarrow p) \vee (p \vee q) \\
&= (p \wedge \sim p) \vee (p \vee q) \\
&= \mathrm{S} \vee (p \vee q) \\
&= p \vee q
\end{aligned}
$$

Terlihat bahwa pada semua metode, pernyataan tersebut bukan merupakan tautologi ataupun kontradiksi, sehingga pernyataan tersebut merupakan kontingensi.

D. Aktivitas Pembelajaran

LK 4.1. Tautologi, Kontradiksi, dan Kontingensi (In-1)

Dari setiap soal berikut, pilihlah 3 item untuk diselesaikan dalam kelompok.

1. Gunakan tabel kebenaran, prosedur aritmetika dan sifat ekuivalensi untuk menyelidiki apakah pernyataan berikut merupakan tautologi, kontradiksi atau kontingensi.

   a) $(p \Rightarrow q) \wedge \sim q \Rightarrow \sim p$
   b) $\sim p \wedge (p \vee q) \Rightarrow q$
   c) $p \Rightarrow p \vee q$
   d) $(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \Rightarrow r) \Rightarrow (\sim p \vee r)$
   e) $(p \Rightarrow q \wedge \sim q) \Rightarrow \sim p$
   f) $(p \Rightarrow q \vee r) \Rightarrow r$
   g) $(p \Rightarrow q) \wedge (p \wedge \sim q)$
   h) $(p \wedge \sim q) \wedge (\sim p \vee q)$

2. Jika p dan q adalah dua pernyataan yang berbeda, pilihlah pernyataan di bawah ini untuk mengganti pernyataan r supaya pernyataan majemuk $(p \wedge q) \Rightarrow r$ adalah tautologi .

   a) p
   b) q
   c) $p \vee q$
   d) $p \wedge \sim q$
   e) $\sim p \vee q$
   f) $\sim q \Rightarrow p$
   g) $q \Rightarrow q$

3. Di antara pernyataan berikut, manakah pernyataan yang merupakan tautologi?

   a) $a \Leftrightarrow b$
   b) $(p \Rightarrow q \Leftrightarrow q) \Rightarrow p$
   c) $p \Rightarrow (q \Rightarrow p \wedge q)$
   d) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \vee s \Rightarrow q \vee s)$
   e) $p \Rightarrow (\sim p \vee q)$
   f) $(\sim q \Rightarrow p) \Rightarrow q$

LK 4.2. Tautologi, Kontradiksi, dan Kontingensi (On)

1. Selesaikan item-item yang belum dipilih di LK 4.1.
2. Jika pernyataan $K \equiv L$, maka $K \Leftrightarrow L$ suatu tautologi. Demikian juga konversnya, jika $K \Leftrightarrow L$ suatu tautologi, maka $K \equiv L$. Periksalah kebenaran pernyataan tersebut menggunakan tabel kebenaran untuk:
   a) $K: p \Rightarrow (q \vee r)$ dan $L: (p \wedge \sim q) \Rightarrow r$
   b) $K: p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ dan $L: (p \wedge q) \Rightarrow r$

LK 4.3. Soal HOTS tentang Tautologi, Kontradiksi, dan Kontingensi.

Bersama kelompok, Anda diharapkan saling berdiskusi dan bekerja sama mempelajari teknik penyusunan soal *high order thinking skills* (HOTS). Dengan kreativitas Anda, susunlah 2 soal HOTS terkait dengan tautologi, kontingensi, atau kontingensi. Isikan pada kartu soal berikut. Soal yang Anda susun dapat berupa pilihan ganda atau uraian yang disertai dengan kunci jawaban atau pedoman pensekoran. Diutamakan merujuk pada kisi-kisi UN matematika SMA tahun 2017.

KARTU SOAL	
Jenjang	: Sekolah Menengah Atas
Mata Pelajaran	: Matematika
Kelas	:
Kompetensi Dasar	:
Indikator	:
Level	: Pengetahuan dan Pemahaman/Aplikasi/Penalaran *)
Materi	:
Bentuk Soal	: Pilihan Ganda
BAGIAN SIAL DISINI	
Kunci Jawaban	:

E. Latihan/Kasus/Tugas

Pilihlah jawaban yang paling tepat.

1. Pernyataan majemuk yang selalu bernilai benar dalam kondisi apapun untuk pernyataan tunggalnya dinamakan … .
   A. Kontingensi
   B. Kontraposisi
   C. Kontradiksi
   D. Tautologi
2. Pernyataan di bawah ini yang merupakan kontradiksi adalah … .
   A. $(p \Rightarrow q) \wedge (p \wedge {\sim}q)$
   B. $(a \wedge {\sim}a) \wedge b$
   C. $p \Rightarrow q \wedge {\sim}q$
   D. $p \wedge {\sim}p \Rightarrow q$
3. Pernyataan di bawah ini yang merupakan tautologi adalah … .
   A. $p \Rightarrow p \wedge ({\sim}q \vee q)$
   B. $(a \wedge b) \vee b$

C. $p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow \sim p$

D. $(p \Rightarrow q) \wedge q \Rightarrow p$

4. Pernyataan di bawah ini yang merupakan kontingensi adalah … .
   A. $a \Rightarrow b \vee a$.
   B. $p \Rightarrow p \wedge q$.
   C. $p \wedge q \Rightarrow p$
   D. $p \wedge q \Rightarrow p \vee q$
5. Menurut prosedur aritmetika $p \Rightarrow q \vee r$ adalah….
   A. $1 + p + qr$
   B. $p + qr$
   C. $(1 + p)qr$
   D. $1 + q + pr$
6. Dalam prosedur aritmetika, $p^3q^2 =$ … .
   A. p
   B. pq
   C. 0
   D. 1
7. Menggunakan sifat ekuivalensi, pernyataan $a \wedge B =$ … .
   A. a
   B. B
   C. $\sim a$
   D. S
8. Pernyataan $(p \wedge q) \vee (\sim p \vee \sim q) \Rightarrow p \vee r$ dapat disederhanakan menjadi … .
   A. p
   B. $p \vee r$
   C. r
   D. B
9. Dalam prosedur aritmetika, pernyataan $p \vee q \Rightarrow q \wedge r$ akan menghasilkan….
   A. $1 + pqr$
   B. $1 + r + pq + pqr$
   C. $1 + r + pq + qr$
   D. $q + r + qr + pq$

10. Pernyataan $(a \wedge c) \vee (\sim a \wedge (\sim b \wedge c)) \vee (b \wedge c)$ dapat disederhanakan menjadi ....
    A. $b \wedge c$
    B. $a \vee c$
    C. c
    D. $a \wedge c$

F. Rangkuman

Secara umum, materi yang dibahas pada kegiatan belajar 5 adalah sebagai berikut:

1. Pernyataan yang selalu benar untuk setiap nilai kebenaran dari pernyataan tunggalnya dinamakan tautologi.
2. Pernyataan yang selalu salah untuk setiap nilai kebenaran dari pernyataan tunggalnya dinamakan kontradiksi.
3. Pernyataan yang dapat bernilai benar atau salah untuk setiap nilai kebenaran dari pernyataan tunggalnya dinamakan kontingensi.
4. Untuk menentukan apakah suatu pernyataan merupakan tautologi, kontradiksi atau kontingensi, dapat digunakan beberapa cara, yaitu:
   a) Tabel Kebenaran
   b) Prosedur Aritmetika
   c) Sifat ekuivalensi

G. Umpan Balik dan Tindak Lanjut

Periksalah jawaban Anda pada soal latihan dengan kunci jawaban di modul ini. Hitunglah jawaban yang benar, kemudian gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap kompetensi dalam kegiatan belajar 5.

$$\text{Tingkat penguasaan kompetensi} = \frac{\text{jumlah jawaban benar}}{10} \times 100\%$$

Tingkat penguasaan kompetensi	Keterangan
90 – 100 %	Baik sekali
80 – 89 %	Baik
70 – 79 %	Cukup
0 – 69 %	Kurang

Jika pencapaian tingkat kompetensi Anda $\geq$ 80%, maka Anda dapat meneruskan ke kegiatan belajar selanjutnya. Apabila masih dibawah 80%, sebaiknya Anda mengulangi lagi untuk mempelajari bagian-bagian yang masih kurang tersebut.

Kegiatan Pembelajaran 5: Penarikan Kesimpulan

A. Tujuan

Setelah mempelajari modul ini diharapkan anda dapat menentukan keabsahan atau kevalidan suatu argument dan dapat menentukan kesimpulan yang valid dari sekumpulan premis.

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

Setelah menyelesaikan modul ini diharapkan anda dapat:

1. Menentukan kesimpulan yang valid menggunakan aturan penarikan kesimpulan meliputi modus ponen, modus tollen, silogisme aturan penyederhanaan dan aturan penambahan.
2. Menentukan keabsahan suatu argument dengan menerapkan aturan penarikan kesimpulan.

C. Uraian Materi

Bagian yang sangat penting dalam logika adalah bagaimana kita mengetahui bahwa kesimpulan yang diambil adalah sah atau sahih atau valid. Perhatikan contoh pengambilan kesimpulan berikut:

1. Tak satupun pengusaha yang sukses itu pemalas. Semua yang berkumpul di ruangan itu bukan pemalas. Kesimpulan: Semua yang berkumpul di ruangan itu adalah pengusaha sukses
2. Jika Ani rajin berolah raga, maka badannya menjadi sehat. Saat ini Ani tidak rajin berolah raga. Kesimpulan: Badan Ani tidak sehat.
3. Jika terjadi perang, maka harga minyak naik. Saat ini, harga minyak naik. Kesimpulan: Terjadi perang.
4. Budi adalah guru matematika di perkotaan yang nilai UKG-nya tinggi. Kesimpulan: Guru di perkotaan nilai UKG-nya tinggi.

Semua pengambilan kesimpulan di atas adalah **tidak shahih** atau **tidak valid**. Hal ini dapat dijelaskan sebagai berikut.

1. Setiap pengusaha yang sukses, bukan pemalas. Akan tetapi, belum tentu orang yang bukan pemalas itu pengusaha sukses. Bisa jadi orang yang bukan pemalas itu guru berprestasi, mahasiswa teladan, dan sebagainya. Hal ini sesuai dengan sifat bahwa $p \Rightarrow q$ tidak ekuivalen dengan $q \Rightarrow p$.
2. Misalkan p: Ani rajin berolah raga; q: Badan Ani menjadi sehat.

   Karena implikasi $p \Rightarrow q$ tidak ekuivalen dengan inversnya, yaitu $\sim p \Rightarrow \sim q$, maka kita tidak dapat menyimpulkan bahwa jika Andi tidak rajin berolah raga ($\sim p$), berakibat badan Ani tidak sehat ($\sim q$).
3. Misalkan p: terjadi tawuran, dan q: aktivitas ekonomi terhenti. Jika aktivitas ekonomi terhenti (q), maka kita tidak dapat menyimpulkan p terjadi (terjadi tawuran, bisa jadi karena hari libur, terjadi kebakaran, atau faktor lainnya), karena konvers tidak ekuivalen dengan implikasi semula.
4. Budi adalah guru matematika di perkotaan yang nilai UKG-nya tinggi. Hal ini berarti, selain Budi tidak ada kesimpulan yang dapat diambil. Dalam bentuk simbol, dari pernyataan $p \wedge q \Rightarrow r$, tidak dapat disimpulkan menjadi $q \Rightarrow r$. Hal ini karena bentuk pernyataan $(p \wedge q \Rightarrow r) \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ tidak selalu bernilai benar, seperti dalam tabel berikut:

p	q	r	$p \wedge q$	$p \wedge q \Rightarrow r$	$q \Rightarrow r$	$(p \wedge q \Rightarrow r) \Rightarrow (q \Rightarrow r)$
B	B	B	B	B	B	B
B	B	S	B	S	S	B
B	S	B	S	B	B	B
B	S	S	S	B	B	B
S	B	B	S	B	B	B
S	B	S	S	B	S	S
S	S	B	S	B	B	B
S	S	S	S	B	B	B

Himpunan pernyataan tunggal atau pernyataan majemuk yang ditentukan atau diasumsikan benar dinamakan ***premis***. Pernyataan tunggal atau pernyataan majemuk yang diturunkan dari premis-premis disebut ***kesimpulan/konklusi.*** Kumpulan premis dan konklusi tersebut dinamakan ***argumen***.

Berikut ini adalah prinsip-prinsip atau aturan yang digunakan sebagai dasar untuk pengambilan kesimpulan yang benar:

1. MODUS PONEN

Modus ponens adalah argumen yang berbentuk $\{(p \Rightarrow q) \wedge p\} \Rightarrow q$ atau dituliskan:

$Premis\ 1: p \Rightarrow q$ (fakta)

$Premis\ 2: p$ (fakta)

$Konklusi: q$ (suatu pernyataan yang benar)

Dengan tabel kebenaran, terlihat bahwa modus ponens merupakan argument yang sah, yaitu

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge p$	$\{(p \Rightarrow q) \wedge p\} \Rightarrow q$
B	B	B	B	B
B	S	S	S	B
S	B	B	S	B
S	S	B	S	B

2. MODUS TOLLEN

Modus tollens adalah argumen yang berbentuk $\{(p \Rightarrow q) \wedge \sim q\} \Rightarrow \sim p$ atau dituliskan:

$Premis\ 1: p \Rightarrow q$ (fakta)

$Premis\ 2: \sim q$ (fakta)

$Konklusi: \sim p$

Dengan tabel kebenaran terlihat bahwa modus tollens merupakan argument yang sah, yaitu:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge \sim q$	$[(p \Rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$
B	B	S	S	B	S	B
B	S	S	B	S	S	B
S	B	B	S	B	S	B
S	S	B	B	B	B	B

3. SILOGISME

Silogisme adalah argumen yang berbentuk

$\{(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)\} \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ atau dituliskan:

$Premis\ 1: p \Rightarrow q$ (fakta)

$Premis\ 2: q \Rightarrow r$ (fakta)

$Konklusi: p \Rightarrow r$

Dengan tabel kebenaran terlihat bahwa silogisme merupakan argumen yang sah yaitu:

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow r$	$p \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
B	B	B	B	B	B	B
B	B	S	B	S	S	B
B	S	B	S	B	B	B
B	S	S	S	B	S	B
S	B	B	B	B	B	B
S	B	S	B	S	B	B
S	S	B	B	B	B	B
S	S	S	B	B	B	B

4. ATURAN PENYEDERHANAAN

Jika terdapat pernyataan berbentuk $p \wedge q$, maka kita dapat menyimpulkan sebagai p saja atau q saja. Dengan kata lain pernyataan $p \wedge q \Rightarrow p$ atau $p \wedge q \Rightarrow q$ merupakan tautologi. Hal ini dapat dilihat dalam tabel kebenaran berikut:

p	q	$p \wedge q$	$p \wedge q \Rightarrow p$
B	B	B	B
B	S	S	B
S	B	S	B
S	S	S	B

5. ATURAN PENAMBAHAN

Jika pernyataan p bernilai benar, maka kita dapat membuat kesimpulan dengan menambahkan pernyataan baru dengan menggunakan penghubung ATAU. Hal ini dapat dituliskan sebagai berikut:

$$p \Rightarrow p \vee q$$

Pernyataan ini merupakan tautologi sebagaimana ditunjukkan dalam tabel berikut:

p	q	$p \vee q$	$p \Rightarrow p \vee q$
B	B	B	B
B	S	B	B
S	B	B	B
S	S	S	B

Contoh 1.

Misal akan diselidiki apakah argument di bawah ini valid atau tidak valid.

1.	$a \Rightarrow b \vee c$	Premis
2.	$b \Rightarrow \sim a$	Premis
3.	$d \Rightarrow \sim c$	Premis
4.	a	Premis
$\therefore$	$\sim d$	Konklusi

Argument di atas merupakan pernyataan yang berbentuk:

$$[(a \Rightarrow b \vee c) \wedge (b \Rightarrow \sim a) \wedge (d \Rightarrow \sim c) \wedge a] \Rightarrow \sim d$$

1) Berdasarkan modus ponen pada premis 1 dan 4, diperoleh premis 5, yaitu
$$b \vee c = \sim b \Rightarrow c$$
2) Berdasarkan modus tollen pada premis 2 dan 4, diperoleh premis 6, yaitu $\sim b$
3) Berdasarkan modus ponen pada premis 5 dan 6, diperoleh premis 7, yaitu c
4) Berdasarkan modus tollen pada premis 3 dan 7, diperoleh kesimpulan $\sim d$

Jadi argument tersebut adalah argument yang valid atau absah.

Contoh 2.

Akan dicek apakah argument berikut valid atau tidak valid.

1.	$a \vee e$	Premis
2.	$a \Rightarrow c$	Premis
3.	$e \Rightarrow d$	Premis
$\therefore$	$c \vee d$	Konklusi

Akan diselidiki apakah penurunan kesimpulan ini valid atau tidak. Argumen tersebut adalah suatu pernyataan yang berbentuk:

$$[(a \vee e) \wedge (a \Rightarrow c) \wedge (e \Rightarrow d)] \Rightarrow (c \vee d)$$

1) Dengan kontraposisi, premis 2 ekuivalen dengan $\sim c \Rightarrow \sim a$
2) Premis 1 ekuivalen dengan $\sim a \Rightarrow e$
3) Dengan silogisme dari premis 1 dan 2 diperoleh premis 4 $\sim c \Rightarrow e$
4) Dengan silogisme dari premis 3 dan 4, diperoleh premis 5 $\sim c \Rightarrow d$
5) Pernyataan $\sim c \Rightarrow d$ ekuivalen dengan $c \vee d$

Jadi argument tersebut adalah argument yang valid.

Dalam beberapa keadaan, pembuktian keabsahan argument dengan cara menerapkan aturan penarikan kesimpulan secara langsung dari premis-premis tersebut sulit untuk dilakukan. Oleh karena itu, berdasarkan kontraposisi atau modus tollen, pernyataan $p \Rightarrow q$ adalah valid jika kita dapat menunjukkan bahwa jika $\sim q$ terjadi (benar), akan mengakibatkan $\sim p$. Artinya seaandainya kesimpulan q tidak benar, kita akan memperoleh fakta (premis) $(p \wedge \sim p)$ yang merupakan suatu kontradiksi. Hal ini berarti pengandaian kita salah. Jadi kesimpulan tersebut sudah valid. Untuk lebih jelasnya perhatikan contoh berikut.

Contoh 3.

Tunjukkan bahwa argument berikut valid.

$(a \Rightarrow b \vee c) \wedge (b \Rightarrow \sim a) \wedge (d \Rightarrow \sim c) \Rightarrow (a \Rightarrow \sim d)$.

Penyelesaian:

Andaikan kesimpulan dalam argument tersebut salah, artinya $(a \Rightarrow \sim d)$ bernilai salah. Sehingga yang benar adalah $\sim(a \Rightarrow \sim d)$. Seandainya $\sim(a \Rightarrow \sim d) = (a \wedge d)$ terjadi, maka ini merupakan premis(fakta) baru.

1.	$a \Rightarrow b \vee c$	Premis
2.	$b \Rightarrow \sim a$	Premis
3.	$d \Rightarrow \sim c$	Premis
4.	$a \wedge d$	Premis (negasi dari konklusi)

Akan ditunjukkan terjadi suatu kontradiksi.

1) Dengan aturan penyederhanaan pada premis 4, diperoleh premis 5, yaitu a dan premis 6, yaitu d.
2) Dengan modus ponen pada premis 1 dan 5, diperoleh premis 7, yaitu
$$b \vee c = \sim b \Rightarrow c$$
3) Dengan modus tollen pada premis 2 dan 5, diperoleh premis 8, yaitu $\sim b$.
4) Dengan modus ponen pada premis 7 dan 8, diperoleh premis 9, yaitu c.
5) Dengan modus tolen pada premis 3 dan 9, diperoleh premis 10, yaitu $\sim d$.
6) Diperoleh suatu kontradiksi antara premis 6 dan 10, yaitu $d \wedge \sim d$.

Jadi pengandaian kita salah, sehingga kesimpulan $a \Rightarrow \sim d$ sudah benar. Oleh karena itu, dapat disimpulkan bahwa argument tersebut sudah valid.

D. Aktivitas Pembelajaran

LK 5.1. Penarikan Kesimpulan (In-1)

Diskusikan dalam kelompok untuk menyelesaikan masalah berikut:

1. Selidiki apakah argument berikut valid atau tidak
   Jika terjadi hujan lebat, maka terjadi banjir. Jika terjadi hujan lebat dan terjadi banjir, maka jembatan rusak. Jika hujan lebat dan jembatan rusak, maka harga barang naik. Jembatan tidak rusak atau harga barang tidak naik.
   Kesimpulan: tidak terjadi hujan lebat
2. Selidiki apakah argument berikut valid atau tidak valid.
   Penebangan liar menyebabkan kerusakan hutan. Jika terjadi kerusakan hutan, maka terjadi tanah longsor. Tidak terjadi tanah longsor atau masyarakat sejahtera. Jika tidak terjadi penebangan liar, maka masyarakat sejahtera. Masyarakat tidak sejahtera.
   Kesimpulan: Tidak terjadi penebangan liar.

LK 5.2. Penarikan Kesimpulan (On)

1. Lengkapi bagian yang kosong agar menghasilkan premis dan penarikan kesimpulan yang benar.
    a. Premis 1 : Jika $\sqrt{2}$ rasional, maka $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ untuk suatu bilangan bulat a dan b.
    Premis 2 : Tidak benar bahwa $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ untuk suatu bilangan bulat a dan b.
    Kesimpulan: ...
    b. Premis 1: Jika $(1 - 0{,}9999 \cdots)$ kurang dari setiap bilangan real positif, maka bilangan tersebut sama dengan nol.
    Premis 2: ....
    Kesimpulan: Bilangan $(1 - 0{,}9999 \cdots)$ sama dengan nol.
2. Periksalah kevalidan penarikan kesimpulan berikut.
    a. $p \Rightarrow q$
    $q \Rightarrow p$
    $\therefore p \vee q$

    b. $p \wedge q \Rightarrow \sim r$
    $p \vee \sim q$
    $\sim q \Rightarrow p$
    $\therefore \sim r$

LK 5.3. Soal HOTS tentang Penarikan Kesimpulan.

Bersama kelompok, Anda diharapkan saling berdiskusi dan bekerja sama mempelajari teknik penyusunan soal *high order thinking skills* (HOTS). Dengan kreativitas Anda, susunlah 2 soal HOTS terkait dengan Penarikan Kesimpulan. Isikan pada kartu soal berikut. Soal yang Anda susun dapat berupa pilihan ganda atau uraian yang disertai dengan kunci jawaban atau pedoman pensekoran. Diutamakan merujuk pada kisi-kisi UN matematika SMA tahun 2017.

KARTU SOAL	
Jenjang : Sekolah Menengah Atas Mata Pelajaran : Matematika Kelas : Kompetensi Dasar : Indikator : Level : Pengetahuan dan Pemahaman/Aplikasi/Penalaran *) Materi : Bentuk Soal : Pilihan Ganda	
BAGIAN SIAL DISINI	
Kunci Jawaban	:

E. Latihan/Kasus/Tugas

1) Tunjukkan bahwa argument berikut valid.

1.	$h \wedge a \Rightarrow b$	Premis
2.	$b \Rightarrow \sim p$	Premis
3.	$a \wedge p$	Premis
$\therefore$	$\sim h$	Konklusi

2) Tunjukkan bahwa kesimpulan yang telah dibuat berikut ini valid.

1.	$a \vee b \Rightarrow c \wedge d$	Premis
2.	$d \vee e \Rightarrow f$	Premis
$\therefore$	$a \Rightarrow f$	Konklusi

3) Buktikan bahwa kesimpulan berikut adalah valid.

   Ani dan Budi berumur sama atau Ani lebih tua dari Budi. Jika Ani lebih tua dari Budi, maka Ani lebi tua dari Rini. Jika Ani dan Budi berumur sama, maka Ahmad dan Ani tidak berumur sama.

   Kesimpulan: Ahmad dan Ani tidak berumur sama atau Ani lebih tua dari Rini.

4) Buktikan bahwa kesimpulan berikut adalah valid.

   Logika adalah pelajaran yang mudah atau Logika adalah pelajaran yang menyenangkan. Jika matematika itu indah, maka logika itu tidak mudah.

   Kesimpulan: Jika matematika itu indah, maka Logika adalah pelajaran yang menyenangkan.

5) Suatu hari saya mencari dompet dan setelah saya mengingat-ingat maka fakta-fakta berikut ini saya yakini kebenarannya.

- jika dompetku dibawa adikku, maka aku melihat dompetku ketika aku membaca Koran
- aku membaca Koran di ruang tamu atau aku membaca Koran di kamar
- jika aku membaca Koran di ruang tamu, maka dompetku di atas meja computer
- aku tidak melihat dompetku ketika aku membaca Koran
- jika aku membaca Koran di kamar, maka dompetku dibawa adikku.

Berdasarkan fakta-fakta tersebut, menurut anda di mana dompet saya?

6) Diberikan premis-premis sebagai berikut.
   (i) Jika ayah membuat peraturan di rumah, maka semua anggota keluarga akan mematuhinya.
   (ii) Beberapa anggota keluarga tidak mematuhi peraturan di rumah atau ayah mengajak berlibur.

   Faktanya: ayah membuat peraturan di rumah.

   Kesimpulan yang bisa diambil adalah ….

F. Rangkuman

Secara umum, materi yang dibahas pada kegiatan belajar 6 adalah sebagai berikut:

1. Bagian yang sangat penting dalam logika adalah bagaimana kita mengetahui bahwa kesimpulan yang diambil adalah sah atau sahih atau valid.
2. Himpunan pernyataan tunggal atau pernyataan majemuk yang ditentukan atau diasumsikan benar dinamakan ***premis***. Pernyataan tunggal atau pernyataan majemuk yang diturunkan dari premis-premis disebut ***kesimpulan/konklusi.*** Kumpulan premis dan konklusi tersebut dinamakan ***argumen***.
3. Aturan untuk menentukan keabsahan/kevalidan suatu argument adalah sebagai berikut:

a) Modus Ponen

$p \Rightarrow q$	Premis
p	Premis
$\therefore\ q$	Kesimpulan

b) Modus Tollen

$p \Rightarrow q$	Premis
$\sim q$	Premis
$\therefore\ \sim p$	Kesimpulan

c) Silogisme

$p \Rightarrow q$	Premis
$q \Rightarrow r$	Premis
$\therefore\ p \Rightarrow r$	Kesimpulan

d) Aturan Penambahan

p	Premis
$\therefore\ p \vee q$	Kesimpulan

e) Aturan Penyederhanaan

$p \wedge q$	Premis
$\therefore\ p$	Kesimpulan

G. Umpan Balik dan Tindak Lanjut

Periksalah jawaban Anda pada soal latihan dengan kunci jawaban di modul ini. Hitunglah banyaknya soal yang mampu anda jawab dengan benar, kemudian gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap kompetensi dalam kegiatan belajar 5.

$$\text{Tingkat penguasaan kompetensi} = \frac{\text{jumlah jawaban benar}}{5} \times 100\%$$

Tingkat penguasaan kompetensi	Keterangan
90 – 100 %	Baik sekali
80 – 89 %	Baik
70 – 79 %	Cukup
0 – 69 %	Kurang

Jika pencapaian tingkat kompetensi Anda ≥ 80%, maka Anda dapat meneruskan ke kegiatan belajar selanjutnya. Apabila masih dibawah 80%, sebaiknya Anda mengulangi lagi untuk mempelajari bagian-bagian yang masih kurang tersebut.

Kegiatan Pembelajaran 6: Sejarah Matematika Untuk Pembelajaran

A. Tujuan

Kegiatan Belajar 6 akan membahas tentang sejarah matematika dalam pembelajaran yang terdiri atas:

1. Sejarah Matematika dalam Pembelajaran
2. Sejarah Konsep Matematika Jenjang SMA
    a. Sejarah Konsep dan Sistem Bilangan
    b. Sejarah Teori Himpunan
    c. Sejarah Logika Matematika
    d. Sejarah Konsep Aljabar
    e. Sejarah Konsep Geometri
    f. Sejarah Konsep Kalkulus
    g. Sejarah Konsep Trigonometri
    h. Sejarah Konsep Kombinatorika
    i. Sejarah Teori Peluang
    j. Sejarah Statistika

Setelah menyelesaikan Kegiatan Belajar 1, guru diharapkan mampu:

1. mengidentifikasi manfaat sejarah matematika untuk memotivasi siswa dalam pembelajaran,
2. menjelaskan peran sejarah matematika dalam perkembangan matematika serta pemanfaatannya dalam pembelajaran,
3. menjelaskan beberapa peristiwa sejarah untuk konsep-konsep penting matematika sekolah,
4. menggunakan sejarah matematika dalam pembelajaran di kelas,

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

Setelah mempelajari modul dan melakukan aktivitas pada KB 6, guru diharapkan mampu:

1. mengidentifikasi manfaat sejarah matematika untuk memotivasi siswa dalam pembelajaran,
2. menjelaskan peran sejarah matematika dalam perkembangan matematika serta pemanfaatannya dalam pembelajaran,
3. menjelaskan beberapa peristiwa sejarah untuk konsep-konsep penting matematika sekolah,
4. menggunakan sejarah matematika dalam pembelajaran di kelas,

C. Uraian Materi Dan Aktivitas Pembelajaran

1. Sejarah Matematika dalam Pembelajaran

Pada kebudayaan Mesir kuno, terdapat orang dengan julukan "perentang tali" yang menggunakan tali terhubung dengan 12 simpul untuk mengukur batas tanah. Tali tersebut juga digunakan oleh para insinyur untuk meletakkan dasar dengan sudut siku-siku yang akurat dalam pembangunan piramida.

Bagaimana 'perentang tali' melakukannya? Apa kaitan 'perentang tali' dengan sejarah matematika?

Gambar 1. Perentang Tali Mesir

Sumber gambar: History of Mathematics, A Supplement

Sejarah matematika merupakan salah satu kompetensi yang harus dikuasai guru. Guru perlu memiliki pengetahuan tentang sejarah matematika bukan semata karena sejarah matematika merupakan cabang matematika tetapi karena sejarah matematika baik langsung maupun tidak langsung mempengaruhi pembelajaran matematika.

Fauvel dalam Sumardyono (2012) menyebutkan bahwa nilai sejarah matematika dalam pembelajaran meliputi tiga dimensi berbeda yaitu: (1) sebagai materi pembelajaran/kuliah, (2) sebagai konteks materi pembelajaran, dan (3) sebagai sumber strategi pembelajaran. Sebagai materi pembelajaran dimaksudkan bahwa sejarah matematika menjadi pokok bahasan atau materi pembelajaran yang membahas segi fakta kronologis maupun evolusi sejarah matematika. Hal ini menyangkut banyak aspek, dari fakta matematika hingga filsafat matematika. Sejarah matematika sebagai pokok bahasan baru diberikan di tingkat perguruan tinggi, namun bukan menjadi materi inti sehingga tidak semua perguruan tinggi menyelenggarakan mata kuliah sejarah matematika. Sejarah matematika sebagai konteks materi pembelajaran maksudnya bahwa guru dapat mengambil masalah-masalah awal dari sejarah matematika termasuk memberi perspektif humanis dalam pembelajaran dengan menampilkan biografi dan karya matematikawan. Yang ketiga, sejarah matematika memberikan alternatif cara atau strategi pembelajaran suatu pokok materi matematika.

Masih menurut Fauvel, terdapat tiga dimensi besar pengaruh positif sejarah matematika dalam proses belajar siswa:

1. ***Understanding*** (pemahaman): perspektif sejarah dan perspektif matematika (struktur modern) saling melengkapi untuk memberikan gambaran yang jelas dan menyeluruh tentang konsep dan teorema, serta bagaimana konsep-konsep saling berkaitan;
2. ***Enthusiasm*** (antusiasme): sejarah matematika memberikan sisi aktivitas sehingga menumbuhkan antusiasme dan motivasi siswa;
3. ***Skills*** (keterampilan): memacu keterampilan menata informasi, menafsirkan secara kritis berbagai anggapan dan hipotesis, menulis secara koheren, mempresentasikan kerja, dan menempatkan suatu konsep pada level yang berbeda.

Wilson dan Chauvot (2000) dalam Haverhals & Roscoe (2010) memberikan empat manfaat penting penggunaan sejarah matematika dalam pembelajaran, yaitu mempertajam ketrampilan *problem solving*, menjadi dasar untuk pemahaman yang lebih baik, membantu siswa membuat hubungan-hubungan matematika, dan membuat adanya interaksi antara matematika dengan lingkungan sosial masyarakat. Jankvist (2009) dalam Haverhals & Roscoe (2010) menambahkan manfaat yang bisa didapatkan dengan menggunakan sejarah matematika, di antaranya meningkatkan motivasi (yang dapat terlihat dari meningkatnya minat dan ketertarikan siswa) dan mengurangi ketakutan terhadap matematika melalui fakta bahwa matematika adalah karya manusia dan para matematikawan tersebut berjuang untuk dapat menemukannya. Jankvist juga menyebutkan bahwa sejarah sebagai alat pedagogis dapat memberi perspektif dan wawasan baru pada materi pembelajaran, bahkan memberi petunjuk bagi permasalahan yang mungkin dihadapi siswa saat mempelajari topik-topik tertentu.

Marshal & Rich (2000) dalam artikelnya *"The Role of History in Mathematics Class"* menyimpulkan bahwa sejarah memiliki peran vital dalam pembelajaran matematika masa kini. Sejarah memungkinkan siswa dan guru untuk berpikir dan berbicara tentang matematika dengan lebih bermakna. Sejarah mematahkan mitos tentang matematika dengan menunjukkan bahwa matematika adalah hasil karya manusia. Sejarah memperkaya kurikulum matematika. Ia memperdalam dan memperluas pengetahuan yang dibangun siswa di kelas matematika.

Dengan manfaat sejarah matematika di atas, bagaimana guru dapat menggunakan sejarah matematika dalam pembelajaran? Guru dapat mengintegrasikan sejarah matematika dengan berbagai cara sesuai tujuan yang ingin dicapai. Furinghetti (1997) seperti dikutip oleh Sumardyono (2012) menyarankan suatu taksonomi penggunaan sejarah matematika dalam pembelajaran, sebagai berikut.

1. **Menginformasikan sejarah untuk mengubah *image* siswa tentang matematika**. Guru dapat menggunakan sejarah matematika yang bernilai positif, seperti semangat para matematikawan dan kisah hidupnya yang menarik, kegunaan matematika di berbagai bidang ilmu, serta persoalan-persoalan yang menarik dari sejarah matematika, semisal tentang teka-teki dan permainan.
2. **Menggunakan sejarah matematika sebagai sumber masalah/soal.** Guru dapat memanfaatkan sejarah matematika sebagai masalah awal dalam pembelajaran baik itu cara penyelesaian yang diberikan oleh matematikawan maupun permasalahan yang diberikan oleh matematikawan. Misalnya terkait teka-teki Thales mengukur tinggi piramid atau mengukur jarak kapal, sejarah tali 3-4-5 di Mesir, saringan *erastothenes* untuk menemukan bilangan prima, sejarah *Lou-Shu* dari Cina dalam bentuk bujur sangkar ajaib, penemuan

pecahan decimal oleh *al-Kasyi*, penggunaan Batang Napier dalam konsep perhitungan (perkalian), penggunaan sifat bilangan 9 dari al-Khowarizmi, dan sebagainya. Beberapa sejarah topik-topik matematika SMA akan diberikan pada bagian berikutnya dari modul ini.

3. **Menggunakan sejarah matematika sebagai aktivitas tambahan.** Aktivitas tambahan dari sejarah matematika perlu dicoba untuk menambah kegairahan anak dalam belajar matematika, mulai dari yang sederhana semisal melukis atau mencetak poster matematikawan, gambar-gambar matematis dari sejarah matematika, hingga kegiatan eksplorasi dan eksperimen semacam mencoba teknik berhitung dari Brahmagupta, dan lain-lain.
4. **Menggunakan sejarah matematika sebagai pendekatan alternatif mengenalkan konsep matematika.** Masalah-masalah berupa soal dari sejarah matematika dapat menjadi pendekatan alternatif pembelajaran konsep matematika (problem based learning). Contohnya, penggunaan soal yang memuat penggunaan FPB dan KPK dari sejarah matematika sebagai sumber pembelajaran tentang FPB dan KPK. Dapat pula kronologis konsep matematika dalam sejarah menjadi alur dalam penyampaian konsep matematika di kelas, contohnya dalam sejarah matematika orang mulai mengenal bilangan asli, lalu bilangan pecahan positif, lalu bilangan negatif dan nol, baru kemudian bilangan irasional. Dengan demikian, pembelajaran bilangan dapat dimulai dari pengenalan bilangan asli, lalu pecahan positif, bilangan nol (atau cacah), lalu bilangan negatif (atau bulat), dan kemudian baru pengenalan bilangan irasional. Tetapi tentu hal ini membutuhkan penyesuaian dalam hal penyajian materi.

SIU-Man Keung (1996) merekomendasikan empat kategori/level pemanfaatan sejarah matematika di kelas, dengan inisial ABCD, yaitu *Anectodes, Broad outline, Content,* dan *Development of mathematics ideas.*

1. ***Anectotes***, sebuah cerita yang menyenangkan. Penggunaan anekdot dapat menginspirasi siswa dengan sentuhan cerita yang menyenangkan, membawa siswa pada cerita penemuan-penemuan matematika dan kebudayaan masa itu.
2. ***Broad ouline,*** garis besar yang penting. Penting bagi guru untuk memberikan garis besar/*overview* dari materi yang akan diberikan di awal pembelajaran atau rangkuman/*review* di akhir pembelajaran. Pada kesempatan ini guru dapat

menyisipkan ide-ide dalam sejarah matematika yang terkait dengan materi. Hal ini dapat menambah motivasi dan cara pandang siswa terhadap materi yang akan atau telah mereka pelajari.

3. ***Content,*** materi yang detail. Sejarah matematika dapat digunakan untuk menjelaskan materi secara detail dengan menceritakan kepada siswa sejarah materi tersebut, bagaimana matematikawan menemukannya hingga menjadi konten matematika yang dipelajari saat ini.
4. ***Development of mathematical ideas,*** pengembangan gagasan matematika. Siswa diberikan kesempatan untuk membaca dan mempelajari cerita-cerita dalam sejarah matematika, misalnya buku *Element* dari Euclid, Non-euclidean Geometri, Sejarah Bilangan, Sejarah π, Matematika di Cina, Matematika di India, dan sebagainya. Untuk mengembangkan *mathematical thinking,* guru bisa memberikan pengalaman kepada siswa melalui tulisan-tulisan tentang matematikawan seperti Liu Hiu, Yang Hui, Leonhard Euler, dan bagaimana mereka bekerja. Siswa akan belajar bahwa pendekatan logis dan aksiomatis yang dicontohkan dalam Euclid's *Elements* bukanlah satu-satunya cara.

Sementara itu, John Fauvel (Sumardyono, 2015) menyarankan beberapa cara yang dapat ditempuh dalam menggunakan sejarah dalam pembelajaran matematika di kelas, yaitu:

1. Menyebutkan atau menceritakan tentang matematikawan pada zaman dahulu secara menyenangkan.
2. Menyediakan pengantar sejarah untuk konsep-konsep yang baru bagi siswa.
3. Memacu siswa untuk memahami masalah-masalah sejarah untuk mana konsep-konsep yang telah mereka pelajari merupakan jawabannya.
4. Memberi tugas-tugas tentang sejarah matematika.
5. Melengkapi latihan-latihan di kelas atau di rumah dengan menggunakan tulisan-tulisan matematika dari zaman dahulu.
6. Aktivitas drama langsung dengan kegiatan refleksi interaksi matematika.
7. Memacu kreasi tampilan poster atau proyek lain dengan topik-topik sejarah.
8. Merencanakan proyek tentang aktivitas lokal matematika pada zaman dahulu.
9. Menggunakan contoh-contoh penting dalam sejarah matematika untuk menggambarkan teknik-teknik atau metode-metode matematika.

10. Mengeksplorasi miskonsepsi, kesalahan, atau pandangan lain pada zaman dahulu untuk membantu pemahaman dan penyelesaian kembali akan kesulitan-kesulitan yang dijumpai oleh siswa pada masa sekarang.
11. Merencanakan suatu pendekatan pedagogik untuk suatu topik tertentu dengan menggunakan perkembangan sejarahnya.
12. Merencanakan urutan dan struktur topik dalam silabus pembelajaran dengan landasan sejarah.

Menggunakan sejarah dalam pembelajaran bukan semata-mata untuk memperoleh nilai yang tinggi, tetapi untuk membuat belajar matematika lebih bermakna dan memberi pengalaman belajar kepada siswa, sehingga diharapkan belajar menjadi lebih mudah dan lebih dalam. Bagi guru sendiri, mempelajari dan menggunakan matematika dalam pembelajaran dapat membuat guru lebih sabar, tidak dogmatis, dan lebih humanis.

AKTIVITAS 1

Untuk memudahkan dalam mempelajari uraian materi, lakukanlah aktivitas pada Lembar Kerja 1 bersama dengan peserta yang lain atau jika Anda menggunakan modul ini sebagai bahan belajar mandiri, lakukanlah bersama kolega Anda.

LK 6.1. *World Café of The History of Mathematics* (In-1)

Alat: spidol warna, kertas *flipchart*

Ketentuan:

1. Bagi kelas diklat menjadi 7 kelompok untuk mendirikan café.
2. Beri nama café kelompok Anda dengan nama yang menarik pengunjung.
3. Setiap café (seluruh anggota kelompok) agar menghidangkan menu spesial sebagai berikut. Menu dapat berupa topik, konsep, atau tokoh yang dianggap penting dan menarik yang dapat diambil dari uraian materi modul ini serta sumber lain yang relevan. (Manfaatkan spidol warna dan kertas *flipchart* untuk memvisualisasikan menu semenarik mungkin sehingga pengunjung tertarik untuk bertanya)

   Kelompok 1. Sejarah Matematika dalam Pembelajaran (manfaat dan implementasinya)

   Kelompok 2. Sejarah Bilangan

   Kelompok 3. Sejarah Logika dan Himpunan

   Kelompok 4. Sejarah Geometri

   Kelompok 5. Sejarah Aljabar

   Kelompok 6. Sejarah Kalkulus dan Trigonometri

   Kelompok 7. Sejarah Teori Peluang dan Statistika
4. Tetapkan satu orang anggota kelompok sebagai *host*/tuan rumah/ pemilik café, dan anggota kelompok yang lain sebagai pengunjung café.
5. Seluruh anggota kelompok, kecuali *host*, silahkan berkunjung ke *café* lain untuk menikmati menu yang disajikan oleh *host café* yang dikunjungi.

   Host bertugas:

   - menjelaskan sajian menu dan memimpin diskusi/konsultasi/tanya jawab terkait menu yang disajikannya.

- mengarahkan catatan yang diberikan setiap pengunjung agar tanggapannya fokus, singkat, dan relevan dengan menu sajian.
- mencatat atau memberi memvisualisasikan tambahan pada pendapat atau tanggapan peserta di kertas *flipchart*.

6. Seluruh peserta wajib mengunjungi semua *café* (lainnya). Setiap pengunjung dapat memberikan tanggapan dengan cara menulis pada bagian kosong pada menu yang telah disajikan/menggunakan kertas *post it* dan menempelkannya pada menu. Pada setiap komentar, tuliskan no.presensi dan/atau nama.
7. Masing-masing *host* dapat melakukan penilaian terhadap pengunjung sebagai berikut (form penilaian ada pada Lampiran 1).

Kriteria	Nilai
Menambahkan lebih dari 3 ide yang relevan dengan menu *dan* belum ditambahkan pengunjung lain.	3
Menambahkan 2 ide yang relevan dengan menu dan belum ditambahkan kelompok lain	2
Menambahkan 1 ide yang relevan dengan menu dan belum ditambahkan kelompok lain	1
Tidak memberi kontribusi	0

8. Setiap pengunjung juga dapat memberikan penilaian terhadap *host* sebagai berikut (form penilaian ada pada Lampiran 1).

Kriteria	Nilai
Penjelasan dan *performance* yang sangat baik.	3
Penjelasan dan *performance* yang cukup baik.	2
Penjelasan dan *performance* yang kurang baik.	1
Penjelasan dan *performance* yang tidak baik.	0

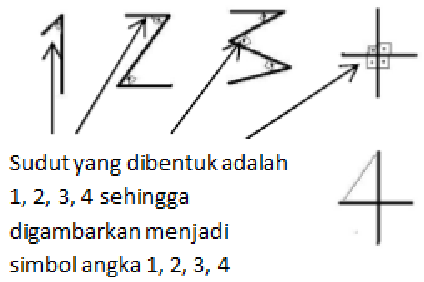
2. Sejarah Konsep Matematika Jenjang SMA

Pada bagian ini, dikemukakan sejarah beberapa topik atau konsep penting dalam matematika sekolah yang diambil dari **Bahan Belajar: Sejarah dan Filsafat Matematika (Jenjang SMA Diklat Pasca UKG Berbasis MGMP Pola In-On-In)** tulisan Sumardyono dan Marfuah yang diterbitkan PPPPTK Matematika tahun 2015, dengan pengembangan yang bersumber dari referensi lain seperti *A History of Mathematics* (Carl B. Boyer), *The History of Mathematics: an introduction – 7th ed.* (David M. Burton), *The Philosophy of Mathematics Education* (Paul Ernest), dan sumber-sumber lain seperti tercantum dalam Daftar Pustaka.

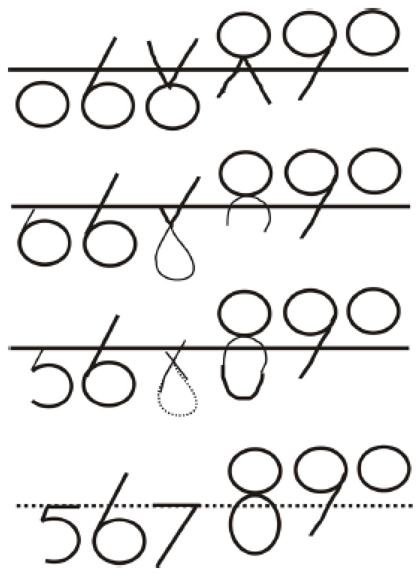
1. Konsep dan Sistem Bilangan

a. Angka Hindu-Arab

Angka yang kita gunakan sekarang ini dan menjadi angka internasional disebut Angka Arab atau Angka Hindu-Arab dan berasal dari India kemudian berkembang di Arab. Catatan Arab yang pertama menjelaskan angka Hindu tersebut adalah *Algoritmi de numero Indorum*, terjemahan Latin dari karya al-Khowarizmi (k.780-k.850). Angka 1, 2, 3, 4 diperoleh dari sudut yang terbentuk oleh garis/kurva yang dibuat. Sedangkan untuk angka 5 sampai 10 menggunakan simbol tangan dengan tangan meggenggam di bawah adalah 5 dan menggenggam di atas adalah 10, maka 6 adalah 5 dan 1 jari terangkat, 7 adalah 5 dengan 2 jari, 8 adalah 10 dikurangi 2 jari, 9 adalah 10 dikurangi 1. Gambaran pembentukan angka tersebut dapat dilihat pada Gambar 2 dan Gambar 3.



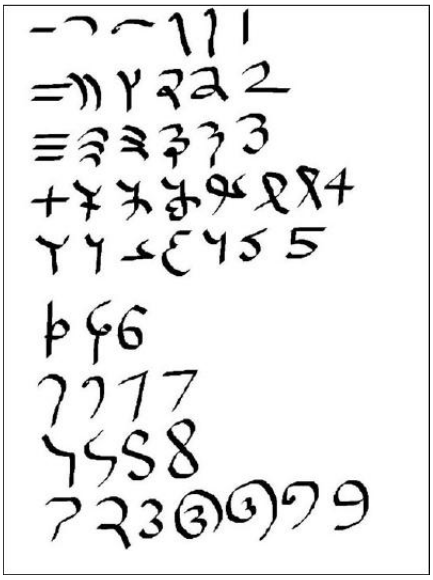
Gambar 2. Pembentukan angka 1, 2, 3, 4



Gambar 3. Pembentukan angka 5, 6, 7, 8, 9, 10

Al Khowarizmi juga memperkenalkan perhitungan dengan angka nol dari bahasa Arab *sifr* yang artinya kosong atau tak berpenghuni.

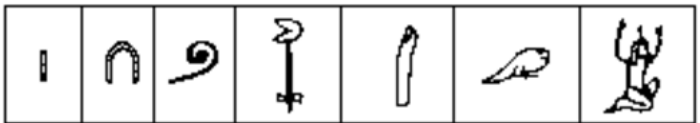
Fibonacci (k.1170-1240) merupakan matematikawan Italia yang membawa angka Hindu Arab dari Afrika Utara ke Eropa melalui buku *Liber Abaci* (*Book of Counting*). Fibonacci menggunakan kata *zephyrum* untuk menyebut nol, berasal dari kata *sifr*, yang dalam bahasa Italia menjadi *zefiro*, yang dibaca *zero* dalam dialek Venetian dan menjadi bahasa internasional untuk menyebut nol.



Gambar 4. Evolusi lambang bilangan/angka Hindu-Arab

b. Bilangan Pecahan dan Desimal

Menurut catatan sejarah, perkembangan bilangan pecahan tertua mungkin dimulai di Mesir Kuno. Pada peradaban Mesir Kuno, pecahan dilambangkan dengan pecahan satuan $\frac{1}{n}$, n bilangan asli. Penulisan pecahan menggunakan huruf hieroglif, dengan lingkaran di atas dan angka di bawahnya.



1	10	100	1000	10000	100000	10^6

Gambar 5. Angka Mesir dalam Hieroglif

Misal $\frac{1}{4}$ maka lambang bilangannya adalah , $\frac{1}{100}$ menjadi . Untuk pecahan dalam bentuk lain, dibentuk dari penjumlahan pecahan satuan dengan penyebut berbeda, kecuali pada pecahan $\frac{2}{3}$, mereka memiliki lambang khusus yaitu . Misalkan $\frac{6}{7}$ dibentuk dari penjumlahan $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28}=\frac{6}{7}$. Meskipun $\frac{6}{7}$ dapat dibentuk dari penjumlahan $\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}=\frac{6}{7}$, tetapi bagi bangsa Mesir Kuno hal ini membingungkan dan tidak dapat diterima.

Untuk mengurai suatu pecahan menjadi pecahan-pecahan satuan, terdapat tabel pecahan seperti misalnya pada pemulaan papyrus Rhind terdapat tabel yang mengurai pecahan dengan pembilang 2 dan penyebut bilangan ganjil antara 5 sampai 101.

Dalam perkembangan bilangan di India dengan angka Hindu, Brahmagupta dalam *Brahmasphutasiddhanta* menjelaskan tentang penulisan dan perhitungan bilangan pecahan tetapi masih belum menggunakan garis pemisah, misalnya $\begin{matrix}1\\4\end{matrix}$. Matematikawan Arab, al-Hassar (abad ke-12) menyebutkan penggunaan garis pemisah pada pecahan dengan petunjuk: “tuliskan penyebut di bawah garis (horizontal) dan yang berada di dalamnya menjadi bagian dari pecahan tersebut; misalkan kita diminta menuliskan tiga per lima dan sepertiga dari seperlima, tuliskan $\frac{3\ 1}{5\ 3}$”. Contoh lain, empat per tigabelas dan tiga per tujuh dari sepertigabelas ditulis $\frac{4\quad 3}{13\quad 11}$. Ini adalah kemunculan pertama dari garis pecahan yang kemudian kita ketahui juga dari buku Leonardo of Pisa (Fibonacci), *Liber abbaci*. Seperti kita ketahui, Fibonacci banyak dipengaruhi oleh karya-karya dari Arab.

Gambar 6. Al Kashi

Pemakaian pecahan desimal berikut cara perhitungannya yang signifikan terdapat pada karya al-Kashi (k.1380-1429), *Miftah al-Hisab*. Ini dilanjutkan oleh Simon Stevin (1548-1620) dengan menulis *La Disme* tahun 1585.

c. Bilangan Negatif

Diduga Bangsa Mesir Kuno telah mengenal bilangan negatif. Bilangan positif dengan lambang kaki melangkah ke kanan, sedang bilangan negatif ditandai dengan kaki melangkah ke kiri. Matematikawan Cina kuno belum menerima bilangan negatif sebagai penyelesaian suatu persamaan bahkan matematikawan Yunani Kuno hampir dalam setiap bukunya tidak memberikan penyelesaian bilangan negatif. Penerimaan bilangan negatif lebih maju di India. Brahmagupta telah mempergunakan bilangan negatif hampir serupa dengan konsep modern.

d. Bilangan Irasional

Tentang bilangan irasional, perguruan Pythagoras (sekitar 570- 490 SM) menganggap semua bilangan adalah rasional. Ketika perguruan ini menemukan bahwa $\sqrt{2}$ *incommensurable*, mereka lalu merahasiakannya. Berbeda dengan Yunani Kuno, matematikawan India Kuno memperlakukan akar bilangan bukan kuadrat sebagai bilangan juga. Penanganan bilangan irasional secara tepat baru dimulai pada abad ke-19. Adalah Richard Dedekind (1831-1916) dalam bukunya *Stetigkeit und die Irrationalzahlen* atau *Continuity and Irrational Numbers* tahun 1872 yang membuat definisi bilangan irasional secara tepat dan jelas.

e. Bilangan Prima

Konsep bilangan prima mula-mula berkembang dari perguruan Pythagoras. Euclid dalam bukunya Elements (k. 300 SM) membuktikan bahwa bilangan prima ada sebanyak tak hingga, serta juga membuktikan Teorema Dasar Aritmetika. Eratosthenes menemukan cara mendapatkan semua bilangan prima di bawah bilangan tertentu yang dikenal dengan “saringan Eratosthenes”. Cara kerja saringan Eratosthenes, misalkan akan mencari bilangan prima di bawah bilangan n, maka secara sederhana mendata semua bilangan lalu menghapus bilangan komposit yang merupakan kelipatan dari bilangan prima p, dengan $p \leq \sqrt{n}$. Misal n=100, maka akan dihapus bilangan komposit yang merupakan kelipatan dari bilangan-bilangan prima di bawah $\sqrt{100} = 10$, yaitu 2, 3, 5, 7.

	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Gambar 7. Contoh saringan Eratosthenes untuk n=100

Kontribusi berikutnya yang penting tentang bilangan prima adalah pembuktian Euler bahwa jumlah semua kebalikan bilangan prima adalah divergen. Jadi $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots$. menuju tak hingga.

f. Bilangan Pi (π)

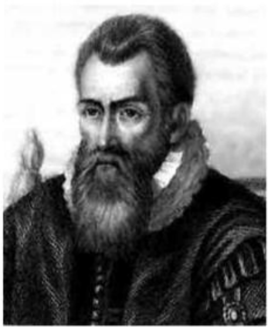
Sejarah bilangan pi (π), amatlah panjang dan penting. Sejarah π dimulai antara lain oleh bangsa Babilonia sekitar 4000 SM dan Mesir (Papirus Ahmes atau Rhind, 1650 SM).

Gambar 8. Salah satu bagian Papirus Ahmes

Perhitungan teoritik pertama berasal dari Archimedes (287-212 SM), dengan menggunakan keliling poligon luar dan poligon dalam suatu lingkaran, ia menemukan $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}$. Pada 1596M, Viéte menemukan bentuk deret bilangan untuk π. Willebord Snell (1580-1626) menemukan nilai π dengan cara menggunakan trigonometri. John Wallis pada 1650 menggunakan deret bilangan: $\pi = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdot \cdots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \cdots}$ Selanjutnya tahun 1671, James Gregory (1638-1675) mendapatkan rumus deret $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$. Comte de Buffon (1707-1788) pada 1760 untuk pertama kali menggunakan metode peluang untuk menentukan nilai π. Irasionalitas bilangan π dibuktikan pertama kali oleh Johann Lambert (1728-1777) tahun 1761. Lambang π sendiri pertama kali digunakan oleh William Jones (1675-1749) tahun 1706, dan populer lewat tangan Euler. Perhitungan dengan komputer dimulai tahun 1949 M oleh ENIAC, komputer generasi awal, di mana dalam tempo 70 jam berhasil menghitung hingga 2037 desimal. Dengan menggunakan superkomputer dan pemilihan rumus yang tepat, kini kita dapat menghitung π secara lebih cepat.

g. Logaritma

Gagasan yang mendasari penelitian logaritma yaitu *prosthaphaeresis*, perubahan proses pembagian dan perkalian kepada penambahan dan pengurangan. Orang pertama yang memulai gagasan ini adalah Ibnu Yunus As-Sadafi al-Misri (950-1009), dengan menggunakan trigonometri.



Gambar 9. John Napier

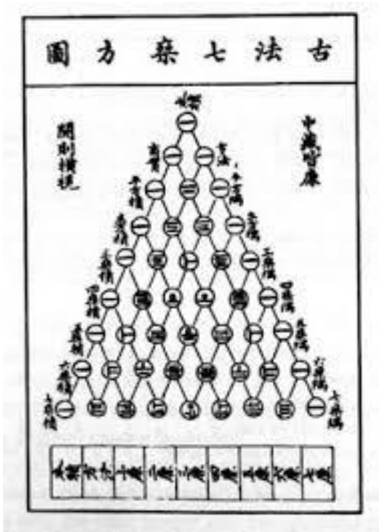
Logaritma ditemukan di awal tahun 1600 oleh John Napier (1550-1617) dan Joost Bürgi (1552-1632), walaupun banyak yang mengatakan Napier adalah perintis yang sebenarnya. Napier menerbitkan *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* (*A Description of an Admirable Tabel of Logarithms*) tahun 1614. Bürgi mempublikasikan *Arithmetische und geometrische Progress-Tabulen* tahun 1620, namun penemuannya itu dari tahun 1588. Bila Napier lewat pendekatan aljabar, maka Bürgi menggunakan pendekatan geometris. Henry Briggs (1561-1631), mendiskusikan logaritma Napier dan menyarankan metode yang dikenal sekarang, misalnya ia dapatkan bahwa log(101/2) = log(3,1622277) = 0,500000. Karyanya berjudul *Arithmetica Logarithmica* tahun 1624 berisi logaritma bilangan asli 1-20000 dan 90000-100000 sampai 14 tempat desimal. Briggs juga yang mulai menggunakan istilah "mantissa"dan "characteristic".

h. Barisan dan Deret

Sejarah barisan dan deret sebenarnya cukup panjang. Naskah kuno tertua yang berhubungan dengan barisan dan deret adalah Papirus Rhind atau Papirus Ahmes (sekitar 1650 SM), di mana soal no.79 dalam papirus berhubungan dengan masalah deret. Selanjutnya, salah satu paradoks dari Zeno berhubungan dengan deret geometri dengan $r = \frac{1}{2}$. Archimedes telah bekerja dengan deret tak hingga, antara lain bersesuaian dengan deret $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots$. Secara eksplisit mungkin inilah deret pertama dalam matematika. Fibonacci menulis buku *Liber Abacci* (1202) di mana terdapat sebuah soal tentang kelinci yang terkait dengan sebuah jenis barisan yang dinamakan Barisan Fibonacci. Selanjutnya deret bilangan kuadrat, kubik, dan seterusnya antara lain dibahas oleh Yang Hui dalam buku *Detailed Analysis*, Ibnu al-Banna al-Marrakhusi (1256-1321) dalam bukunya *Raf al-Hisab* juga Ibrahim Al-Umawi (1400-1489). Akhirnya, di tangan Euler, deret-deret tak hingga dibahas tuntas seperti dalam bukunya, *Introductio in analysin infinitorum*. Euler antara lain tahun 1740 menyelesaikan masalah deret yang terkenal yaitu $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$. Euler juga membuktikan bahwa deret harmonik adalah divergen, dan deret kebalikan seluruh bilangan prima juga divergen. Setelah jaman Euler, konsep deret telah begitu pesat dan termasuk dalam studi analisis.

i. Segitiga Pascal

Walaupun diberi nama Segitiga Pascal, tetapi segitiga tersebut telah lama dikenal ratusan tahun sebelum Blaise Pascal (1623-1662). Mungkin secara independen, matematikawan Cina dan Muslim (Persia) masing-masing menemukan segitiga tersebut, antara lain oleh Chia Hsien atau Jia Xian (sekitar 1050) telah menggunakan segitiga tersebut untuk menentukan akar kuadrat dan akar kubik suatu bilangan, serta Omar Khayyam dalam menentukan akar suatu bilangan.



Gambar 10. Deskripsi Segitiga Pascal oleh Yang Hui (Segitiga Yang Hui)

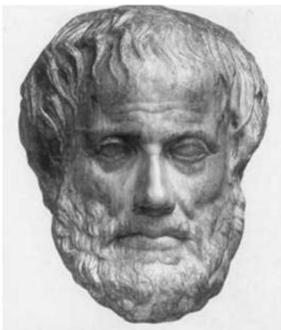
Mungkin deskripsi tentang segitiga Pascal, yang paling tua berasal dari India, dengan apa yang disebut Meru Prastara (berasal dari abad ke-3 atau 4). Segitiga binomial tersebut menjadi terkenal lewat karya Blaise Pascal, *Traité du triangle arithmétique* pada tahun 1654. Pascal menulis banyak sifat yang berkenaan dengan segitiga binomial tersebut.

2. Teori Himpunan

Teori himpunan bermula dari diterbitkannya makalah berjudul *On a Characteristic Property of All Real Algebraic Numbers* karya George Cantor tahun 1874. Topik yang menjadi cikal bakal lahirnya Teori Himpunan, salah satunya konsep ketakhinggaan. Bertrand Russell dan Ernest Zermelo secara independen menemukan paradoks yang kemudian dikenal sebagai "Paradoks Russell". Pada tahun 1899, Cantor sendiri juga menyuguhkan sebuah paradoks terkait bilangan kardinal. Walaupun menimbulkan beberapa paradoks, Teori Himpunan terus menemukan peranannya dalam membangun struktur matematika modern. Misalnya, Henri Lebesgue yang menggunakan Teori Himpunan untuk membangun teori ukuran. Kini Teori Himpunan dianggap sebagai salah satu landasan matematika modern.

3. Logika Matematika

Sejarah logika dimulai dengan tokohnya, Aristoteles. Koleksi tulisan Aristoteles tentang logika terkumpul dalam buku *Organon*. Tulisan lain yang penting adalah *Prior Analytics*. Kontribusi penting lainnya adalah logika dari Avicenna atau Ibnu Sinna. Sistem logika Ibnu Sinna antara lain melahirkan silogisme hipotetik, logika modal temporal, dan logika induktif, termasuk rintisan *propositional calculus*.



Gambar 11. Aristoteles

Logika simbolik (logika matematika) muncul sekitar pertengahan abad ke-19 sebagai akibat dari perumusan dasar-dasar matematika. Pada tahun 1854, George Boole menulis *An Investigation of the Laws of Thought on Which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities* yang memperkenalkan logika simbolik dan prinsip-prinsip yang kini dikenal sebagai logika Boole. Tahun 1903, Alfred North Whitehead (1861 - 1947) & Bertrand Russell menerbitkan "*Principia Mathematica*"yang mengulas kebenaran matematika berdasar aksioma dan aturan kesimpulan dalam logika simbolik.

4. Konsep Aljabar

a. Teorema Pythagoras

Teorema ini diberi nama Pythagoras karena perguruan Pythagoras-lah yang pertama memberi sebuah bukti (secara geometris). Tetapi hubungan antara sisi-sisi segitiga siku-siku tersebut telah lama dikenal jauh sebelum Pythagoras dan perguruannya. Di Universitas Columbia, terdapat naskah prasasti bernama *Plimpton 322* (dari 1900 SM hingga 1600 SM). Tabel pada naskah itu terdiri atas tiga kolom bilangan, yang ternyata bersesuaian dengan tripel Pythagoras. Sebuah catatan kuno, *Chou Pie Suan Ching* (500 hingga 200 SM) menyajikan pembahasan dan bukti secara geometris tentang Teorema Pythagoras. Teks kuno dari India juga telah mengenal tentang Teorema Pythagoras jauh sebelum Pythagoras. Di dalam naskah kuno *Baudhayana Sulbasutras* (800-600 SM) terdapat bahasan Teorema Pythagoras, juga Tripel Pythagoras, seperti: (5, 12, 13), (12, 16, 20), (8, 15, 17), (15, 20, 25), (12, 35, 37), (15, 36, 39), ($\frac{5}{2}$, 6, $\frac{13}{2}$), dan ($\frac{15}{2}$, 10, $\frac{25}{2}$). Ada yang mengatakan rumus Tripel Pythagoras: $\frac{m^2-1}{2}, m, \frac{m^2+1}{2}$ (berasal dari perguruan Pythagoras, namun ada pula yang menyatakannya telah dikenal di Babilonia). Rumus itu sendiri hanya berlaku untuk m bilangan ganjil. Belakangan, Plato memberikan rumus yang lebih baik: $m^2 - 1$, $2m$, $m^2 + 1$.

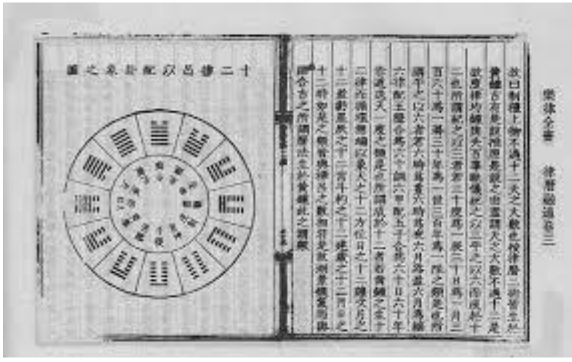
b. Persamaan Kuadrat

Bangsa Babilonia telah menggunakan suatu algoritma 'melengkapkan kuadrat' untuk menentukan penyelesaian suatu persamaan kuadrat, misalnya dalam Papirus Berlin (suatu naskah Mesir Kuno) dari tahun 2160-1700 SM. Sekitar 300 SM, Euclid dalam buku *Data* membahas 3 soal mengenai persamaan kuadrat, namun menggunakan kuantitas geometri. Dalam buku *Arithmetica,* Diophantus (antara 210-290) juga menyelesaikan persamaan kuadrat. Matematikawan India telah menggunakan cara yang ekuivalen dengan rumus akar persamaan kuadrat.

Aryabhata I memberikan aturan untuk jumlah suatu deret geometri yang menunjukkan pengetahuannya tentang persamaan kuadrat dengan kedua akarnya. Sementara itu, Brahmagupta menggunakan cara mirip Babilonia tetapi dengan variasi yang lebih baik, termasuk dengan kuantitas negatif. Perkembangan penting berikutnya oleh Al-Khowarizmi yang menulis tipe-tipe persamaan kuadrat dengan mengabaikan akar nol maupun negatif. Al-Khowarizmi menyusun 6 macam persamaan kuadrat. Setiap tipe persamaan kuadrat di atas, diselesaikannya dengan menggunakan diagram geometris dan prinsip *melengkapkan kuadrat*. Menurut sejarawan, Abraham bar Hiyya Ha-Nasi atau lebih dikenal di Eropa sebagai Savasorda (k.1125) menulis buku *Liber embadorum* yang diterbitkan di Eropa tahun 1145 dan merupakan buku pertama yang memberikan penyelesaian lengkap persamaan kuadrat.

c. Sistem Persamaan Linear

Babilonia diketahui yang pertama mengenal dan menulis tentang sistem persamaan. Pada sebuah batu bertulis bangsa Babilonia, dari masa 300 SM, termuat sebuah soal yang berkaitan dengan sistem persamaan linier.Bangsa Cina sekitar tahun 200 SM hingga 100 SM, telah lebih jauh melangkah dalam menangani sistem persamaan.



Gambar 12. Jiuzhang Suan Shu

Dalam teks kuno *Jiuzhang Suan Shu,* yang terjemahan Inggrisnya *Nine Chapters of the Matematical Arts*, pada bab 8, disuguhkan 18 masalah sistem persamaan linier, termasuk metode untuk menyelesaikannya yang dasarnya merupakan metode matriks, yaitu metode *fang cheng* (*square arrays*), yang kini disebut Metode Eliminasi Gauss.

d. Matriks dan Determinan

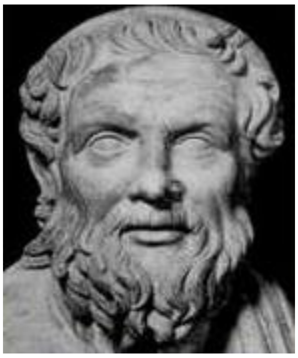
Perkembangan konsep determinan muncul lebih dulu dari konsep matriks. Ide determinan muncul pertama kali di Jepang dan di Eropa pada waktu hampir bersamaan, tetapi Seki Kowa (1642-1708) mempublikasikan lebih dulu di Jepang tahun 1683, lewat buku *Method of Solving the dissimulated problems* yang memuat metode matriks.

Gambar 13. Seki Kowa

Leibniz dalam suratnya ke l`Hôpital tahun 1683 menjelaskan penyelesaian sebuah sistem persamaan dengan menggunakan istilah “resultant” untuk kombinasi hasil kali koefisien dari determinan. Pada tahun 1750, Cramer (1704-1752) lewat buku *Introduction to the analysis of algebraic curve* memberikan aturan umum untuk aturan Cramer pada matriks $n \times n$ sehingga aturan itu disebut Aturan Cramer. Istilah “determinant” pertama kali digunakan oleh Carl F. Gauss (1777-1855) dalam *Disquisitiones arithmeticae* (1801). Eliminasi Gauss, yang ditelah digunakan di Cina tahun 200 SM, ditemukan pada karya Gauss tentang studi orbit asteroid Pallas. Cauchy (1789-1857) pada 1812 pertama kali menggunakan istilah “determinant”dalam konteks modern. Karya-karya Cauchy hampir mewakili konsep determinan modern. Dia merintis konsep “minor” dan “adjoints’, serta hasil kali matriks. Dalam karya tahun 1841, Ia menggunakan tanda dua garis vertikal untuk menunjukkan determinan. Pada 1850, istilah “matrix” (matriks) muncul dalam tulisan Sylvester (1814-1897). Tahun 1853, Arthur Cayley (1821-1895) yang dikenal lewat “Tabel Cayley” menulis tentang invers matriks.

e. Irisan Kerucut

Penemuan irisan kerucut sering ditujukan kepada Sekolah Plato di Athena sekitar abad ke-4 SM. Menaecmus (k. 350 SM) menemukan dan meneliti berbagai jenis kurva dengan memotong kerucut, yaitu ellips, parabola, dan hiperbola.



Gambar 14. Apollonius

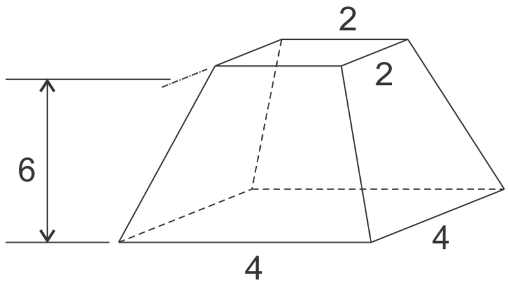
Penulis Yunani yang penting tentang irisan kerucut adalah Apollonius (k. 260-185 SM). Ia menyatakan pada buku *Conics*, bahwa ketiga irisan kerucut dari Menaecmus dapat diberikan dari sebuah kerucut dengan kemiringan bidang pemotong yang berbeda-beda. Sementara titik fokus parabola ditemukan oleh Pappus, yang juga memperkenalkan adanya garis direktris. Pada abad ke-11, irisan kerucut digunakan oleh Omar Khayyam untuk menyelesaikan suatu persamaan kubik. Dalam pekerjaan tersebut, Omar telah memberikan landasan munculnya pendekatan analitik (koordinat). John Wallis adalah yang pertama kali menggunakan metode analitik yang benar-benar lepas kaitannya dengan bangun kerucut dalam bukunya *De sectionibus conicis nova methodo expositis* (1655). Metode analitik ini diteruskan antara lain oleh de l`Hôpital (1661-1704) dalam *Traité analytique des sections conicae* (terbit 1707).

5. Konsep Geometri

Sejarah peradaban paling kuno yang tercatat dalam sejarah adalah peradaban Babilonia. Pengetahuan Babilonia mengenai geometri khususnya keliling, luas, dan volum cukup teliti. Dalam Batu Susa yang ditemukan tahun 1936, terdapat perhitungan yang lebih teliti. Batu ini antara lain berisi perhitungan perbandingan keliling lingkaran luar dan keliling segienam beraturan, dan memberikan nilai π sebesar $3\frac{1}{8}$. Pada tabelt Susa terdapat rumus yang tepat menghitung volume frustum, yaitu $h\left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right]$

Pada peradaban Mesir Kuno, terdapat Papirus Rhind berisi masalah matematika dan pemecahannya, terkait dengan aritmetika dan geometri. Masalah geometri terdapat pada soal 41 hingga 46, lalu 48 hingga 60. Selain itu tujuh dari 25 soal pada Papirus

Moskow merupakan soal geometri, yang membahas perhitungan luas segitiga hingga menemukan luas permukaan setengah bola dan volum frustum. Soal nomor 14 berisi perhitungan volum frustum (piramida terpancung) dengan rumus yang tepat, yaitu $V = \frac{1}{3}h(a^2 + ab + b^2)$ dengan a dan b panjang sisi-sisi persegi atas dan persegi bawah, serta h tinggi frustum.



Gambar 15. Frustum & ukurannya pada Papirus Moskow

Pada peradaban India kuno, pengetahuan geometri pada sulbasutra adalah mengenai transformasi bentuk bangun datar ke bentuk bangun datar yang lain, dengan luas yang sama. Terdapat cara transformasi persegi menjadi persegi panjang, trapesium samakaki, segitiga samasisi, belah ketupat, dan lingkaran. Terdapat soal transformasi antara persegi dan lingkaran, dengan penggunaan nilai π sebesar 3,088 dan 3,004.

Pada peradaban Cina kuno, dikenal naskah kuno *Jiǔzhāng Suànshù* dan berisi persoalan aritmetika hingga geometri. Naskah bab 5 (*shang kung*, pekerjaan teknik sipil) dan bab 9 (*Kou ku*, sudut siku-siku) berisi masalah geometri. Liu Hui sudah berusaha menghitung volum bola, namun mengaku belum berhasil. Zu Keng (450-520) berhasil menghitung diameter bola jika diketahui volum bola. Ia menyelesaikannya menggunakan prinsip yang lalu disebut prinsip Cavalieri.

Dari warisan sejarah geometri pada peradaban kuno, yang paling lestari pemanfaatannya hingga jaman modern adalah geometri dari Yunani kuno. Sumber dan warisan utama geometri Yunani kuno berasal dari Euclid dengan bukunya berjudul *Elements* yang terdiri dari 13 buah buku. Masalah keliling, luas dan volum bangun geometri dibahas pada buku *Elements* tersebut dan menjadi acuan pokok dalam pengajaran geometri di sekolah dan universitas selama berabad-abad. Selain *Element*, buku *On the Sphere and Cylinder* misalnya, dibahas volum berbagai bangun ruang, salah satunya penurunan rumus volum bola dengan cara membandingkannya dengan volum kerucut dan tabung. Pada buku *Measurement of a Circle* dibahas penurunan luas lingkaran, dan yang terpenting penemuan nilai pi (π) dengan menggunakan metode pendekatan hingga segi 96 beraturan. Archimedes menemukan nilai pi berada di antara $3\frac{10}{71}$ dan $3\frac{10}{70}$. Dari sinilah kemudian penggunaan nilai $\frac{22}{7}$ untuk pi menjadi terkenal. Pada buku *The Quadrature of the Parabola*, Archimedes menggunakan metode yang menjadi cikal bakal kalkulus integral yaitu *method of exhaustion*.

Selanjutnya perkembangan terpenting bidang geometri, terjadi pada masa peradaban Islam (Arab dan Persia) yaitu rintisan geometri non-euclidean. Mengenai tema keliling, luas, dan volum, dapat disebutkan salah satunya mengenai persamaan al-Mahani. Persamaan ini merupakan solusi bagaimana membagi sebuah bola menjadi dua segmen bola dengan perbandingan volum yang diberikan. Pada abad-abad selanjutnya, studi keliling, luas, dan volum bangun geometri telah sepenuhnya dipelajari dengan bantuan analisis atau kalkulus. Salah satu penemuan terpentingnya adalah penemuan integral kalkulus yang dapat menghitung luas dan volum berbagai bangun ruang.

6. Konsep Kalkulus

a. Fungsi

Penggunaan nama fungsi pada awalnya memang tidak persis sama dengan konsep modern yang kini ada. Sebagai istilah matematika, kata “fungsi”pertama kali digunakan oleh Gottfried Leibniz tahun 1673, namun untuk menunjukkan nilai kemiringan kurva pada titik tertentu. Fungsi yang demikian, kini dikenal sebagai fungsi turunan. Leibniz juga memperkenalkan istilah “variabel”, “constant”dan “parameter”. Tahun 1718, Johann Bernoulli memperkenalkan fungsi sebagai sebarang ekspresi yang menggunakan variabel dan beberapa konstanta. Demikian juga yang didefinisikan oleh Euler dalam teks *Introductio in Analysin Infinitorum*, pada tahun 1748. Jadi, ekspresi semisal $x^2 + 2x + 1$ juga disebut fungsi. Alexis Claude Clairaut dan Leonhard Euler kemudian memperkenalkan lambang $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$.

Gambar 16. Lobachevsky

Pendefinisian modern dimulai dari karya Peter Gustav Lejeune Dirichlet (tahun 1837) dan Nikolai Lobachevsky (1838) yang secara independen mendefinisikan istilah fungsi sebagai relasi di mana elemen pertama memiliki elemen kedua yang unik/tunggal. Namun Lobachevsky masih dibatasi pada fungsi yang kontinu.

b. Limit, Turunan, dan Integral

Perkembangan ide yang melahirkan kalkulus berlangsung sangat lama. Mungkin langkah penting pertama dimulai oleh matematikawan Yunani. Zeno dari Elea (k.490-k.430 SM) sekitar 450 SM mengemukakan empat masalah yang berkaitan dengan ketakhinggaan, dan dikenal sebagai *paradoks Zeno*. Masalah lain yang berkaitan dengan kalkulus adalah metode *exhaustion* (metode "melelahkan"). Metode ini disebut demikian karena orang harus berpikir menghitung luas daerah dengan menghitung bagian demi bagian semakin kecil sehingga semakin mewakili daerah yang akan dihitung. Ini terkait dengan ide dasar dari kalkulus integral. Metode ini pertama kali digagas oleh Eudoxus sekitar 70 SM. Archimedes sekitar 225 SM memberi kontribusi yang penting. Ia menunjukkan bahwa luas daerah yang dibatasi parabola sama dengan $^4/_3$ luas daerah segitiga dengan alas dan tinggi yang sama. Persoalan kedua yang penting adalah menghitung harga π dengan cara luas poligon. Masalah "integral"lain yang dikerjakan Archimedes yaitu menghitung luas permukaan dan volum bola, kerucut, paraboloida, dan hiperboloida. Fermat (1601-1665) menyelidiki tentang 'maksima' dan 'minima' dengan menganggap hal itu terjadi bila kemiringan terhadap kurva, sejajar dengan sumbu mendatar. Ini tentu saja bagian dari studi differensial (turunan). Descartes (1596-1650) mengembangkan suatu cara menentukan normal (garis yang tegak lurus kurva di suatu titik) dalam *La Géométrie* (1637) dan De Beaune (1601-1652) mengembangkan metodenya untuk menentukan garis singgung. Hudde (1628-1704) lalu membuat metode yang lebih sederhana, yang pada dasarnya menggunakan derivatif. Barrow (1630-1677) maupun Torriceli (1608-1647) menggunakan masalah gerak benda dengan variabel kecepatan (sekarang masalah tersebut sering digunakan untuk menunjukkan kecepatan sesaat sebagai masalah turunan). Newton (1642-1727) menulis tentang teori *fluxion* pada Oktober 1666. *Fluxion* ini berkaitan dengan gerak yang terbagi menjadi *fluxion x*'dan *fluxion y*'. Notasi dari Newton berupa $\frac{y^5}{x^5}$ bersesuaian dengan garis singgung kurva $f(x, y) = 0$. Newton kemudian mengemukakan kebalikan masalah, yaitu bila diketahui x dan $\frac{y^5}{x^5}.y$ maka berapa y. Newton lalu menyelesaikan masalah tersebut dengan cara antidifferensial. Dalam pekerjaan ini terdapat pernyataan tentang Teorema Fundamental Kalkulus. Bukunya sendiri, *Method of fluxions and infinity series*, baru selesai ditulis tahun 1671, dan diterbitkan 1736.

Gambar 17. Leibniz

Leibniz menggunakan pendekatan yang telah mengarah ke analisis modern. Karena itu pula banyak lambang-lambang kalkulus berasal dari Leibniz, antara lain notasi dx, dy, dy/dx, dan pada tahun 1675 ia menggunakan notasi $\int y\ dy = \frac{y^2}{2}$, persis seperti yang kita tulis sekarang. Karyanya tentang kalkulus integral ini diterbitkan tahun 1684 dan 1686 dengan nama '*calculus summatorius*'. Dasar-dasar kalkulus modern mulai jelas lewat karya-karya dari Cauchy.

7. Konsep Trigonometri

Penggunaan trigonometri bermula sebagai hubungan antara matematika dan astronomi, sehingga trigonometri mula-mula berkenaan dengan trigonometri bola (*spherical trigonometry*). Bila diberikan sebuah lingkaran maka masalahnya adalah mencari panjang tali busur (*chord*) di hadapan suatu sudut pusat. Untuk lingkaran satuan (berjari-jari satu), maka panjang tali busur tersebut dengan sudut x diukur dengan $2\ \sin\frac{x}{2}$. Tabel tali busur yang pertama dikenal dari Hipparchus (k.180-k.125 SM) sekitar 140 SM tetapi bukunya sendiri telah hilang. Dari sini, Hipparchus kemudian sering disebut sebagai Bapak Trigonometri. Menelaus dari Alexandria (k. 100M) menulis 3 buku *Sphaerica*, yang antara lain membuktikan sebuah teorema dalam segitiga bidang yang kini disebut Teorema Menelaus.

Pemakaian setengah tali busur (*half chord*) - dalam notasi modern berarti menunjukkan nilai *sinus* - dimulai di India. Dalam karya Aryabhata I, sekitar 500 M, terdapat tabel setengah tali busur dengan menggunakan nama "jya". Tabel yang serupa juga dihasilkan Brahmagupta tahun 628 dan Bhaskara II (1114-k.1185) pada tahun 1150. Di dalam bukunya yang berjudul "*On The Motion of The Stars*", al-Battani atau *albatenius* (k.858-929) adalah orang pertama yang menyusun tabel dan memperkenalkan fungsi *cot*. Abu al-Wafa` dikenal sebagai yang pertama kali menggunakan fungsi *tan* dan menyusun tabel *tan* dan *sin* dengan interval 15 menit. Dia juga memperkenalkan fungsi *sec* dan *cosec* serta membahas hubungan antara keenam fungsi trigonometri.

Gambar 18. Al-Tusi

Studi trigonometri sebagai ilmu matematika - lepas dari astronomi - pertama kali diberikan oleh Nashiruddin al-Tusi (1201-1274) dalam *Treatise on the quadrilateral*.

Bahkan dalam buku ini ia untuk pertama kali memperlihatkan keenam fungsi trigonometri lewat sebuah segitiga siku-siku (hanya masih dalam trigonometri sferis). Menurut O`Conners & Robertson, al-Tusi yang pertama memperkenalkan aturan Sinus (di bidang datar). Konsep *tan* dan *cot* sendiri lahir dengan jalur yang berbeda dengan *sin* dan *cos*. Konsep *tan* dan *cot* pada mulanya tidak berhubungan langsung dengan sudut, tetapi berasal dari perhitungan tinggi menggunakan panjang bayangan matahari (studi *gnomonic*). Di Arab, studi ini dikenal dengan nama studi *gnomon,* suatu bagian alat penunjuk waktu dengan bantuan sinar matahari dan mulai muncul oleh matematikawan Arab sekitar 860. Konsep *sec* dan *cosec* pun lahir dari studi tentang *gnomon* ini. Tahun 1533, Regiomontanus atau Johann Müller (1436-1476) menerbitkan buku *De triangulis omnimodis* yang dipercaya beberapa sejarawan sebagai buku lengkap pertama yang membahas trigonometri bidang.

8. Konsep Kombinatorika

Buku pertama yang membahas mengenai kombinatorika secara jelas berasal dari peradaban Jain di India, salah satunya buku *Bhagati Sutra* (k.300 SM). Mahavira (sekitar 850 M) secara menakjubkan menulis rumus umum untuk banyak permutasi dan juga kombinasi. Pada buku *Lilavati*, Bhaskara menulis tentang permutasi dan kombinasi di bawah judul *Anka Pasha*. Berikutnya buku kuno *I Ching*, yang memuat soal mengenai berapa jenis 'heksagram' yang dapat dibuat. Di Cina juga telah dikenal masalah mengenai teori graph, bujursangkar ajaib (*magic square*), sekitar 200 M. Nama *Lo Shu* adalah nama untuk bujursangkar ajaib 3×3. Abraham bin Ezra (sekitar 1140 M) telah menemukan bukti sifat simetri koefisien binomial. Pada sekitar 1321, Levi Ben Gerson atau Gersonides menulis sifat yang terkait rumus $P(n,n)$, $P(n,r)$ dan rumus umum $C(n,r)$. Blaise Pascal, Leibniz, Bernoulli, dan Euler termasuk peletak dasar-dasar kombinatorika modern. Jacob Bernoulli menulis *Ars Conjectandi* sekitar 1713, dan dapat dianggap sebagai buku pertama yang ditulis tentang kombinatorika. Pada abad ke-18, Euler mengembangkan masalah-masalah yang terkait kombinatorika. Ia antara lain mengembangkan untuk pertama kali Teori Graf saat memecahkan masalah Tujuh Jembatan Konigsberg, yang menjadi embrio ilmu baru, topologi.

9. Teori Peluang

Konsep peluang memiliki aspek ganda yaitu kemungkinan suatu hipotesis memberikan buktinya, dan perilaku proses stokastik seperti pelemparan dadu atau koin. Konsep peluang telah muncul ribuan tahun yang lalu, namun sebagai cabang matematika baru terlihat jelas pada pertengahan abad ke-17 M. Akan tetapi, pada abad ke-15 telah muncul beberapa karya terkait peluang. Tahun 1494, Luca Paccioli menulis buku pertama tentang peluang, *Summa de arithmetica, geometria, proportioni e proportionalita*. Tahun 1550, Gerolamo Cardano menulis buku *Liber de Ludo Aleae* (buku tentang permainan peluang). Pada pertengahan abad ke-17, Blaise Pascal berkorespondensi dengan Chevalier de Méré. Dari sinilah, Pascal kemudian mengembangkan teori peluang dan berkorespondensi dengan matematikawan Pierre de Fermat tahun 1654. Kedua orang inilah yang kemudian dikenal sebagai peletak dasar teori peluang. Buku Jakob Bernoulli yaitu *Ars Conjectandi* (1713) serta buku Abraham de Moivre yaitu *The Doctrine of Chances* (1718) menjadi sumber terpenting teori peluang sebagai cabang matematika. Teori peluang dan statistika pada masa selanjutnya saling berhubungan erat dalam topik distribusi data. Nama-nama seperti Fisher, Markov, Neyman banyak memberi kontribusi. Namun kajian secara deduktif-aksiomatis terhadap Teori Peluang pertama kali diberikan oleh Kolmogorov tahun 1931.

10. Statistika

Penggunaan metode statistik yang paling tua mungkin berasal dari abad ke-5 SM. Dalam buku *History of the Peloponnesian War* (Buku 2: 71-78) dijelaskan bagaimana tentara Yunani memperkirakan banyak batu yang menyusun tembok Platea. Juga dalam buku Mahabharata, dijelaskan bagaimana Raja Rtuparna memperkirakan banyak buah dan daun pada kebun yang luas. Tulisan penting pertama berasal dari abad ke-9, dalam buku *Manuscript on Deciphering Cryptographic Messages*, karya Al-Kindi (801–873 M). Ia memberikan detil bagaimana menggunakan statistik dan analisis frekuensi. Konsep rerata "*mean*"dikenal di Yunani kuno namun hanya untuk dua bilangan. Baru pada abad ke-16 M, Tycho Brahe memperluas konsep mean untuk menghitung lokasi beberapa benda langit. Ide "median"muncul pertama kali dari buku Edward Wright *Certain Errors in Navigation* (1599) dalam menentukan lokasi menggunakan kompas. Sedang kata "median"pertama kali digunakan oleh Francis Galton tahun 1881.

Metode matematis dalam mengkaji statistika muncul dari Teori Peluang yang dimulai dari korespodensi Fermat dan Blaise Pascal (1654). Huygens (1657) menulis teori peluang secara matematis untuk pertama kali, tetapi karya Jakob Bernoulli yaitu *Ars Conjectandi* (1713) serta karya Abraham de Moivre yaitu *The Doctrine of Chance* (1718) yang membahas teori peluang sebagai cabang matematika. Pada bukunya, Bernoulli membahas ide peluang kepastian dengan bilangan 1, dan nilai peluang di antara 0 dan 1. Dengan kajian yang telah dilakukan Laplace, tahun 1795 Gauss memperkenalkan distribusi normal yang menjadi konsep sentral dalam statistika. Metode kuadrat terkecil yang digunakan untuk memprediksi dengan kesalahan sekecil mungkin, pertama kali diperkenalkan oleh Andrien-Marie Legendre (1805), Robert Andrain (1808), dan Gauss (1809). Cournot tahun 1843 untuk pertama kali menggunakan konsep median untuk membagi distribusi peluang ke dalam dua kelompok sama banyak.

AKTIVITAS 2

Pada aktivitas 2 ini, Anda diharapkan dapat melakukan analisis KI & KD pada kurikulum yang Anda gunakan (kurikulum 2006 atau kurikulum 2013) dan memetakan Sejarah Matematika yang bisa digunakan/diintegrasikan pada pembelajaran KD tersebut.

LK 6.2. Pemetaan KI-KD dan Sejarah Matematika (On)

Lakukan pemetaan KI-KD serta Sejarah Matematika yang bisa digunakan/diintegrasikan pada pembelajaran KD tersebut. Gunakan format berikut.

No.	**KI**	**KD**	**Sejarah Matematika yang digunakan**

AKTIVITAS 3

Pada Aktivitas 3, Anda diharapkan dapat menyusun ide/rancangan pembelajaran dengan menggunakan sejarah matematika pada topik yang dipilih.

LK 6.3. Menyusun Ide/Rancangan Pembelajaran Menggunakan Sejarah Matematika (On)

Pilihlah salah satu topik matematika di SMA, kemudian tuliskan ide Anda secara lengkap tentang bagaimana menggunakan sejarah untuk pembelajaran topik tersebut. Gunakan berbagai sumber lain untuk mendapatkan konten materi sejarah matematika.

Anda dapat merujuk pada Furinghetti, SIU-Man Keung, atau John Fauvel tentang beberapa cara yang dapat ditempuh dalam menggunakan sejarah dalam pembelajaran matematika di kelas.

D. TUGAS

Buatlah artikel biografi seorang tokoh yang memberi sumbangan pemikiran pada perkembangan matematika. Bila anda mengambil tokoh dalam modul ini, tambahkan temuan sehingga lebih lengkap. Biografi tersebut minimal memuat hal-hal berikut:

1) Gambar tokoh
2) Temuan
3) Penggunaan temuan dalam pembelajaran di kelas

E. RANGKUMAN

1. Sejarah matematika merupakan salah satu kompetensi yang harus dikuasai guru menurut Permendiknas No. 16 tahun 2007.
2. Sejarah matematika dalam pembelajaran meliputi tiga dimensi yaitu sebagai materi pembelajaran, sebagai konteks materi, dan sebagai sumber strategi.
3. Pengaruh positif sejarah matematika dalam proses belajar siswa meliputi pemahaman, antusiasme, dan keterampilan.

4. Manfaat sejarah matematika dalam pembelajaran antara lain mempertajam ketrampilan problem solving, menjadi dasar untuk pemahaman yang lebih baik, membantu siswa membuat hubungan-hubungan matematika, dan membuat adanya interaksi antara matematika dengan lingkungan sosial masyarakat.
5. Sejarah Topik-topik Matematika SMA:
   a. Konsep dan Sistem Bilangan: angka yang digunakan secara internasional saat ini adalah angka Hindu-Arab yang pertama kali terdapat dalam karya Al-Khowarizmi dan dibawa ke Eropa oleh Leonardo dari Pisa (Fibonacci). Bilangan pecahan sudah dikenal sejak zaman Mesir Kuno, berkembang pula di India dalam *Brahmasphutasiddhanta*, dan pertama kali dikenal tanpa 'per'/garis horizontal oleh al-Hassar. Bilangan irasional didefinisikan dengan tepat oleh Richard Dedekind tahun 1872. Bilangan prima telah berkembang di perguruan Pythagoras. Bilangan pi (π) memiliki sejarah yang panjang, mulai dari 4000SM, perhitungan oleh Archimedes menggunakan keliling polygon dalam dan polygon luar suatu lingkaran, hingga penghitungan dengan komputer. Logaritma ditemukan oleh John Napier. Barisan dan Deret pertama ditemukan dalam papyrus Rhind. Segitiga Pascal telah dikenal ratusan tahun sebelum Pascal, baik di Cina maupun Persia.
   b. Teori Himpunan: Teori Himpunan diawali dari karya Cantor (1874).
   c. Logika Matematika. Tulisan Aristoteles tentang logika: *Organon*. Tokoh penting lainnya yaitu Ibnu Sinna, George Boole, Whitehead, dan Bertrand Russell.
   d. Konsep Aljabar. Sejarah konsep aljabar antara lain terdiri atas sejarah teorema Pythagoras, persamaan kuadrat, system persamaan linear, matriks dan determinan, serta irisan kerucut.
   e. Konsep Geometri telah tercatat sejak peradaban Babilonia. Pada peradaban Mesir Kuno terdapat Papirus Rhind, Papirus Moskow yang berisi soal-soal geometri dan pembahasannya. Di Cina terdapat naskah Jiuzang Suanshu yang di dalamnya juga terdapat soal-soal geometri. Sumber geometri utama adalah karya Euclid, *Elements*.
   f. Konsep Kalkulus. Fungsi pertama kali digunakan oleh Leibniz. Bernoulli pada tahun 1718 juga memperkenalkan fungsi. Euler menulis tentang fungsi

dalam teks *Introductio in Analysin Infinitorum.* Lambang $f(x)$ dikenalkan oleh Alexis Claude Clairaut. Leibniz mengenalkan notasi dx, dy, dy/dx dan notasi $\int y\ dy = \frac{y^2}{2}$. Dasar-dasar kalkulus modern dimulai lewat karya Cauchy.

g. Konsep Trigonometri diawali dari trigonometri bola yaitu mencari panjang tali busur. Tabel tali busur pertama ditulis oleh Hipparchus sehingga ia disebut Bapak Trigonometri. Trigonometri sebagai ilmu matematika pertama kali diberikan oleh al-Tusi.
h. Konsep Kombinatorika secara jelas terdapat pada buku *Bhagati Sutra* di India. Euler mengembangkan masalah-masalah terkait kombinatorika.
i. Teori Peluang sebagai cabang matematika muncul pada pertengahan abad ke-17M. Tokoh-tokoh teori peluang antara lain Luca Paccioli, Gerolamu Cardano, Pascal, Fermat, Bernoulli, Abraham de Moivre, Fisher, Markov, Neyman, Kolmogorov.
j. Statistika telah dikenal sejak abad ke-5 SM. *Manuscript on Deciphering Cryptographic Messages*, karya Al-Kindi (801–873 M) memberikan detil bagaimana menggunakan statistik dan analisis frekuensi. Gauss memperkenalkan distribusi normal, metode kuadrat terkecil diberikan oleh Adrien-Marie Legendre, Robert Andrain, Gauss.

F. UMPAN BALIK DAN TINDAK LANJUT

Anda telah menyelesaikan Kegiatan Belajar 6 tentang Sejarah Matematika yang berisi sejarah matematika dalam pembelajaran, beberapa tokoh matematika, serta sejarah konsep matematika jenjang SMA. Untuk mengukur capaian kompetensi Anda, kerjakanlah Evaluasi yang terdapat **pada akhir modul ini** kemudian periksa hasil pekerjaan Anda. Pastikan Anda tidak membuka kunci jawaban sebelum selesai mengerjakan soal Evaluasi agar mendapatkan hasil pengukuran yang sesuai.

Capaian kompetensi (CK) dirumuskan sebagai berikut:

$$\text{CK} = \frac{\text{skor yang diperoleh}}{\text{banyak soal}} \times 100\%$$

Deskripsi capaian kompetensi dan tindak lanjut yang dapat diambil adalah sebagai berikut.

Perolehan CK (%)	Deskripsi dan Tindak Lanjut
$91 \leq CK \leq 100$	**Sangat Baik,** berarti Anda benar-benar memahami sejarah matematika. Selanjutnya kembangkan pengetahuan dan tuangkan dalam pembelajaran
$76 \leq CK < 91$	**Baik**, berarti Anda cukup memahami sejarah matematika walaupun ada beberapa bagian yang perlu dipelajari lagi. Selanjutnya pelajari lagi beberapa bagian yang dirasa belum begitu dipahami.
$50 \leq CK < 76$	**Cukup,** berarti Anda belum cukup memahami sejarah matematika. Oleh karena itu, Anda perlu mempelajari lagi bagian yang belum dikuasai dan menambah referensi dari sumber lain.
$CK<50$	**Kurang,** berarti Anda belum dapat memahami sejarah matematika. Oleh karena itu, Anda perlu mempelajari lagi dari awal dan menambah referensi dari sumber lain.

Kegiatan Pembelajaran 7: Filsafat Matematika

A. Tujuan

Kegiatan Belajar 7 akan membahas tentang filsafat matematika yang terdiri atas:

1. Pengertian Filsafat Matematika dan Alirannya
2. Implikasi Filsafat Matematika dalam Pembelajaran

Setelah mempelajari Kegiatan Belajar 7, guru/peserta diharapkan dapat:

1. menjelaskan pengertian filsafat matematika secara intuitif dan beberapa aliran filsafat matematika,
2. menerapkan pendekatan aliran filsafat matematika dalam pembelajaran matematika.

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

Setelah mempelajari modul dan melakukan aktivitas pada KB 7, guru diharapkan mampu:

1. Menjelaskan pengertian filsafat matematika,
2. Menyebutkan aliran-aliran dalam filsafat matematika
3. Menjelaskan implikasi filsafat matematika dalam pembelajaran

C. Uraian Materi Dan Aktivitas Pembelajaran

1. PENGERTIAN FILSAFAT MATEMATIKA DAN ALIRANNYA

Filsafat matematika merupakan cabang dari filsafat yang merefleksikan dan menjelaskan sifat-sifat dasar matematika. Filsafat matematika membahas pertanyaan-pertanyaan seperti: Apakah dasar dari pengetahuan matematika? Apakah sifat dari kebenaran matematika? Apakah karakteristik kebenaran matematika? Bagaimana menilai pernyataan-pernyataan matematika? Mengapa kebenaran matematika memerlukan kebenaran?

Filsafat matematika telah lahir dalam bentuk awal sejak ribuan tahun yang lalu. Perkembangan yang penting diwakili oleh Pythagoras dan para pengikutnya yang berkeyakinan bahwa bilangan adalah yang paling bertanggung jawab dalam mengatur alam semesta, *"Numbers rules the universe"*(bilangan memerintah/mengatur alam semesta).

Berdasarkan perspektif epistemologi, kebenaran matematika terbagi menjadi dua kategori, yaitu pandangan absolut dan pandangan fallibilist (non-absolut). Absolutis memandang kebenaran matematika secara mutlak atau absolut. Matematika adalah satu dan mungkin satu-satunya hal yang pasti, tak dipertanyakan, dan pengetahuan objektif. Sedangkan menurut fallibilis, kebenaran matematika bersifat 'dapat diperbaiki', tidak pernah dianggap anti revisi dan perbaikan (Ernest, 1991).

Secara umum terdapat empat aliran besar yang mempengaruhi perkembangan matematika termasuk perkembangan pendidikan matematika.

1. Platonisme

Pandangan Plato terhadap matematika bahwa objek matematika bersifat abstrak dan tidak memiliki hubungan realitas atau asal usul sehingga bersifat abadi dan tak berubah. Penggunaan nama Plato karena pandangan ini mirip dengan pandangan Plato dalam bukunya *Theory of Form*.

Masalah dari aliran ini antara lain tidak dapat menjawab pertanyaan: tepatnya di mana dan bagaimana objek matematika itu ada, dan bagaimana cara kita mengetahui keberadaannya?

2. Formalisme

Matematikawan Jerman, David Hilbert (1862-1943) menjadi pelopor aliran matematika ini. Formalis berpendapat bahwa matematika adalah tidak lebih atau tidak kurang sebagai bahasa matematika. Bagi kaum formalis, objek-objek matematika tidak ada hingga diciptakan oleh manusia melalui sistem aksioma.

Gambar 19. David Hilbert

Kaum formalis memiliki dua teori (Ernest, 1991):

a. Matematika murni dapat dinyatakan sebagai sistem formal yang tidak ditasfirkan, kebenaran matematika dinyatakan dengan teorema-teorema formal.
b. Keamanan dari sistem formal ini bisa ditunjukkan dalam hal kebebasan mereka dari ketidakkonsistenan, dalam arti meta-matematika.

Pemikiran formalisme mempengaruhi buku-buku pelajaran dan kurikulum matematika selama pertengahan abad ke-20. Beberapa ahli tidak dapat menerima pandangan formalisme. Keberatan bermula ketika Kurt Godel membuktikan bahwa kita tidak mungkin dapat membuat sistem lengkap yang konsisten dalam dirinya sendiri. Pernyataan ini terkenal dengan sebutan Teorema Ketidaklengkapan Godel (*Godel's Incompleteness Theorems*).

3. Logisisme

Dua ahli matematika sekaligus ahli filsafat dari Inggris menjadi pioneer aliran ini yaitu Bertrand Russell (1872-1970) dan Alfred North Whitehead (1861-1947) melalui buku *Principia Mathematica* (1903). Selain dua tokoh tersebut, pendukung aliran ini adalah G. Leibniz, G. Frege (1893), R. Carnap (1931). Menurut kaum logisisme, semua matematika dapat diturunkan dari prinsip-prinsip logika. Logisisme adalah sekolah yang berpikiran bahwa matematika adalah bagian dari logika (Ernest, 1991).

Terdapat dua pernyataan penting tentang logisisme oleh Bertrand Russell (Ernest, 1991), yaitu (a) semua konsep matematika pada akhirnya dapat disederhanakan dalam kosep logika, (b) semua kebenaran matematika dapat dibuktikan dari aksioma dan aturan penarikan kesimpulan dalam logika.

Kebanyakan ide-ide logika juga diterima oleh kaum formalis namun mereka tidak percaya bahwa matematika dapat diturunkan dari logika saja. Sementara menurut kaum logisisme, matematika itu tidak lain adalah logika. Menurut istilah mereka, matematika itu masa dewasa dari logika.Keberatan utama terhadap aliran ini muncul dari adanya paradoks-paradoks logika (seperti paradoks teori himpunan pada aliran formalisme) yang tidak dapat diselesaikan oleh kaum pendukung logisisme.

4. Intuitionisme

Pioner aliran ini adalah Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966) seorang matematikawan Belanda.

Gambar 20. Luitzen Egbertus Jan Brouwer

Intuisionis mengklaim bahwa matematika berasal dan berkembang di dalam pikiran manusia, jadi matematika lahir karena dikonstruksi secara mental. Ketepatan dalil-dalil matematika tidak terletak pada simbol-simbol di atas kertas, tetapi terletak dalam akal pikiran manusia. Hukum-hukum matematika tidak ditemukan melalui pengamatan terhadap alam, tetapi mereka ditemukan dalam pikiran manusia. Intuitionisme kemudian menjadi dasar dalam rumusan filsafat konstruktivisme dalam matematika.

Dummett (1977) memberikan pernyataan positif dan negative intuitionisme. Pernyataan positifnya adalah pada akibat bahwa cara intuitionisme dalam menafsirkan pengertian matematika dan operasi logika adalah salah satu yang koheren dan sah, bahwa matematika intuistik membentuk teori yang mudah dimengerti. Pernyataan negatifnya adalah pada akibat bahwa cara klasik dalam menafsirkan pengertian matematika dan operasi logika tidak koheren dan sah, bahwa matematika klasik yang dalam bentuk terdistorsi memuat banyak nilai yang (sayangnya) tidak mudah dimengerti.

Keberatan terhadap aliran intuisionisme terutama adalah bahwa pandangan kaum intuisionis tidak memberikan gambaran yang jelas tentang bagaimana matematika bekerja dalam pikiran.

Menurut Lakatos, keempat aliran di atas (Platonisme, Logisisme, Intuisionisme, Formalisme) termasuk ke dalam *the absolutist philosophy of mathematics* (filsafat matematika absolut).

2. IMPLIKASI FILSAFAT MATEMATIKA DALAM PEMBELAJARAN

Bagaimana implikasi filsafat matematika dalam pembelajaran matematika di kelas? Filsafat matematika akan mempengaruhi pola pikir seseorang (guru) dalam memandang matematika sehingga berimbas pada cara ia membelajarkan matematika di kelas. Guru yang memandang matematika *hanya* sebagai kumpulan angka dan rumus, sadar atau tidak sadar merupakan pendukung kaum formalis. Guru tipe ini biasanya hanya *mengajarkan* matematika, bukan *membelajarkan* matematika. Sedangkan guru yang *hanya* mengandalkan logika atau akal sehat belaka, mereka termasuk pendukung aliran logisisme. Guru tipe ini biasanya sulit menerima kebenaran-kebenaran matematika yang tidak dapat/sulit diterima atau bertentangan dengan akal sehat. Jika ia tidak memahami struktur matematika, ia bisa terjebak dalam miskonsepsi-miskonsepsi yang kemudian diajarkan kepada siswa. Pola piker intuitif ekstrem juga kurang baik dalam pembelajaran. Contoh yang kurang tepat dari guru dengan ola piker intuitif ekstrem adalah dengan membiarkan siswa menemukan jalan penyelesaian sendiri dengan menggunakan bahasanya sendiri. Guru intuitif hanya mementingkan hasil, asalkan hasilnya benar, proses tidak menjadi masalah. Guru seyogyanya juga berperan sebagai fasilitator, yaitu mengarahkan siswa pada penalaran dan juga penulisan lambing formal.

Seperti disebutkan sebelumnya, bahwa terdapat dua kategori kebenaran matematika yang juga menjadi kelompok besar filsafat matematika, yaitu filsafat matematika absolut dan filsafat matematika falibilis (non-absolut). Berikut ini implikasi kedua filsafat matematika tersebut dalam kurikulum pendidikan matematika.

1. Filsafat matematika absolut dan kurikulum

Bagi filsafat matematika absolut, pengetahuan atau objek matematika berdiri secara independen, “terlepas”dari dunia nyata, dan memiliki kedudukan yang bebas dari masyarakat. Oleh karena itu karakteristik kurikulum matematika yang menganut filsafat matematika absolut, seperti dikutip dari Paul Ernest dalam Sumardyono (2015), adalah sebagai berikut.

a. Kurikulum diorganisasikan berdasarkan konten matematika (*content centered*)
b. Guru berperan sebagai “penceramah”, bersifat “mengajar”, untuk membantu siswa memahami serta menghubungkan ide dan konsep. Guru adalah sumber utama pengetahuan dan pengetahuannya tak terbantahkan.
c. Terdapat kurikulum pokok (standar) yang menjadi model dalam pengembangan kurikulum. Bagi filsafat ini, objek matematika “ditemukan”dan statis berdasarkan kurikulum.
d. Belajar melalui abstraksi, menghubungkan ide-ide dan konsep-konsep matematika secara formal, tanpa ada bagian yang real.
e. Matematika dilihat sebagai disiplin ilmu yang terisolasi dan diskrit, dan dalam hubungannya dengan kurikulum matematika diperlakukan secara terpisah dan tidak ada integrasi materi.

Dari uraian di atas, dapat kita lihat bahwa kurikulum berdasar filsafat matematika absolut berfokus pada “konten matematika”, bukan pada “proses” atau “bagaimana berpikir matematis”.

2. Filsafat matematika non-absolut dan kurikulum

Berdasarkan pendapat Popper dalam Ernest (1991), filsafat matematika non-absolut (*fallibilist*) memandang pengetahuan matematika atau objek matematika sebagai hasil dari aktivitas manusia (hasil sosial dan budaya). Filsafat ini memandang sejarah matematika sebagai bagian dari matematika. Lebih lanjut, filsafat matematika non-absolut berfokus pada pembelajaran bukan pada konten matematika. Pandangan filsafat matematika non-absolut bersifat pragmatis dan fokus pada aspek proses matematis di mana realitas selalu berubah, pengetahuan matematika tidak statis.

Mengutip Paul Ernest dalam Sumardyono (2015) dari berbagai pendapat ahli, berikut ini beberapa karakteristik kurikulum matematika yang menganut filsafat matematika non-absolut.

a. Siswa dibebaskan dari pembelajaran tradisional yang menekankan pada belajar menghafal, pengulangan latihan (*drill*), dan bergantung pada buku teks (*text book authority*)
b. Belajar dilakukan dengan cara aktivitas yang melibatkan pemecahan masalah di mana kompetensi yang diperoleh memungkinkan diterapkan pada situasi dan objek yang lain.
c. Peran guru adalah membantu peserta didik mengidentifikasi masalah mereka dan mencari solusi masalah.
d. Pembelajaran bersifat *student-centered* berbeda dengan filsafat tradisional.
e. Belajar merupakan bagian integral dari kehidupan dan bukan rencana untuk kehidupan masa depan.
f. Kurikulum bersifat *problem-centered* yang membantu peserta didik mengembangkan keterampilan bagaimana berpikir.

D. Aktivitas

LK 7.1. Memahami Filsafat Matematika dan Implikasinya

Untuk lebih memahami filsafat matematika dan implikasinya dalam pembelajaran, lakukan aktivitas berikut bersama peserta yang lain atau jika Anda menggunakan modul ini sebagai bahan belajar mandiri, lakukanlah bersama kolega Anda.

Petunjuk:

1. Bagi kelas menjadi 5 kelompok yaitu:
   a. Kelompok Filsafat Matematika Absolut
   b. Kelompok Filsafat Matematika Non-Absolut
   c. Kelompok Aliran Formalisme
   d. Kelompok Aliran Logisisme
   e. Kelompok Aliran Intuitionisme
2. Buatlah "biografi" masing-masing kelompok dengan menyebutkan minimal 'Siapakah/Apakah aku?', 'Apa ciri/karakteristikku?', 'Bagaimana implikasi pembelajaran matematika berdasarkan aku?', 'Contoh implikasi pembelajaran suatu KD berdasarkan aku.'
3. Tuliskan dalam kertas plano sebagai sebuah poster untuk kemudian dipresentasikan sebagai presentasi poster.

E. Latihan

Kerjakan latihan soal berikut!

Dengan bahasa Anda sendiri, berikan contoh perilaku/sikap guru yang cenderung mengikuti aliran formalisme, logisisme, dan intuisionisme dan berikan alasannya.

F. Rangkuman

Filsafat matematika merupakan cabang filsafat dengan objek matematika. Kebenaran matematika terbagi menjadi dua kategori, yang selanjutnya menjadi kelompok filsafat matematika, yaitu absolut dan falibilis (non-absolut). Filsafat matematika absolut memandang matematika sebagai objek independen yang terlepas dari dunia nyata. Sedangkan falibilis memandang matematika sebagai hasil dari aktivitas matematika. Beberapa aliran filsafat matematika antara lain platonisme, formalisme, logisisme, dan intuitionisme merupakan aliran yang termasuk dalam filsafat matematika absolut. Implikasi filsafat absolut dalam kurikulum menekankan pada konten matematika, sedangkan falibilis/non-absolut lebih kepada proses dan ketrampilan berpikir siswa.

G. Umpan Balik Dan Tindak Lanjut

Anda telah menyelesaikan Kegiatan Belajar 7 tentang Filsafat Matematika yang berisi filsafat matematika dan alirannya, serta implikasi filsafat matematika dalam pembelajaran. Untuk mengukur capaian kompetensi Anda, kerjakanlah Evaluasi yang terdapat **pada akhir modul** ini kemudian periksa hasil pekerjaan Anda. Pastikan Anda tidak membuka kunci jawaban sebelum selesai mengerjakan soal Evaluasi agar mendapatkan hasil pengukuran yang sesuai. Capaian kompetensi (CK) dirumuskan sebagai berikut:

$$\text{CK} = \frac{\text{skor yang diperoleh}}{\text{banyak soal}} \times 100\%$$

Deskripsi capaian kompetensi dan tindak lanjut yang dapat diambil adalah sebagai berikut.

Perolehan CK (%)	Deskripsi dan Tindak Lanjut
$91 \leq \text{CK} \leq 100$	**Sangat Baik,** berarti Anda benar-benar memahami filsafat matematika. Selanjutnya kembangkan pengetahuan dan tuangkan dalam pembelajaran
$76 \leq \text{CK} < 91$	**Baik**, berarti Anda cukup memahami filsafat matematika walaupun ada beberapa bagian yang perlu dipelajari lagi. Selanjutnya pelajari lagi beberapa bagian yang dirasa belum begitu dipahami.
$50 \leq \text{CK} < 76$	**Cukup,** berarti Anda belum cukup memahami filsafat matematika. Oleh karena itu, Anda perlu mempelajari lagi bagian yang belum dikuasai dan menambah referensi dari sumber lain.
$\text{CK}<50$	**Kurang,** berarti Anda belum dapat memahami filsafat matematika. Oleh karena itu, Anda perlu mempelajari lagi dari awal dan menambah referensi dari sumber lain.

Kunci Jawaban Latihan/Tugas

1. Kunci Jawaban Latihan/Tugas KB 1

1. B	6. B
2. C	7. D
3. A	8. B
4. A	9. A
5. C	10. B

2. Kunci Jawaban Latihan/Tugas KB 2

1. B	6. C
2. A	7. C
3. C	8. B
4. D	9. A
5. A	10. B

3. Kunci Jawaban Latihan/Tugas KB 3

1. C	6. A
2. A	7. B
3. D	8. C
4. A	9. C
5. C	10. B

4. Kunci Jawaban Latihan/Tugas KB 4

1. D	6. B
2. A	7. A
3. A	8. B
4. B	9. D
5. C	10. C

5. Kunci Jawaban Latihan/Tugas KB 5

Berikut merupakan kunci jawaban untuk soal latihan pada bagian E.

1) Tunjukkan bahwa argument berikut valid.

1.	$h \wedge a \Rightarrow b$	Premis
2.	$b \Rightarrow \sim p$	Premis
3.	$a \wedge p$	Premis
$\therefore$	$\sim h$	Konklusi

Penyelesian:

a) Dengan aturan penyederhanaan dari premis 3, diperoleh premis 4 yaitu p.

b) Dengan modus tollen pada premis 2 dan 4, diperoleh premis 5, yaitu $\sim b$.

c) Dengan modus tollen pada premis 1 dan 5, diperoleh premis 6, yaitu
$\sim(h \wedge a) = \sim h \vee \sim a = a \Rightarrow \sim h$.

d) Dengan aturan penyederhanaan pada premis 3, diperoleh premis 7, yaitu a

e) Dengan modus ponen pada premis 6 dan 7, diperoleh $\sim h$.

2) Tunjukkan bahwa kesimpulan yang telah dibuat berikut ini valid.

1.	$a \vee b \Rightarrow c \wedge d$	Premis
2.	$d \vee e \Rightarrow f$	Premis
$\therefore$	$a \Rightarrow f$	Konklusi

Penyelesaian:

a) Andaikan kesimpulan $a \Rightarrow f$ tidak benar. Artinya $\sim(a \Rightarrow f) = a \wedge \sim f$ adalah benar, dan ini merupakan premis baru (premis 3).

b) Dengan aturan penyderhanaan pada premis 3, diperoleh $\sim f$ sebagai premis 4.

c) Dengan modus tollen pada premis 2 dan 4, diperoleh $\sim d \wedge \sim e$ sebagai premis 5.

d) Dengan aturan penyderhanaan pada premis 5, diperoleh $\sim d$ sebagai premis 6.

e) Premis 1 ekuivalen dengan

$$\begin{aligned}
a \vee b \Rightarrow c \wedge d &= \sim c \vee \sim d \Rightarrow \sim a \wedge \sim b \\
&= (c \wedge d) \vee (\sim a \wedge \sim b) \\
&= [c \vee (\sim a \wedge \sim b)] \wedge [d \vee (\sim a \wedge \sim b)] \\
&= [d \vee (\sim a \wedge \sim b)] \\
&= \sim d \Rightarrow \sim a \wedge \sim b
\end{aligned}$$

f) Dengan modus ponen pada premis 1 dan 6, diperoleh premis 7, yaitu $\sim a \wedge \sim b$.

g) Dengan aturan penyederhanaan pada premis 7, diperoleh $\sim a$ sebagai premis 8.

h) Dengan aturan penyederhanaan pada premis 1, diperoleh premis 9, yaitu a.

i) Terjadi kontradiksi pada premis 8 dan 9, yaitu $a \wedge \sim a$.

j) Pengandaian salah. Jadi kesimpulan tersebut sudah valid.

3) Buktikan bahwa kesimpulan berikut adalah valid.

Ani dan Budi berumur sama atau Ani lebih tua dari Budi.

Jika Ani lebih tua dari Budi, maka Ani lebih tua dari Rini.

Jika Ani dan Budi berumur sama, maka Ahmad dan Ani tidak berumur sama.

Kesimpulan: Ahmad dan Ani tidak berumur sama atau Ani lebih tua dari Rini.

Penyelesaian:

Misalkan:

a: Ani dan Budi berumur sama

b: Ani lebih tua dari Budi

c: Ani lebi tua dari Rini

d: Ahmad dan Ani tidak berumur sama

Diperoleh argument berbentuk:

1.	$a \vee b$	Premis
2.	$b \Rightarrow c$	Premis
3.	$a \Rightarrow d$	Premis
$\therefore$	$d \vee c$	Konklusi

a) Premis 1 ekuivalen dengan $\sim a \Rightarrow b$ dan premis 3 ekuivalen dengan $\sim d \Rightarrow \sim a$

b) Dengan silogisme pada premis 1 dan 3 diperoleh premis 4, yaitu $\sim d \Rightarrow b$

c) Dengan silogisme pada premis 2 dan 4, diperoleh $\sim d \Rightarrow c$, yang ekuivalen dengan $d \vee c$ (konklusi)

Jadi, kesimpulan tersebut sudah valid.

4) Buktikan bahwa kesimpulan berikut adalah valid.

Logika adalah pelajaran yang mudah atau Logika adalah pelajaran yang menyenangkan. Jika matematika itu indah, maka logika itu tidak mudah.

Kesimpulan: Jika matematika itu indah, maka Logika adalah pelajaran yang menyenangkan.

Penyelesaian:

Misalkan:

a: Logika adalah pelajaran yang mudah;

b: Logika adalah pelajaran yang menyenangkan;

c: matematika itu indah;

Diperoleh argument berbentuk:

1.	$a \vee b$	Premis
2.	$c \Rightarrow \sim a$	Premis
$\therefore$	$c \Rightarrow b$	Konklusi

a) Premis 1 ekuivalen dengan $\sim a \Rightarrow b$

b) Menggunakan silogisme pada premis 1 dan 2, diperoleh $c \Rightarrow b$ yang sesuai dengan konklusi.

Jadi, argument tersebut adalah valid.

5) Suatu hari saya mencari dompet dan setelah saya mengingat-ingat maka fakta-fakta berikut ini saya yakini kebenarannya.
   - jika dompetku dibawa adikku, maka aku melihat dompetku ketika aku membaca Koran
   - aku membaca Koran di ruang tamu atau aku membaca Koran di kamar
   - jika aku membaca Koran di ruang tamu, maka dompetku di atas meja computer
   - aku tidak melihat dompetku ketika aku membaca Koran
   - jika aku membaca Koran di kamar, maka dompetku dibawa adikku.

   Berdasarkan fakta-fakta tersebut, menurut anda di mana dompet saya ?

   Penyelesaian

   Misalkan:

   p: dompetku dibawa adikku

   q: aku melihat dompetku ketika aku membaca Koran

   r: aku membaca Koran di ruang tamu

   s: aku membaca Koran di kamar

   t: dompetku di atas meja computer

   Diperoleh kumpulan premis sebagai berikut:

1.	$p \Rightarrow q$	Premis
2.	$r \vee s$	Premis
3.	$r \Rightarrow t$	Premis
4.	$\sim q$	Premis
5.	$s \Rightarrow p$	Premis

   a) Menggunakan modus tollen pada premis 1 dan 4, diperoleh premis 6, yaitu $\sim p$.
   b) Menggunakan modus tollen pada premis 5 dan 6, diperoleh premis 7, yaitu $\sim s$.
   c) Karena premis 2 ekuivalen dengan $\sim s \Rightarrow r$, maka menggunakan modus ponen pada premis 2 dan 7, diperoleh premis 8, yaitu r.

d) Menggunakan modus ponen pada premis 3 dan 8, diperoleh t.

Karena semua premis sudah digunakan, maka dapat disimpulkan bahwa t merupakan konklusi dari semua premis yang ada.

Jadi, diperoleh kesimpulan **dompetku di atas meja komputer.**

6) Diberikan premis-premis sebagai berikut.

(i) Jika ayah membuat peraturan di rumah, maka semua anggota keluarga akan mematuhinya.

(ii) Beberapa anggota keluarga tidak mematuhi peraturan di rumah atau ayah mengajak berlibur.

Faktanya: ayah membuat peraturan di rumah.

Kesimpulan yang bisa diambil adalah ….

Penyelesaian:

Misal:

p: ayah membuat peraturan di rumah

q: semua anggota keluarga mematuhi peraturan

r: ayah mengajak berlibur

Maka premis-premis di atas menjadi:

(i) $p \Rightarrow q$

(ii) $\sim q \vee r$

(iii) p

Karena $\sim q \vee r$ ekuivalen dengan $q \Rightarrow r$, maka menggunakan silogisme premis (i) dan (ii) menjadi $p \Rightarrow r$. Menggunakan modus ponen (i) dan (iii) menghasilkan kesimpulan r. Sehingga kesimpulannya **ayah mengajak berlibur.**

EVALUASI

Pilihlah jawaban yang paling tepat.

1. Kalimat di bawah ini yang merupakan pernyataan adalah…..
   A. Terdapat bilangan bulat x sehingga $x – 3 = 0$.
   B. $x \leq 3$
   C. Berapakah jumlah halaman di buku yang kamu bawa?
   D. $k + 2 = 3$.

2. Jika p merupakan pernyataan yang bernilai benar, sedangkan q, r merupakan pernyataan yang belum diketahui kebenarannya, maka pernyataan di bawah ini yang bernilai benar adalah …..
   A. $p \wedge q \wedge r$
   B. $p \vee q \vee r$
   C. $p \Rightarrow q \vee r$
   D. $p \vee q \Rightarrow r$

3. Pernyataan di bawah ini yang merupakan tautologi adalah ….
   A. $p \Rightarrow q \vee r$
   B. $p \Rightarrow \sim p$
   C. $p \wedge q \Rightarrow p$
   D. $p \Rightarrow p \wedge q$

4. Konvers dari pernyataan $a \Rightarrow (b \wedge c)$ adalah …
   A. $\sim a \Rightarrow (\sim b \vee \sim c)$
   B. $(b \wedge c) \Rightarrow a$
   C. $\sim(b \wedge c) \Rightarrow \sim a$
   D. $\sim b \wedge \sim c \Rightarrow \sim a$

5. Pernyataan di bawah ini merupakan tautologi, kecuali ….
   A. $(a \Rightarrow b \wedge \sim b) \Rightarrow \sim a$
   B. $(a \wedge b) \Rightarrow a \vee b)$
   C. $(a \Rightarrow b) \Rightarrow (a \vee c \Rightarrow b \vee c)$
   D. $a \vee b \Rightarrow a$

6. Semua tanda ( ) pada pernyataan di bawah ini dapat dihilangkan, kecuali …
   A. $a \wedge (b \vee c)$
   B. $p \Rightarrow (q \wedge r)$
   C. $(d \vee c) \Rightarrow (f \vee q)$
   D. $(p \wedge q) \wedge (q \wedge r)$

7. Pernyataan yang ekuivalen dengan $a \Rightarrow (b \vee c)$ adalah ….
   A. $(a \Rightarrow b) \Rightarrow c$
   B. $\sim c \Rightarrow (a \Rightarrow b)$
   C. $c \Rightarrow (a \vee b)$
   D. $a \Rightarrow (b \Rightarrow c)$

8. Ingkaran dari pernyataan $(p \wedge q) \Rightarrow r$ adalah ….
   A. $(p \wedge q) \Rightarrow \sim r$
   B. $(p \wedge q) \wedge \sim r$
   C. $(p \vee q) \wedge \sim r$
   D. $(\sim p \vee \sim q) \wedge r$

9. Kesimpulan yang valid dari sekumpulan premis $(a \vee e)$; $(a \Rightarrow c)$; $(e \Rightarrow d)$ adalah ….
   A. $e \vee c$
   B. $c \vee d$
   C. $e \vee d$
   D. $a \vee c$

10. Pernyataan di bawah ini yang merupakan disjungsi ekslusif adalah ….
    A. Hasan sedang makan atau Hasan sedang menonton TV
    B. Hasan mempunyai adik laki-laki atau Hasan mempunyai adik perempuan
    C. Hasan suka membaca atau Hasan suka menulis
    D. Hasan lahir di Bandung atau Hasan lahir di Bogor

11. Ingkaran dari pernyataan, semua guru mendapat tunjangan sertifikasi adalah ….
    A. Semua guru tidak mendapat tunjangan sertifikasi

B. Tidak ada guru yang mendapat tunjangan sertifikasi

C. Ada guru yang tidak mendapat tunjangan sertifikasi

D. Semua guru belum tentu mendapat tunjangan sertifikasi

12. Jika nanti malam tidak hujan, maka saya akan berangkat ke Surabaya. Pernyataan yang ekuivalen dengan pernyataan ini adalah ….

A. Nanti malam hujan atau saya akan berangkat ke Surabaya

B. Jika nanti malam hujan, maka saya tidak akan berangkat ke Surabaya

C. Jika saya berangkat ke Surabaya, maka pasti nanti malam tidak hujan

D. Jika nanti malam hujan, maka saya akan tidur di rumah

13. Kesimpulan yang tepat dari premis-premis:

$$(\sim a \vee b)\ ;\ (c \Rightarrow \sim b)$$

adalah …..

A. $\sim c \Rightarrow a$

B. $b \Rightarrow c$

C. $a \Rightarrow c$

D. $a \Rightarrow \sim c$

14. Kesimpulan yang tepat dari sekumpulan premis:

$(w \vee p \Rightarrow i)$; $(i \Rightarrow c \vee e)$; $(e \Rightarrow u)$; $(\sim c \wedge \sim u)$

adalah ….

A. $\sim w$

B. u

C. $\sim c$

D. e

15. Jika ada pernyataan $p \wedge q \wedge r$, maka dapat disimpulkan p saja, sebab….

A. Lebih sederhana

B. p merupakan pernyataan paling awal

C. menggunakan modus ponen

D. pernyataan $p \wedge q \wedge r \Rightarrow p$ merupakan tautology

16. Buku *Algoritmi de numero Indorum* merupakan buku yang membahas mengenai penggunaan angka atau sistem bilangan Hindu-Arab yang ditulis oleh ….
    A. Fibonacci
    B. al-Khowarizmi
    C. Archimedes
    D. Cramer

17. Tokoh berikut adalah perintis penulisan bilangan desimal, *kecuali* ….
    A. al-Kasyi
    B. Simon Stevin
    C. al-Qalasadi
    D. Newton

18. Kepercayaan yang dianut Pythagoras dan pengikutnya adalah ….
    A. Bilangan mengatur alam
    B. Hanya ada bilangan positif
    C. Tuhan menciptakan bilangan
    D. Bilangan prima adalah bilangan terindah

19. Tokoh matematika yang mengenalkan cara pembuktian dengan penalaran deduktif adalah ….
    A. Pythagoras
    B. Thales
    C. Aristoteles
    D. George Boole

20. Tokoh matematika yang pertama kali membuktikan bahwa banyak bilangan prima ada di tak hingga adalah ….
    A. Eratothenes
    B. Euclid
    C. Archimedes
    D. Pythagoras

21. Entitas atau objek matematika menurut aliran intuisionistik adalah ….
    A. Ada dan hanya perlu ditemukan oleh manusia
    B. Ada tetapi perlu diformulasikan manusia
    C. Tidak ada sebelum dikonstruksi pikiran manusia
    D. Tidak ada sebelum disepakati semua matematikawan

22. Tokoh utama aliran intuisionisme adalah ….
    A. Imannuel Kant
    B. Brouwer
    C. Lakatos
    D. Hilbert

23. Konstruktivisme didasari oleh aliran filsafat ….
    A. Platonisme
    B. Formalisme
    C. Logisisme
    D. Intuisionisme

24. Guru yang mengajarkan konsep dan ide matematika dengan memberikan rumus-rumus saja senderung mengikuti aliran ….
    A. Formalisme
    B. Non-absolut
    C. Intuisionisme
    D. Logisisme

25. Guru yang membiarkan siswa menemukan jalan penyelesaian sendiri, lebih mementingkan hasil tanpa memperhatikan proses, cenderung mengikuti aliran ….
    A. Non-absolut
    B. Intuisionisme
    C. Logisisme
    D. Formalisme

PENUTUP

Modul Logika, Sejarah dan Filsafat bagi Guru dan Tenaga Kependidikan ini disusun sebagai acuan bagi semua pihak yang terkait dalam pelaksanaan Guru Pembelajar bagi guru dan tenaga kependidikan (GTK). Melalui modul ini selanjutnya semua pihak terkait diharapkan dapat memanfaatkannya untuk meningkatkan kompetensi seperti yang diharapkan.

Penulis mengucapkan terimakasih yang sebesar-besarnya kepada semua pihak yang telah membantu baik langsung maupun tidak langsung dalam penyusunan modul ini. Kritik dan saran untuk perbaikan modul Guru Pembelajar Logika, Sejarah, dan Filsafat Matematika sangat diharapkan untuk terus dapat meningkatkan kualitas bahan bacaansebagai sarana untuk meningkatkan kualitas para guru dan tenaga kependidikan.

DAFTAR PUSTAKA

Boyer, Carl B. (1968). *A History of Mathematics.* New York: John Wiley & Sons, Inc.

Burton, David M. (2011). *The History of Mathematics: an introduction. – 7th ed*. Ney York: Mc. Graw Hill

Cajori, Florian. (2013). *A History of Mathematical Notations (Two Volumes Bound as One).* New York: Dover Publication, Inc.

Craig Smoryński. (2008). *History of Mathematics. A Supplement.* USA: Springer

Direktorat Jenderal Guru Dan Tenaga Kependidikan Kementrian Pendidikan dan Kebudayaan.(2015). *Pedoman Penyusunan Modul Diklat Pengembangan Keprofesian Berkelanjutan*. Jakarta

Ernest, Paul. (1991). *The Philosophy of Mathematics Education.* London: Routledge Falmer

Furinghetti, Fulvia. *On The Role of The History of Mathematics in Mathematics Education.* http://www.math.uoc.gr/~ictm2/Proceedings/. Diunduh pada 21 Desember 2015

Kumar, Rajnish. (2006). *Short Stories About Numbers. http://www.arvindguptatoys.com/arvindgupta/numberstories.pdf.* Diunduh pada 21 Desember 2015

Markaban.(2004). *Logika Matematika. Diklat Insruktur/Pengembang Matematika SMA Jenjang Dasar* .PPPG Matematika

Mulyana, Endang. *Sejarah dan Filsafat Matematika.* http://file.upi.edu/Direktori/FPMIPA/JUR._PEND._MATEMATIKA/195401211979031-ENDANG_MULYANA/MAKALAH/Aliran_matematika.pdf. Diunduh pada 8 November 2015

Navel Mangelep.(2009). *Modul Logika Matematika*. Universitas Negeri Manado

Nick Haverhals & Matt Roscoe. The history of mathematics as a pedagogical tool: Teaching the integral of the secant via Mercator's projection. *TMME, vol7, nos 2&3, p.339-368, 2010*. http://www.math.umt.edu/tmme/vol7no2and3/. Diunduh pada 18 Desember 2015

Pumfrey, Liz. (2011). *History of Fraction.* http://nrich.maths.org/2515. Diunduh pada 5 Januari 2016

Rosa. *Integrating History of Mathematics into the Mathematics Classroom.* http://cmup.fc.up.pt/cmup/preprints/2001-25.pdf. Diunduh pada 21 Desember 2015

Siu, Man-Keung. *No, I don't use history of mathematics in my class. Why?.* http://hkumath.hku.hk/~mks/. Diunduh pada 21 Desember 2015

Siu, Man-Keung. *The ABCD of using history of mathematics in the (undergraduate) classroom.* http://hkumath.hku.hk/~mks/ABCD.pdf. Diunduh pada 21 Desember 2015

Sukirman. (2006). *Logika dan Himpunan*. Yogyakarta: Hanggar Kreator

Sukirman. (2006). Pengantar Teori *Bilangan*. Yogyakarta: Hanggar Kreator

Sumardyono & Marfuah. (2015). *Bahan Belajar: Sejarah dan Filsafat Matematika* (Jenjang SMA Diklat Pasca UKG Berbasis MGMP dengan Pola In-On-In). Yogyakarta: PPPPTK Matematika

Sumardyono. (2012). *Pemanfaatan Sejarah Matematika di Sekolah.* Diunduh dari http://p4tkmatematika.org pada 10 Desember 2015

Susanna S.Epp. (2011). *Discrete Mathematics with Applications, 4th Edition*, Boston: Brooks/Cole

Tarski, Alfred .(1994*).Introduction to Logic and to the Methodology of the Deductive Sciences*. New York: Oxford University Press

LAMPIRAN

Kunci Jawaban Soal Evaluasi

1.	A	6.	A
2.	B	7.	B
3.	C	8.	B
4.	B	9.	B
5.	D	10.	D
11.	C	16.	B
12.	A	17.	D
13.	D	18.	A
14.	A	19.	B
15.	D	20.	B
21.	C		
22.	B		
23.	D		
24.	A		
25.	B		

J

KELOMPOK KOMPETENSI

MODUL PENGEMBANGAN KEPROFESIAN BERKELANJUTAN GURU MATEMATIKA SMA

TERINTEGRASI PENGUATAN PENDIDIKAN KARAKTER

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
DIREKTORAT JENDERAL GURU DAN TENAGA KEPENDIDIKAN
2017

www.gtk.kemendikbud.go.id