



bbgp
Balai Besar Guru Penggerak

DI Yogyakarta



**MERDEKA
BELAJAR**

BAHAN AJAR BIMBINGAN TEKNIS PENGGERAK KOMUNITAS BELAJAR

GEOMETRI DAN TRIGONOMETRI

Untung Trisna Suwaji
Angga Kristiyajati

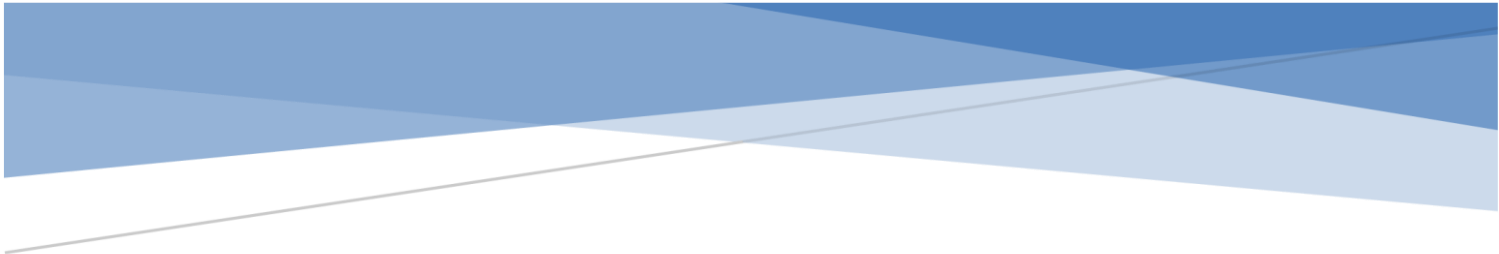


BALAI BESAR GURU PENGGERAK PROVINSI DIY

DIREKTORAT JENDERAL GURU DAN TENAGA KEPENDIDIKAN

KEMENTERIAN PENDIDIKAN, KEBUDAYAAN, RISET, DAN TEKNOLOGI

2023



BAHAN AJAR GEBRAK KOMBEL

Geometri dan Trigonometri

Untung Trisna Suwaji
Angga Kristiyajati

KATA PENGANTAR

Puji syukur kami panjatkan ke hadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan hidayahNya sehingga bahan ajar untuk program Gerakan Bersama Penggerak Komunitas Belajar (Gebrak Kombel) ini dapat terselesaikan.

Bahan ajar ini disusun sebagai bahan belajar pada kegiatan Bimbingan Teknis (Bimtek) Gebrak Kombel yang dilaksanakan sebagai upaya BBGP Provinsi D.I Yogyakarta dalam rangka melaksanakan tugas dan fungsinya sebagai Unit Pelaksana Teknis Direktorat Jenderal Guru dan Tenaga Kependidikan (UPT Dirjen GTK) Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan, Riset dan Teknologi (Kemendikbudristek) untuk meningkatkan kompetensi guru di Provinsi D.I Yogyakarta. Pada kegiatan Gebrak Kombel, para penggerak komunitas belajar yang berasal dari guru penggerak dan guru inti dibekali dengan muatan konten dan pedagogi agar memiliki kapasitas untuk berbagi dan bersinergi dengan guru-guru lain di dalam komunitas belajarnya. Melalui kegiatan ini diharapkan dapat terbangun ekosistem belajar guru berbasis komunitas belajar dengan memberdayakan penggerak komunitas dari guru penggerak dan guru inti sehingga guru dapat berkolaborasi meningkatkan kompetensi diri.

Bahan ajar ini tersusun melalui kolaborasi BBGP Provinsi D.I. Yogyakarta dengan BBGP Jawa Barat, BBGP Jawa Timur, dan BGP Banten. Penyusun bahan ajar ini adalah para Widyaiswara, Widyaprada, dan Pengembang Teknologi Pembelajaran dari BBGP/BGP tersebut. Ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya disampaikan atas dedikasi dan kesediaannya untuk mencurahkan gagasan dan inspirasi sehingga bahan ajar Gebrak Kombel ini dapat terselesaikan. Semoga Allah SWT memberikan balasan yang setimpal atas semua pengorbanan dan kontribusinya dalam menyelesaikan tugas penyusunan bahan ajar ini. Amiin.

Yogyakarta, 12 April 2023

Kepala BBGP DI Yogyakarta

Dr. Adi Wijaya, M.A.

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR	i
DAFTAR ISI.....	ii
BAB I PENDAHULUAN	3
BAB II SISTEM AKSIOMA DALAM GEOMETRI	6
BAB III KONSEP SUDUT, TRANSVERSAL, DAN KESEJAJARAN	9
BAB IV SEGITIGA, KEKONGRUENAN DAN KESEJAJARAN	16
BAB V SEGIEMPAT	25
BAB VI LINGKARAN.....	32
BAB VII POLIHEDRON	38
BAB VII BANGUN RUANG SISI LENGKUNG	46
BAB VIII TRANSFORMASI GEOMETRI	51
BAB IX TRIGONOMETRI.....	73
DAFTAR PUSTAKA.....	92

BAB I PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Sesuai dengan amanat Peraturan Menteri Pendidikan, Kebudayaan Riset dan Teknologi Republik Indonesia Nomor 14 Tahun 2022, Balai Besar Guru Penggerak (BBGP) mempunyai tugas melaksanakan pengembangan dan pemberdayaan guru, pendidik lainnya, tenaga kependidikan, calon kepala sekolah, kepala sekolah, calon pengawas sekolah, dan pengawas sekolah. Dua di antara sembilan fungsi BBGP DIY yang menjadi latar belakang dilaksanakannya penguatan pelibatan komunitas pendidikan adalah: a) pelaksanaan fasilitasi peningkatan kompetensi guru, pendidik lainnya, tenaga kependidikan, calon kepala sekolah, kepala sekolah, calon pengawas sekolah, dan pengawas sekolah; b) pelaksanaan pemantauan dan evaluasi pengembangan dan pemberdayaan guru, pendidik lainnya, tenaga kependidikan, calon kepala sekolah, kepala sekolah, calon pengawas sekolah, dan pengawas sekolah; dan c) pelaksanaan kemitraan di bidang pengembangan dan pemberdayaan guru, pendidik lainnya, tenaga kependidikan, calon kepala sekolah, kepala sekolah, calon pengawas sekolah, dan pengawas sekolah.

Program Gerakan Bersama Penggerak Komunitas Belajar (Gebrak Kombel) dilaksanakan untuk mendorong penguatan penguasaan konten keilmuan dan pedagogi guru. Kedua hal tersebut merupakan dua sisi mata uang keilmuan yang sangat penting harus dikuasai guru. Penguasaan materi merupakan komponen kunci guru menguasai kompetensi yang menjadi tanggungjawabnya. Demikian juga penguasaan pedagogi, sangat krusial agar guru mampu memfasilitasi siswa belajar berhasil belajarnya. Hal ini selaras dengan pernyataan Harel dan Kien (2004; Hospesová & Tichá, 2000: 2) bahwa penguasaan materi merupakan dasar penguasaan kompetensi yang harus dimiliki guru sehingga mampu menjalankan peran pengajarannya. Sedangkan menurut Baumert dan Kunter (2006: 26-42), penguasaan materi merupakan bagian kunci penguasaan kompetensi profesional guru sehingga mampu menjalankan tugas profesi dengan sebaik-baiknya.

Hill dan Ball (2004: 332) menggarisbawahi pada aspek pentingnya guru memiliki *specialized knowledge of content* maupun *common knowledge of content*. *Specialized knowledge of content* merujuk pada pengetahuan materi yang lebih detail dibandingkan siswa. Pada saat guru mengajarkan suatu pembagian, misalnya, guru tidak cukup memahami tentang prosedur melakukan pembagian seperti yang diajarkan kepada siswa, tetapi guru juga perlu menguasai tentang mengapa dan apa makna dari suatu proses pembagian. *Common knowledge of content* tidak merujuk semata-mata hanya materi di kelas, tetapi pengetahuan yang secara umum digunakan dalam kehidupan.

Pendalaman konten merupakan salah satu titik krusial untuk terwujudnya profil pelajar Indonesia seperti telah ditetapkan di Undang-Undang No. 20 Tahun 2003 tentang Sistem Pendidikan Nasional. Pada undang-undang tersebut dinyatakan bahwa *pendidikan nasional bertujuan untuk berkembangnya potensi peserta didik agar menjadi manusia yang beriman dan bertakwa kepada Tuhan Yang Maha Esa, berakhlak mulia, sehat, berilmu, cakap, kreatif, mandiri, dan menjadi warga negara yang demokratis serta bertanggung jawab*. Mencermati rumusan tujuan pendidikan nasional tersebut jelas bahwa belajar konten keilmuan adalah esensial dalam proses pendidikan. Penguasaan ilmu pengetahuan tentu menjadi prasyarat

penting menjadikan generasi baru Indonesia yang cakap dan berilmu. Bagaimana bisa menjadi cakap dan berilmu tanpa penguasaan ilmu pengetahuan yang kuat. Lebih dari sekedar cakap dan berilmu, kajian berbagai materi dalam pembelajaran merupakan wahana hebat mengembangkan siswa menjadi kreatif, mandiri, demokratis, bertanggung jawab, sehat, serta menjadi manusia berakhlak mulia yang beriman dan bertakwa kepada Tuhan Yang Maha Esa. Dalam konteks inilah penting bagi setiap siswa mendapatkan fasilitas terbaik dalam mengkaji materi keilmuan dalam pembelajaran. Dan, ini membutuhkan peran guru-guru yang cakap dan berilmu dengan penguasaan keilmuan bidang keahlian yang kuat.

Selain penguasaan konten, sangat esensial bagi guru memiliki penguasaan pedagogi dan mampu mengimplementasikannya dalam pembelajaran di kelas. Turnuklu & Yesildere (2007: 1) menyatakan bahwa pengetahuan guru tentang materi penting tetapi tidak cukup karena guru juga harus mampu menghubungkan antara pengetahuan yang dimiliki dengan pengajarannya di kelas. Menurut Gadaniadis dan Namukasa (2007: 16), perlu ada hubungan dialektik penguasaan guru atas materi dan cara mengajarkannya. Menguasai materi saja tidak cukup tanpa didukung keilmuan untuk mengajarkannya kepada siswa. Begitu juga, menguasai dengan baik ilmu pedagogi juga tidak cukup tanpa didukung penguasaan keilmuan matematika yang memadai oleh guru. Kepincangan salah satu aspek keilmuan tersebut dapat menjadi faktor penghambat peran guru dalam mendorong sukses belajar siswa.

Sultan dan Artzt (2011: xviii) menyatakan bahwa guru dituntut menguasai *pedagogical content knowledge/PCK*). PCK memuat dua aspek, yaitu pengetahuan pedagogi dan pengetahuan konten (Setyaningrum, Mahmudi, & Murdanu, 2018: 1). Pengetahuan pedagogi merujuk pengetahuan bagaimana siswa belajar, bagaimana mengajarkan materi atau konsep, dan bagaimana menilai pemahaman siswa. Pengetahuan konten merujuk pada penguasaan guru tentang materi-materi matematika. Pengetahuan pedagogi dan konten merupakan dua aspek mendasar yang harus dikuasai guru untuk keberhasilan tugas mengajarnya. Keduanya seperti belahan ganda sekeping mata uang, menyatu, tidak terpisahkan satu dengan yang lain.

Memerhatikan hal tersebut di atas, BBGP Provinsi DIY pada tahun 2023 melaksanakan program Gebrak Kombel, akronim dari Gerakan Bersama Penggerak Komunitas Belajar. Program Gebrak Kombel merupakan program pemberdayaan dan pendampingan komunitas belajar sebagai ekosistem belajar guru melalui optimalisasi peran penggerak komunitas belajar dari guru penggerak (GP) dan guru inti (GI) sebagai penggerak kolaborasi dan sinergi belajar guru untuk meningkatkan kompetensi berbasis komunitas belajar. Guru penggerak dan guru inti yang merupakan para penggerak komunitas belajar dibekali dengan penguatan penguasaan konten dan pedagogi, yang selanjutnya mereka dapat mengimbaskannya pada rekan-rekan guru di komunitas belajarnya.

B. Tujuan

Program Gebrak Kombel bertujuan membangun *learning community* guru berbasis komunitas belajar melalui pemberdayaan penggerak komunitas dari guru penggerak dan guru inti sehingga guru dapat berkolaborasi dan bersinergi meningkatkan kompetensi diri.

C. Sasaran

Sasaran Program Gebrak Kombel adalah guru jenjang TK, SD, SMP, SMA di wilayah D.I. Yogyakarta.

D. Manfaat

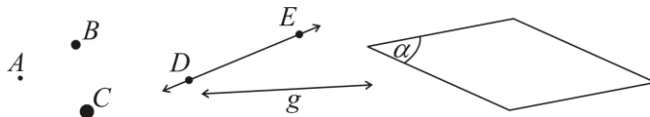
1. Guru Penggerak dan Guru Inti diberdayakan sebagai penggerak kolaborasi dan sinergi guru.
2. Guru tergerak dan terfasilitasi untuk berkolaborasi dan bersinergi meningkatkan kompetensi diri.
3. *Learning community* guru dapat terbentuk berbasis komunitas belajar sebagai ekosistem belajar untuk melakukan pengembangan profesi guru secara berkelanjutan.

BAB II SISTEM AKSIOMA DALAM GEOMETRI

A. Sistem Aksioma

1. Materi

Pengertian pangkal



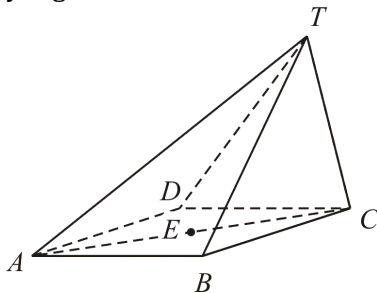
Titik, garis, dan bidang merupakan pengertian pangkal yang tidak didefinisikan (*undefined term*).

Beberapa istilah lain dalam geometri juga cukup diterima secara intuitif, tetapi tidak didefinisikan, seperti “terletak”, “di luar”, “kelurusan” suatu garis, atau “datarnya” bidang.

Titik dapat dibayangkan seperti bola yang semakin mengecil sehingga jari-jarinya nol. Karena tidak memiliki ukuran, maka titik dikatakan berdimensi nol. Titik dapat ditentukan letaknya. Titik biasa direpresentasikan sebagai noktah. Besar kecilnya noktah tidak berpengaruh, tetap saja titik tidak memiliki ukuran. dan dinotasikan dengan huruf kapital (misal: A , B , T). Garis dapat dibayangkan sebagai jejak titik yang bergerak lurus. Garis memanjang ke dua arah. Dengan demikian garis hanya memiliki panjang, tidak memiliki ketebalan sehingga dikatakan garis berdimensi satu. Akibat dari hal ini adalah, jarak dua titik pada suatu garis dapat ditentukan ukurannya. Garis dinotasikan dengan huruf non kapital (misal garis l , h , g) atau dengan menyebutkan dua titik yang dilalui (misal $\overleftrightarrow{AB}$). Bidang dapat dibayangkan sebagai jejak garis yang bergerak menyamping tanpa mengubah arah garis. Bidang meluas ke segala arah tanpa batas. Dalam lukisan geometris, bidang dapat dilukiskan sebagiannya dalam bentuk jajargenjang. Bidang dinotasikan dengan huruf Yunani, atau tiga titik yang dilaluinya (misal bidang α , bidang β , bidang ABC).

Definisi, Aksioma, dan Teorema

Setelah mengenal *undefined term* titik, garis, dan bidang, diperlukan pernyataan-pernyataan yang menjelaskan suatu istilah. Pernyataan ini disebut sebagai definisi. Dalam mendefinisikan sesuatu, hanya boleh menggunakan undefined term, atau istilah-istilah yang telah dikenal sebelumnya. Berikut ini beberapa definisi dalam geometri.



a. Kolinear (segaris):

Tiga titik dikatakan kolinear (segaris) jika semua titik tersebut terletak pada garis yang sama. Pada gambar limas $T.ABCD$ di samping, titik E terletak di tengah AC , sehingga ketiga titik A , E , dan C segaris. Sementara itu tiga titik A , C dan T tak segaris (non kolinear).

b. Koplanar (sebidang):

Dua garis dikatakan koplanar jika keduanya terletak pada bidang yang sama. Empat titik dikatakan koplanar jika keempat titik tersebut terletak sebidang. Pada gambar di samping, garis AB dan BC koplanar, sedang garis AB dan TC non koplanar. Empat titik T, A, B, C tak sebidang karena T tidak terletak di bidang yang memuat ABC .

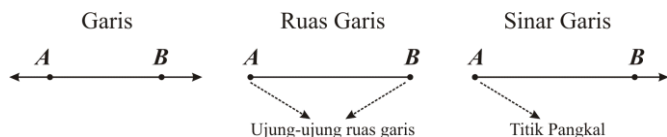
c. Ruas garis

Ruas garis AB (dilambangkan dengan $\overline{AB}$) merupakan himpunan titik A, B dan semua titik di antara A dan B yang kolinear dengan garis melalui kedua titik tersebut. Titik A dan B dalam hal ini disebut sebagai ujung-ujung ruas garis. Dalam penulisan berikutnya, $\overline{AB}$ dapat diartikan sebagai ruas garis AB , dapat juga diartikan sebagai panjang ruas garis AB tergantung pada konteksnya.

d. Sinar Garis (Ray):

Sinar AB (ditulis $\overrightarrow{AB}$) merupakan bagian dari $\overline{AB}$ yang terdiri atas $\overline{AB}$ dan semua titik X pada $\overline{AB}$ sedemikian hingga B terletak di antara A dan X . Selanjutnya titik A ini dinamakan sebagai titik pangkal.

Harap dicatat bahwa $\overrightarrow{AB}$ dan $\overrightarrow{BA}$ merupakan sinar yang berbeda.



Sebagai catatan, definisi yang baik, menyajikan hal-hal berikut:

- 1) Nama atau istilah yang akan didefinisikan.
- 2) Posisi istilah tersebut dalam himpunan atau kategori.
- 3) Dapat membedakan istilah yang didefinisikan dengan istilah lain tanpa memberikan fakta-fakta yang tidak diperlukan.
- 4) Berlaku bolak-balik.

Contoh definisi: *Segitiga samakaki adalah segitiga yang memiliki dua sisi yang kongruen.*

Perhatikan bahwa: (1) Istilah yang didefinisikan adalah “segitiga samakaki”. (2) Posisi segitiga samakaki termasuk dalam himpunan “segitiga”. (3) Hal yang membedakan segitiga samakaki dengan segitiga yang lain adalah “memiliki dua sisi yang kongruen”. (4) berlaku bolak balik, dimaksudkan sebagai berikut:

- 1) “Jika suatu segitiga itu samakaki, maka ia memiliki dua kaki yang kongruen”
- 2) “Jika suatu segitiga memiliki dua sisi yang kongruen, maka ia merupakan segitiga samakaki”.

Selain undefined term dan definisi, untuk membangun geometri juga dibutuhkan sekumpulan aksioma atau postulat. Aksioma merupakan pernyataan pangkal yang secara intuitif mudah dipahami, sehingga diterima kebenarannya tanpa bukti. Beberapa aksioma dalam geometri di antaranya:

Aksioma 1.	Melalui dua titik berbeda, dapat dibuat tepat satu garis.
Aksioma 2.	Jika dua titik pada suatu garis terletak pada suatu bidang, maka titik-titik pada garis tersebut seluruhnya terletak pada bidang.
Aksioma 3.	Melalui tiga titik tidak segaris dapat dibuat tepat satu bidang.

Dengan menggunakan kaidah-kaidah logika berdasarkan suatu pernyataan dapat ditentukan benar dan salahnya. Dalam matematika pernyataan yang dapat dibuktikan kebenarannya dengan menggunakan penalaran deduktif dinamakan sebagai teorema. Dalam membuktikan suatu teorema hanya boleh menggunakan aksioma, definisi, dan teorema sebelumnya yang telah terbukti kebenarannya. Pernyataan yang belum dibuktikan kebenarannya dinamakan sebagai konjektur (*conjecture*) atau dugaan.

Teorema 1. Melalui satu garis dan sebuah titik di luar garis hanya dapat dibuat satu bidang.

Bukti: Misalkan diberikan garis l , maka dapat ditentukan dua titik berbeda A dan B yang terletak pada garis l . Karena bidang melalui l maka seluruh titik pada garis itu terletak pada bidang (Aksioma 1). Sementara itu masih ada satu titik lagi di luar garis, sehingga terdapat tiga titik yang tidak segaris. Menurut aksioma 3, maka dapat dibuat tepat satu bidang. Jadi melalui satu garis dan sebuah titik di luar garis hanya dapat dibuat satu bidang.

Teorema 2. Melalui dua garis berpotongan hanya dapat dibuat satu bidang.

Bukti: misal diberikan garis k dan l berpotongan di titik S . Tanpa mengurangi keumuman, pandang garis k , dan ambil titik $L \neq S$ di garis l . Menurut teorema 1, dapat dibuat satu bidang. Jadi melalui dua garis berpotongan hanya dapat dibuat satu bidang.

2. Latihan

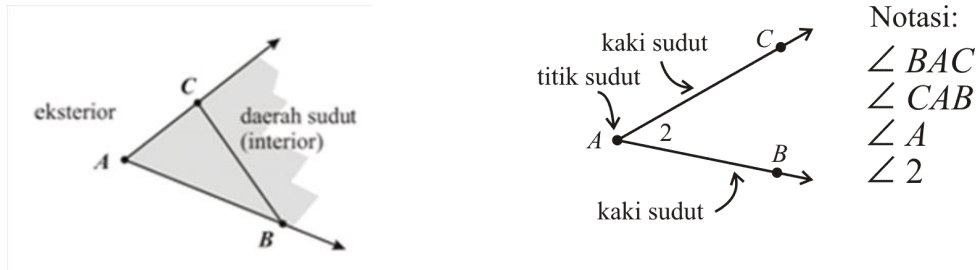
- 1) Sebutkan tiga unsur dasar geometri yang tidak didefinisikan (undefined term).
- 2) Jelaskan mengapa “Suatu garis adalah seperti sisi dari suatu penggaris” bukan merupakan definisi yang baik.
- 3) Perhatikan dan renungkan jawablah ketiga pertanyaan berikut.
- 4) *Melalui dua titik berbeda, ada berapa garis dapat dibuat melalui titik tersebut?*
- 5) *Dua titik berbeda A dan B terletak pada sebuah bidang. Bagaimana kedudukan titik-titik pada garis AB terhadap bidang?*
- 6) *Diberikan tiga titik tidak segaris. Ada berapa bidang dapat dibuat jika bidang tersebut melalui ketiga titik yang diberikan?*
- 7) Ketiga pertanyaan di atas mengantarkan kita ke sistem aksioma dalam geometri. Tuliskan ketiga aksioma tersebut.
- 8) Susunlah definisi sinar garis dan ruas garis.
- 9) Buktikan bahwa melalui sebuah garis l dan titik T di luar garis dapat dibuat sebuah bidang.
- 10) Tuliskan permasalahan yang Anda hadapi dalam hal pengertian pangkal, aksioma, definisi, dan pembuktian, beserta dengan solusi yang Anda pikirkan/laksanakan.

BAB III

KONSEP SUDUT, TRANSVERSAL, DAN KESEJAJARAN

Sudut adalah gabungan dua sinar yang bersekutu di titik pangkalnya. Dua sinar ini dinamakan kaki sudut, sedangkan titik pangkal persekutuan dinamakan sebagai titik sudut. Kedua kaki sudut memisahkan bidang menjadi dua bagian yaitu daerah sudut (interior) dan eksterior sudut. Pada gambar, ruas garis BC berada di interior.

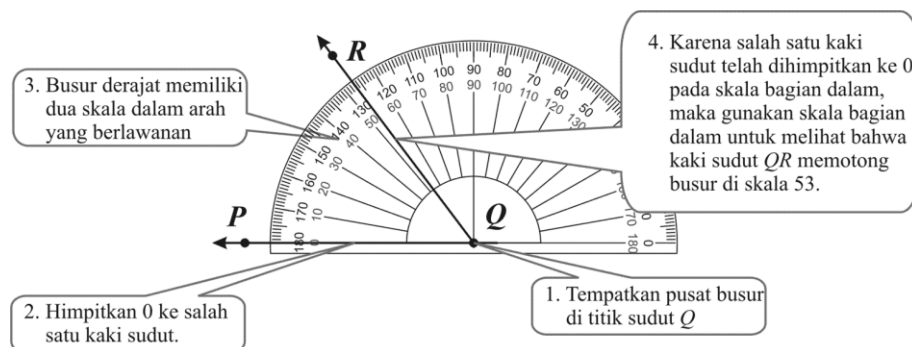
Dalam beberapa kasus seperti dalam trigonometri, sudut dapat pula dipandang sebagai bukaan (putaran) dari sinar yang berimpit pada pangkalnya.



Besar Sudut dalam Derajat

Dalam satuan derajat, jika $\angle AOB$ membentuk garis lurus maka besar $\angle AOB$ adalah 180 derajat (dilambangkan dengan 180°). Dengan demikian 1° merupakan besar sudut yang besarnya $\frac{1}{180}$ sudut lurus (dikatakan sudut lurus jika kedua sinar pembentuknya terletak segaris). Untuk ukuran sudut yang lebih kecil, 1° terdiri atas 60 menit ($60'$), dan $1'$ terdiri atas 60". Dalam satuan ini, sudut yang dibentuk oleh satu putaran penuh adalah 360° . Untuk mengetahui besar sudut dalam satuan derajat, biasanya digunakan busur derajat.

Cara menggunakan busur derajat



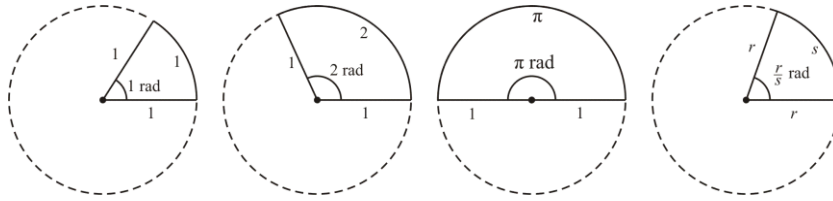
Alat-alat lain yang berkaitan dengan pengukuran besar sudut dapat dilihat di http://en.wikipedia.org/wiki/Measuring_instrument#Angle.

Besar Sudut dalam Radian

Jika α menyatakan besar sudut dalam radian, s menyatakan panjang busur AB , dan r menyatakan jari-jari, maka $\alpha = s/r$.

Dengan memandang sudut sebagai perputaran, maka sudut 180° tidak lain merupakan hasil perputaran setengah lingkaran, sehingga besar sudut dalam radian adalah $\frac{1}{2} \cdot 2\pi r = \pi r$.

Jika $r = 1$, maka dapat ditentukan bahwa besar sudut yang membentuk garis lurus adalah π radian. Dengan demikian besar sudut 180° ekuivalen dengan π radian.



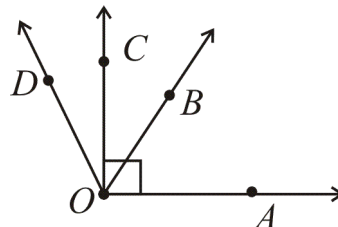
Catatan: Perhatikan bahwa besar sudut dalam radian berupa bilangan real. Sehingga jika besar suatu sudut tidak disebutkan satuannya, maka yang dimaksudkan adalah besar sudut dalam radian.

Besar Sudut dalam satuan yang lain.

Di Perancis dan Inggris secara terpisah pada sekitar tahun 1900, diciptakan sistim baru untuk membagi sudut-sudut dalam lingkaran. Mereka membagi 1 lingkaran ke dalam 400 gradien (dilambangkan dengan 400^g). Terdapat beberapa istilah untuk satuan ini, yaitu *grade*, *gon*, atau *Neugrad* (*new degree*).

Di dunia militer, dikenal satuan *angular mil*, yang diadopsi dari satuan radian. Sudut satu putaran dalam radian adalah $2\pi \approx 6,283185 \dots$ dibagi menjadi satuan-satuan yang lebih kecil yaitu mili radian atau mil rad. Untuk mempermudah perhitungan, akhirnya terdapat ukuran berbeda untuk satu angular mil (1 mil), yaitu setara dengan $1/6400$, $1/6300$, atau $1/6000$ putaran penuh (tergantung negara masing-masing). Lebih lanjut dapat dibaca di http://en.wikipedia.org/wiki/Angular_mil atau sumber-sumber lainnya.

Macam-macam Sudut Menurut Besarnya

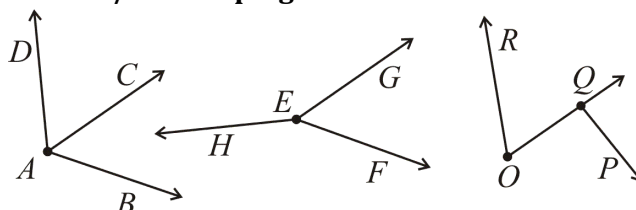


Sudut lancip	$0^\circ < \angle AOB < 90^\circ$
Sudut siku-siku	$\angle AOC = 90^\circ$
Sudut tumpul	$90^\circ < \angle AOD < 180^\circ$

Catatan: Terdapat perbedaan dalam menuliskan notasi ukuran sudut yaitu:

- $\angle PQR$ sebagai notasi sudut, dan $m\angle PQR$ untuk menyatakan ukuran sudut.
 - Notasi $\angle PQR$ digunakan sekaligus untuk sudut dan besar sudut.
- Dalam bahan belajar ini, digunakan pilihan b.

Sudut yang berdekatan/berdampingan



Sudut yang berdekatan adalah dua sudut yang memiliki titik sudut yang sama, sebuah kaki sudut yang sama, tetapi tidak memiliki titik-titik interior yang sama.

Contoh pasangan sudut berdekatan: $\angle BAC$ dengan $\angle CAD$, $\angle FEH$ dengan $\angle FEG$.

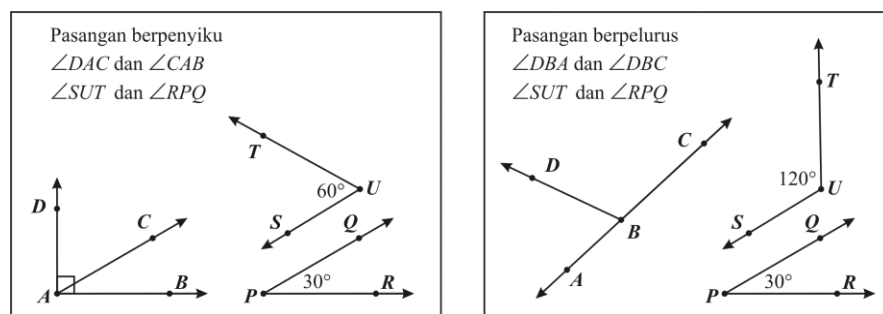
Bukan pasangan berdekatan: $\angle BAC$ dengan $\angle BAD$ (interior bersama), $\angle ROQ$ dengan $\angle OQP$ (titik sudut berbeda)

Sudut-sudut berpenyiku

Dua sudut dikatakan berpenyiku jika jumlah besar kedua sudut 90° . Satu sudut merupakan penyiku (komplemen) bagi sudut yang lain.

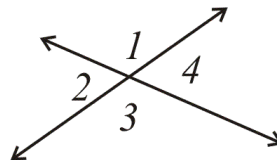
Sudut-sudut berpelurus

Dua sudut dikatakan berpelurus jika jumlah besar kedua sudut 180° . Satu sudut merupakan pelurus (suplemen) bagi sudut yang lain.



Dua sudut bertolak belakang

Sudut bertolak belakang terbentuk ketika dua garis saling berpotongan dan membentuk empat sudut. Setiap dua sudut yang tidak berdampingan dari keempat sudut disebut sudut bertolak belakang.



Pasangan sudut bertolak belakang: $\angle 1$ dan $\angle 3$, $\angle 2$ dan $\angle 4$.

Pasangan sudut berdekatan: $\angle 1$ dan $\angle 2$, $\angle 2$ dan $\angle 3$, $\angle 3$ dan $\angle 4$, $\angle 1$ dan $\angle 4$.

Perhatikan bahwa $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ (berpelurus)

$\angle 1 + \angle 4 = 180^\circ$ (berpelurus)

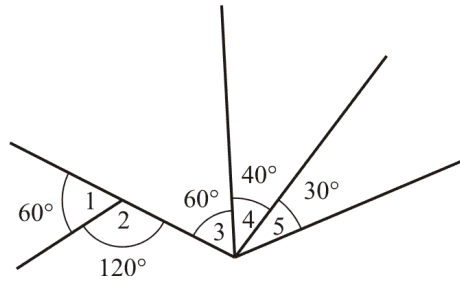
akibatnya $\angle 2 = \angle 4$

Dengan cara yang sama dapat ditunjukkan bahwa $\angle 1 = \angle 3$. Sehingga dapat disimpulkan bahwa dua sudut yang bertolak belakang sama besar.

1. Latihan

- 1) Jelaskan apa yang dimaksud sudut dalam bidang datar?
- 2) Sebutkan macam-macam satuan pengukuran sudut, dan besar sudut satu putaran untuk masing-masing satuan.

3) Perhatikan Gambar berikut:



Jika ada, sebutkan pasangan sudut yang saling

- berpenyiku
- berpelurus

A. Transversal dan Kesejajaran

Transversal (melintang)

Jika dua garis q dan r dipotong oleh garis p , seperti pada gambar, maka dikatakan transversal p memotong garis q dan r . Perhatikan istilah-istilah yang digunakan.

Istilah-istilah sudut pada transversal.

Gambar	Sudut	Nama
Transversal p memotong garis q dan r	$\angle 3, \angle 4, \angle 5, \angle 6$	Sudut-sudut dalam (sudut yang terletak di antara garis q dan r).
	$\angle 1, \angle 2, \angle 7, \angle 8$	Sudut-sudut luar (sudut yang tidak terletak di antara garis q dan r).
	$\angle 1, \angle 4, \angle 5, \angle 8$	Sudut-sudut sepihak (sudut di sebelah kiri garis p)
	$\angle 2, \angle 3, \angle 6, \angle 7$	Sudut-sudut sepihak (sudut di sebelah kanan garis p)
	$\angle 1, \angle 5$	Sudut-sudut sehadap (menghadap arah yang sama)
	$\angle 1, \angle 4, \angle 5, \angle 8$ dengan $\angle 2, \angle 3, \angle 6, \angle 7$	Sudut-sudut berlainan pihak/ berseberangan (sudut-sudut di sebelah kiri garis p dikatakan berseberangan dengan sudut-sudut di sebelah kanan garis p).
	$\angle 1, \angle 7$	Sudut luar berseberangan

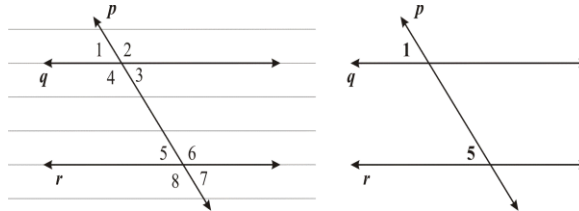
Catatan: perhatikan bahwa istilah-istilah sudut sehadap, berseberangan, sudut luar, dan lain-lain seperti di atas berlaku secara umum tidak hanya berlaku untuk dua garis sejajar yang dipotong oleh garis lain.

Postulat Kesejajaran

Dua garis dikatakan sejajar jika kedua garis tersebut terletak pada bidang yang sama dan tidak memiliki titik persekutuan.

Postulat 1 Garis Sejajar:

Jika dua garis sejajar dipotong oleh sebuah garis melintang, maka masing-masing pasangan sudut sehadap sama besar.



Sehingga, pada gambar di atas, garis r sejajar q dipotong garis p , maka berlaku:

$$\angle 1 = \angle 5, \quad \angle 2 = \angle 6, \quad \angle 3 = \angle 7, \quad \text{dan} \quad \angle 4 = \angle 8$$

Catatan: *postulat* merupakan pernyataan yang diterima kebenarannya tanpa bukti.

Akibat-akibat yang muncul dari postulat sejajar adalah:

Jika dua garis sejajar dipotong oleh garis melintang, maka

- 1) sudut luar berseberangan sama besar.
- 2) sudut dalam berseberangan sama besar.
- 3) sudut-sudut dalam sepihak saling berpelurus.
- 4) sudut luar sepihak saling berpelurus.

Bukti:

$$\angle 1 = \angle 3 \text{ dan } \angle 2 = \angle 4 \quad (\text{sudut bertolak belakang sama besar})$$

$$\angle 3 = \angle 7 \text{ dan } \angle 4 = \angle 8 \quad (\text{sudut sehadap sama besar})$$

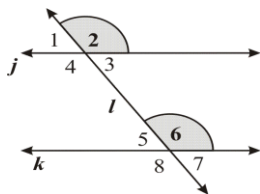
Sehingga $\angle 1 = \angle 7$ dan $\angle 2 = \angle 8$, sudut luar berseberangan sama besar. (no. 1 terbukti)

Dengan cara serupa, pernyataan-pernyataan 2, 3, dan 4 dapat Anda buktikan kebenarannya.

Postulat 2 garis sejajar.

Jika dua garis dipotong oleh garis melintang membentuk sudut sehadap yang sama besar, maka dua garis tersebut sejajar.

Atau dapat juga dituliskan:

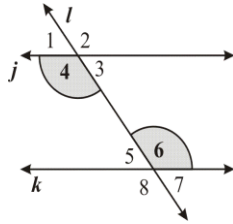


Misalkan garis j dan k dipotong oleh garis melintang, jika $\angle 2 = \angle 6$ maka $j \parallel k$.

Dengan postulat 2 kesejajaran, dapat diturunkan teorema-teorema berikut.

- a. Jika dua garis dipotong oleh garis melintang sehingga sudut dalam berseberangan sama besar maka kedua garis tersebut sejajar.

Bukti:



Diketahui garis j dan k dipotong oleh garis l , dan $\angle 4 = \angle 6$.

Akan ditunjukkan bahwa $j \parallel k$.

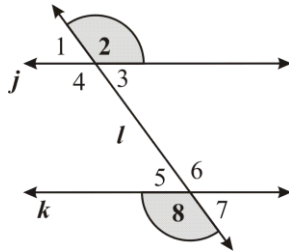
$\angle 4 = \angle 6$ (diketahui)

$\angle 6 = \angle 8$ (sudut bertolak belakang sama besar)

Akibatnya $\angle 4 = \angle 8$, sehingga menurut postulat sejajar 2 diperoleh garis $j \parallel k$. (terbukti).

- b. Jika dua garis dipotong oleh garis melintang sehingga sudut luar berseberangan sama besar maka kedua garis tersebut sejajar.

Bukti:



Diketahui garis j dan k dipotong oleh garis l , dan $\angle 2 = \angle 8$.

Akan ditunjukkan bahwa $j \parallel k$.

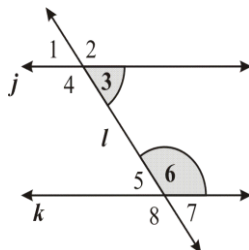
$\angle 2 = \angle 8$ (diketahui)

$\angle 8 = \angle 6$ (sudut bertolak belakang sama besar)

Akibatnya $\angle 2 = \angle 6$, sehingga menurut postulat sejajar 2, maka garis $j \parallel k$. ■

- c. Jika dua garis dipotong oleh garis melintang sehingga sudut dalam sepihak saling berpelurus maka kedua garis tersebut sejajar.

Bukti:



Diketahui garis j dan k dipotong oleh garis l , dan $\angle 3 + \angle 6 = 180^\circ$

Akan ditunjukkan bahwa $j \parallel k$.

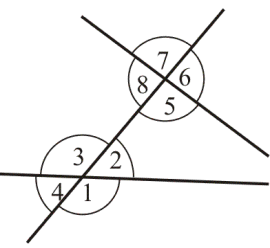
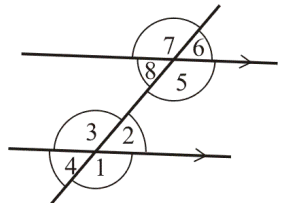
$\angle 3 + \angle 6 = 180^\circ$ (diketahui)

$\angle 3 + \angle 2 = 180^\circ$ (sudut berpelurus)

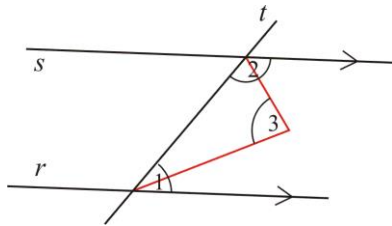
Akibatnya $\angle 2 = \angle 6$ sehingga menurut postulat sejajar 2, maka garis $j \parallel k$. ■

1. Latihan

1) Lengkapilah tabel berikut:

	Pasangan sudut sehadap: Pasangan sudut dalam berseberangan:
	Pasangan sudut sehadap: Pasangan sudut dalam berseberangan:

2) Diberikan garis $r \parallel s$ dipotong garis t .



Masing-masing sudut dalam di sebelah kanan garis t terbagi dua sama besar. Tentukan besar $\angle 3$.

3) Tuliskan permasalahan yang Anda hadapi dalam sudut dan transversal.

BAB IV

SEGITIGA, KEKONGRUENAN DAN KESEJAJARAN

Pernahkan Anda memperhatikan betuk kerangka kuda-kuda rumah? Sebagian besar konstruksi kuda-kuda tersusun atas segitiga-segitiga. Hal ini dikarenakan segitiga memiliki struktur yang “kaku”. Segitiga merupakan bangun yang dibentuk dengan menghubungkan tiga titik yang tidak segaris dengan tiga ruas garis berbeda, sehingga ketiga titik tersebut menjadi titik-titik pangkal dari ketiga ruas garis. Dengan ketentuan tersebut, periksa sekali lagi, manakah di antara gambar di atas yang merupakan segitiga?



Sumber gambar:
<http://vcity.ou.edu/>

Tiga titik tersebut disebut titik sudut segitiga, sedangkan ruas garis disebut sisi-sisi segitiga.

Segitiga (dilambangkan dengan Δ) merupakan gabungan tiga ruas garis yang ujung-ujungnya ditentukan oleh tiga titik tidak segaris. Pada ΔABC ruas garis AB , BC , dan AC dinamakan sebagai sisi, sedangkan titik-titik A , B , dan C sebagai titik sudut. Sisi segitiga sering juga dinotasikan dengan huruf non kapital dari sudut di hadapannya, sehingga $AB = c$, $AC = b$, dan $BC = a$. Segitiga diberi nama berdasarkan titik-titik sudutnya. Sehingga ΔABC , ΔBCA , ΔCAB , dan ΔACB menunjuk ke segitiga yang sama.

Jenis segitiga berdasarkan besar sudutnya

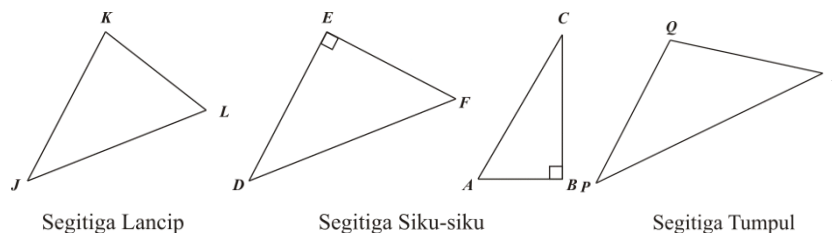
Terdapat 3 jenis segitiga berdasarkan besar sudutnya.

Segitiga lancip: Segitiga yang semua sudutnya kurang dari 90° .

Segitiga siku-siku: Segitiga yang salah satu sudutnya 90° .

Pada segitiga siku-siku DEF dengan $\angle E = 90^\circ$, sisi ED dan EF disebut sebagai sisi siku-siku (kedua sisi siku-siku saling tegak lurus) dan sisi di depan sudut E disebut sebagai sisi miring (*hypotenusa*).

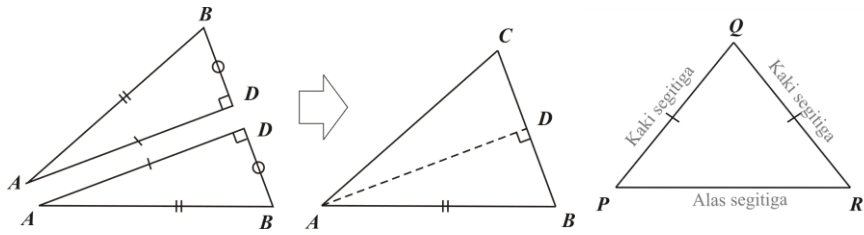
Segitiga tumpul: segitiga yang salah satu sudutnya lebih besar dari 90° .



Jenis-jenis segitiga berdasarkan panjang sisi

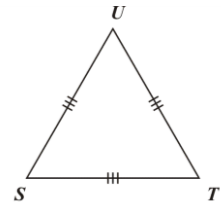
Segitiga sebarang, segitiga yang sisi-sisinya tidak ada yang sama panjang.

Segitiga samakaki, segitiga yang dua sisinya sama panjang. Sisi yang sama panjang disebut sebagai *kaki*, sedangkan sisi lainnya sebagai *alas*. Sudut yang terletak pada pertemuan kedua kaki segitiga disebut sebagai *sudut puncak*, sedangkan sudut lainnya disebut sebagai *sudut alas*.

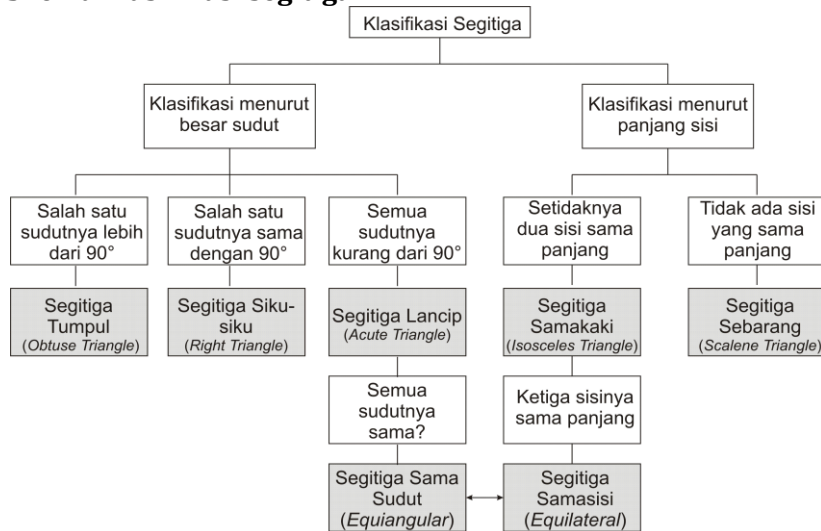


Segitiga sama kaki dapat dibentuk dengan menggabungkan dua segitiga siku-siku yang kongruen seperti pada gambar di bawah. Jika $\triangle ABC$ dilipat menurut garis AD , maka titik A berimpit dengan A sendiri, titik B berimpit dengan C , dan titik D berimpit dengan D sendiri. Hal ini menunjukkan bahwa garis AD merupakan sumbu simetri dari $\triangle ABC$.

Segitiga samasisi, segitiga yang semua sisinya sama panjang. Dengan memandang segitiga sama sisi sebagai segitiga samakaki (dua sisi sebagai kaki, dan satu sisi lainnya sebagai alas), maka dapat ditunjukkan bahwa segitiga samasisi memiliki tiga sumbu simetri. Dapat ditunjukkan juga bahwa ketiga sumbu simetri ini berpotongan di satu titik (misal titik O) dan membentuk sudut 120° . Dari sini dapat disimpulkan juga bahwa segitiga samasisi memiliki simetri putar tingkat 3. Artinya jika segitiga tersebut diputar dengan pusat O akan menempati posisinya dengan tiga cara.

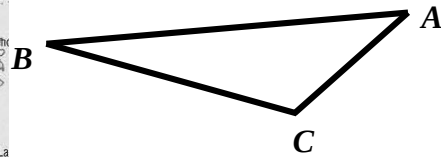
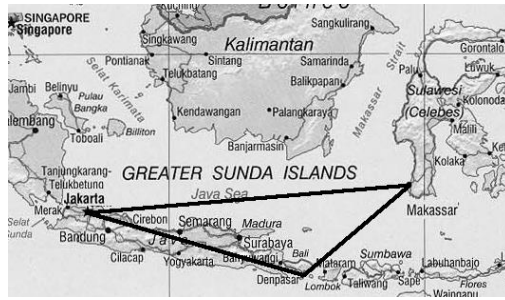


Skema klasifikasi segitiga



Ketaksamaan Segitiga

Perhatikan peta berikut ini. Jika Anda ingin bepergian dari Makassar ke Jakarta, tentunya jalur yang terpendek adalah Makassar-Jakarta, daripada Makassar-Denpasar-Jakarta. Demikian juga jika Anda akan bepergian dari Makassar ke Denpasar, maka jalur Makassar-Denpasar akan lebih pendek jika dibandingkan jalur Makassar-Jakarta-Denpasar. Fakta ini membawa ke suatu kesimpulan bahwa dikarenakan jarak terpendek antar dua titik adalah panjang ruas garis yang menghubungkannya.

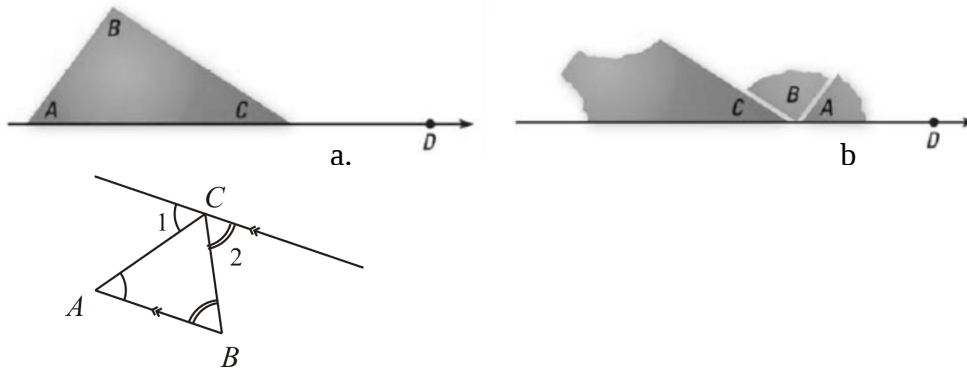


Pada $\triangle ABC$, panjang AB merupakan jarak terpendek dari A ke B . Dengan demikian $AB < AC + CB$. Dengan alasan yang sama, $BC < BA + AC$, dan $AC < AB + BC$. Akibatnya dalam suatu segitiga berlaku jumlah panjang dua sisi segitiga selalu lebih panjang dari sisi yang lain.

Dengan ketentuan ini, tidak mungkin membentuk segitiga yang panjang sisinya 4, 5, dan 10 karena ada satu syarat yang tidak dipenuhi karena $4 + 5 < 10$.

Jumlah sudut dalam satu segitiga

Buatlah segitiga menggunakan kertas, potong ketiga sudutnya dan gabungkan seperti pada gambar. Gabungan ketiga potongan tersebut akan membentuk garis lurus.



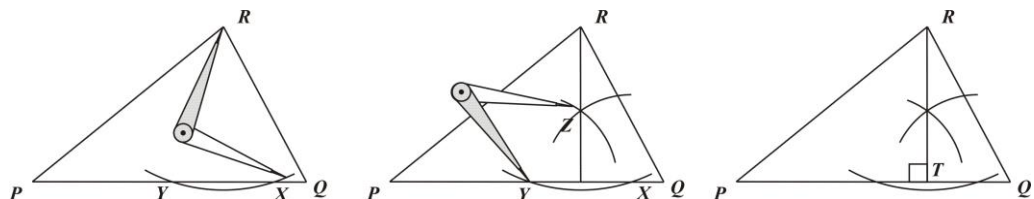
Pada $\triangle ABC$, tarik garis melalui C sejajar AB . Melalui dua garis sejajar dipotong oleh garis lain diperoleh $\angle A = \angle 1$ dan $\angle B = \angle 2$ (sudut dalam berseberangan). Dengan demikian $\angle A + \angle B + \angle C = \angle 1 + \angle 2 + \angle C = 180^\circ$.

Garis-garis Istimewa dalam Segitiga

Garis tinggi

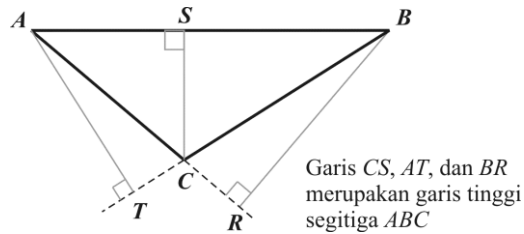
Ikuti petunjuk berikut ini

1) Lukis busur berpusat di R hingga memotong $\overline{PQ}$ di X dan Y . 2) Buat 2 busur berjari-jari sama (lebih besar dari $\frac{1}{2}XY$) masing-masing berpusat di X dan Y . Namakan titik potong kedua busur ini dengan Z . 3) Tarik garis melalui R dan Z hingga memotong PQ di T . Perhatikan bahwa garis RT merupakan tegak lurus garis PQ , sehingga RT merupakan jarak terpendek dari R ke sisi PQ . Garis RT dinamakan sebagai garis tinggi segitiga ABC .



Cobalah Anda membuat dua garis tinggi yang lain pada segitiga yang sama. Anda mungkin perlu memperpanjang sisi segitiga untuk menemukan titik potong antara busur dengan sisi segitiga.

Dari kegiatan di atas, apakah yang dimaksud dengan garis tinggi?



Garis tinggi suatu segitiga merupakan garis yang melalui suatu titik sudut dan tegak lurus terhadap garis yang memuat sisi di depan sudut tersebut.

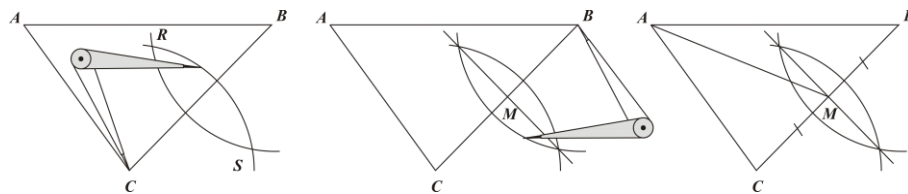
Cobalah untuk menemukan garis tinggi segitiga siku-siku.

Sesuai dengan definisinya, garis tinggi tidak selalu dalam posisi vertikal, tetapi dapat juga miring, bahkan horizontal. Karena segitiga memiliki tiga titik sudut yang dapat dianggap sebagai puncak maka garis tinggi segitiga ada tiga buah. Garis-garis tinggi suatu segitiga berpotongan di satu titik, yang disebut sebagai *orthocenter*. Cobalah untuk menemukan garis tinggi segitiga siku-siku.

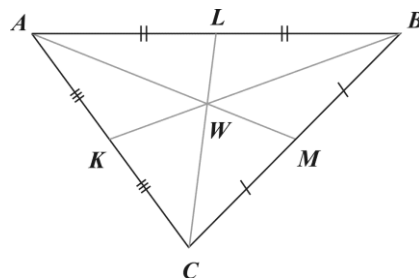
Garis berat

Ikuti langkah-langkah berikut.

- 1) Pada $\triangle ABC$, lukis 2 busur dengan jari-jari sama (lebih dari $\frac{1}{2}BC$), berpusat di B dan C hingga keduanya berpotongan di R dan S .
- 2) Tarik garis melalui R dan S hingga memotong sisi BC di M . Titik M merupakan titik tengah ruas garis BC .
- 3) Tarik garis melalui A dan M . Garis AM ini merupakan garis berat $\triangle ABC$.
- 4) Ulangi langkah di atas untuk garis berat yang melalui titik sudut lain.



Garis berat adalah garis yang melalui titik sudut segitiga dan titik tengah sisi di depannya.

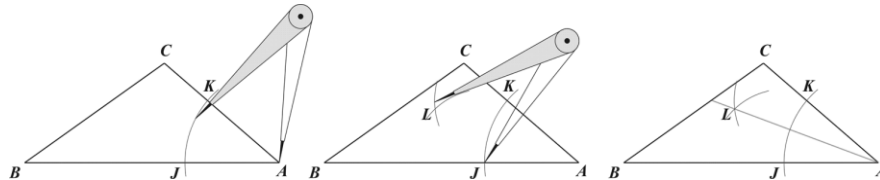


Karena segitiga memiliki tiga sudut, maka terdapat tiga garis berat dalam sebuah segitiga. Ketiga garis berat ini berpotongan di satu titik yang disebut sebagai titik berat (*centroid*). Titik berat ini merupakan pusat kesetimbangan segitiga. Jika sebuah segitiga digantungkan tepat pada titik beratnya, maka segitiga tersebut akan berada pada posisi horisontal.

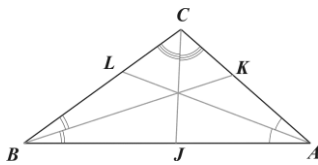
Garis bagi sudut suatu segitiga

Ikuti langkah-langkah berikut

- 1) Pada segitiga ABC , lukis busur berpusat di A hingga memotong sisi AB dan AC berturut-turut di J dan K .
- 2) Buat dua busur berjari-jari sama masing-masing berpusat di J dan K hingga keduanya berpotongan di titik L .
- 3) Tarik garis melalui A dan L . Garis ini merupakan garis bagi sudut segitiga.
- 4) Ulangi langkah di atas untuk melukis garis bagi sudut yang melalui titik lain

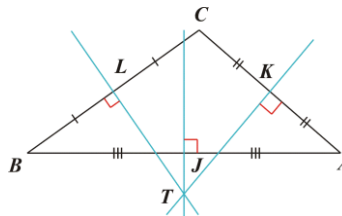


Garis bagi sudut segitiga adalah garis yang membagi sudut dalam suatu segitiga sehingga menjadi dua bagian yang sama besar.



Berdasarkan ketentuan ini, terdapat tiga garis bagi sudut suatu segitiga. Garis bagi sudut segitiga berpotongan di satu titik yang disebut *incenter* segitiga. Titik ini merupakan titik pusat lingkaran dalam segitiga (lingkaran di dalam segitiga yang menyinggung semua sisinya)..

Garis sumbu segitiga



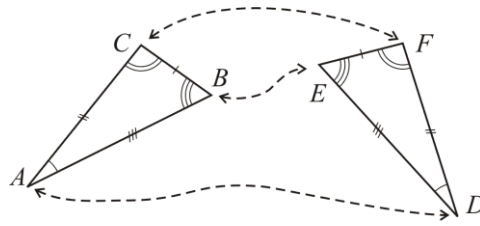
Garis sumbu segitiga merupakan garis bagi tegak lurus setiap sisi segitiga tersebut. Ketiga garis sumbu ini berpotongan di satu titik yang juga merupakan pusat lingkaran luar segitiga (lingkaran yang melalui semua titik sudut segitiga).

Kekongruenan Segitiga

Dua segitiga dikatakan kongruen (dilambangkan dengan $\cong$) jika segitiga yang satu dapat dihipitkan dengan yang lain dengan tepat. Pada gambar di bawah, $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ jika kondisi berikut dipenuhi

$$\angle A = \angle D, \quad \angle B = \angle E, \quad \angle C = \angle F, \quad \overline{AB} = \overline{DE}, \quad \overline{AC} = \overline{DF}, \quad \overline{BC} = \overline{EF}$$

Dapat juga dikatakan, dua segitiga kongruen jika keenam unsur segitiga pertama kongruen dengan enam unsur yang bersesuaian pada segitiga yang kedua.

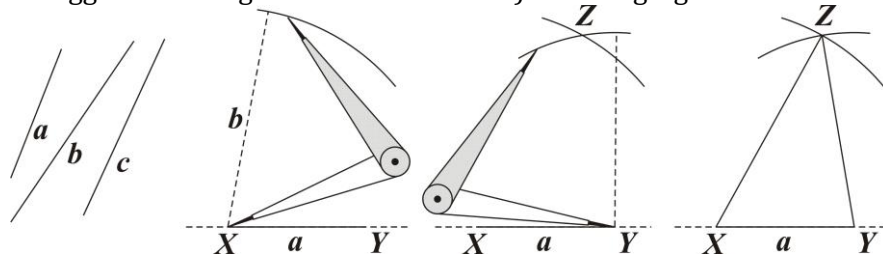


Dalam penulisannya, harus diperhatikan urutan titik sudut dalam menyebutkan kekongruenan dua segitiga. Sebagai contoh pada kasus di atas, tidak dianjurkan menuliskan dalam bentuk $\triangle ABC \cong \triangle FED$, karena ini berarti $\angle A = \angle F$, $\angle B = \angle E$, dan $\angle C = \angle D$.

Melukis segitiga jika diketahui panjang ketiga sisinya (ss-ss-ss)

Diberikan 3 ruas garis dengan panjang a , b , dan c . Akan dilukis segitiga dengan panjang sisi a , b , dan c .

- 1) Dengan bantuan jangka dan penggaris lukis ruas garis XY dengan panjang a . 2) Buat busur 1 berpusat di X berjari-jari b . 3) Lukis busur 2 berpusat di Y berjari-jari c hingga memotong busur 1 di titik Z . 4) Lukis segitiga XYZ .



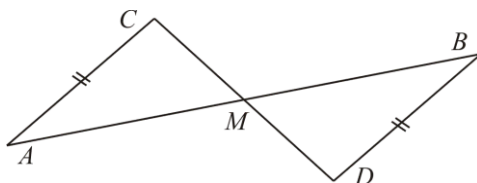
Jika Anda membuat segitiga lain dengan panjang sisi a , b , c , maka segitiga tersebut akan sama persis dengan $\triangle XYZ$. Hal ini membimbing ke arah postulat I kekongruenan.

Postulat I Kekongruenan.

Dua segitiga kongruen jika ketiga sisi yang bersesuaian sama panjang (ss-ss-ss).

Contoh:

Pada gambar di bawah, $\overline{AB}$ dan $\overline{CD}$ saling membagi dua sama panjang di titik M . Jika $\overline{AC} = \overline{DB}$,



buktikan bahwa $\triangle AMC \cong \triangle BMD$

Bukti:

Diberikan $\overline{AB}$ dan $\overline{CD}$ saling membagi dua sama panjang di M . Akibatnya $\overline{AM} = \overline{BM}$ dan $\overline{CM} = \overline{DM}$. Sementara itu diketahui bahwa $\overline{AC} = \overline{BD}$. Dengan demikian

$$\overline{AM} = \overline{BM}, \quad \overline{CM} = \overline{DM}, \quad \overline{CA} = \overline{DB}$$

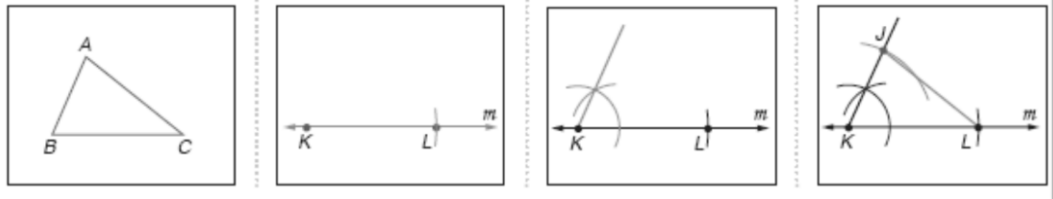
Berdasarkan postulat I kekongruenan, maka $\triangle ACM \cong \triangle BDM$. Terbukti.

Melukis segitiga jika diketahui dua sisi dan sudut di antara kedua sisi (ss-sd-ss)

Diberikan sisi a , sudut C , dan sisi b . Akan dilukis segitiga dengan unsur-unsur berurutan sisi a , sudut C , dan sisi b .

Ikuti langkah-langkah berikut:

- 1) Lukis ruas garis KL sepanjang a . 2) Salin $\angle C$ yang dipasang di sudut K dengan KL sebagai salah satu kakinya. 3) Lukis busur berjari-jari b , berpusat di K hingga memotong kaki $\angle C$ di J . 4) Lukis segitiga JKL .



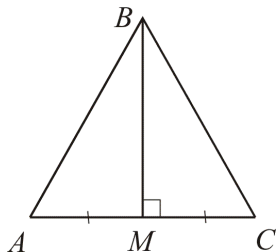
Hanya ada satu macam segitiga yang dapat dibuat berdasarkan informasi yang diberikan. Ini mengantarkan kita ke postulat II kekongruenan dua segitiga.

Postulat II Kekongruenan (ss-sd-ss)

Jika dua sisi dan sebuah sudut di antara keduanya pada suatu segitiga sama dengan dua sisi dan sudut di antaranya pada segitiga yang lain, maka kedua segitiga tersebut kongruen.

Contoh:

Diberikan segitiga ABC , $BM \perp AC$, dan M titik tengah AC .



Buktikan bahwa $\triangle ABM \cong \triangle CBM$.

Bukti:

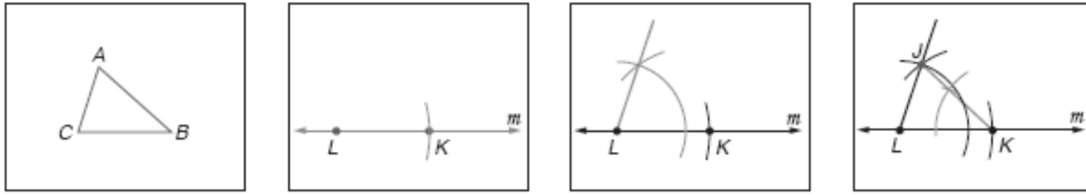
Diketahui M titik tengah AC , sehingga $AM = CM$. $BM \perp AC$, sehingga $\angle BMC = \angle BMA = 90^\circ$. Perhatikan segitiga AMB dan CMB , sisi MB digunakan pada kedua segitiga, sehingga $MB = MB$. Dari kedua segitiga di atas dipenuhi $AM = CM$, $\angle BMC = \angle BMA$, dan $MB = MB$ sehingga, menurut kekongruenan ss-sd-ss, $\triangle AMB \cong \triangle CMB$. Terbukti.

Melukis Segitiga Jika Diketahui dua sudut dan sisi di antaranya (sd-ss-sd)

Diberikan $\angle 1$, sisi a , dan $\angle 2$. Akan dilukis segitiga dengan unsur-unsur berurutan $\angle 1$, sisi a , dan $\angle 2$.

Ikuti langkah-langkah berikut:

- 1) Lukis ruas garis KL sepanjang a . 2) Salin $\angle 1$ ke sudut K dengan KL sebagai salah satu kakinya. 3) Salin $\angle 2$ ke sudut L dengan KL sebagai salah satu kakinya. 4) Perpanjang kaki-kaki sudut yang terbentuk hingga berpotongan di titik J . 5) Lukis segitiga JKL .



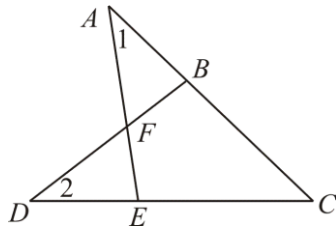
Hanya ada satu macam segitiga yang dapat dibuat jika diberikan dua sudut dan satu sisi di antara kedua sudut (sd-ss-sd/ASA).

Postulat III Kekongruenan

Jika dua sudut dan sisi di antara dua sudut pada suatu segitiga kongruen dengan dua sudut dan satu sisi di antara dua sudut pada segitiga yang lain, maka kedua segitiga tersebut kongruen.

Contoh:

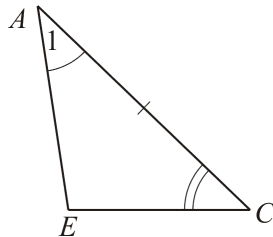
Pada gambar di samping, diberikan $AC = DC$, $\angle 1 = \angle 2$.



Buktikan bahwa $\triangle ACE \cong \triangle DCB$.

Bukti:

Selain dalam bentuk narasi, pembuktian boleh juga dilakukan dalam bentuk dua kolom pernyataan dan alasan.



Bukti	
Pernyataan	Alasan
$AC = DC$	Diberikan
$\angle 1 = \angle 2$	Diberikan
$\angle C = \angle C$	Identitas
$\triangle ACE \cong \triangle DCB$	Sisi-sudut-sisi

Diketahui selain ss-ss-ss, ss-sd-ss, atau sd-ss-sd.

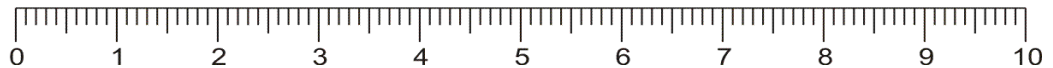
Untuk melukis segitiga ini, kita perlu membuat sketsa terlebih dahulu agar diketahui unsur-unsur segitiga yang diperlukan untuk melukisnya (ss-ss-ss, ss-sd-ss, atau sd-ss-sd). Sebagai contoh, Anda diminta untuk melukis segitiga ABC dengan $\angle A$, $\angle B$ dan sisi BC diberikan (diketahui sudut-sudut-sisi). Berdasar informasi yang diberikan, diberikan dua sudut dan satu sisi tidak di antara dua sudut, maka sudut yang ketiga dapat ditemukan dengan menggunakan sifat jumlah besar sudut segitiga 180° .

Dengan demikian segitiga di atas dapat dilukis berdasarkan unsur yang dapat diketahui yaitu $\angle B$, sisi BC , dan $\angle C$ (sd-ss-sd).

1. Aktifitas

LEMBAR KERJA 1. Pengertian, jenis, dan sifat segitiga.

1. Apakah yang dimaksud dengan segitiga?
2. Sebutkan jenis-jenis menurut besar sudutnya
3. Sebutkan jenis-jenis segitiga menurut panjang sisi
4. Dengan menggunakan satuan ukuran pada marka berikut ini,



- a. Lukis segitiga dengan panjang sisi 3, 5, 6
- b. Lukis segitiga dengan panjang sisi 4, 7, 2
- c. Lukis segitiga dengan panjang sisi 7, 5, 2
5. Berdasarkan aktivitas di atas, manakah yang dapat dilukis segitiganya?
Tuliskan syarat segitiga dapat dibuat berdasarkan panjang sisinya.
6. Buktikan bahwa jumlah sudut segitiga 180° .

Pada setiap segitiga, dapat dilukis garis tinggi, garis berat, garis bagi sudut, garis sumbu. Garis-garis tersebut memiliki sifat yang unik. Aktivitas berikut akan menunjukkan keunikan sifat-sifat garis-garis tersebut.

LEMBAR KERJA 2 Garis-garis Istimewa pada segitiga.

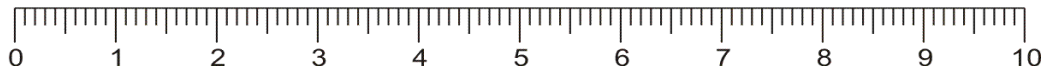
1. Garis tinggi segitiga merupakan garis yang melalui titik sudut segitiga dan tegak lurus terhadap sisi di depan sudut tersebut. Lukislah segitiga tumpul, segitiga siku-siku, dan segitiga lancip. Pada masing-masing segitiga, lukis semua garis tingginya. Sifat apa yang Anda temukan?
2. Garis berat segitiga merupakan garis yang melalui titik sudut segitiga membagi dua sama panjang sisi di depan sudut tersebut. Lukislah segitiga tumpul, segitiga siku-siku, dan segitiga lancip. Pada masing-masing segitiga, lukis semua garis beratnya. Sifat apa yang Anda temukan?
3. Garis bagi sudut segitiga merupakan garis yang melalui titik sudut dan membagi dua sudut tersebut. Lukislah segitiga tumpul, segitiga siku-siku dan segitiga lancip. Pada masing-masing segitiga, lukis semua garis bagi sudut-nya. Sifat apa yang Anda temukan?
4. Misalkan titik potong garis-garis bagi sudut adalah S . Lukis garis melalui S dan tegak lurus sisi-sisi segitiga. Namakan titik-titik potong ini P , Q , dan R . Lukis lingkaran berjari-jari SP . Apa yang dapat Anda simpulkan?
5. Garis sumbu (garis bagi tegak lurus/*perpendicular bisector*) segitiga merupakan garis yang tegak lurus dan membagi dua sama panjang suatu sisi segitiga. Lukislah segitiga tumpul, segitiga siku-siku, dan segitiga lancip. Pada masing-masing segitiga, lukis semua garis sumbunya. Sifat apa yang Anda temukan?

Misalkan titik potong garis-garis sumbu adalah S . Lukis lingkaran berpusat di S dan melalui salah satu titik sudut segitiga. Apa yang dapat Anda simpulkan?

LEMBAR KERJA 3. Kekongruenan.

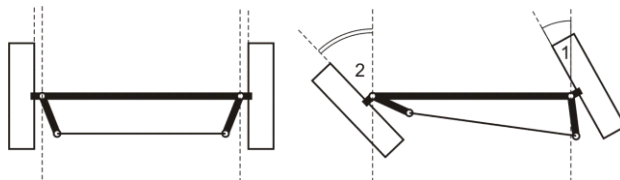
1. Susunlah dengan kata-kata sendiri pengertian atau definisi dua segitiga kongruen.

Untuk menunjukkan kekongruenan dua segitiga, tidak perlu menunjukkan keenam unsur bersesuaian pada kedua segitiga sama. Cukup beberapa unsur bersesuaian, maka dapat disimpulkan kedua segitiga tersebut kongruen. Dengan mistar di bawah dan busur derajat, lakukan aktifitas berikut.



2. Lukis segitiga dengan panjang sisi 6, 3, 5. Bandingkan dengan hasil yang diperoleh teman Anda, apakah keduanya kongruen? Berdasar aktifitas di atas, tulislah syarat dua segitiga kongruen.
3. Lukis $\triangle ABC$ dengan $AB = 5$, $\angle A = 40^\circ$ dan $\angle B = 60^\circ$. Bandingkan hasilnya dengan pekerjaan teman Anda, apakah keduanya kongruen? Tulislah syarat dua segitiga kongruen berdasar aktifitas di atas.
4. Lukis $\triangle DEF$ dengan $DE = 5$, $\angle D = 60^\circ$, $EF = 4$. Bandingkan dengan hasil pekerjaan teman Anda, apakah keduanya kongruen?. Berdasarkan aktifitas di atas, tulis syarat dua segitiga kongruen.
5. Lukis sebuah $\triangle GHI$, dengan $\angle G = 30^\circ$, $GH = 5$, dan $HI = 2,5$. Ada berapa kemungkinan segitiga yang dapat dibuat? Apa yang dapat Anda simpulkan?
6. Buktikan bahwa segitiga ...
Dua ruas garis $\overline{AB}$ dan $\overline{CD}$ saling membagi dua sama panjang di titik M . Jika $\overline{AC} = \overline{DB}$, buktikan bahwa $\triangle AMC \cong \triangle BMD$.
7. Tuliskan permasalahan yang kekongruenan Anda hadapi beserta pemecahannya.

BAB V SEGIEMPAT



Ackermann Steering Geometry



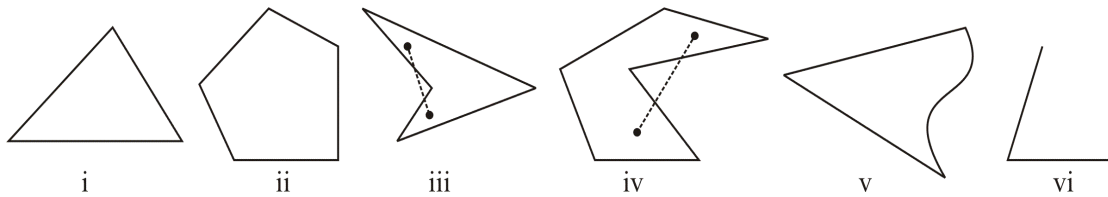
Bike Lift

Pada sebuah mobil, ketika berbelok ke kiri maka sudut yang dibentuk oleh roda kiri harus lebih besar daripada roda kanan. Demikian pula sebaliknya. Sistem kemudi *Ackermann Steering Geometry* memanfaatkan sifat-sifat trapesium untuk menyelesaikan masalah di atas. Pada bengkel-bengkel sepeda motor, digunakan peralatan yang bernama *bike lift* yang menggunakan sifat jajargenjang. Dengan peralatan ini, mekanik dapat mengatur ketinggian sepeda motor dengan tetap pada posisi datar.

Setiap segiempat memiliki sifat dan aplikasi yang berbeda. Beberapa sifat segiempat akan dipelajari pada bagian berikut.

Pengertian, Jenis-jenis, dan Sifat-sifat Segi Empat

Poligon/segibanyak merupakan bangun datar tertutup yang sisi-sisinya berupa ruas garis, dan setiap ruas garis hanya berpotongan pada ujung-ujungnya.



Pada ilustrasi di atas, gambar i, ii, iii, iv merupakan poligon, gambar i dan ii poligon konveks. Suatu bangun geometri dikatakan konveks jika setiap mengambil dua titik di dalamnya tersebut, maka seluruh ruas garis yang menghubungkannya berada di dalam bangun tersebut. Sementara itu gambar iii dan iv merupakan poligon konkaf. Dikatakan konkaf jika ada dua titik di dalam bangun, yang jika dihubungkan, maka terdapat bagian ruas garis yang berada di luar bangun. Gambar v dan vi bukan poligon karena memiliki sisi yang bukan ruas garis (gambar v) dan tidak tertutup (gambar vi).

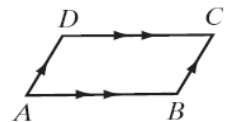
Melalui pengertian poligon ini, maka segiempat dapat didefinisikan sebagai poligon dengan empat sisi.

Macam-macam segi empat dan sifat-sifatnya.

1. Jajar genjang (*parallelogram*)

Jajar genjang merupakan segi empat yang dua pasang sisi-sisi berhadapannya sejajar.

Segi empat $ABCD$ di samping merupakan jajar genjang karena $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ dan $\overline{DC} \parallel \overline{AB}$. Jajar genjang $ABCD$ dapat dilambangkan dengan $\square ABCD$



Pada jajar genjang $ABCD$, jika sisi AB dianggap sebagai alas, maka yang dimaksud dengan tinggi jajar genjang adalah jarak suatu titik pada sisi DC ke garis yang memuat sisi AB . Demikian juga sebaliknya, jika AD dianggap sebagai alas, maka yang dimaksud dengan tinggi adalah jarak antara suatu titik pada garis BC ke garis yang memuat sisi AD . Seperti halnya dalam segitiga, tinggi suatu jajar genjang tidak selalu harus dalam posisi vertikal.

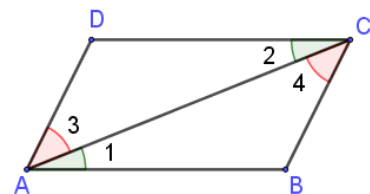
Aktivitas: Lengkapi bagian-bagian yang masih kosong di bawah untuk membuktikan sifat-sifat jajargenjang yang diberikan.

- Sifat 1: Sisi-sisi yang berhadapan saling sejajar (berdasarkan definisi)
- Sifat 2: Diagonal membagi jajar genjang menjadi dua segitiga kongruen

Diberikan: jajargenjang $ABCD$ dengan diagonal AC ,
lihat gambar di samping.

Akan dibuktikan bahwa $\triangle ACD \cong \triangle CAB$

Bukti:



Pernyataan	Alasan
1. $AB \parallel CD$	Definisi, sisi yang berhadapan saling sejajar.
2. $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$ (catatan $\sphericalangle$ menyatakan besar sudut)	Jika dua garis sejajar dipotong oleh garis lain, maka sudut dalam berseberangan yang terbentuk sama besar.
3. $AD \parallel BC$	...
4. $\sphericalangle 3 = \sphericalangle 4$	...
5. $AC = AC$	Identitas
6. $\triangle ACD \cong \triangle CAB$	Kekongruenan sudut-sisi-sudut.

Terbukti, diagonal AC membagi jajargenjang menjadi dua segitiga kongruen, yaitu $\triangle ACD$ dan $\triangle CAB$.

- Sifat 3: Sudut-sudut yang berhadapan sama besar.

Diberikan jajargenjang $ABCD$, akan ditunjukkan bahwa $\angle A = \angle C$.

Bukti:

Pernyataan	Alasan
1. $AB \parallel CD$	Definisi, sisi yang berhadapan saling sejajar.
2. $\angle 1 = \angle 2$	Jika dua garis sejajar dipotong oleh garis lain, maka sudut dalam berseberangan yang terbentuk sama besar.
3. $AD \parallel BC$	...
4. $\angle 3 = \angle 4$	...
5. $\angle A = \angle 1 + \angle 3$	...
6. $\angle B = \dots$	...
7. $\angle A = \angle B$ (terbukti)	

Jadi dalam sebuah jajargenjang, dua sudut berhadapan sama besar.

- d. Sifat 4: Sisi-sisi yang berhadapan sama panjang.

Bukti diserahkan kepada pembaca (gunakan bantuan sifat 2).

- e. Sifat 5: Sudut-sudut yang berdekatan saling berpelurus.

Diberikan jajargenjang $ABCD$, akan ditunjukkan bahwa $\angle A + \angle B = 180^\circ$.

Bukti:

Pernyataan	Alasan
1. $\angle 1 + \angle 4 + \angle B = 180^\circ$	Jumlah sudut
2. $\angle 4 = \angle 3$	...
3. $\angle 1 + \angle 3 + \angle B = 180^\circ$	...
4. $\angle A + \angle B = 180^\circ$	...

Terbukti, bahwa dua sudut berdekatan suatu jajargenjang saling berpelurus.

- f. Sifat 6: Diagonal-diagonalnya saling membagi dua sama panjang.

Bukti diserahkan kepada pembaca sebagai latihan. Bantuan: misalkan T titik potong kedua diagonal, dengan menggunakan kesebangunan tunjukkan bahwa $AT = TC$.

2. Persegi panjang

Persegi panjang adalah jajar genjang yang satu sudutnya tegak lurus. Jika salah satu sudut dari jajar genjang $ABCD$ siku-siku, maka jajar genjang $ABCD$ merupakan persegi panjang. Setiap sisi pada persegi panjang dapat menjadi alas. Jika salah satu sisi menjadi alas, maka sisi yang berdekataannya menjadi tinggi persegi panjang.

Aktivitas: Berikut beberapa sifat persegi panjang. Buktikan sifat b dan c berikut sebagai latihan.

- Sifat 1: Karena persegi panjang merupakan jajar genjang, maka semua sifat jajar genjang dimiliki oleh persegi panjang.
- Sifat 2: Keempat sudutnya sama besar (*equiangular*) dan berupa sudut siku-siku. Diberikan persegi panjang $ABCD$. Tunjukkan bahwa $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$.
Bukti: (Jika pada topik sebelumnya diberikan contoh pembuktian berbentuk tabel, berikut diberikan contoh pembuktian dalam bentuk narasi) Misalkan salah satu sudut siku-siku pada persegi panjang adalah $\angle A$. Ingat bahwa persegi panjang juga merupakan jajar genjang. Pada jajargenjang, sudut yang berhadapan Besar. Akibatnya $\angle A$ $\angle C$ dan diperoleh $\angle C = \dots^\circ$. Pada jajar genjang pasangan sudut berdekatan saling Dengan demikian, $\angle A + \angle B = 180^\circ$, dan diperoleh $\angle B = \dots^\circ$. Sudut C dan D saling berhadapan, akibatnya $\angle D = \dots^\circ$.
- Sifat 3: Diagonal persegi panjang sama panjang.

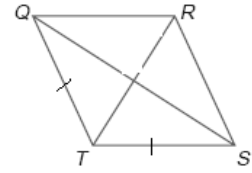
Diberikan persegi panjang $ABCD$. Tunjukkan bahwa $AC = BD$.

Bukti diserahkan kepada pembaca.

3. Belah ketupat (*rhombus*)

Belah ketupat merupakan jajar genjang yang dua sisi berdekatnya sama panjang.

Pada jajar genjang $QRST$, jika dua sisi berdekatan $QRST$ sama panjang ($QR = ST$), maka jajar genjang $QRST$ merupakan belah ketupat.



Karena belah ketupat merupakan jajar genjang, maka semua sifat jajar genjang menjadi sifat belah ketupat. Berikut ini beberapa sifat khusus belah ketupat.

Aktivitas: Buktikan sifat-sifat belah ketupan berikut.

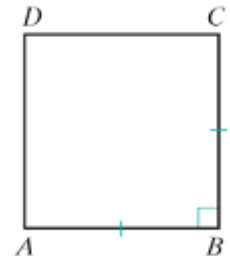
- Sifat 1: Belah ketupat memiliki semua sifat jajar genjang.
- Sifat 2: Semua sisi belah ketupat mempunyai panjang yang sama (equilateral).
- Sifat 3: Diagonal-diagonal belah ketupat saling tegak lurus.
- Sifat 4: Diagonal-diagonal belah ketupat membagi dua sama besar sudut belah ketupat.

4. Persegi (*square*)

Persegi merupakan persegi panjang yang dua sisi berdekatnya sama panjang.

Jika dua sisi berdekatan AB dan AD pada persegi panjang $ABCD$ sama panjang, maka $ABCD$ merupakan persegi.

Karena persegi merupakan kasus khusus dari persegi panjang dan persegi panjang merupakan kasus khusus dari jajar genjang maka persegi memiliki semua sifat persegi panjang dan sekaligus memiliki semua sifat jajar genjang. Karena persegi memiliki dua sisi berdekatan yang sama panjang, maka persegi merupakan belah ketupat sehingga semua sifat belah ketupat juga dimiliki oleh persegi.

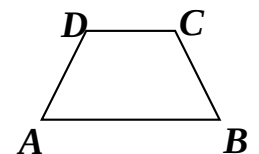


Sifat persegi: Persegi memiliki semua sifat jajargenjang, persegi panjang, dan belah ketupat.

5. Trapesium (*trapezoid*)

Trapesium adalah segi empat yang mempunyai tepat sepasang sisi yang sejajar.

Jika $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ dan $\overline{AD} \nparallel \overline{BC}$, maka segi empat $ABCD$ merupakan trapesium. Sisi $\overline{AB}$ dan $\overline{CD}$ disebut **sisi-sisi sejajar** atau sering juga disebut **sisi alas (bases)**. Pasangan sisi yang tidak sejajar, $\overline{AD}$ dan $\overline{BC}$ dinamakan **kaki-kaki** trapesium. Pasangan sudut yang menggunakan satu sisi sejajar sebagai kaki sudut bersama dinamakan **pasangan sudut alas**.

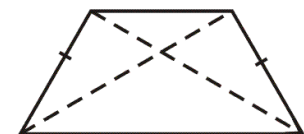


6. Trapesium samakaki dan sifat-sifatnya

Definisi:

Trapesium sama kaki adalah trapesium yang kaki-kakinya sama panjang.

Jika $\overline{TS} \parallel \overline{QR}$ dan $QT = RS$, maka $RSTQ$ trapesium sama kaki.



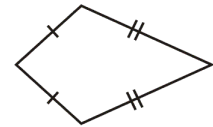
Aktivitas: Pembuktian sifat-sifat trapesium.

trapesium sama kaki

- Sifat 1: Masing-masing pasangan sudut berdekatan di antara dua sisi sejajar suatu trapesium saling berpelurus.
- Sifat 2: Pasangan sudut alas suatu trapesium samakaki sama besar.
- Sifat 3: Diagonal-diagonal trapesium sama kaki sama panjang.

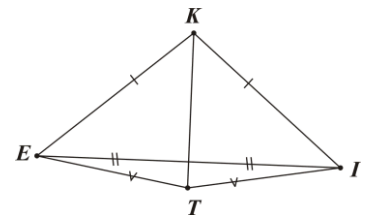
7. Layang-layang (*kite*)

Terdapat beberapa definisi layang-layang yang berbeda. Perbedaan tersebut mengakibatkan suatu bangun menjadi himpunan bagian dari salah satu versi, tetapi tidak termasuk dalam versi pendefinisian yang lain. Untuk itu, dalam bahan belajar kali ini, digunakan definisi:



Layang-layang adalah segi empat konveks yang memiliki dua pasang sisi berdekatan yang kongruen, pasangan sisi kongruen yang satu berbeda dengan pasangan sisi kongruen yang lain

Pada layang layang *KITE* pada di samping, diagonal *KT* membagi layang-layang menjadi dua segitiga yang kongruen. Diagonal *IE* membagi layang-layang menjadi dua segitiga samakaki yang tidak kongruen. Sudut yang dibentuk oleh dua sisi yang kongruen dinamakan sebagai sudut puncak (*vertex angles*) sedangkan sudut yang lain sudut bukan puncak (*non vertex angles*).



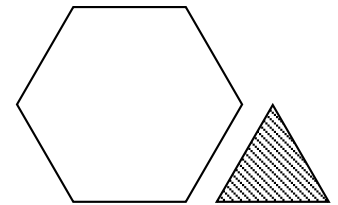
Aktivitas: Berikut ini beberapa sifat layang-layang. Pembuktian diserahkan kepada pembaca sebagai latihan.

- Sifat 1: Kedua sudut *bukan puncak* suatu layang-layang besarnya *sama*.
- Sifat 2: Diagonal-diagonal layang-layang *saling tegak lurus*.
- Sifat 3: Diagonal yang melalui kedua sudut puncak merupakan *garis bagi* diagonal yang lain.
- Sifat 4: *Sudut puncak* suatu layang-layang dibagi dua sama besar oleh *diagonal yang melalui titik puncak*.

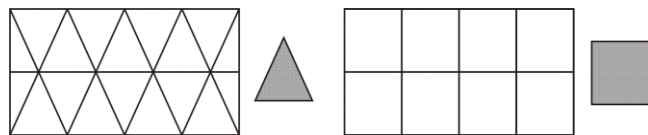
Luas dan keliling

Luas suatu bangun datar adalah jumlah satuan luas yang dapat menutup habis bangun datar dengan tanpa celah dan tanpa bertumpuk. Berapa luas segienam pada gambar di samping, jika dihitung dengan satuan luas berupa segitiga yang diarsir?

Apabila segitiga yang diberikan digunakan untuk mengubun segienam, terdapat enam segitiga dibutuhkan untuk menutup habis segienam tanpa bertumpuk dan tanpa celah. Jadi dapat dikatakan bahwa luas segienam tersebut adalah enam satuan luas.



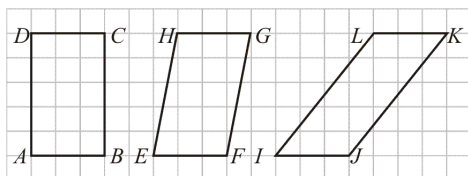
Segitiga dapat juga digunakan untuk mengubun persegi panjang sehingga luasnya dapat dihitung. Namun, dengan satuan luas berupa segitiga, ada beberapa segitiga yang harus terpotong. Akan lebih mudah jika yang digunakan bentuk persegi satuan sebagai satuan luas.



Keliling suatu bangun geometri merupakan jumlah panjang semua sisinya. Sebagai contoh, sebuah segitiga sama sisi yang panjang sisinya 10 cm memiliki keliling $10 + 10 + 10 = 30$ cm. Persegi panjang dengan panjang sisi 10 cm dan 20 cm memiliki keliling $10 + 20 + 10 + 20 = 60$ cm.

a. Luas persegi panjang dan jajar genjang

Dari tiga segi empat di bawah, mana yang paling luas?



Dengan menggunakan persegi satuan pada kertas berpetak sebagai satuan luas, maka luas persegi panjang *ABCD* adalah 15 satuan. Bagaimana mengetahuinya? Tentu saja dengan menghitung persegi satuan yang menutup seluruh permukaan persegi panjang *ABCD* tanpa menumpuk dan tanpa

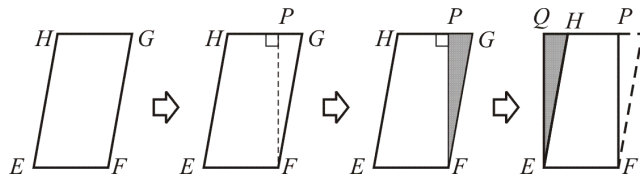
celah. Pada gambar di atas, panjang AB dan AD berturut-turut 3 dan 5. Sehingga banyak persegi satuan untuk menutup persegipanjang adalah 3×5 .

Secara umum, persegi panjang dengan panjang p dan lebar l memiliki luas L

$$L = p \times l$$

Luas jajargenjang

Setelah mengenal rumus untuk luas persegi panjang, selanjutnya luas bangun-bangun yang lain dapat ditemukan.

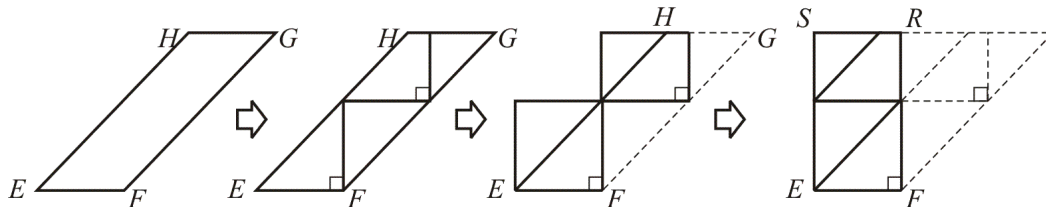


Perhatikan gambar di atas, jajargenjang $EFGH$ dipotong oleh FP , kemudian segitiga PFG dipindahkan ke posisi QHE . Karena segitiga PGF kongruen dengan QHE , maka luas jajargenjang $EFGH$ sama dengan luas persegipanjang $EFPQ$.

persegipanjang $EFPQ$.

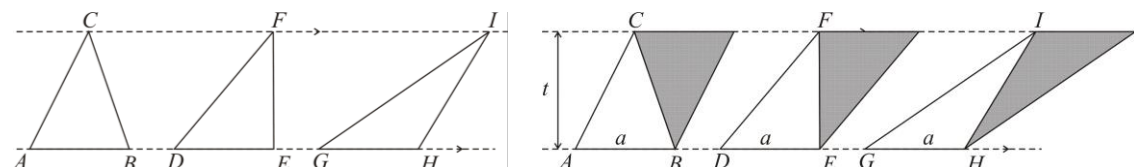
$$L_{EFGH} = EF \times PF = \text{alas} \times \text{tinggi}$$

Bagaimana dengan luas jajargenjang yang “semakin miring”? Perhatikan gambar berikut, dan cobalah untuk membuat penjelasannya.



b. Luas segitiga

Tiga segitiga di bawah memiliki tinggi dan alas yang sama.



Untuk menentukan luas segitiga di atas, salah satu caranya adalah dengan menduplikasi setiap segitiga dan disusun menjadi sebuah jajargenjang. Maka luas segitiga sama dengan setengah luas jajargenjang yang terbentuk.

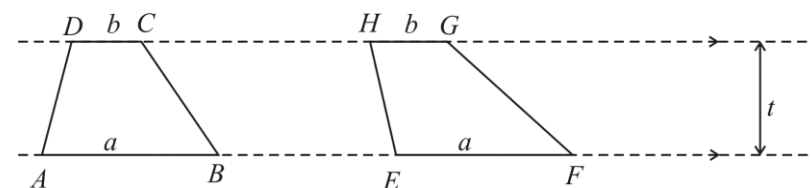
Dari ilustrasi di atas, luas segitiga dapat diperoleh dengan membagi dua jajargenjang yang terbentuk.

$$\text{Luas Segitiga} = \frac{\text{alas} \times \text{tinggi}}{2}$$

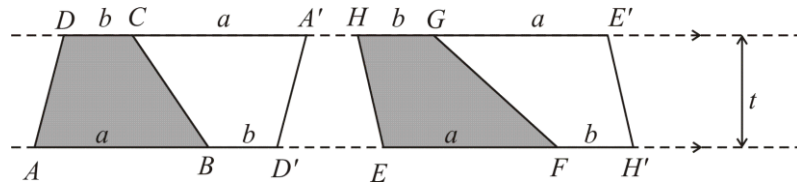
Sementara itu keliling segitiga dihitung dengan menjumlahkan panjang ketiga sisinya.

c. Luas trapesium

Luas trapesium dapat diperoleh dengan cara sebagai berikut.



Duplikasikan masing-masing trapesium kemudian letakkan seperti gambar di bawah.

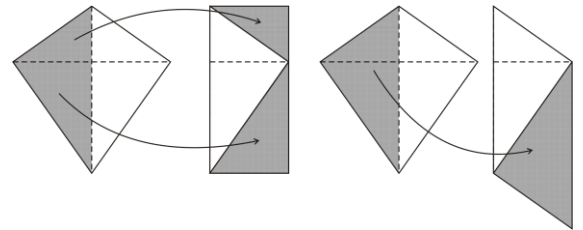


Terbentuk jajargenjang dengan alas $a + b$ yang luasnya dua kali luas trapesium mula-mula. Dengan demikian

$$\text{Luas Trapesium} = \frac{(a + b) \times t}{2}$$

d. Luas layang-layang

Ilustrasi di samping memberikan dua cara menemukan rumus luas layang-layang. Dengan mengubah layang-layang menjadi persegi panjang atau jajargenjang, dapat diturunkan rumus luas layang-layang L .



$$L = d_1 \times \frac{d_2}{2} = \frac{d_1 \times d_2}{2}$$

Dengan d_1 dan d_2 sebagai panjang diagonal-diagonal layang-layang.

e. Luas Belah-ketupat

Belah ketupat termasuk jajar genjang. Belah ketupat adalah jajar genjang yang keempat sisinya sama panjang. Jadi rumus menghitung luas belah ketupat sama dengan rumus menghitung luas jajar genjang.

Belah ketupat dapat juga dipandang sebagai layang-layang yang panjang sisinya sama. Dengan demikian, jika dapat ditemukan panjang kedua diagonalnya, maka luas belah ketupat dapat dicari dengan menggunakan rumus luas layang-layang.

Aktivitas:

Cermati apilet terkait luas segiempat pada tautan berikut, kemudian berikan catatan usulan perbaikan anda kepada penyusunnya.

<https://www.geogebra.org/m/va6bcdyp>



BAB VI LINGKARAN



Lingkaran dan bagian-bagiannya

Lingkaran merupakan himpunan semua titik pada bidang yang berjarak sama terhadap suatu titik tertentu. Titik tertentu ini disebut sebagai pusat lingkaran. Ruas garis yang menghubungkan suatu titik pada lingkaran ke pusat dinamakan jari-jari. Selain untuk menunjuk ruas garis, istilah jari-jari juga digunakan untuk menyatakan panjang ruas garis yang menghubungkan pusat lingkaran dengan titik pada lingkaran.

Pada gambar di atas, garis lengkung BCD disebut busur pendek atau busur kecil, sedangkan garis lengkung BGD disebut busur panjang atau busur besar. Selanjutnya jika disebutkan busur BD maka yang dimaksud adalah busur pendek.

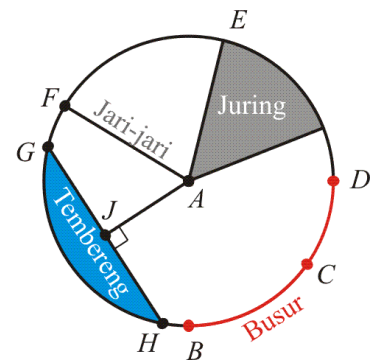
Tali busur merupakan ruas garis yang menghubungkan dua titik pada lingkaran. Pada gambar, GH merupakan tali busur. Talibusur yang melalui pusat lingkaran dinamakan diameter.

Apotema suatu lingkaran merupakan ruas garis yang menghubungkan pusat lingkaran ke titik tengah tali busur. Istilah apotema dapat digunakan untuk menyatakan panjangnya. Sebagai contoh pada gambar di atas, ruas garis $\overline{AJ}$, ataupun panjang AJ dapat disebut sebagai apotema. Apotema tegak lurus tali busur yang bersesuaian.

Pada gambar kiri, jika kamu berjalan dari titik A , menyusuri lingkaran sampai kembali ke titik A lagi, maka panjang lintasan yang telah dilalui dinamakan keliling lingkaran.

Tembereng merupakan daerah yang dibatasi oleh tali busur dan busurnya. Perhatikan bahwa terdapat dua tembereng yaitu tembereng besar dan tembereng kecil.

Juring lingkaran merupakan daerah yang dibatasi oleh dua jari-jari dan busur. Perhatikan pada gambar di atas, bagian yang diarsir merupakan juring kecil APB , dan bagian yang tidak diarsir merupakan juring besar APB .



A. Keliling, π dan Luas Lingkaran

1. Menentukan nilai π dan keliling lingkaran

Kumpulkan benda-benda berbentuk lingkaran. Ukurlah keliling dan diameternya, kemudian lengkapi tabel berikut ini.

Benda	Diameter (d)	Keliling (K)	$\frac{K}{d}$
1.			
2.			

3.			
4.			

Bagaimanakah nilai $\frac{K}{d}$ yang Anda peroleh? Bandingkan dengan hasil yang diperoleh teman sejawat.

Jika Anda teliti, untuk setiap benda berbentuk lingkaran akan diperoleh hasil $\frac{K}{d}$ yang tetap yaitu mendekati 3,14. Nilai ini disebut sebagai π (dibaca "pi").

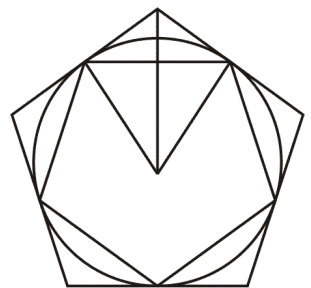
Dengan demikian $\frac{K}{d} = \pi$, sehingga $K = \pi d$. Karena $d = 2r$, maka $K = 2\pi r$.

Sekilas sejarah π

Dalam papyrus Rhind yang ditulis oleh Ahmes (sekitar 1650SM) dinyatakan: "*Cut off 1/9 of a diameter and construct a square upon the remainder; this has the same area as the circle*". Dari sini dapat diturunkan nilai $\pi = 3,16049$.

Archimedes (sekitar 287 – 212 SM) menggunakan lingkaran berjari-jari 1 yang dijepit oleh poligon luar dan dalam untuk menentukan pendekatan nilai π . Dengan memperbanyak sisi poligon, dan berakhir di 96 sisi, ia mendapatkan nilai $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$.

Di China 263 M, Liu Hui menggunakan poligon dari 12 sampai 192 sisi dan mendapatkan nilai $\pi = 3,14159$ yang memiliki ketepatan 5 angka desimal. Abad ke-5 M, Tsu Ch'ung-chih (Zu Chong-zi) dan anaknya Tsu Keng-chih menemukan nilai $3,1415926 < \pi < 3,1415927$. Ia juga memperkenalkan nilai pendekatan $\pi = \frac{355}{113}$.



Aktivitas: Cermati media virtual tentang nilai π pada tautan atau QR code berikut

<https://www.geogebra.org/m/wwXJfg7h>, kemudian diskusikan bersama teman sejawat bagian-bagian yang bisa dipercaya.

Astronom dan matematikawan India, Aryabhata menggunakan nilai $\pi = 3,1416$ dalam bukunya Aryabhatiya (499M).

Di Persia pada tahun 1424, Jamshid al-Kashi menemukan 16 digit nilai π dan memecahkan rekor pendekatan nilai π yang sudah bertahan selama 180 tahun.

Jika penentuan nilai π pada masa-masa tersebut menggunakan pendekatan geometri, di abad pertengahan matematikawan Eropa menemukan cara untuk menentukan nilai π

melalui deret. Franscois Viete (1598) menemukan $\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \dots$. Godttfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) menemukan $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$. Nama lain untuk deret ini adalah deret Gregory-Leibniz atau Madhava-Leibniz. Madhava (1340-1425), matematikawan dan astronom India ternyata telah menemukan deret tersebut.

Saat ini, algoritma yang digunakan untuk memecahkan rekor dunia menemukan nilai π dari tahun 2009-2022 adalah algoritma Chudnovsky, dengan formula

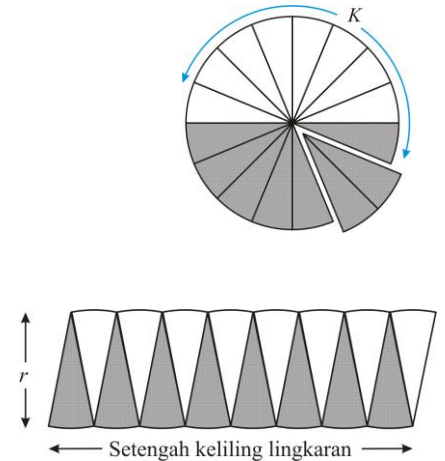
$$\frac{1}{\pi} = 12 \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^q (6q)! (545140134q + 13591409)}{(3q)! (q!)^3 (640320)^{3q+\frac{3}{2}}}$$

Pada tahun 2022 diperoleh 100 trilyun digit nilai π .

2. Luas daerah Lingkaran dan Juring

Berikut ini aktivitas untuk menemukan rumus luas daerah lingkaran (untuk selanjutnya jika disebutkan luas lingkaran, maka yang dimaksud adalah luas daerah lingkaran).

- 1) Lukislah sebuah lingkaran. 2) Bagilah daerah lingkaran tersebut menjadi 16 juring yang kongruen dengan menggunakan jangka atau busur derajat. 3) Arsirlah setengah bagian lingkaran. 4) Guntinglah setiap juring yang telah dibuat. 5) Susun juring-juring tersebut sehingga terbentuk bangun mirip jajargenjang. 6) Bayangkan kalau lingkaran tersebut dipotong menjadi juring-juring yang banyaknya tak hingga, kemudian disusun seperti langkah no. 5.



Dari aktivitas di atas, ternyata luas lingkaran berjari-jari r sama dengan luas persegi panjang dengan panjang sisi r dan setengah keliling lingkaran, sehingga

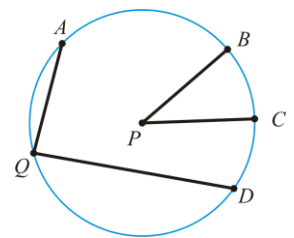
$$\text{Luas lingkaran} = r \times \frac{1}{2} \times 2\pi r = \pi r^2$$



Aktivitas: Cermati media virtual pada tautan atau QR code berikut, kemudian diskusikan dengan teman sejawat kemungkinan skenario pemanfaatan dalam proses belajar mengajar. Tautan: <https://www.geogebra.org/m/jbwhj9md>

Sudut Pusat dan Sudut Keliling

Gambar di samping merupakan contoh sudut pusat dan sudut keliling. Perhatikan bahwa titik sudut dari sudut pusat terletak pada pusat lingkaran. Kaki-kaki sudut pusat berupa jari-jari lingkaran. Titik sudut dari sudut keliling terletak pada lingkaran. Kaki-kaki sudut keliling berupa tali busur.



Titik P pusat lingkaran, dan Q pada lingkaran, maka $\angle AQC$ merupakan sudut keliling, dan $\angle BPC$ sudut pusat.

Besar sudut pusat sama dengan dua kali besar sudut keliling yang menghadap busur yang sama.

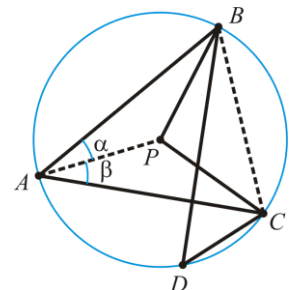
Kita akan membuktikan, kebenaran pernyataan di atas.

Perhatikan gambar, $\angle BPC$ merupakan sudut pusat, dan $\angle BAC$ sudut keliling yang menghadap busur yang sama (busur BC).

Panjang

$AP = PB = PC$ sehingga $\triangle APB$ dan $\triangle APC$ sama kaki serta berlaku

$\angle BAP = \angle ABP$ dan $\angle CAP = \angle ACP$. Karena jumlah sudut segitiga 180° maka pada $\triangle APB$ berlaku $\angle BPA = 180^\circ - 2\angle BAP$ dan pada $\triangle APC$ berlaku $\angle APC = 180^\circ - 2\angle CAP$. Perhatikan sudut BPC ,

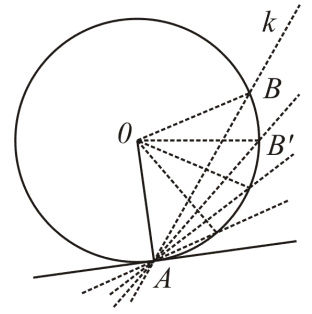


$$\begin{aligned}\angle BPC &= 360^\circ - \angle BPA - \angle APC = 360^\circ - (180^\circ - 2\angle BAP) - (180^\circ - 2\angle CAP) \\ &= 2(\angle BAP + \angle CAP) = 2\angle BAC\end{aligned}$$

Garis singgung

1. Pengertian garis singgung

Perhatikan gambar di samping. Misal diberikan dua titik pada lingkaran A dan B , jelas bahwa garis yang melalui A dan B memotong lingkaran di dua titik. Bayangkan titik B bergerak sepanjang lingkaran ke arah titik A . Ketika kedua titik A dan B menyatu maka garis melalui A dan B akan memotong lingkaran di satu titik saja. Garis yang demikian dinamakan sebagai garis singgung lingkaran.



Garis singgung lingkaran adalah garis yang memotong lingkaran tepat di satu titik yang dinamakan sebagai titik singgung.

Berapa besar sudut antara garis singgung melalui A dengan jari-jari yang melalui titik A ?

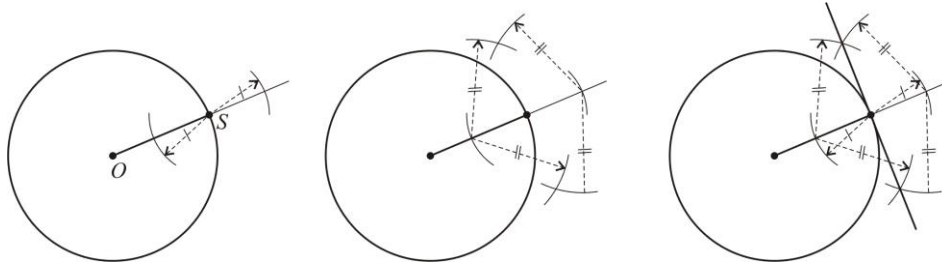
Pada gambar di atas, karena $OA = OB$, maka $\triangle AOB$ sama kaki dan $\angle OAB = \angle OBA$. Karena jumlah besar sudut suatu segitiga adalah 180° , maka berlaku $\angle OAB = \frac{1}{2(180^\circ - \angle AOB)}$

Perhatikan jika titik B bergerak mendekati A , maka besar $\angle AOB$ semakin kecil. Sehingga ketika B berhimpit dengan A dan garis AB berubah menjadi garis singgung di titik A , akibatnya besar $\angle AOB = 0^\circ$. Dengan demikian besar sudut antara garis singgung di titik A dengan jari-jari yang melalui A adalah 90° .

Garis singgung lingkaran tegak lurus jari-jari yang melalui titik singgungnya.

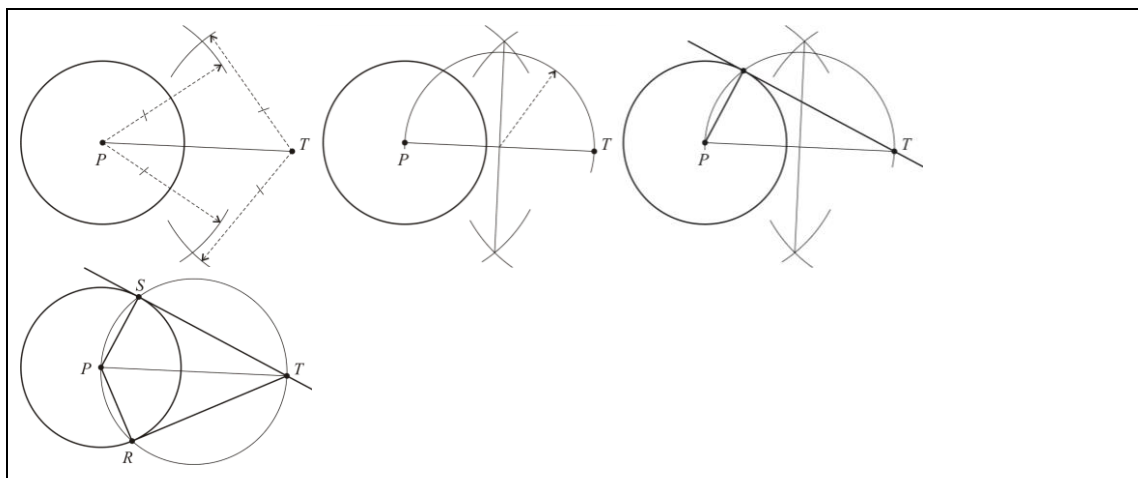
2. Melukis garis singgung melalui titik pada lingkaran

Diberikan sebuah lingkaran berpusat di O , dan sebuah titik S pada lingkaran. Langkah-langkah melukis garis singgung melalui titik S sama seperti melukis garis tegak lurus OS (ingat kembali melukis garis tegak lurus).



3. Melukis garis singgung melalui sebuah titik di luar lingkaran.

Diberikan sebuah lingkaran berpusat di P dan sebuah titik T di luar lingkaran. Berikut ilustrasi melukis garis singgung melalui titik T .

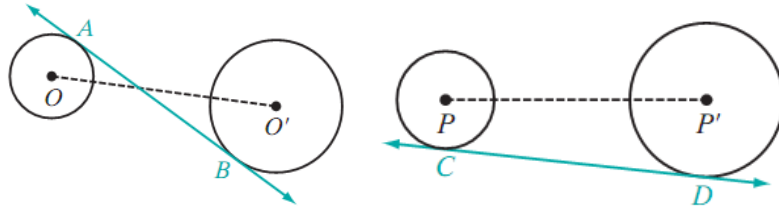


Bangun $PSTR$ dinamakan layang-layang garis singgung. Sisi-sisi layang-layang garis singgung adalah garis singgung dan jari-jari lingkaran yang melalui titik singgung.

4. Panjang ruas garis singgung

Dengan memahami cara melukis garis singgung, Anda dapat menentukan rumus panjang ruas garis singgung lingkaran.

5. Garis singgung persekutuan dua lingkaran

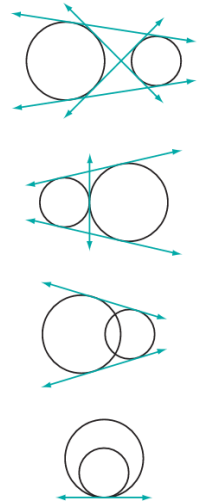


Jika diberikan dua lingkaran, garis singgung persekutuan adalah garis yang menyinggung kedua lingkaran.

Pada diagram di atas, garis AB menyinggung lingkaran berpusat di O dan O' berturut-turut di A dan B . Garis singgung AB disebut garis singgung persekutuan dalam karena garis tersebut berpotongan dengan ruas garis yang menghubungkan kedua lingkaran.

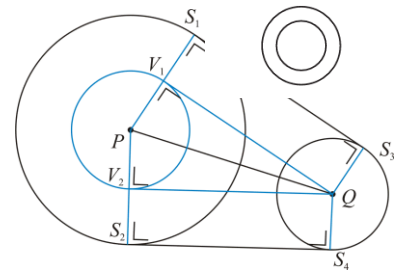
Sementara itu, garis CD menyinggung lingkaran berpusat di P dan P' berturut-turut di titik C dan D . Garis singgung CD disebut garis singgung persekutuan luar karena garis singgung tersebut tidak memotong ruas garis yang menghubungkan pusat kedua lingkaran.

Gambar di samping menunjukkan bahwa dua lingkaran, mungkin saja memiliki garis singgung persekutuan sebanyak 4, 3, 2, 1 atau bahkan tidak mempunyai garis singgung persekutuan.



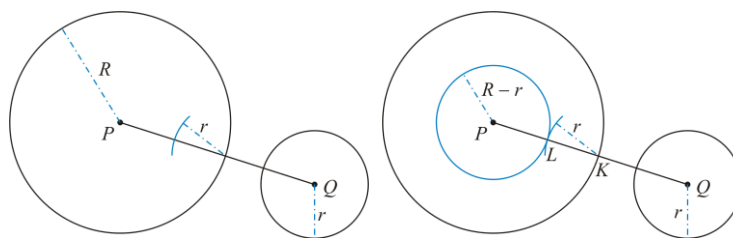
6. Melukis garis singgung persekutuan luar

Untuk memudahkan dalam memahami proses melukis garis singgung persekutuan, perhatikan sketsa di bawah. Diberikan dua lingkaran berpusat di P dan Q , dengan jari-jari berturut-turut R dan r , dengan $R > r$. Tidak mudah menentukan titik S_1 dan S_3 secara langsung. Bayangkan garis singgung ini digeser sehingga S_3 berimpit dengan Q . Garis ini lebih mudah dilukis karena merupakan garis singgung lingkaran berpusat di P berjari-jari $R-r$ yang melalui titik Q di luar lingkaran. Garis ini kemudian digeser kembali ke arah luar, sehingga terbentuk garis singgung persekutuan.



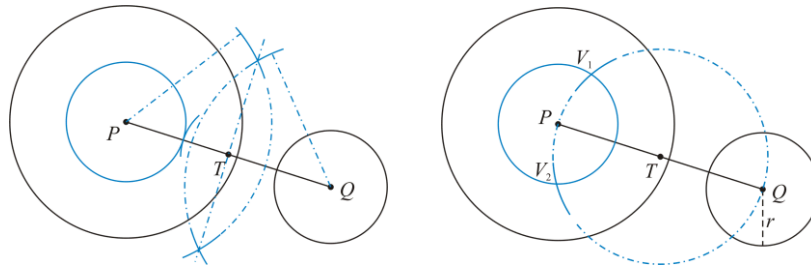
Langkah-langkah untuk melukis garis singgung kedua lingkaran adalah sebagai berikut:

- Hubungkan PQ , sehingga memotong lingkaran besar di K . Lukis busur berjari-jari r , berpusat di K sehingga memotong PQ di L .

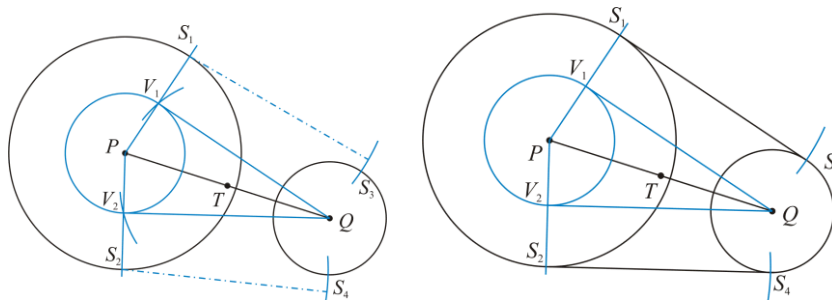


- Lukis lingkaran berpusat di P melalui titik L (lingkaran ini berjari-jari $R-r$).

- iii. Lukis busur berpusat di P dan Q dengan jari-jari yang sama panjang. Hubungkan titik potong kedua busur ini sehingga memotong PQ di titik T . Titik ini membagi PQ menjadi dua bagian sama panjang. (mengapa?)



- iv. Lukis busur berpusat di T melalui P sehingga memotong lingkaran berpusat di P berjari-jari $R-r$ di V_1 dan V_2 .
- v. Tarik garis melalui PV_1 dan PV_2 hingga memotong lingkaran berpusat di P berjari-jari R pada titik S_1 dan S_2 .
- vi. Lukis busur berpusat di S_1 dan S_2 berjari-jari V_1Q sehingga memotong lingkaran berpusat di Q di S_3 dan S_4 seperti terlihat pada gambar.
- vii. Hubungkan S_1S_3 dan S_2S_4 . Kedua garis ini merupakan garis singgung persekutuan luar.



Aktivitas: berdasarkan prosedur di atas, jika diberikan jari-jari lingkaran R dan r , serta jarak pusat kedua lingkaran dinyatakan dengan d , turunkan rumus untuk panjang ruas garis singgung.

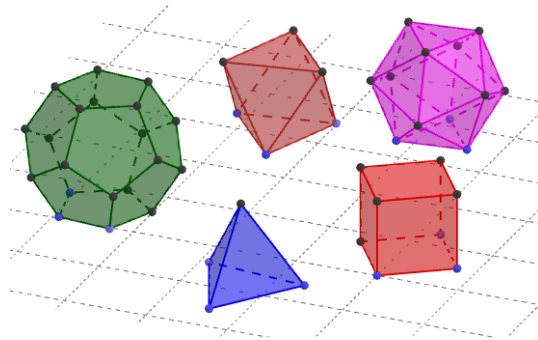
7. Garis singgung persekutuan dalam

Aktivitas:

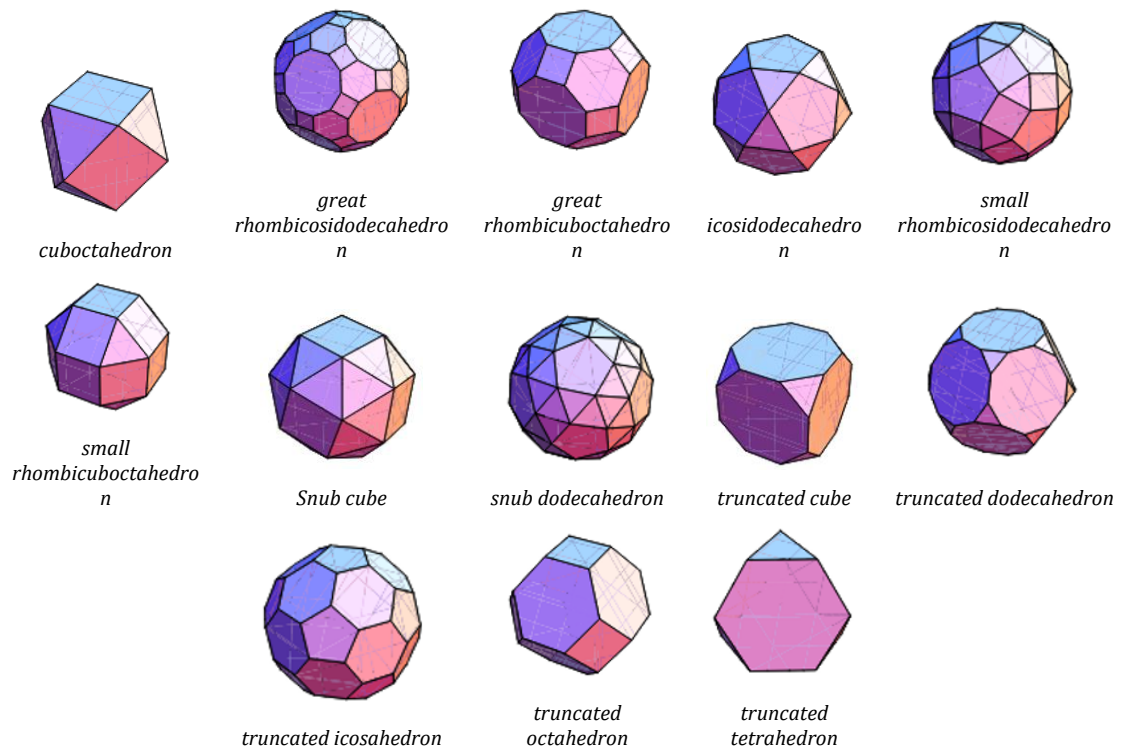
- Jika di atas telah diberikan prosedur untuk melukis garis singgung persekutuan luar, carilah dari berbagai sumber, prosedur untuk melukis garis singgung persekutuan dalam.
- Misalkan diberikan dua lingkaran dengan jari-jari R dan r , serta jarak pusat kedua lingkaran dinyatakan dengan d , turunkan rumus untuk mencari panjang ruas garis singgung persekutuan dalam.

BAB VII POLIHEDRON

Setiap saat kita melihat berbagai bentuk bangun ruang di sekitar kita. Beberapa bangun ruang mungkin sulit didefinisikan secara tepat, namun bangun ruang tersebut dapat diidentifikasi melalui sifat-sifat atau proses terbentuknya. Sebagian dari bangun-bangun ruang tersebut ada yang terkategori bangun ruang dengan sisi datar seperti bangun ruang beraturan (*platonic solid, 5 macam*), bangun ruang semi beraturan (*archimedian solid, 13 macam*), prismoid, dan sebagainya, namun dalam bagian ini hanya akan dibahas materi bangun ruang yang terkait dengan geometri ruang di sekolah dengan tambahan materi pengayaan di beberapa bagian.



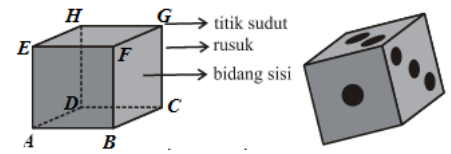
Platonic Solids (tetrahedron, kubus, oktahedron, dodekahedron, ikosahedron)



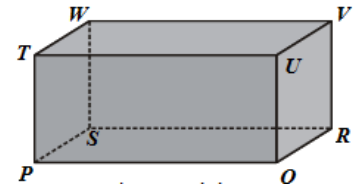
13 macam *Archimedean solids*

A. Kubus dan Balok

Kubus merupakan bangun ruang yang dibatasi oleh enam buah persegi yang kongruen. Pada gambar dapat dilihat bahwa kubus memiliki 8 titik sudut dan 12 rusuk dengan panjang yang sama. Contoh yang paling sederhana dari kubus adalah dadu.



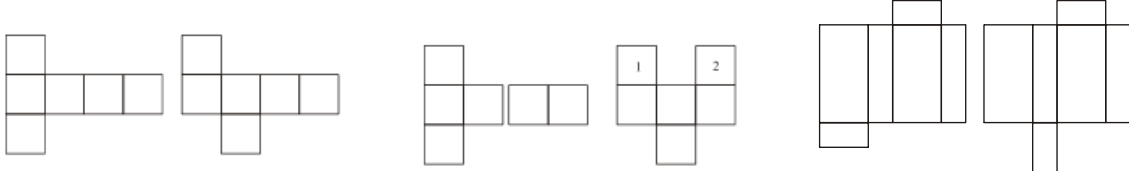
Perhatikan gambar di samping. Balok mirip dengan kubus, memiliki 8 titik sudut dan 12 rusuk. Balok dibatasi oleh tiga pasang persegipanjang yang kongruen dan masing-masing pasangan yang kongruen ini terletak sejajar. Kubus merupakan kasus khusus dari balok, dengan kata lain, kubus dapat dikatakan sebagai balok yang semua sisinya berupa persegi. Contoh balok dalam kehidupan sehari-hari di antaranya adalah ruang kelas, kotak kemasan karton, dan balok kayu.



Penamaan kubus dan balok dibuat berdasarkan titik-titik sudutnya. Sebagai contoh kubus pada gambar 1 dapat dituliskan sebagai kubus $ABCDEFGH$ (atau $ABCD.EFGH$). Balok pada gambar 2 dapat dinamakan sebagai balok $PQRSTUUV$ (atau $PQRS.TUVW$).

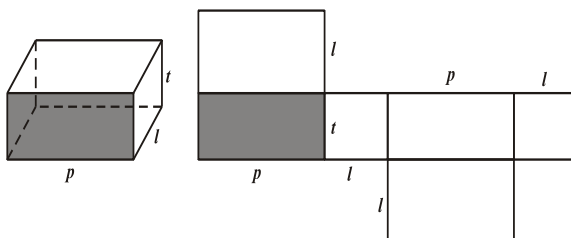
1. Jaring-jaring Kubus dan Balok

Jika sebuah polihedron dipotong pada beberapa rusuknya dan dapat dibuka untuk diletakkan pada suatu bidang datar sehingga membentuk susunan yang saling terhubung pada rusuk-rusuknya maka susunan yang terbentuk disebut sebagai jaring-jaring. Sebaliknya, suatu jaring-jaring polihedron dapat dilipat dan disambung untuk membentuk suatu polihedron tanpa ada sisi yang bertumpuk. Aktivitas untuk menyelidiki jaring-jaring balok dan kubus dapat dilakukan siswa dengan memanfaatkan kotak karton bekas.



Pada gambar di atas, dua gambar tengah bukan jaring-jaring balok karena ada bagian yang terpisah dan ada bagian yang saling menumpuk ketika dilipat menjadi polihedron yaitu persegi 1 dan 2. Sementara itu dua gambar di kiri dan dua gambar di kanan merupakan jaring-jaring.

2. Luas permukaan balok dan kubus



Dari gambar di samping, luas permukaan balok dapat ditentukan.

$$L_{Balok} = 2(pl + pt + lt)$$

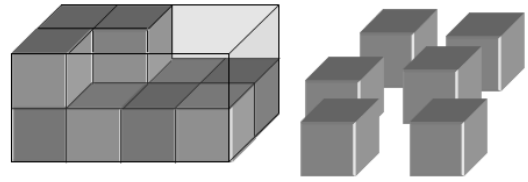
Sementara itu untuk kubus, karena panjang rusuknya sama, $p = l = t = a$, maka

$$L_{Kubus} = 6a^2$$

3. Volume kubus dan balok

Jika pada geometri datar, luas suatu bangun dinyatakan sebagai banyaknya satuan luas yang dapat menutup bangun datar, maka dalam geometri ruang, volume atau isi bangun ruang dinyatakan sebagai banyaknya satuan isi yang dapat mengisi bangun ruang tersebut. Volume diukur dalam satuan kubik, seperti centimeter kubik (cm^3), inchi kubik (in^3) atau meter kubik (m^3). Satu cm^3 menyatakan volume kubus dengan panjang rusuk 1 cm. Satuan

lain untuk volume di antaranya adalah liter (1000 cc), gallon, barel, dan sebagainya. Selain ukuran baku untuk menyatakan volume, dalam kehidupan sehari-hari sering dijumpai juga ukuran-ukuran tidak baku seperti: sendok makan (takaran dosis obat), tetes (takaran untuk percobaan kimia), gelas (dalam masak-memasak)



Pada sebuah balok, percobaan paling mudah untuk menentukan volume adalah dengan menggunakan kubus satuan. Sebagai contoh balok dengan ukuran panjang 3 satuan, lebar 2 satuan dan tinggi 4 satuan dapat diisi dengan menggunakan kubus satuan sebanyak $3 \times 2 \times 4$ buah. Sehingga dikatakan balok tersebut mempunyai volume 24 satuan volume.

Melalui proses percobaan mengisi kubus satuan ke balok dalam berbagai ukuran, secara umum volume balok dengan panjang p , lebar l , dan tinggi t dapat dinyatakan sebagai

$$V_{\text{balok}} = p \times l \times t$$

Aktivitas:

Cermati media virtual menemukan volume balok dapat diakses melalui QR code berikut atau tautan <https://www.geogebra.org/m/fakn7rry>.



Mengingat bahwa alas balok berbentuk persegi panjang dengan luas $A = p \times l$, maka volume balok dapat juga dinyatakan sebagai hasil kali luas alas dengan tinggi balok.

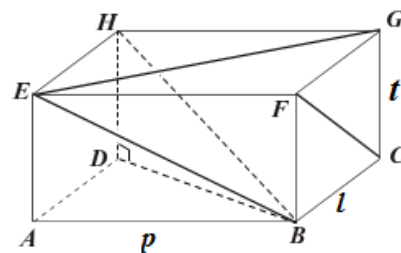
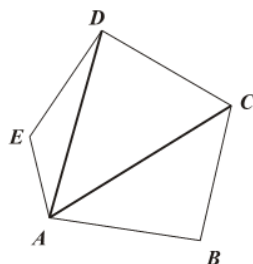
$$V_{\text{balok}} = A \times t$$

Oleh karena pada kubus dengan panjang rusuk a berlaku $p = l = t = a$, maka volume kubus dapat dinyatakan sebagai

$$\text{Volume Kubus} = a^3$$

4. Diagonal sisi, diagonal ruang dan bidang diagonal

Dalam geometri datar, diagonal pada sebuah segibanyak merupakan garis yang menghubungkan dua titik sudut yang tidak berdekatan. Sebagai contoh, pada segilima $ABCDE$, garis AD dan AC merupakan diagonal. Sementara itu AE bukan diagonal dari segilima, karena titik A dan E terletak berdekatan (terletak pada sisi yang sama).



Diagonal ruang suatu bangun ruang merupakan garis yang menghubungkan dua titik sudut yang tidak berdekatan (tidak terletak pada satu bidang sisi). Sebagai contoh, pada gambar di samping, HB merupakan diagonal ruang dari balok $ABCD.EFGH$. Oleh karena itu dalam kubus dan balok terdapat tiga istilah diagonal, yaitu diagonal sisi, diagonal ruang, dan bidang diagonal.

Terdapat 12 diagonal sisi dan 6 diagonal ruang pada balok dan kubus.

Keduabelas diagonal sisi pada balok dan kubus membentuk enam buah bidang diagonal.

Perhatikan balok dengan ukuran $p \times l \times t$ pada gambar, ruas garis EB , EG , dan FC merupakan tiga dari duabelas diagonal sisi pada balok $ABCD.EFGH$. Dengan menggunakan teorema Pythagoras, dapat ditentukan

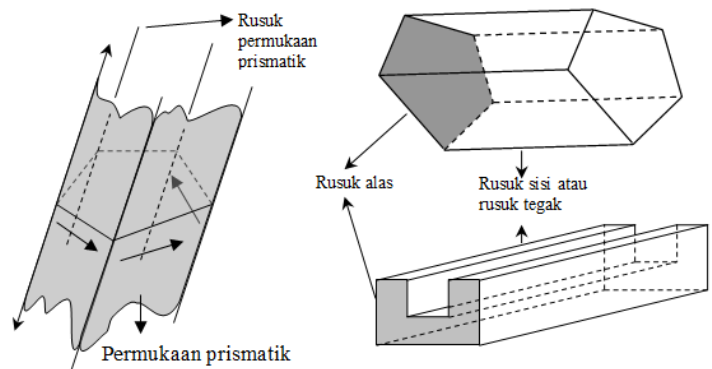
$$EB = \sqrt{p^2 + t^2}, \quad EG = \sqrt{p^2 + l^2}, \quad \text{dan} \quad FC = \sqrt{l^2 + t^2}$$

Perhatikan bahwa segitiga HDB siku-siku di D , sehingga dengan teorema Pythagoras diperoleh

$$HB = \sqrt{DB^2 + DH^2} = \sqrt{(AB^2 + AD^2) + DH^2} = \sqrt{p^2 + l^2 + t^2}$$

B. Prisma

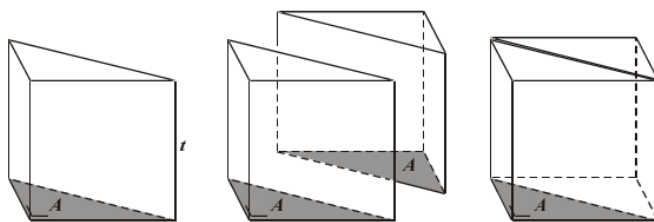
Jika sebuah garis lurus bergerak dalam ruang, tanpa perubahan arah garis dan mengikuti keliling suatu segi- n , maka jejak yang terbentuk dinamakan permukaan prismatic (*prismatic surface*). Ketika garis yang bergerak ini tepat melalui titik sudut segi- n , maka garis ini merupakan rusuk permukaan prismatic.



Jika sebuah bidang datar memotong permukaan prismatic beserta seluruh rusuk-rusuknya, maka akan terbentuk sebuah segi- n . Jika terdapat dua bidang sejajar memotong permukaan prismatic, maka terbentuk dua segi- n yang kongruen. Bagian permukaan prismatic yang berada di antara keduanya, beserta dua segi- n , membentuk prisma segi- n . Dua segi- n ini disebut alas dan tutup, sedangkan permukaan prismatic di antara keduanya disebut sisi prisma. Rusuk-rusuk yang terletak pada sisi prisma dinamakan rusuk sisi dan rusuk yang terletak bagian alas dinamakan sebagai rusuk alas. Jarak antara bidang alas dan tutup merupakan tinggi prisma. Apabila rusuk-rusuk sisi prisma tegak lurus terhadap alas, maka dinamakan sebagai prisma tegak, dan selain yang demikian, dinamakan sebagai prisma miring.

Prisma diberi nama menurut bentuk alasnya. Contoh: prisma segitiga samasisi, prisma segienam beraturan, prisma segilima beraturan.

1. Volume prisma segitiga siku-siku



yang terbentuk adalah

$$2V = \text{luas alas} \times \text{tinggi} = 2A \times t, \text{ sehingga diperoleh}$$

$$V = A \times t$$

2. Volume prisma segitiga sebarang

Volume prisma segitiga siku-siku dapat dicari dengan menduplikasi prisma segitiga siku-siku yang kongruen sehingga dapat dibentuk menjadi balok.

Misalkan V menyatakan volume prisma segitiga siku-siku dengan luas alas A , maka volume balok

Berdasarkan volume prisma segitiga siku-siku yang telah diperoleh, selanjutnya volume prisma segitiga sebarang dapat ditentukan dengan cara membagi prisma tersebut menjadi dua buah prisma segitiga siku-siku. Pada gambar di samping, prisma segitiga sebarang dengan alas $\triangle ABC$ dibagi menjadi dua prisma segitiga-siku-siku dengan alas $\triangle APC$ dan $\triangle CPB$.

Misalkan volum prisma $ABCDEF$, $APCEQF$, dan $CPBFQE$ berturut-turut dinyatakan sebagai V_1 , V_2 , dan V_3 maka

$$V_1 = V_2 + V_3 = L_{APC} \times t + L_{PCB} \times t = (L_2 + L_3) \times t = L_{ABC} \times t$$

Jadi, secara umum

$$\text{Volum prisma segitiga} = \text{Luas alas} \times \text{tinggi}$$

3. Volum prisma segi enam dan segi-n

Volum prisma segi-n dapat dicari dengan jalan membaginya menjadi prisma-prisma segitiga. Sebagai contoh, prisma segi enam beraturan dengan panjang rusuk alas a dan tinggi prisma t dapat dipecah menjadi enam buah segitiga samasisi dengan panjang sisi a . Dengan menggunakan teorema Pythagoras untuk menentukan tinggi segitiga, luas masing-masing segitiga dapat ditentukan yaitu

$$\text{Luas segitiga} = \frac{a^2}{4} \sqrt{3} \frac{a^2}{4} \sqrt{3}.$$

$$\begin{aligned} \text{Luas segienam} &= 6 \times \text{luas segitiga} \\ &= 6 \times \frac{a^2}{4} \sqrt{3} = \frac{3}{2} a^2 \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\text{Sehingga, volum segienam beraturan} = \frac{3}{2} a^2 t \sqrt{3}$$

Secara umum untuk prisma segi- n , misalkan:

V menyatakan volum prisma segi- n ,
 V_i menyatakan volum prisma segitiga ke- i , dan
 L_i menyatakan luas alas prisma segitiga ke- i .

maka

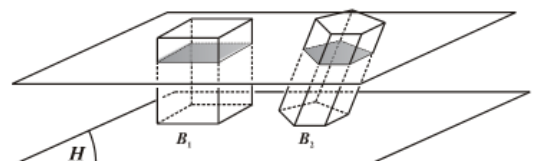
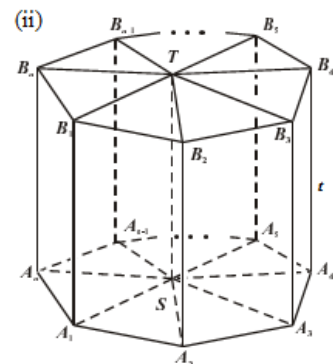
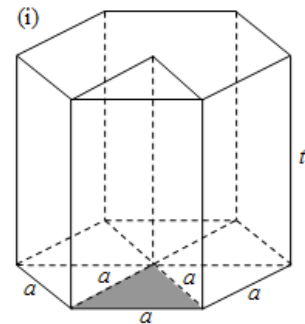
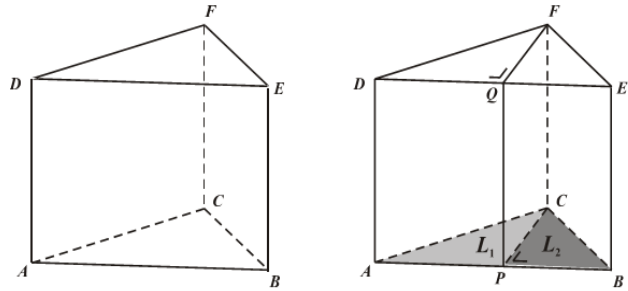
$$\begin{aligned} V &= V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n = L_1 \times t + L_2 \times t + \dots + L_n \times t \\ &= (L_1 + L_2 + \dots + L_n) t \\ V &= L \times t \end{aligned}$$

Jadi secara umum berlaku

$$\text{Luas prisma segi-}n = \text{Luas alas prisma} \times \text{tinggi}.$$

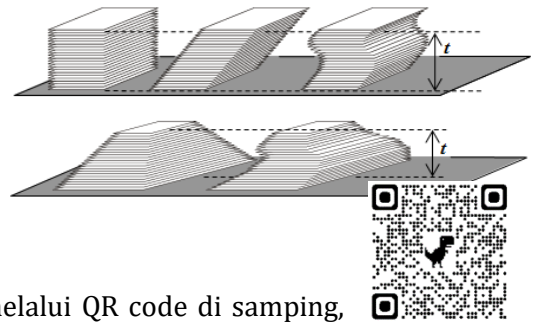
4. Prinsip Cavalieri

Misalkan dua bangun ruang B_1 dan B_2 terletak pada suatu bidang datar H . Jika setiap bidang yang sejajar H memotong kedua bangun ruang dan hasil perpotongannya mempunyai luas yang sama, maka kedua volume B_1 dan B_2 sama besar.



Untuk memudahkan pemahaman tentang prinsip Cavalieri gunakan dua tumpukan kertas dengan tinggi yang sama. Satu tumpukan membentuk balok, sedang satu tumpukan lagi dibuat berkelok atau miring.

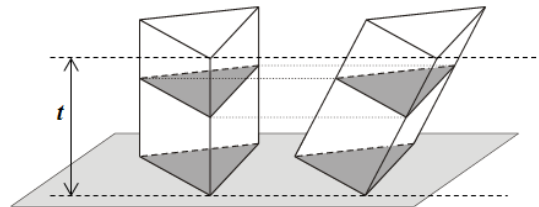
Perhatikan gambar, ketiga tumpukan kertas memiliki ketinggian yang sama. Jika setiap mengambil kertas ke- n dari bawah dari ketiga tumpukan diperoleh luas kertas yang sama, maka volume ketiga tumpukan tersebut sama besar.



Media virtual untuk prinsip Cavalieri dapat diakses melalui QR code di samping, atau tautan <https://www.geogebra.org/m/tfks7hw7>.

5. Volume Prisma Miring

Untuk menentukan volume prisma miring, buat prisma tegak dengan alas dan tinggi yang sama. Setiap bidang sejajar alas memotong kedua prisma, diperoleh hasil perpotongan yang sama dan sebangun (sehingga luasnya sama). Sesuai dengan prinsip Cavalieri, maka volume kedua prisma sama. Dengan demikian diperoleh

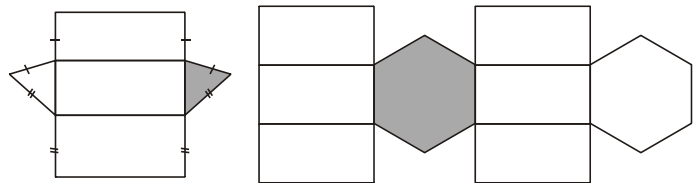


Volume prisma miring = Luas Alas $\times$ tinggi

6. Jaring-Jaring dan Luas Permukaan Prisma

Berikut ini merupakan contoh jaring-jaring prisma segitiga dan segienam beraturan.

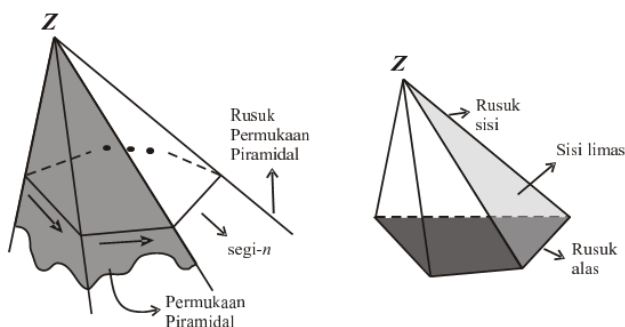
Melalui ilustrasi dua jaring-jaring prisma di atas, maka luas permukaan prisma dapat ditentukan dengan jalan menjumlahkan luas sisi prisma, luas tutup, dan luas alas.



Luas permukaan prisma = luas sisi prisma + luas alas + luas tutup

Luas permukaan prisma = (keliling alas $\times$ tinggi prisma) + 2 $\times$ Luas alas

C. Limas (Piramida)



titik yang dibatasinya membentuk limas.

Segi- n dari limas ini dinamakan sebagai alas, titik Z disebut puncak limas, dan permukaan piramidal yang menjadi bagian dari limas dinamakan sisi limas. Ruas garis yang

Jika sebuah sinar garis berpangkal di titik Z bergerak dengan titik pangkal tetap melalui ruas-ruas garis sisi segi- n , maka jejak yang terbentuk merupakan permukaan piramidal. Sinar garis yang melalui titik sudut segi- n dinamakan sebagai rusuk permukaan piramidal. Segi- n bersama titik Z dan bagian permukaan piramidal yang terletak di antara keduanya beserta seluruh

menghubungkan puncak dengan sudut-sudut alas dinamakan rusuk sisi, untuk membedakan dengan rusuk alas. Tinggi limas dinyatakan sebagai jarak terpendek antara titik puncak dengan bidang alas. Limas segi- n memiliki sebanyak n rusuk sisi yang berbentuk segitiga, n buah rusuk sisi dan n buah rusuk alas. Sehingga banyak rusuk limas segi- n adalah $2n$.

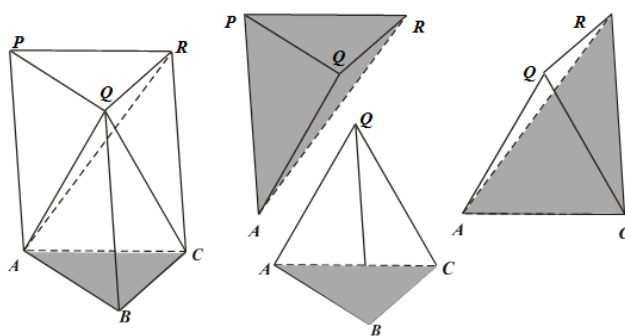
Jika alas limas berbentuk segi- n beraturan, maka dinamakan sebagai limas segi- n beraturan. Limas segi- n beraturan dikatakan sebagai limas tegak jika titik kaki garis tingginya terletak pada pusat alasnya. Limas segi- n beraturan memiliki n sisi berbentuk segitiga samakaki.

1. Volume Limas Segitiga

Berawal dari limas $Q.ABC$, lukis prisma segitiga $ABC.PQR$ dengan rusuk sisi sejajar BQ . Misal volume, luas alas, dan tinggi prisma adalah berturut-turut V , L_{alas} , dan t maka

$$V = L_{\text{alas}} \times t$$

Potong prisma menjadi tiga bagian seperti pada gambar.



Limas $Q.APR$ dapat dipandang sebagai limas dengan puncak A dan alas ΔPQR . Karena $\Delta PQR \cong \Delta ABC$, dan tinggi limas $A.PQR$ dengan $Q.ABC$ sama, maka dengan prinsip Cavalieri diperoleh $V_{Q.ABC} = V_{A.PQR} = V_{Q.APR}$

Perhatikan limas $Q.APR$ dan $Q.ACR$. Kedua limas ini memiliki alas yang kongruen dan tinggi yang sama

sehingga $V_{Q.APR} = V_{Q.ACR}$

Akibatnya ketiga limas $Q.ABC$, $Q.APR$ dan $Q.ACR$ memiliki volume yang sama. Dengan demikian $V_{Q.ABC} = \frac{1}{3} \times V_{ABC.PQR} = \frac{1}{3} \times L_{\text{alas}} \times t$

Aktivitas:

Cermati media virtual volume limas pada tautan atau QR code berikut

<https://www.geogebra.org/m/zfzpbsbt>, kemudian berikan catatan-catatan perbaikan kepada penyusunnya melalui



2. Volume Limas segi- n

Seperti pada penurunan rumus prisma, setelah ditemukan rumus volume limas segitiga, selanjutnya volume limas segi- n dapat diturunkan dengan jalan memecah limas ini menjadi limas-limas segitiga.

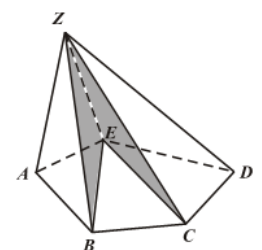
Sebagai contoh perhatikan limas segilima $Z.ABCDE$.

Misalkan:

V menyatakan volume limas $Z.ABCDE$

t menyatakan tinggi limas.

Maka



Gambar 23. Limas segilima yang dipecah menjadi tiga limas segitiga.

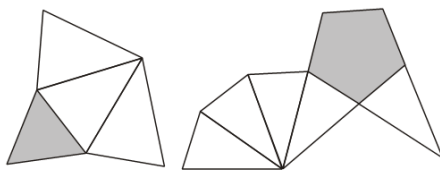
$$V = \frac{1}{3} \cdot L_{ABE} \cdot t + \frac{1}{3} \cdot L_{BEC} \cdot t + \frac{1}{3} \cdot L_{ECD} \cdot t = \frac{1}{3} \cdot (L_{ABE} + L_{BCE} + L_{CDE}) \cdot t = \frac{1}{3} \cdot L_{ABCDE} \cdot t$$

Secara umum limas segi-n selalu dapat dipecah menjadi limas-limas segitiga yang mempunyai tinggi sama dengan tinggi limas yang diberikan. Dengan demikian volume prisma segi-n dengan tinggi t adalah

$$\text{Volum Limas} = \frac{1}{3} \times \text{Luas alas} \times \text{tinggi}$$

Percobaan untuk menunjukkan kebenaran rumus volume limas dapat dilakukan melalui peragaan menakar menggunakan sebuah limas dan sebuah prisma pasangannya. Dalam hal ini dikatakan limas dan prisma yang berpasangan jika kedua alas bangun tersebut kongruen dan tinggi kedua bangun sama. Melalui praktek menakar didapatkan fakta bahwa prisma dipenuhi oleh tiga takaran limas.

7. Jaring-jaring Limas dan Luas Permukaan Limas



Melalui ilustrasi dua jaring-jaring limas di bawah, luas permukaan limas dapat ditentukan dengan menjumlahkan luas sisi limas dan alasnya.

$$\begin{aligned} \text{Luas permukaan limas} = \\ \text{Luas seluruh sisi limas} + \text{Luas alas} \end{aligned}$$

BAB VII

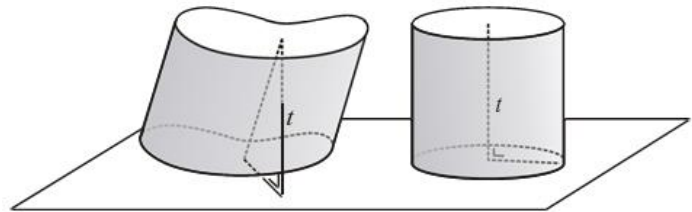
BANGUN RUANG SISI LENGKUNG

Bangun ruang sisi lengkung merupakan bangun ruang yang paling tidak memiliki satu sisi lengkung. Beberapa bangun ruang sisi lengkung mungkin sulit didefinisikan secara tepat, namun bangun ruang tersebut dapat diidentifikasi melalui sifat-sifat atau proses terbentuknya. Selain konsep bangun ruang sisi lengkung, terutama kerucut, tabung, dan bola dibahas beberapa hal yang terkait dengannya seperti luas permukaan dan volume.

A. Tabung (Silinder)

Jika sebuah garis dengan arah yang tetap bergerak di dalam ruang sepanjang kurva lengkung, maka jejak yang ditimbulkan membentuk permukaan silindris. Kurva lengkung ini dinamakan garis arah dan garis yang bergerak dinamakan sebagai garis pelukis. Sama seperti prisma, jika permukaan silindris dengan garis arah kurva tertutup sederhana dipotong oleh dua buah bidang yang sejajar, maka kedua hasil perpotongan bersama-sama dengan permukaan silindris di antara keduanya beserta seluruh titik yang dibatasinya membentuk tabung. Bagian sisi silindris yang terletak di antara dua bidang sejajar dinamakan sebagai sisi tabung yang berupa sisi lengkung. Bagian silinder yang merupakan perpotongan permukaan silindris dengan dua bidang sejajar dinamakan sebagai alas dan tutup. Alas dan tutup tabung mempunyai bentuk kongruen. Jarak antara bidang alas dan bidang tutup dinyatakan sebagai tinggi tabung. Tabung memiliki dua rusuk berbentuk kurva lengkung yang sekaligus merupakan batas dari alas atau tutupnya.

Jika di setiap titik pada rusuk, sudut antara bidang alas dan sisi lengkung membentuk sudut siku-siku, maka tabung yang demikian dinamakan sebagai tabung tegak. Selain berdasarkan sudut antara alas dan sisi lengkung, jenis tabung



ditentukan juga oleh bentuk alasnya. sebagai contoh tabung dengan alas berbentuk ellips dinamakan sebagai tabung ellips dan tabung dengan alas lingkaran dinamakan sebagai tabung lingkaran. Selanjutnya dalam modul ini, jika tidak diberi penjelasan, maka yang dimaksud dengan tabung adalah tabung lingkaran tegak.

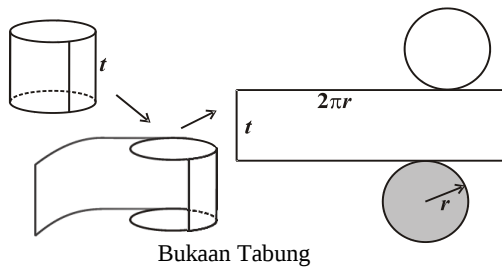
Tabung lingkaran tegak dapat juga didefinisikan sebagai bangun ruang yang dihasilkan oleh perputaran dengan sumbu putar salah satu sisinya. Tabung dapat juga dipandang sebagai prisma segi- n beraturan dengan n tak hingga.

1. Volume Tabung

Pikirkan sebuah prisma tegak segi- n beraturan. Jika banyak rusuk alas diperbanyak tanpa batas, maka segi- n ini akan menjadi lingkaran. Dengan memandang tabung sebagai prisma segi- n , dengan n tak hingga, dapat diturunkan rumus untuk volume tabung dengan tinggi t dan jari-jari alas r . Misal volume tabung dinyatakan sebagai V , maka

$$V_{\text{tabung}} = L_{\text{alas}} \times \text{tinggi} = \pi r^2 t$$

2. Luas permukaan tabung



Perhatikan gambar bukaan tabung pada gambar. Sisi lengkung (selimut) tabung, jika dibuka akan membentuk persegi panjang dengan panjang sisi keliling lingkaran alas dan t .

Misal luas permukaan tabung dinyatakan dengan L , maka

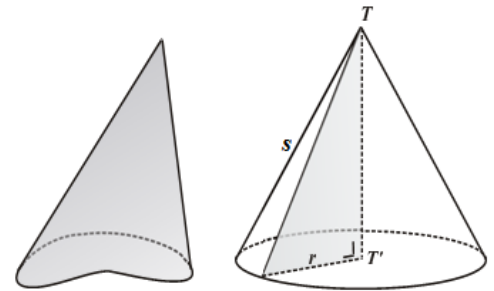
$$\begin{aligned} L &= L_{\text{alas}} + L_{\text{tutup}} + L_{\text{selimut}} \\ &= 2\pi r^2 + 2\pi r t \\ &= 2\pi r(r + t) \end{aligned}$$

B. Kerucut

Misalkan diberikan sebuah kurva lengkung yang terletak pada sebuah bidang datar dan sebuah titik T yang tidak sebidang dengannya. Jika sebuah garis melalui titik T dan bergerak sepanjang kurva lengkung, maka jejak yang dihasilkan membentuk conical surface. Kurva lengkung ini dinamakan sebagai garis arah dan garis yang bergerak disebut garis pelukis.

Kerucut merupakan bangun yang dibatasi oleh kurva lengkung tertutup sederhana sebagai alas, bagian kurva lengkung yang terletak diantara T dan alas beserta seluruh daerah yang dibatasinya.

Pada gambar di samping, titik T dinamakan sebagai titik puncak, garis s yang menghubungkan puncak ke kurva alas dinamakan sebagai garis pelukis. Jenis kerucut dapat dibedakan berdasarkan bentuk alas, seperti kerucut lingkaran, kerucut ellips, dan kerucut jenis lainnya.



Kerucut lingkaran tegak, merupakan kerucut yang proyeksi puncak pada alas terletak di pusat lingkaran alas, dapat juga dipandang sebagai hasil rotasi satu putaran segitiga siku-siku dengan sumbu rotasi salah satu sisi siku-sikunya. Kerucut yang dibahas dalam bahan belajar ini adalah kerucut lingkaran tegak.

1. Volume Kerucut

Dengan memandang kerucut dengan jari-jari alas r dan tinggi t sebagai limas segi- n beraturan untuk n tak hingga maka volume kerucut dapat ditentukan.

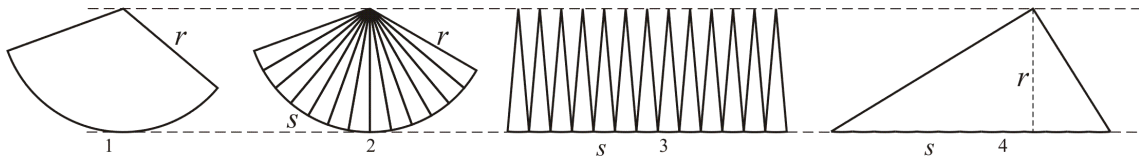
$$\text{Volum Kerucut} = \frac{1}{3} \times \text{luas alas} \times \text{tinggi} = \frac{1}{3} \pi r^2 t$$

Kebenaran rumus volume kerucut ini dapat ditunjukkan dengan menggunakan peragaan menakar dengan menggunakan takaran kerucut dengan tabung pasangannya. Pasangan kerucut dan tabung ini memiliki alas yang kongruen dan tinggi yang sama. Melalui penakaran pasir ternyata tabung akan penuh setelah diisi 3 kali takaran kerucut. Dengan demikian

2. Luas Permukaan Kerucut

Sebelum membahas luas permukaan kerucut, dicari terlebih dahulu luas juring lingkaran jika diketahui jari-jari dan panjang busurnya.

Perhatikan ilustrasi di bawah.



Sebuah juring dipotong-potong menjadi juring-juring yang lebih kecil, kemudian disusun seperti gambar 3 yang menyerupai susunan segitiga-segitiga dengan tinggi r . Jika banyak potongan semakin banyak mendekati tak hingga, maka alas-alas segitiga tersebut membentuk garis lurus. Luas bangun ini akan sama dengan luas segitiga dengan alas s , tinggi r . Jadi luas juring lingkaran dengan panjang busur s adalah

$$L_{\text{juring}} = \frac{1}{2}sr$$

Jika dua buah jari-jari lingkaran membentuk sudut 1° dan dipotong, maka

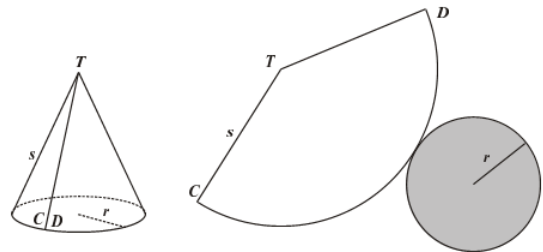
- Busur AB mempunyai panjang $\frac{1}{360}$ keliling lingkaran, dan
- Luas sektor $AOB = \frac{1}{360}$ luas lingkaran.

Jadi jika sudut AOB memiliki besar D° , maka

- Panjang busur $AB = \frac{D}{360} \times \text{keliling lingkaran}$, dan
- Luas sektor $OAB = \frac{D}{360} \times \text{luas lingkaran} = \frac{D}{360} \pi r \times r$
 $= \frac{1}{2} \times \text{keliling lingkaran} \times \frac{D}{360} \times r = \frac{1}{2} \times \text{panjang busur } AB \times r$ (i)

Untuk menemukan luas selimut (permukaan lengkung) kerucut perhatikan ilustrasi berikut.

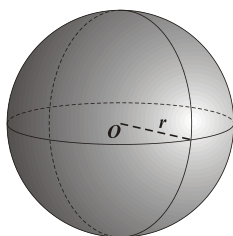
Misalkan sebuah kerucut dipotong sepanjang garis pelukis TC , dan kemudian dibuka di sebuah bidang datar. Hasilnya berupa sebuah sektor lingkaran TCD dengan jari-jari TC dan busur CD . Busur CD ini sekaligus merupakan keliling lingkaran alas.



$$\begin{aligned} \text{Luas selimut} &= \frac{1}{2} \times \text{panjang busur } CD \times TC \quad (\text{lihat (i)}) \\ &= \frac{1}{2} \times 2\pi r \times s \end{aligned}$$

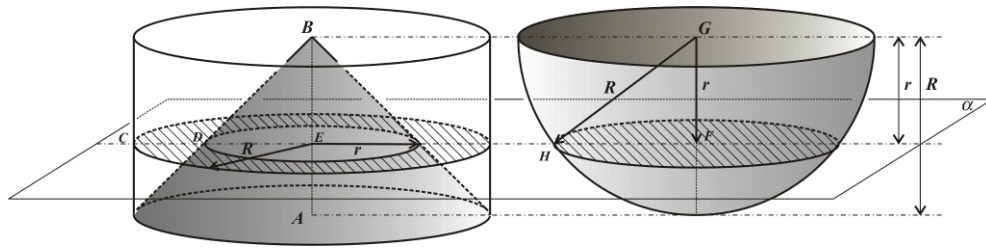
$$\text{Jadi, Luas selimut} = \pi rs$$

C. Bola



Jika setengah lingkaran dirotasikan mengelilingi diameternya, maka akan terbentuk sebuah permukaan bola. Permukaan bola dapat juga didefinisikan sebagai tempat kedudukan titik-titik yang berjarak sama terhadap suatu titik tertentu yang dinamakan sebagai pusat bola. Benda yang dibatasi oleh permukaan bola dinamakan sebagai bola. Perpotongan antara sebuah bidang datar dengan bola akan membentuk lingkaran. Lingkaran besar merupakan lingkaran yang diperoleh jika bidang pemotong melalui pusat lingkaran.

1. Volume Bola



Pada gambar di atas, sebuah tabung dengan tinggi dan jari-jari alas R , diisi dengan kerucut yang memiliki tinggi dan jari-jari alas R . Pada gambar kanan, diberikan setengah bola dengan pusat G dan berjari-jari R . Ambil sebarang bidang α sejajar alas kerucut, dengan jarak r (sebarang) dari puncak kerucut. Bidang α mengiris daerah antara tabung dan kerucut sehingga membentuk cincin berjari-jari luar R , jari-jari dalam r dan mengiris bola dengan bentuk lingkaran berjari-jari HF . Akan ditunjukkan bahwa luas cincin di gambar kiri sama dengan luas lingkaran gambar kanan. Perhatikan bahwa $RE = DE = GF = r$ dan $EC = GH = R$. Dengan menggunakan teorema Pythagoras, diperoleh $HF^2 = GH^2 - GF^2$. Misalkan Luas cincin dan luas lingkaran dilambangkan dengan L_{cin} dan L_{ling} maka

$$L_{cin} = \pi \cdot R^2 - \pi \cdot r^2 = \pi(R^2 - r^2)$$

$$L_{ling} = \pi \cdot HF^2 = \pi(R^2 - r^2)$$

Untuk sebarang bidang sejajar alas memotong kedua bangun, diperoleh luas permukaan hasil irisan yang sama, menurut asas Cavalieri, maka volume kedua bangun sama.

$$V_{\text{setengah bola}} = V_{\text{tabung}} - V_{\text{kerucut}} = \pi \cdot R^2 \cdot R - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot R = \frac{2}{3} \pi R^3$$

Dengan demikian diperoleh

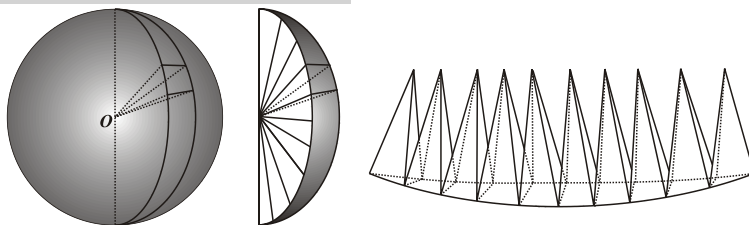
$$V_{\text{bola}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$$



Aktivitas:

Cermati media virtual pada tautan atau QR code berikut, <https://www.geogebra.org/m/b5pnhdnk>, selanjutnya diskusikan dengan teman sejawat kemungkinan proses pembelajarannya.

2. Luas Permukaan Bola



terbentuk mempunyai tinggi yang sama, yaitu jari-jari bola (r). Misalkan luas alas masing-masing limas dinyatakan sebagai $L_1, L_2, L_3, \dots$, dan L_n . Jika alas limas dibuat sekecil-kecilnya, dengan kata lain n dibuat sebesar-besarnya (n tak hingga) maka jumlah luas alas seluruh limas akan sama dengan luas permukaan bola.

Misalkan sebuah bola dipotong membentuk limas-limas dengan titik puncak di pusat bola seperti pada gambar di atas. Perhatikan bahwa limas-limas yang

$$\text{Jumlah volume seluruh limas} = V_{\text{bola}}$$

$$\frac{1}{3} \cdot L_1 \cdot r + \frac{1}{3} \cdot L_2 \cdot r + \frac{1}{3} \cdot L_3 \cdot r + \dots + \frac{1}{3} \cdot L_n \cdot r = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$\frac{1}{3}(L_1 + L_2 + L_3 + \cdots + L_n)r = \frac{4}{3}\pi r^3$$
$$(L_1 + L_2 + L_3 + \cdots + L_n) = 4\pi r^2$$

Diperoleh,

$$L_{permukaan\ bola} = 4\pi r^2.$$

Aktivitas:

Cermati media virtual pada tautan

<https://www.geogebra.org/m/knp7e99n> atau QR code berikut.

Diskusikan dengan temann sejawat hal-hal yang masih belum dipahami.



BAB VIII TRANSFORMASI GEOMETRI

Komputer grafis memungkinkan desainer membuat model bangun dua atau tiga dimensi, sekaligus memanipulasi bangun tersebut. Sebagai contoh, pengguna perangkat lunak desain interior dapat memilih objek kemudian melakukan mengubah bentuk, ukuran, posisi objek tersebut. Pengguna perangkat lunak di bidang teknik dapat membuat komponen mesin yang simetris dengan memanfaatkan fasilitas refleksi dan/atau memutar objek dasarnya. Desain akhir dari objek dapat diputar dan dilihat dari berbagai sudut pengamatan.



Sumber : <https://www.cadtrainingonline.com/> dan <http://cadsolutions.in/>

Dalam geometri, jika seluruh titik suatu bangun geometri dipindahkan menurut aturan tertentu, akan didapatkan bayangan dari gambar asli. Proses ini dinamakan transformasi. Setiap titik pada obyek asli memiliki pasangan dengan titik pada bayangannya. Transformasi merupakan prosedur yang spesifik yang memindahkan titik-titik pada bidang atau ruang ke titik-titik yang berbeda.

Pada Kegiatan Pembelajaran 1, Anda akan mengingat kembali tentang matriks dan operasinya yang merupakan alat dalam transformasi geometri, serta transformasi translasi, refleksi, rotasi, dan dilatasi.

CAS	
1	$P := \{\{2,1\}, \{1,3\}\}$
☐	$\rightarrow P := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$
2	Determinant(P)
☐	$\rightarrow 5$

P^{-1}	
3	$\rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -5 \\ -1 & 2 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$
Invert(P)	
4	$\rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -5 \\ -1 & 2 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$

Matriks Transformasi

Misalkan matriks persegi $T = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ dan matriks kolom $P = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ dikalikan seperti contoh berikut.

$$TP = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Jika $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ dipandang sebagai vektor posisi yang merepresentasikan titik (2, -3), maka matriks T memindahkan titik (2, -3) ke titik (12, -5). Selain titik (2, -3), matriks T juga

memindahkan seluruh titik di bidang koordinat ke titik baru. Dalam hal transformasi T , dapat dituliskan sebagai

$$T: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Transformasi T memetakan titik (x, y) ke bayangannya yaitu (x', y') .

Dengan menggunakan matriks di atas, maka dapat dituliskan.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Catatan : Penulisan transformasi dapat dilakukan dengan bentuk yang lain seperti

$$T: x' = 3x - 2y, y' = -x + y.$$

$$T: (x, y) \mapsto (3x - 2y, -x + y).$$

$$T(x, y) = (3x - 2y, -x + y).$$

Titik Invarian

Titik invarian (atau titik tetap) merupakan titik yang dipetakan ke dirinya sendiri. Garis invarian (atau garis tetap) adalah garis dimana semua bayangan titik pada garis juga terletak pada garis tersebut. Titik dan garis invarian menjadi kunci dalam menentukan jenis transformasi.

Contoh.

Tentukan titik-titik invarian dari transformasi yang didefinisikan oleh

a. $x' = 1 - 2y, y' = 2x - 3$

b. $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{21}{5} & \frac{8}{5} \\ \frac{8}{5} & \frac{9}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Alternatif penyelesaian.

- a. Untuk titik-titik invarian, berlaku $x = x'$ dan $y = y'$. Akibatnya $x = 1 - 2y$ dan $y = 2x - 3$. Dengan substitusi diperoleh

$$\begin{aligned} x &= 1 - 2(2x - 3) \\ x &= 1 - 4x + 6 \\ 5x &= 7 \\ x &= \frac{7}{5} \end{aligned}$$

Jika disubstitusikan ke $y = 2x - 3$ diperoleh $y = 2 \cdot \frac{7}{5} - 3 = -\frac{1}{5}$.

Jadi titik invarian transformasi di atas adalah $(\frac{7}{5}, -\frac{1}{5})$.

- b. Untuk titik invarian $x' = x, y' = y$.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{21}{5} & \frac{8}{5} \\ \frac{8}{5} & \frac{9}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ x &= \frac{21}{5}x + \frac{8}{5}y \quad \text{dan} \quad y = \frac{8}{5}x + \frac{9}{5}y \\ 5x &= 21x + 8y & 5y &= 8x + 9y \\ -8y &= 16x & -4y &= 8x \\ y &= -2x & y &= -2x \end{aligned}$$

Semua titik di garis $y = -2x$ adalah invarian.

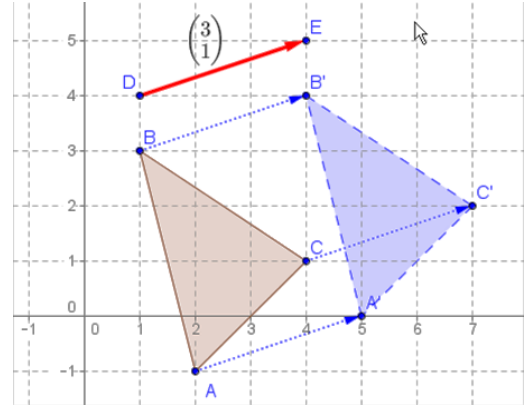
Transformasi Isometri

a. Translasi

Translasi merupakan transformasi yang memindahkan titik-titik pada bidang dengan arah yang sama dan jarak yang sama pula.

Jika $\Delta A'B'C'$ merupakan bayangan dari ΔABC pada suatu translasi, maka $AA' = BB' = CC'$. Pada suatu translasi, diperlukan ruas garis berarah yang dinamakan sebagai vektor translasi. Pada sistem koordinat Kartesius, gerakan mendatar sejauh a , dan vertikal sejauh b dinyatakan dengan vektor $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Sebagai ilustrasi pada gambar di atas, vektor translasi $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ mentranslasikan obyek dengan arah pergeseran 3 satuan ke kanan dan 1 satuan ke atas. Pada vektor translasi pergeseran vertikal naik atau horisontal ke kanan dinyatakan dengan bilangan positif, sedangkan gerakan vertikal turun atau horisontal kiri dinyatakan dengan bilangan negatif.



Translasi dengan vektor translasi $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ dapat dipandang sebagai suatu fungsi $f(A) = A'$ dengan

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Catatan: Notasi yang dapat digunakan antara lain sebagai berikut.

$T: (x, y) \mapsto (x + a, y + b)$	$T(x, y) = (x + a, y + b)$
$T_{\vec{v}}(x, y) = (x + a, y + b)$	$(x, y) \xrightarrow{T = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}} (x + a, y + b)$

Secara umum, jika titik " P " (x, y) ditranslasikan oleh $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ke " P' " (x', y') , maka diperoleh hubungan

$$x' = x + a$$

$$y' = y + b$$

Dalam bentuk matriks, persamaan di atas dapat dinyatakan sebagai

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Contoh 1.

Tentukan bayangan titik-titik $A(2, 1)$, $B(4, -2)$, dan $C(-1, 2)$ oleh translasi dengan vektor translasi $T = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Alternatif penyelesaian.

Misal bayangan titik A , B , dan C adalah A' , B' dan C' .

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x'_A \\ y'_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x'_B \\ y'_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x'_C \\ y'_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Jadi bayangan A , B , dan C oleh translasi dengan vektor T adalah $A'(0, 4)$, $B'(2, 1)$ dan $C'(-3, 5)$.

Contoh 2.

Tentukan vektor translasi $T = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ yang memetakan titik $R(3, -1)$ ke titik $R'(-2, 4)$.

Alternatif penyelesaian

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 - 3 \\ 4 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Jadi vektor translasi yang memetakan $R(3, -1)$ ke $R'(-2, 4)$ adalah $T = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Contoh 3.

Tentukan persamaan bayangan kurva $y = x^2 + x - 1$ oleh translasi $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Alternatif penyelesaian (bantuan):

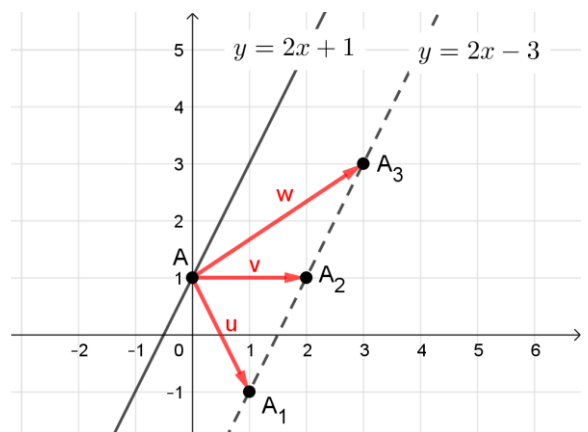
Misalkan $T(x, y)$ pada kurva $y = x^2 + x - 1$, titik T akan dipetakan ke $T'(x', y')$ dengan persamaan $x' = x + 1$ dan $y' = y + (-2)$. Bentuk dapat diubah menjadi $x = x' - 1$ dan $y = y' + 2$. Substitusikan kedua persamaan ini ke $y = x^2 + x - 1$, diperoleh bentuk $y' + 2 = (x' - 1)^2 + (x' - 1) - 1$. Jika disederhanakan diperoleh $y' = x'^2 - x' - 3$. Karena (x', y') tempat kedudukan titik-titik pada bayangan, maka persamaan bayangan yang dimaksud adalah $y = x^2 - x - 3$.

Contoh 4.

Tentukan vektor translasi yang memetakan garis dengan persamaan $y = 2x + 1$ ke garis $y = 2x - 3$.

Alternatif penyelesaian.

Sebelum menentukan penyelesaian permasalahan di atas, perhatikan ilustrasi berikut.



Karena translasi memiliki sifat tidak merubah arah garis, maka vektor $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ dan masih ada tak hingga vektor lain yang bisa memetakan garis $y = 2x + 1$ ke $y = 2x - 3$. Oleh karena itu, penyelesaian harus dalam bentuk umum.

Misalkan vektor translasi $T = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ memetakan $y = 2x + 1$ ke $y = 2x - 3$.

Ambil titik $T(x, y)$ di garis $y = 2x + 1$, maka $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Akibatnya $x' = x + a$ dan $y' = y + b$, atau $x = x' - a$ dan $y = y' - b$. Jika disubstitusikan ke $y = 2x + 1$ diperoleh

$$y' - b = 2(x' - a) + 1$$

$$y' - b = 2x' - 2a + 1$$

$$y' = 2x' + b - 2a + 1$$

Persamaan ini tidak lain adalah garis $y = 2x - 3$, sehingga

$$b - 2a + 1 = -3$$

$$b = 2a - 4$$

Jadi vektor yang mentranslasikan $y = 2x + 1$ ke $y = 2x - 3$ adalah $T = \begin{pmatrix} a \\ 2a - 4 \end{pmatrix}$, dengan a bilangan real.

b. Rotasi (Perputaran)

a) Rotasi dengan pusat $O(0, 0)$

Rotasi dengan pusat $O(0, 0)$, dengan sudut rotasi α dinotasikan sebagai $R_{O, \alpha}$.

Rotasi dengan pusat P sudut rotasi α merupakan suatu transformasi yang memenuhi:

- i. Untuk setiap titik $A \neq P$, maka $PA = PA'$ dan $\angle APA' = \alpha$.
- ii. Bayangan pusat rotasi P adalah P sendiri.

Misalkan sudut antara sumbu- x positif dan OA adalah θ , maka pada titik A berlaku hubungan

$$x = OA \cdot \cos \theta \text{ dan}$$

$$y = OA \cdot \sin \theta \text{ *)}$$

Pada rotasi dengan pusat $O(0, 0)$ dan sudut rotasi α bayangan titik A adalah $A'(x', y')$ dengan $x' = OA \cdot \cos(\theta + \alpha)$ dan $y' = OA \cdot \sin(\theta + \alpha)$. Akibatnya,

$$x' = OA \cdot \cos \theta \cos \alpha - OA \cdot \sin \theta \sin \alpha$$

$$y' = OA \cdot \sin \theta \cos \alpha + OA \cdot \cos \theta \sin \alpha$$

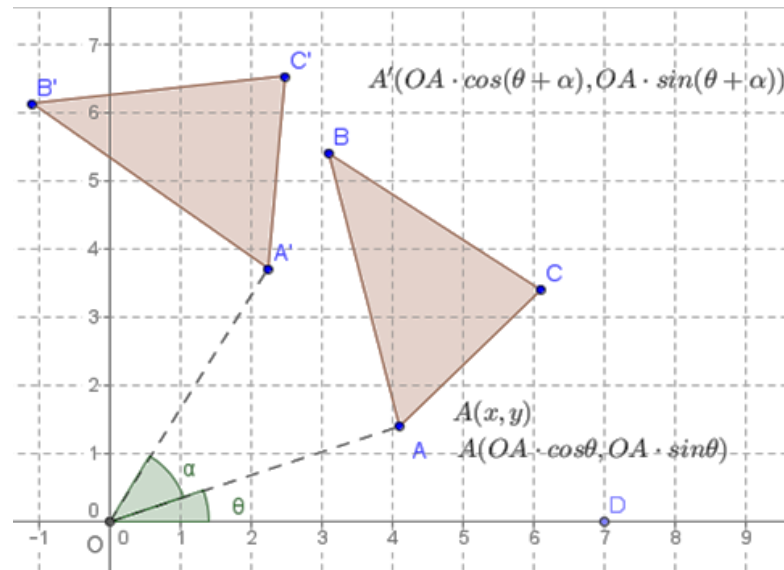
Dengan mensubstitusikan *) ke persamaan di atas, diperoleh

$$x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha$$

$$y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha$$

Dalam bentuk matriks, dapat dituliskan sebagai

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



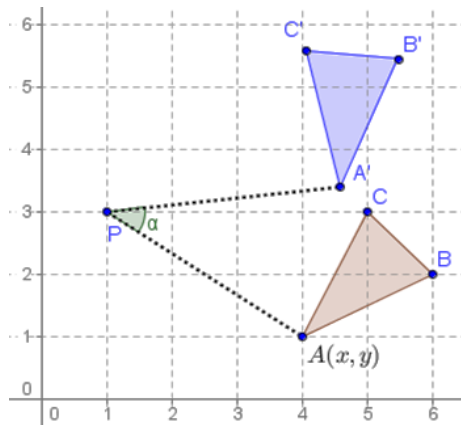
Rotasi berpusat di $(0,0)$

b) Rotasi dengan pusat $P(a,b)$

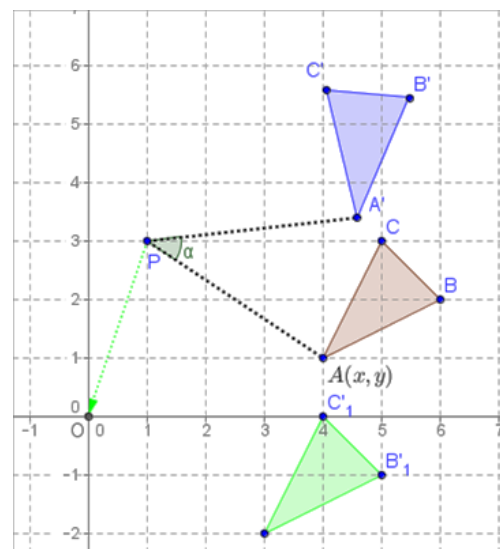
Ilustrasi pada Gambar 45 berikut merupakan rotasi $R_{P,\alpha}$. Perhatikan bahwa langkah-langkah pada Gambar 46, Gambar 47, dan Gambar 48 berikut akan menghasilkan bayangan yang sama dengan Gambar 45.

- 1) Translasikan obyek dengan vektor translasi $PO = \begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix}$ sehingga diperoleh bayangan

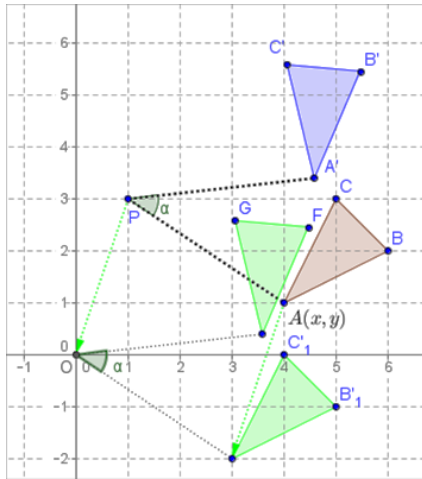
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix}$$



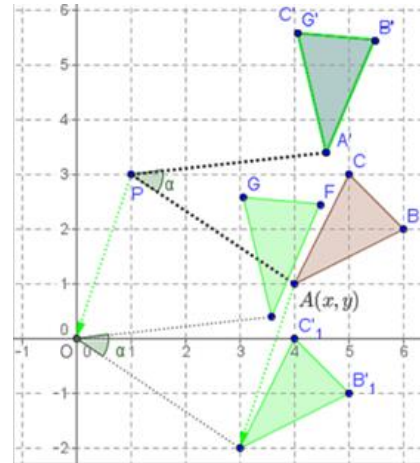
Rotasi
Berpusat di P



Translasi ke O



Rotasi $R_{O,\alpha}$



Translasi kembali ke P

2) Rotasikan bayangan di atas dengan pusat O, sudut rotasi α .

Diperoleh bayangan

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix}.$$

3) Translasikan bayangan di atas dengan vektor translasi OP .

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Contoh 1:

Tentukan rotasi titik $A(3,1)$ dengan pusat $P(-1, 2)$ dan sudut rotasi 30° .

Alternatif penyelesaian:

i. Translasikan obyek dengan vektor translasi $PO = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ sehingga diperoleh bayangan $A_1(x_1, y_1)$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + 1 \\ 1 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ii. Rotasikan A_1 terhadap pusat $O(0,0)$ dengan sudut rotasi 30° . Diperoleh bayangan $A_2(x_2, y_2)$.

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot (-1) \\ \frac{1}{2} \cdot 4 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4\sqrt{3} + 1}{2} \\ \frac{4 - \sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

iii. Translasikan bayangan di atas dengan vektor translasi OP .

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4\sqrt{3}+1}{2} \\ \frac{4-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4\sqrt{3}-1}{2} \\ \frac{8-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2,9641 \\ 3,134 \end{pmatrix}$$

Jadi bayangan titik $A(3,1)$ oleh rotasi berpusat di $P(-1,2)$ dan sudut rotasi 30° adalah $A' \left(\frac{4\sqrt{3}-1}{2}, \frac{8-\sqrt{3}}{2} \right) \approx A'(2,96, 3,13)$.

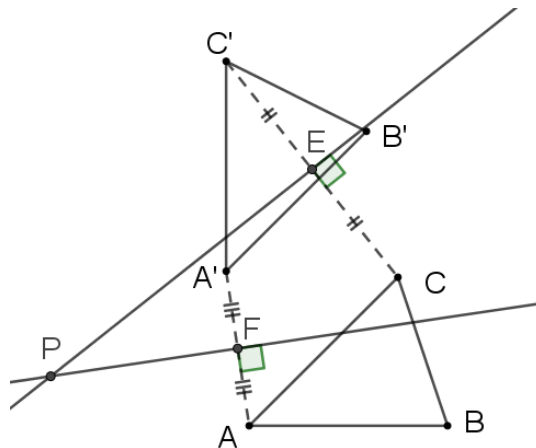
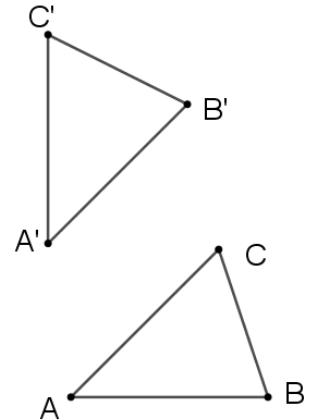
Contoh 2.

Diberikan segitiga ABC dan bayangan hasil rotasi. Tentukan pusat rotasi,

Alternatif penyelesaian.

Dalam suatu rotasi, jika A' adalah bayangan rotasi dari A dengan pusat P , maka berlaku $A'P = AP$. Dengan demikian APA' membentuk segitiga sama kaki, yang salah satu sifatnya adalah P terletak pada garis bagi tegak lurus AA' . Hal yang sama berlaku untuk titik-titik sudut yang lain. Berdasarkan sifat ini, maka untuk menentukan pusat rotasi:

- Buat ruas garis AA' dan BB' .
- Buat garis bagi tegak lurus AA' dan BB' .
- Tentukan titik potong kedua garis (titik P). Titik ini merupakan pusat rotasi.



Contoh 3.

Tentukan persamaan bayangan garis $y = 2x + 1$ oleh rotasi 45° dengan pusat $(0,0)$.

Alternatif penyelesaian:

Misalkan titik $T(x, y)$ titik pada garis $y = 2x + 1$.

Titik ini akan dipetakan ke $T'(x', y')$ dengan persamaan $x' = x \cos 45^\circ - y \sin 45^\circ$ dan $y' = x \sin 45^\circ + y \cos 45^\circ$. Jika disederhanakan diperoleh

$$x' = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot x - \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot y \text{ dan } y' = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot x + \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot y.$$

Dengan cara eliminasi atau substitusi diperoleh $x = \frac{1}{2}\sqrt{2(x' + y')}$ dan

$y = -\frac{1}{2}\sqrt{2(x' - y')}$. Selanjutnya kedua persamaan ini disubstitusikan ke $y = 2x + 1$, diperoleh $y' = -3x' - \sqrt{2}$. Karena (x', y') bayangan titik $T(x, y)$, maka persamaan bayangan yang dimaksud adalah $y = -3x - \sqrt{2}$.

c. Refleksi (Pencerminan)

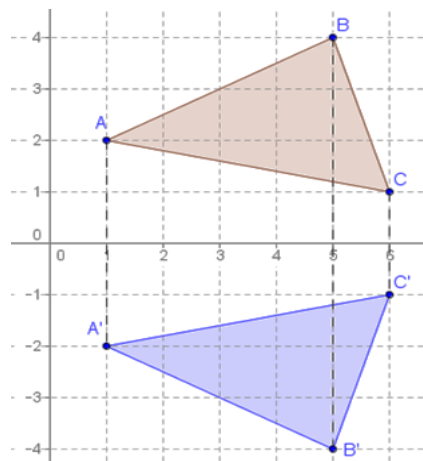
Refleksi terhadap garis k merupakan transformasi pada bidang sedemikian sehingga:

- i. Jika titik P tidak pada k , maka bayangan dari P , yaitu P' dengan k sebagai garis bagi tegak lurus $\overline{PP'}$.
- ii. Jika titik P pada k , maka bayangan P adalah dirinya sendiri.



Refleksi (Foto: Eko W. <http://bulbr.wordpress.com/>)

a. Refleksi terhadap sumbu- x



Refleksi terhadap Sumbu- x

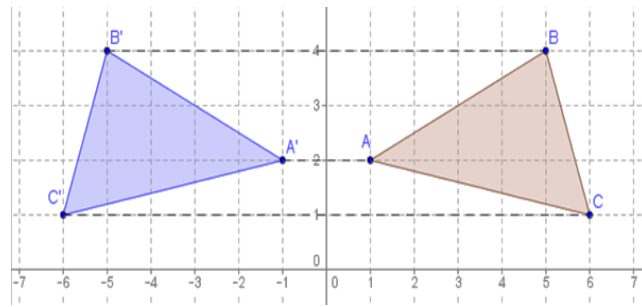
Misalkan (x', y') merupakan bayangan dari (x, y) , dari gambar di atas didapat hubungan: $x' = x$ dan $y' = -y$, sehingga:

$$\begin{aligned} x' = x &\Leftrightarrow x' = 1 \cdot x + 0 \cdot y \\ y' = -y &\Leftrightarrow y' = 0 \cdot x - 1 \cdot y \end{aligned}$$

Jika diubah ke bentuk persamaan matriks, diperoleh bentuk: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Matriks

$M_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ dinamakan sebagai matriks pencerminan terhadap sumbu- x .

b. Refleksi terhadap sumbu- y



Refleksi terhadap sumbu-y

Misalkan (x', y') merupakan bayangan dari (x, y) , dari gambar di atas didapat hubungan: $x' = -x$ dan $y' = y$, sehingga

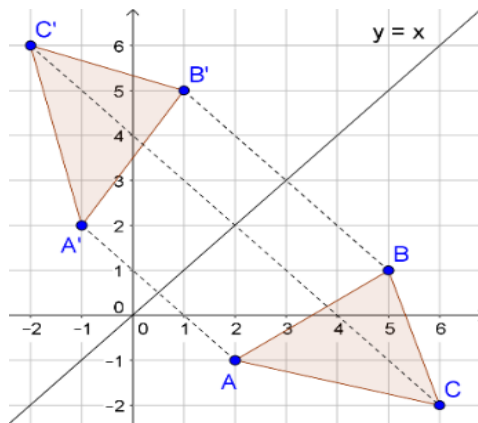
$$\begin{aligned} x' = -x &\Leftrightarrow x = -1 \cdot x + 0 \cdot y \\ y' = y &\Leftrightarrow y' = 0 \cdot x + 1 \cdot y. \end{aligned}$$

Dalam bentuk persamaan matriks persamaan di atas dapat dinyatakan sebagai:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Selanjutnya, $M_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ disebut matriks pencerminan terhadap sumbu-y.

c. Refleksi terhadap garis $y = x$



Refleksi terhadap $y = x$

Misalkan (x', y') merupakan bayangan dari (x, y) , dari gambar di atas didapat hubungan: $x' = y$ dan $y' = x$, sehingga

$$\begin{aligned} x' = y &\Leftrightarrow x = 0 \cdot x + 1 \cdot y \\ y' = x &\Leftrightarrow y = 1 \cdot x + 0 \cdot y. \end{aligned}$$

Dalam bentuk persamaan matriks persamaan di atas dapat dinyatakan sebagai

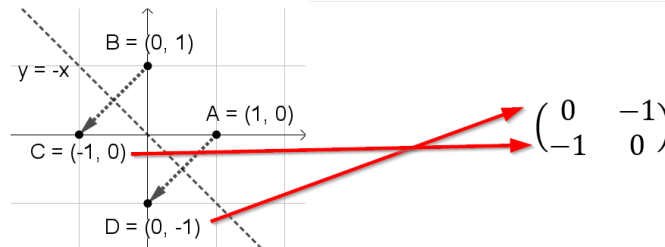
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Matriks $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ merupakan matriks pencerminan terhadap garis $y = x$.

Catatan: Trik untuk mengingat matriks transformasi.

Untuk transformasi-transformasi yang sederhana, pencerminan terhadap sumbu-x dan sumbu-y, garis $y = x$, rotasi berpusat di O sudut rotasi 90° , 180° , 270° , ada trik untuk mengingat matriks transformasinya.

Perhatikan gambar berikut.



Misal kita ingin mengingat matriks pencerminan terhadap garis $y = -x$. Alurnya sebagai berikut.

$$\begin{aligned} A' &= D(0, -1) \\ B' &= C(-1, 0) \end{aligned} ; \text{ susun bayangan ini menjadi sebuah matriks } \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Perhatikan bahwa koordinat bayangan titik A menjadi elemen baris pertama, sedangkan koordinat bayangan titik B menjadi elemen baris kedua.

Sekarang dicoba dicari matriks untuk pencerminan terhadap garis $y = x$, maka:

$$\begin{aligned} A' &= B(0, 1) \\ B' &= A(1, 0) \end{aligned} ; \text{ susun bayangan ini menjadi sebuah matriks } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dengan cara yang sama, matriks untuk rotasi berpusat di O , sudut rotasi 90° diperoleh dengan

$$\begin{aligned} A' &= B(0, 1) \\ B' &= C(-1, 0) \end{aligned} ; \text{ susun bayangan ini menjadi sebuah matriks } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cobalah mencari matriks transformasi untuk transformasi sederhana yang lain.

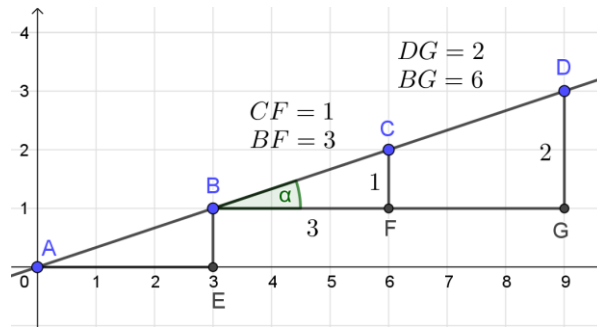
d. Refleksi terhadap garis $y = mx$

Sebelum mempelajari refleksi terhadap garis $y = mx$, ada baiknya kita mengingat kembali konsep gradien suatu garis dan kaitannya terhadap perbandingan trigonometri.

Perhatikan grafik garis dengan persamaan $y = -3x$. Untuk melukis grafik tersebut, dapat dicari beberapa koordinat titik yang dilalui, kemudian menghubungkannya.

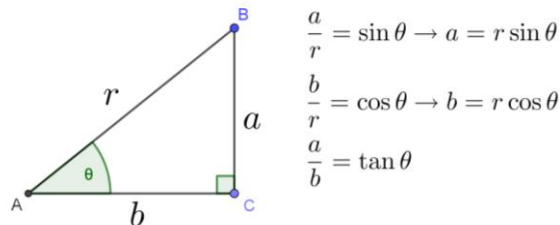
x	0	3	6	9	...
$y = \frac{1}{3}x$	0	1	2	...	...
Koordinat	$A(0,0)$	$B(1,3)$	$C(2,6)$	$D(..., ...)$	...

Catatan: untuk keperluan praktis, karena grafik $y = mx + n$ membentuk garis lurus, maka untuk melukisnya cukup dicari 2 titik berbeda.



Untuk setiap dua titik berbeda (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) selalu diperoleh nilai $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ yang bernilai tetap. Nilai ini dinamakan sebagai gradien. Sebagai contoh, pada garis $y = \frac{1}{3}x$, $\frac{y_D - y_B}{x_D - x_B} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1}{3}$, maka dikatakan garis $y = \frac{1}{3}x$ memiliki gradien $\frac{1}{3}$.

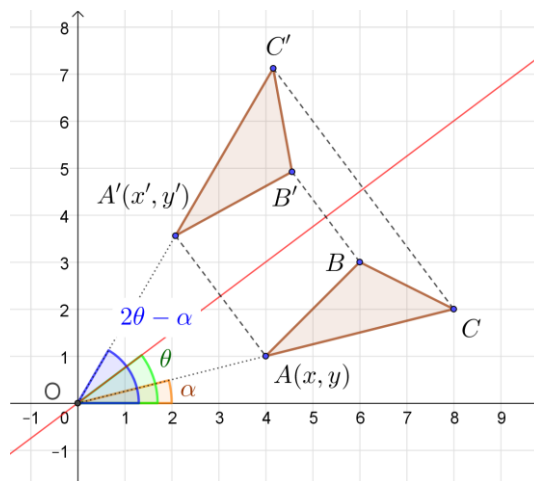
Dalam kaitannya dengan fungsi trigonometri, jika α adalah sudut antara garis dengan garis horizontal, maka $m = \tan \alpha$.



Perhatikan gambar di bawah, titik $A(x, y)$ direfleksikan terhadap garis $y = mx$, dengan $m = \tan \alpha$. Misalkan sudut yang dibentuk oleh OA dengan sumbu- x positif adalah α , maka

$$x = OA \cdot \cos \alpha \text{ dan } y = OA \cdot \sin \alpha \text{ **}).$$

Sudut yang dibentuk oleh sumbu- x positif dengan OA' adalah $2\theta - \alpha$ (mengapa?).



Refleksi terhadap $y = mx$

Misalkan bayangan A adalah $A'(x', y')$, maka

$$x' = OA \cdot \cos(2\theta - \alpha) = OA \cos 2\theta \cos \alpha + OA \sin 2\theta \sin \alpha$$

$$y' = OA \cdot \sin(2\theta - \alpha) = OA \sin 2\theta \cos \alpha - OA \cos 2\theta \sin \alpha.$$

Dengan mensubstitusikan **) ke kedua persamaan di atas, diperoleh

$$x' = x \cos 2\theta + y \sin 2\theta$$

$$y' = x \sin 2\theta - y \cos 2\theta.$$

Dalam bentuk matriks, dapat dituliskan sebagai

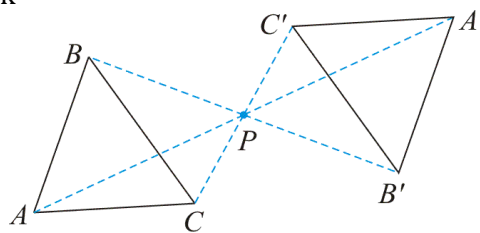
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

e. Refleksi terhadap garis $y = mx + c$

Serupa dengan rotasi dengan pusat (a, b) , refleksi terhadap garis $y = mx + c$ dapat dilakukan dengan sedikit manipulasi.

- 1) Translasikan obyek dengan suatu vektor translasi $\bar{v}$ dimana $\bar{v}$ suatu vektor yang mentranslasikan $y = mx + c$ berimpit dengan garis $y = mx$. Sebagai latihan, silakan dicari vektor $\bar{v}$.
- 2) Refleksikan bayangan yang terjadi terhadap garis $y = mx$.
- 3) Translasikan bayangan yang terjadi dengan vektor translasi $-\bar{v}$.

f. Refleksi terhadap titik

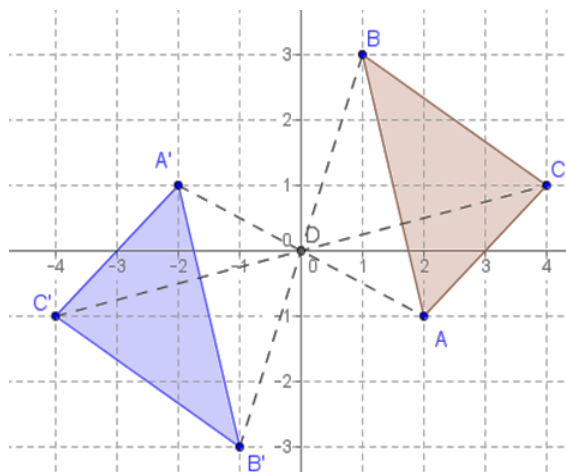


Refleksi Terhadap Titik

Pada gambar di atas, diberikan ilustrasi jenis lain dari pencerminan, yaitu pencerminan terhadap sebuah titik. Segitiga $A'B'C'$ merupakan bayangan segitiga ABC pada pencerminan terhadap titik P . Perhatikan bahwa P merupakan titik tengah ruas garis AA' , BB' dan CC' .

Refleksi terhadap titik P merupakan transformasi pada bidang yang memenuhi:

- i. Jika titik A tidak berimpit dengan P , maka bayangan A adalah A' sehingga P merupakan titik tengah $\overline{AA'}$.
- ii. Titik P merupakan bayangan dari dirinya sendiri.



Refleksi Terhadap Titik O

Misalkan (x', y') merupakan bayangan dari (x, y) , dari ilustrasi didapat hubungan: $x' = -x$ dan $y' = -y$, sehingga

$$\begin{aligned}x' = -x &\Leftrightarrow x = -1 \cdot x + 0 \cdot y \\y' = -y &\Leftrightarrow y = 0 \cdot x - 1 \cdot y\end{aligned}$$

Dalam bentuk persamaan matriks persamaan di atas dapat dinyatakan sebagai $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Matriks $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ adalah matriks yang bersesuaian dengan pencerminan terhadap titik $(0, 0)$.

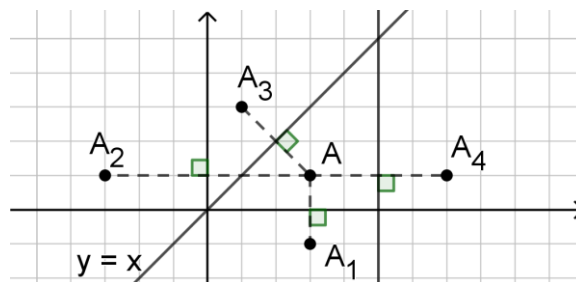
Contoh 1:

Tentukan bayangan titik $A(3, 1)$ oleh pencerminan terhadap

- Sumbu- X
- Sumbu- Y
- Garis $x = 5$
- Garis $y = x$
- Garis $y = 2x + 1$
- Titik $P(-1, 2)$

Alternatif penyelesaian

Untuk permasalahan yang sederhana, selain menggunakan matriks, anda bisa menyelesaikan langsung melalui sketsa pada koordinat kartesius. Pada gambar di bawah, A_1 , A_2 , A_3 , dan A_4 berturut-turut merupakan bayangan pencerminan titik A terhadap sumbu- X , sumbu- Y , garis $x = 5$, dan garis $y = x$. Hal yang sama juga berlaku untuk pencerminan terhadap titik $P(-1, 2)$.

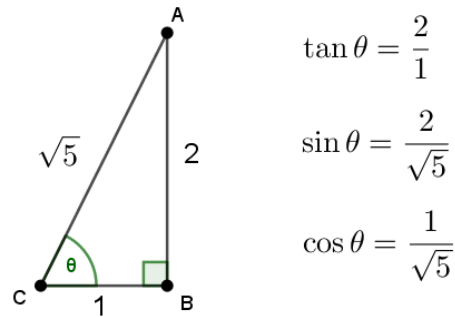


Untuk pertanyaan butir e tentang pencerminan terhadap garis $y = 2x + 1$, langkah-langkahnya adalah sebagai berikut.

- Translasikan garis sehingga melalui titik $O(0,0)$. Terdapat tak hingga vektor yang dapat mentranslasikan garis $y = 2x + 1$ menjadi $y = 2x$. Salah satu yang sederhana adalah vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Ambil vektor translasi $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Sehingga diperoleh garis $y = 2x$.
- Titik $A(3,1)$ juga harus ditranslasikan dengan vektor translasi yang sama untuk mendapatkan $A_1(x_1, y_1)$.

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

- Selanjutnya $A_1(3, 0)$ dicerminkan terhadap garis $y = 2x$ untuk mendapatkan $A_2(x_2, y_2)$. Matriks refleksi terhadap garis $y = 2x$ adalah $\begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$ dengan $\tan \theta = 2$.



Akibatnya

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{4}{5}$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = -\frac{3}{5}$$

Sehingga

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

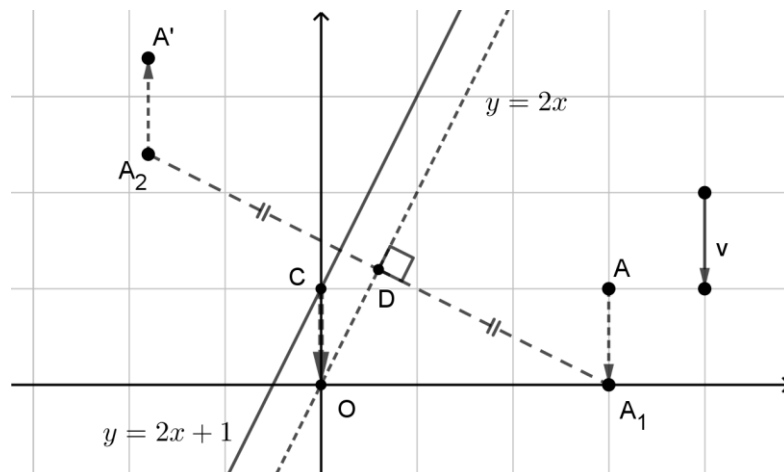
$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{9}{5} \\ -\frac{12}{5} \end{pmatrix}$$

- iv. Terakhir, titik $A_2\left(-\frac{9}{5}, \frac{12}{5}\right)$ ditranslasikan dengan vektor $-\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ untuk mendapatkan titik $A'(x', y')$

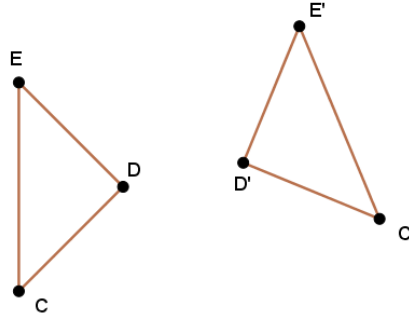
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{5} \\ \frac{12}{5} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{5} \\ \frac{17}{5} \end{pmatrix} = (-1,8)$$

Jadi bayangan $A(3,1)$ oleh pencerminan terhadap garis $y = 2x + 1$ adalah $A'\left(-\frac{9}{5}, \frac{17}{5}\right)$. Ilustrasi dari proses di atas dapat dilihat di gambar berikut.



Contoh 2:

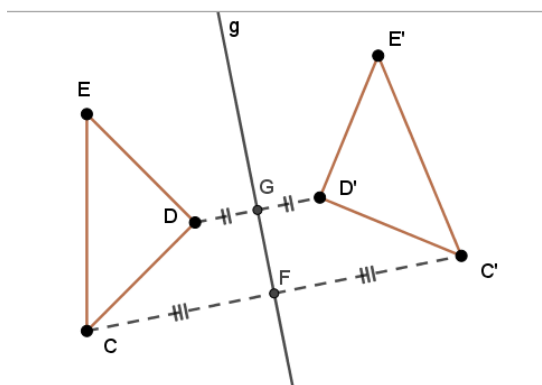
Diberikan segitiga ABC beserta dengan hasil pencerminannya terhadap sebuah garis. Tentukan garis cermin tersebut.



Alternatif penyelesaian.

Pencerminan memiliki sifat, jika A' merupakan cermin dari A terhadap garis g , maka $AA' \perp g$ dan g membagi dua sama panjang AA' .

Dengan demikian salah satu cara untuk mencari garis refleksi adalah buat ruas garis CC' dan DD' , kemudian tentukan titik tengahnya dan tarik garis melalui kedua titik tengah tersebut.



Contoh 3:

Membuktikan refleksi terhadap garis $y = x$ adalah suatu isometri.

Alternatif penyelesaian.

Ambil sebarang titik $S(x_S, y_S)$, $T(x_T, y_T)$. Cerminkan kedua titik ini terhadap $y = x$ sehingga diperoleh bayangannya yaitu $S'(x'_S, y'_S)$ dan $T'(x'_T, y'_T)$. Akan ditunjukkan bahwa $ST = S'T'$.

Dengan menggunakan teorema Pythagoras, jarak S ke T adalah

$$ST = \sqrt{(x_S - x_T)^2 + (y_S - y_T)^2}$$

Selanjutnya dicari koordinat S' dan T' .

$$\begin{pmatrix} x'_S \\ y'_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_S \\ y_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_S \\ x_S \end{pmatrix}$$

Sehingga S' memiliki koordinat (y_S, x_S) . Dengan cara yang sama maka koordinat T' adalah (y_T, x_T) .

Dengan teorema Pythagoras

$$\begin{aligned} S'T' &= \sqrt{(x'_S - x'_T)^2 + (y'_S - y'_T)^2} = \sqrt{(y_S - y_T)^2 + (x_S - x_T)^2} \\ &= \sqrt{(x_S - x_T)^2 + (y_S - y_T)^2} = ST \end{aligned}$$

Dari hasil di atas maka diperoleh $S'T' = ST$ sehingga pencerminan terhadap garis $y = x$ di atas merupakan isometri.

Contoh 4:

Tentukan persamaan bayangan kurva $y = x^2$ yang direfleksikan terhadap garis $y = \sqrt{3}x + 1$.

Alternatif Penyelesaian (bantuan):

Langkah 1: Garis dan parabola ditranslasikan dengan vektor translasi $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ agar garis melalui $(0, 0)$. Persamaan garis dan parabola hasil translasi berturut-turut $y = \sqrt{3}x \dots (1)$ dan $y + 1 = x^2 \dots (2)$.

Langkah 2: Parabola (2) direfleksikan terhadap garis (1) dengan $m = \tan \theta = \sqrt{3}$, $\theta = 60^\circ$. Misal (x', y') bayangan titik (x, y) pada parabola (2), maka dipenuhi $x' = x \cos 2\theta + y \sin 2\theta$ dan $y' = x \sin 2\theta - y \cos 2\theta$. Dengan substitusi nilai θ diperoleh $x = -\frac{x'}{2} + \frac{y'\sqrt{3}}{2} \dots (4)$ dan $y' = \frac{x\sqrt{3}}{2} + \frac{y}{2} \dots (5)$. Dari kedua persamaan terakhir diperoleh

$$x = -\frac{x'}{2} + \frac{\sqrt{3}y'}{2} \text{ dan } y = \frac{y'}{2} + \frac{\sqrt{3}x'}{2}$$

Substitusikan hasil terakhir ke persamaan 2, diperoleh

$$\frac{1}{2}y' + \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot x' + 1 = \frac{1}{4} \cdot x'^2 - \frac{1}{2} \cdot x'\sqrt{3} \cdot y' + \frac{3}{4} \cdot y'^2.$$

Dari sini diperoleh persamaan hasil refleksi terhadap garis (1)

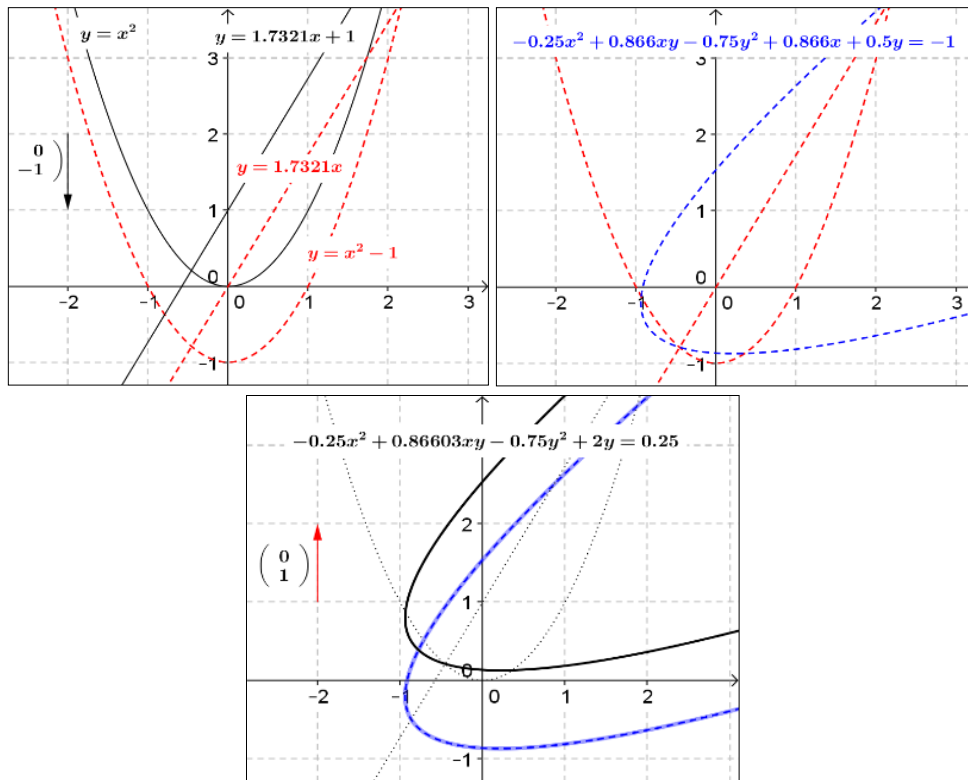
$$\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot x + 1 = \frac{1}{4} \cdot x^2 - \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot xy + \frac{3}{4}y^2.$$

Langkah 3: translasikan kembali dengan vektor translasi $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, diperoleh

$$\frac{1}{2}(y - 1) + \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot x + 1 = \frac{1}{4} \cdot x^2 - \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot x(y - 1) + \frac{3}{4}((y - 1))^2.$$

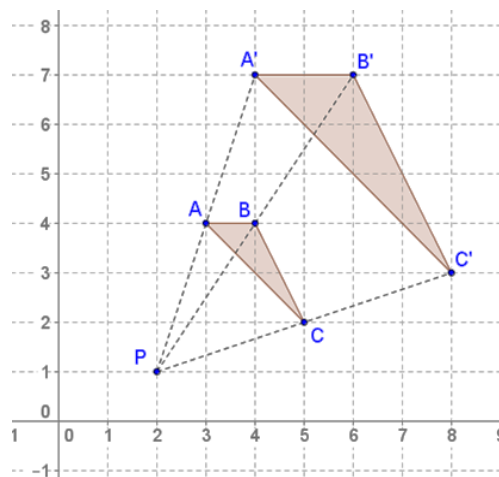
Jika disederhanakan, diperoleh hasil refleksi $y = x^2$ terhadap garis $y = \sqrt{3}x + 1$ adalah

$$\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot xy + \frac{3}{4}y^2 - 2y + \frac{1}{4} = 0.$$



Transformasi Non Isometri

Terdapat beberapa bentuk transformasi non isometri. Pada modul ini hanya akan dibahas salah satu jenis yaitu dilatasi (dalam buku lain menggunakan istilah **dilasi**).



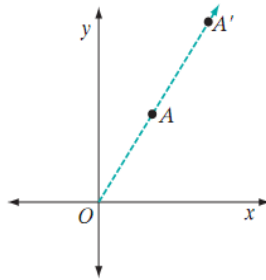
Dilatasi

Segitiga $A'B'C'$ di atas merupakan peta dari segitiga ABC pada dilatasi dengan pusat dilatasi titik $P(2, 1)$ dan faktor dilatasi 2. Pada gambar di samping, kedua segitiga sebangun dan berlaku $\frac{PA'}{PA} = \frac{PB'}{PB} = \frac{PC'}{PC} = 2$. Nilai ini dinamakan sebagai faktor dilatasi, sedangkan P disebut pusat dilatasi.

Definisi: Dilatasi dengan faktor dilatasi k dan pusat P , merupakan transformasi pada bidang sedemikian sehingga

- i. Bayangan titik P , pusat dilatasi, adalah P sendiri.
- ii. Jika k positif dan bayangan A adalah A' , maka $\overrightarrow{OA}$ dan $\overrightarrow{OA'}$ terletak pada sinar yang sama sehingga $OA' = k \cdot OA$.
- iii. Jika k negatif, bayangan A adalah A' , maka $\overrightarrow{OA}$ dan $\overrightarrow{OA'}$ merupakan dua sinar yang bertolak belakang, dan $OA' = -k \cdot OA$.

a. Dilatasi dengan pusat dilatasi titik $O(0,0)$



Dilatasi dengan pusat O

Dilatasi dengan pusat O , faktor dilatasi k , maka

$$x' = kx \text{ dan } y' = ky.$$

Dalam bentuk matriks,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot x + 0 \cdot y \\ 0 \cdot x + k \cdot y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

b. Dilatasi dengan pusat $P(a,b)$, faktor dilatasi k

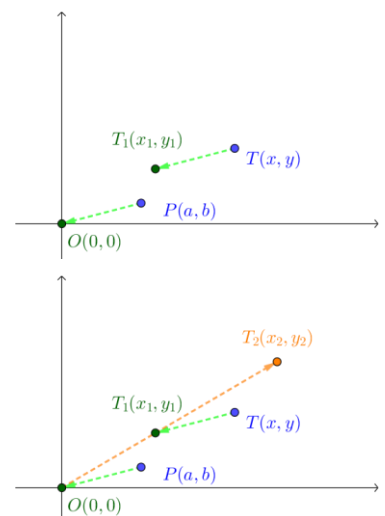
Untuk menentukan persamaan matriks dilatasi yang pusatnya bukan O langkah-langkah yang diperlukan adalah:

- 1) Translasikan obyek dengan vektor translasi $\begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix}$ sehingga peta pusat dilatasi berimpit di titik O dan titik $T(x, y)$ akan terpetakan ke $T_1(x_1, y_1)$ dengan

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix}.$$

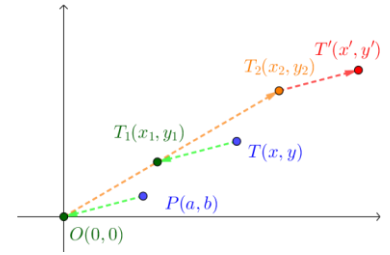
- 2) Dilatasikan $T_1(x_1, y_1)$ dengan pusat O faktor dilatasi k , diperoleh bayangan $T_2(x_2, y_2)$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix}.$$



- 3) Translasikan kembali obyek $T_2(x_2, y_2)$ dengan vektor translasi $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, sehingga diperoleh bayangan $T'(x', y')$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$



Dengan mensubstitusi langkah 2 dan 3, diperoleh bayangan titik $T(x, y)$ adalah $T'(x', y')$ yang memenuhi

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Cermati media virtual di tautan <https://www.geogebra.org/m/hqetksy6> atau QR code di samping.



Contoh 1.

Segitiga ABC dengan $A(1, 0)$, $B(-2, -1)$ dan $C(-1, 3)$ didilatasi dengan pusat $P(-3, 1)$ dan faktor dilatasi 2. Tentukan bayangan segitiga ABC dan buatlah sketsanya dalam diagram kartesius.

Alternatif penyelesaian.

Untuk menghemat pengerjaan, titik-titik A , B , dan C dan bayangannya dapat disajikan dalam satu matriks.

- i. Translasikan dengan vektor translasi $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ untuk memindahkan pusat dilatasi ke $O(0, 0)$. Misal $A_1(x_{A1}, y_{A1})$, $B_1(x_{B1}, y_{B1})$, $C_1(x_{C1}, y_{C1})$ adalah bayangan A , B , C oleh translasi maka

$$\begin{pmatrix} x_{A1} & x_{B1} & x_{C1} \\ y_{A1} & y_{B1} & y_{C1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

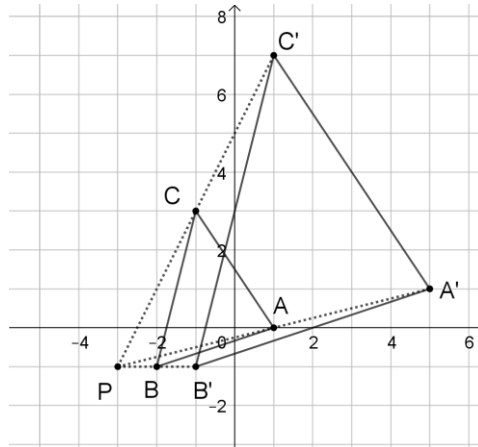
- ii. Dilatasikan A_1 , B_1 , C_1 dengan faktor dilatasi 2.

$$\begin{pmatrix} x_{A2} & x_{B2} & x_{C2} \\ y_{A2} & y_{B2} & y_{C2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

- iii. Translasikan kembali dengan vektor translasi $-\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} x'_A & x'_B & x'_C \\ y'_A & y'_B & y'_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Sketsa:



Contoh 2.

Kurva dengan $y = x^2 + x$ didilatasi dengan pusat $O(0,0)$ dan faktor dilatasi 2. Tentukan persamaan bayangan dan sketsanya.

Alternatif penyelesaian.

Ambil sebarang titik $T(x, y)$ pada kurva, dan misalkan $T'(x_1, y_1)$ merupakan bayangannya.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

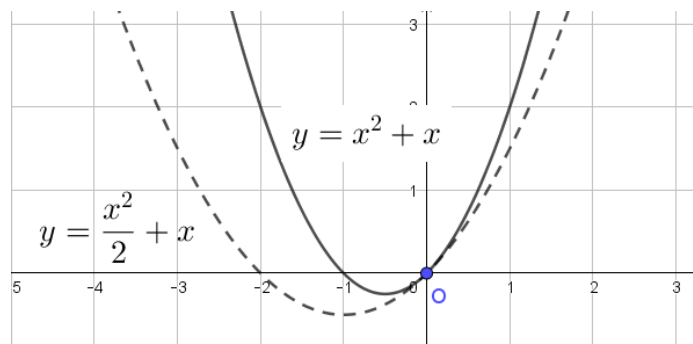
Dari kesamaan di atas, diperoleh

$$x_1 = 2x \rightarrow x = \frac{x_1}{2} \quad \text{dan} \quad y_1 = 2y \rightarrow y = \frac{y_1}{2}$$

Hasil di atas disubstitusikan ke $y = x^2 + x$, diperoleh hasil

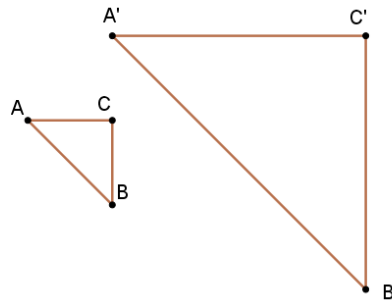
$$\begin{aligned} \frac{y_1}{2} &= \left(\frac{x_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_1}{2}\right) \\ \frac{y_1}{2} &= \frac{x_1^2}{4} + \frac{x_1}{2} \\ y_1 &= \frac{x_1^2}{2} + x_1 \end{aligned}$$

Dengan demikian persamaan hasil dilatasi $y = x^2 + x$ dengan pusat dilatasi O , faktor dilatasi 2 adalah $y = \frac{x^2}{2} + x$.



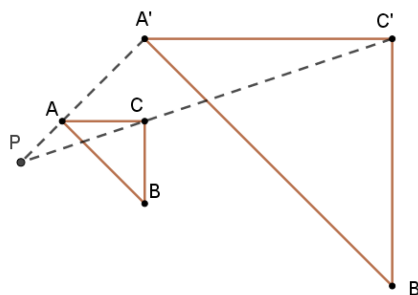
Contoh 3.

Diberikan segitiga ABC dan bayangannya oleh sebuah dilatasi yaitu segitiga $A'B'C'$. Tentukan pusat dilatasi bangun di bawah, kemudian jelaskan bagaimana proses mendapatkan faktor dilatasi.



Alternatif penyelesaian.

Untuk mendapatkan pusat dilatasi, cukup dibuat garis melalui AA' dan garis melalui CC' . Perpotongan kedua garis ini merupakan pusat dilatasi. Misal pusat ini dinamakan titik P , maka faktor dilatasi diperoleh dengan membandingkan PA' dengan PA . Faktor dilatasi = $\frac{PA'}{PA}$.



Contoh 4.

Pada dilatasi berpusat di $O(0, 0)$, faktor dilatasi 2 titik A dan B dipetakan ke titik A' dan B' . Buktikan bahwa jarak A' ke B' dua kali jarak A ke B .

Alternatif pembuktian.

Akan ditunjukkan bahwa $A'B' = 2 \cdot AB$.

Misalkan $A(x_A, y_A)$ dan $B(x_B, y_B)$ didilatasi dengan pusat $O(0, 0)$ faktor dilatasi 2. Akibatnya koordinat A' dan B' berturut-turut $(2x_A, 2y_A)$ dan $(2x_B, 2y_B)$.

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} \\ A'B' &= \sqrt{(x'_A - x'_B)^2 + (y'_A - y'_B)^2} = \sqrt{(2x_A - 2x_B)^2 + (2y_A - 2y_B)^2} \\ &= \sqrt{4 \cdot ((x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2)} = 2 \cdot \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} \\ A'B' &= 2 \cdot AB \quad (\text{terbukti}) \end{aligned}$$

Aktivitas:

Carilah beberapa permasalahan tentang geometri transformasi dan diskusikan dengan teman sejawat.

BAB IX TRIGONOMETRI

Sekilas Sejarah Trigonometri

Trigonometri berasal dari istilah Yunani "trigonom" (segitiga) dan "metron" (mengukur).

Beberapa peradaban kuno, khususnya Mesir, India, dan Tiongkok, telah memiliki beberapa pengetahuan geometri praktis, termasuk beberapa konsep yang merupakan awal dari trigonometri. Papirus Rhind (± 1800 SM) dari Mesir, memuat 84 masalah (aritmetika, aljabar, dan geometri). Lima masalah di antaranya berkaitan dengan istilah "seked". Dari analisis terhadap teks dan angka-angka yang menyertainya makna dari "seked" adalah perbandingan cotangen. Hipparchus (meninggal ± 127 SM) membuat tabel fungsi trigonometri, berbasis talibusur lingkaran) dengan interval $7^\circ 30'$. Tabel ini disempurnakan dengan interval $30'$ oleh Ptolemy (meninggal ± 145 M).

<https://www.britannica.com/science/trigonometry-table>

Tabel sinus ditemukan pertama kali dalam Aryabhatiya yang ditulis oleh Aryabhata I (± 475 -550) menggunakan istilah ardha-jya untuk setengah tali busur). Istilah ardha-jya sering disingkat menjadi jya atau jiva. Istilah ini dipertahankan oleh ilmuwan muslim yang menerjemahkan ke bahasa Arab. Di dunia Arab, istilah jiva ini sering dilafalkan sebagai jiba atau jaib yang artinya fold/melipat atau bay/teluk. Ketika terjemahan Arab ini diterjemahkan ke bahasa Latin, istilah jaib menjadi sinus, bahasa latin dari bay. Kata sinus pertama kali muncul di tulisan Gherardo of Cremona (± 1114 -1187).

Tabel tangen dan cotangen dikonstruksi sekitar 860M oleh Habash al-Hasib. Al-Battani (± 858 -929M) membuat aturan untuk menentukan sudut elevasi matahari terhadap horison berdasarkan panjang bayangan sebuah gnomon vertikal dengan tinggi h . (gnomon=bagian jam matahari untuk menghasilkan bayangan).

Dalam sejarah perkembangannya, sampai dengan abad ke-16 pembahasan utama trigonometri berkisar pada menentukan nilai unsur-unsur yang belum diketahui pada segitiga (atau bangun-bangun yang dapat dipotong menjadi segitiga-segitiga) jika unsur-unsur yang lain diberikan. Sebagai contoh, jika panjang dua sisi suatu segitiga dan sudut yang mengapit keduanya diketahui, maka sisi ketiga dan dua sudut yang lain dapat ditentukan.

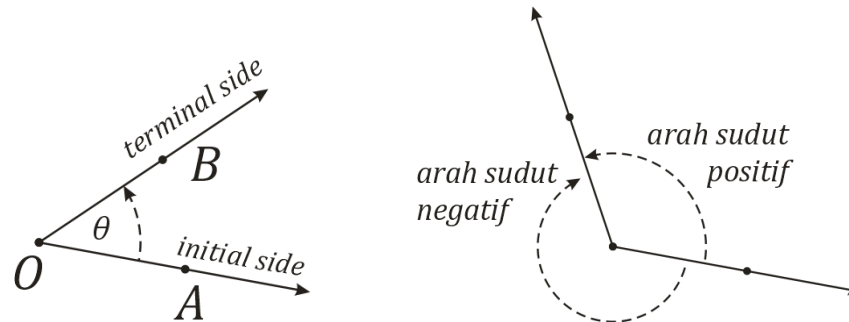
Mulai abad ke-16, karakteristik trigonometri berubah dari penggunaan pendekatan geometri ke aljabar-analitik. Francois Viete (1540-1603) menemukan formula $\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot$

$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdot \dots$, tahun 1671 James Gregory menemukan deret $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$. Untuk $x = 1$, diperoleh $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$. Leonhard Euler (1707-1783) menemukan formula $e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi$, dengan $i = \sqrt{-1}$ dan $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2,71828$. Dengan mengambil $\phi = \pi$ diperoleh formula unik yang menggabungkan bilangan-bilangan istimewa dalam matematika yaitu $e^{i\pi} + 1 = 0$.

Pengukuran Sudut

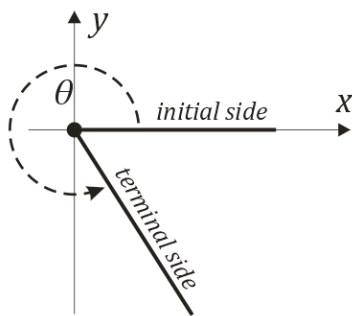
Sebuah sudut terbentuk oleh dua buah sinar garis yang bersekutu di titik pangkal. Titik persekutuan ini dinamakan titik sudut, sedangkan dua sinar garis disebut sebagai kaki-kaki sudut atau sisi-sisi sudut. Pada gambar di samping, titik O , sinar OA , dan sinar OB berturut-turut merupakan titik sudut dan kaki-kaki sudutnya. Sudut θ dapat ditulis sebagai $\angle AOB$.

Sudut AOB dapat pula dipandang sebagai bangun yang dibentuk dari perputaran sinar OA mengelilingi O dengan posisi akhir berimpit dengan sinar OB . Sinar OA dan OB berturut-turut disebut sebagai *initial side* (sisi awal) dan *terminal side* (sisi batas). Dengan memandang sudut sebagai perputaran sinar, maka dimungkinkan membentuk sudut yang lebih dari 360° , dan membedakan besar sudut negatif dan positif. Suatu sudut bernilai positif jika perputarannya berlawanan arah jarum jam dan negatif jika searah jarum jam.



Penamaan sudut dapat dilakukan dengan beberapa cara. Sudut pada gambar di atas dapat dinyatakan sebagai Sudut θ , $\angle\theta$, Sudut AOB , $\angle AOB$, sudut O , atau $\angle O$.

Kedudukan Sudut dalam posisi baku



Pada sistem koordinat kartesius, sudut AOB dikatakan terletak pada kedudukan baku jika titik sudut O dihimpitkan dengan titik pangkal $(0,0)$ pada koordinat kartesius dan *initial side* berimpit dengan sumbu- x positif.

Sudut dalam posisi baku ini akan digunakan untuk mendefinisikan ulang perbandingan trigonometri sehingga berlaku untuk semua sudut.

Tautan media virtual untuk menunjukkan sudut dalam posisi baku <https://www.geogebra.org/m/pgfunw6g>.

Dengan menggunakan sudut dalam posisi baku, maka besar suatu sudut dapat dibagi ke dalam empat kelompok yang disebut kuadran

- Kuadran I : $0 < \alpha < 90^\circ$
- Kuadran II : $90^\circ < \alpha < 180^\circ$
- Kuadran III : $180^\circ < \alpha < 270^\circ$
- Kuadran IV : $270^\circ < \alpha < 360^\circ$

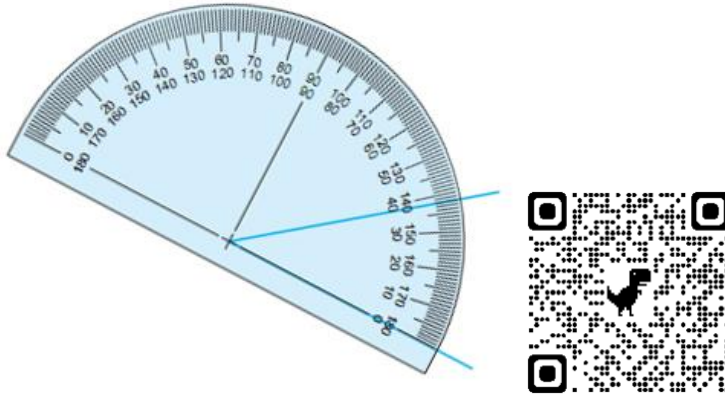
Sementara itu, sudut-sudut yang *terminal side*-nya berimpit dengan sumbu koordinat seperti 0° , 90° , 180° , 270° , dan seterusnya, dinamakan sebagai sudut kuadrantal (*quadrantal angle*). (lihat di:

https://www.mathwords.com/q/quadrantal_angle.htm)

Ukuran Sudut dalam Derajat (Sexagesimal)

Dalam satuan derajat, besar sudut yang dibentuk oleh satu putaran penuh adalah 360 derajat atau ditulis 360° .

Definisi: Satu derajat (1°) adalah besar sudut yang dihasilkan oleh perputaran $\frac{1}{360}$ keliling lingkaran. Ukuran sudut yang lebih kecil, $1^\circ = 60'$ (dibaca 60 menit) dan $1' = 60''$ (dibaca 60 detik).



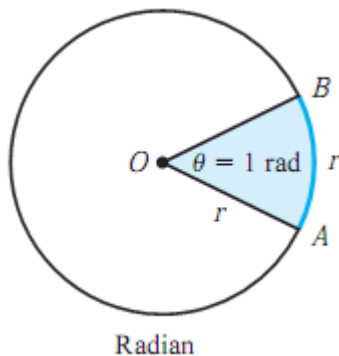
Media virtual untuk pengukuran besar sudut dalam derajat:
<https://www.geogebra.org/m/qqdvwmax>.

Ukuran Sudut dalam Radian

Misalkan titik A dan B pada lingkaran yang berpusat di O , maka besar sudut AOB dalam radian ditentukan oleh $\frac{\text{busur } AB}{\text{jari-jari}}$.

Dengan ketentuan di atas maka satu radian adalah besar sudut pusat lingkaran yang panjang busurnya sama dengan panjang jari-jarinya.

Untuk sudut satu putaran, maka panjang busur akan menjadi keliling lingkaran, dengan demikian



$$\begin{aligned} \text{Besar sudut satu putaran} &= \frac{\text{keliling lingkaran}}{\text{jari-jari}} \text{ rad} \\ &= \frac{2\pi r}{r} \text{ rad} \\ &= 2\pi \text{ rad} \end{aligned}$$

Ingat kembali tentang dimensi dan satuan. Kecepatan memiliki rumus $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ di mana Δs dan Δt merupakan dimensi panjang dan waktu, dengan satuan meter dan detik. Akibatnya kecepatan memiliki satuan turunan m/detik . Perhatikan satuan dalam radian, panjang busur dan jari-jari berdimensi sama, akibatnya satuan dalam radian tidak memiliki dimensi.

Akibatnya jika diberikan ukuran suatu sudut tanpa ada satuan sama sekali, maka yang dimaksud adalah satuan radian.

Ukuran sudut dalam grade (Centesimal)

Ketika bangsa Perancis mengadopsi sistim metrik, mereka mencoba meninggalkan sistim pembagian lingkaran ke dalam 360 bagian agar sistim pengukuran sudut konsisten dengan ukuran metrik yang lain. Mereka membagi sudut siku-siku menjadi 100 bagian yang sama. Konsekuensinya adalah, satu putaran penuh dibagi menjadi 400 bagian. Satuan pengukuran sudut seperti ini dinamakan grade. Satuan ini sering juga disebut dengan new degree, neugrad, gradian, atau gon.

Dengan demikian besar sudut siku-siku adalah 100 grade (ditulis 100^g)

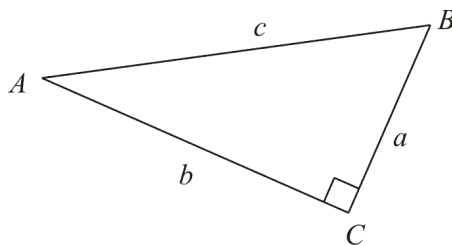
Untuk satuan yang lebih kecil,

$$1^g = 100^c \text{ (dibaca 100 new minutes atau 100 menit baru)}$$

$$1^c = 100^{cc} \text{ (dibaca 100 new seconds atau 100 detik baru)}$$

Enam Perbandingan Trigonometri pada Segitiga Siku-siku

Diberikan segitiga ABC siku-siku di C dengan $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$, $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, dan $\angle ACB = 90^\circ$. Sisi AB dinamakan sisi miring (hipotenusa) sedangkan sisi AC dan BC masing-masing disebut sebagai sisi siku-siku.



Perhatikan posisi sisi-sisi segitiga terhadap titik sudut.

- a. Terhadap titik sudut A
 - 1) Sisi a adalah sisi siku-siku yang terletak di depan sudut A .
 - 2) Sisi b adalah sisi siku-siku yang berdekatan dengan sudut A atau di samping sudut A .
 - 3) Sisi c adalah sisi miring.
- b. Terhadap titik sudut B
 - 1) Sisi a adalah sisi siku-siku yang berdekatan dengan sudut B atau di samping sudut B .
 - 2) Sisi b adalah sisi siku-siku yang terletak di depan sudut B .
 - 3) Sisi c adalah sisi miring.

Dengan menggunakan segitiga siku-siku di atas, didefinisikan:

$$\text{sinus sudut } A = \frac{\text{sisi di depan sudut } A}{\text{sisi miring}} \quad \text{atau ditulis} \quad \sin A = \frac{a}{c}$$

$$\text{cosinus sudut } A = \frac{\text{sisi di samping sudut } A}{\text{sisi miring}} \quad \text{atau ditulis} \quad \cos A = \frac{b}{c}$$

$$\text{tangen sudut } A = \frac{\text{sisi di depan sudut } A}{\text{sisi di samping sudut } A} \quad \text{atau ditulis} \quad \tan A = \frac{a}{b}$$

$$\text{cotangen sudut } A = \frac{\text{sisi di samping sudut } A}{\text{sisi di depan sudut } A} \quad \text{atau ditulis} \quad \cot A = \frac{b}{a}$$

$$\text{secan sudut } A = \frac{\text{sisi miring}}{\text{sisi di samping sudut } A} \quad \text{atau ditulis} \quad \sec A = \frac{c}{b}$$

$$\text{cosecan sudut } A = \frac{\text{sisi miring}}{\text{sisi di depan sudut } A} \quad \text{atau ditulis} \quad \csc A = \frac{c}{a}$$

Teorema:

- i. $\csc A = \frac{1}{\sin A}$
- ii. $\sec A = \frac{1}{\cos A}$
- iii. $\cot A = \frac{1}{\tan A}$

Latihan:

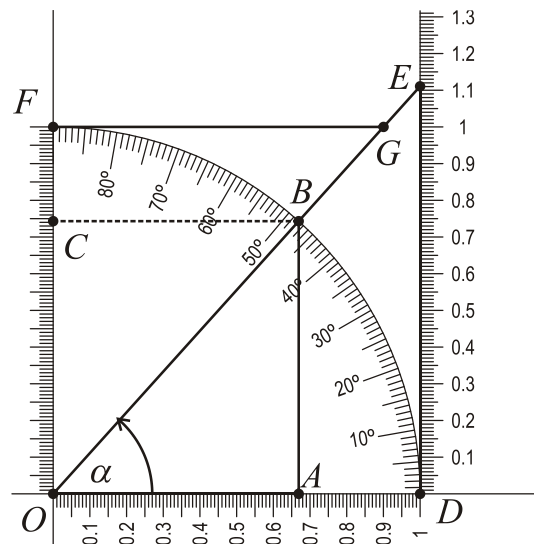
Buktikan ketiga teorema di atas.

Perbandingan trigonometri dalam lingkaran satuan

Pada diagram di bawah, besar sudut α adalah 48° . Dengan menggunakan skala pada gambar, dan kalkulator untuk menentukan nilai perbandingan trigonometri,

- a. Tentukan panjang AB dan OA , kemudian cocokkan dengan nilai $\sin 48^\circ$ dan $\cos 48^\circ$.
- b. Tentukan panjang DE dan OE , cocokkan dengan nilai $\tan 48^\circ$ dan $\sec 48^\circ$.
- c. Tentukan panjang FG dan OG , cocokkan dengan nilai $\cot 48^\circ$ dan $\csc 48^\circ$.

Ulangi langkah di atas dengan membuat sudut α yang berbeda-beda, kemudian cocokkan panjang ruas-ruas garis yang bersesuaian dengan enam perbandingan trigonometri sudut tersebut. Apa yang dapat Anda simpulkan?



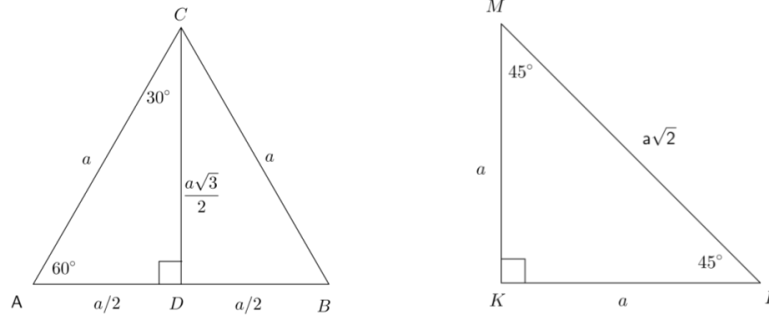
Media virtual perbandingan trigonometri <https://www.geogebra.org/m/xtdduumk>

Latihan:

Tunjukkan bahwa panjang ruas garis AB , OA , DE , OE , OF , dan OG menyatakan enam nilai perbandingan trigonometri sudut α .

Perbandingan Trigonometri Sudut 30° , 45° , 60°

Perbandingan trigonometri untuk beberapa sudut tertentu dapat dicari tanpa menggunakan tabel atau kalkulator. Perhatikan segitiga samasisi ABC dengan panjang sisi a . Segitiga tersebut memiliki panjang sisi yang sama dan besar sudut yang sama juga. Tarik garis tinggi melalui C , diperoleh potongan segitiga siku-siku ABD dengan sudut siku-siku di D . Dengan menggunakan teorema Pythagoras dapat ditentukan panjang DA .



Pada segitiga siku-siku samakaki KLM dengan panjang sisi siku-siku a dan K sudut siku-siku, maka sudut yang diapit oleh sisi siku-siku dan besarnya 45° . Dengan teorema Pythagoras dapat dicari panjang sisi miring LM yaitu $a\sqrt{2}$.

Dari ilustrasi di atas diperoleh

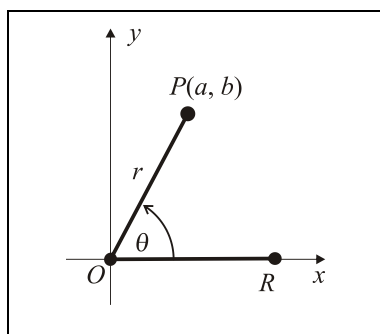
Sudut (x) Perb. trig.	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos x$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	...	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	...
$\cot x$	...	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	...
$\sec x$	...	...	...	...	...
$\csc x$	...	...	...	...	...

Latihan:

Lengkapi tabel di atas.

Perbandingan Trigonometri sudut berelasi

Perbandingan trigonometri dengan menggunakan segitiga siku-siku, hanya memungkinkan untuk membahas sudut antara 0° sampai 90° . Sementara itu, dengan memandang sudut α sebagai sebagai perputaran sinar OA mengelilingi O terhadap OB , dimungkinkan terbentuknya sudut 0° , 90° , lebih besar dari 90° atau besar sudut yang negatif.



Perhatikan gambar di samping, sudut POR berada pada posisi baku. Sudut θ bernilai positif jika perputarannya berlawanan arah jarum jam dan bernilai negatif jika perputarannya searah dengan arah jarum jam.

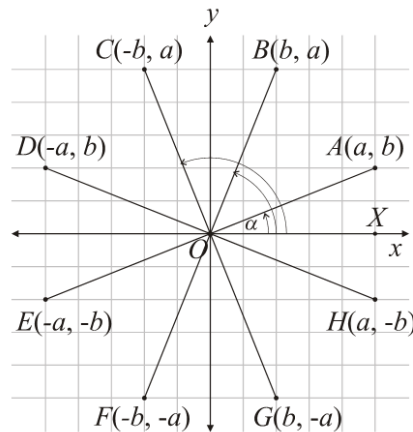
Dengan memanfaatkan kondisi ini, perbandingan trigonometri diperluas sehingga dapat mencakup sudut 0° , 90° , sudut negatif, dan sudut yang lebih besar dari 90° .

Definisi: Misalkan θ suatu sudut dalam posisi baku dengan $P(a, b)$ suatu titik pada sisi batas (*terminal side*) dan $OP = r$, maka:

$\sin \theta = \frac{\text{ordinat } P}{r} = \frac{b}{r}$	$\sec \theta = \frac{r}{\text{absis } P} = \frac{r}{a}, \quad a \neq 0$
$\cos \theta = \frac{\text{absis } P}{r} = \frac{a}{r}$	$\csc \theta = \frac{r}{\text{ordinat } P} = \frac{r}{b}, \quad b \neq 0$
$\tan \theta = \frac{\text{ordinat } P}{\text{absis } P} = \frac{b}{a}, \quad a \neq 0$	$\cot \theta = \frac{\text{absis } P}{\text{ordinat } P} = \frac{a}{b}, \quad b \neq 0$

Berdasarkan definisi di atas, untuk $\theta = 0^\circ$, diperoleh $\sin 0^\circ = \frac{0}{r} = 0$, $\cos 0^\circ = \frac{r}{r} = 1$, $\sin 90^\circ = \frac{r}{r} = 1$, $\cos 90^\circ = \frac{0}{r} = 0$. Sementara itu, $\tan 90^\circ = \frac{r}{0}$ (tidak terdefinisi).

Pada gambar berikut, sudut α merupakan sudut dalam posisi baku, dan selanjutnya dilukis sudut-sudut yang besarnya berelasi dengan α di kuadran II, III, dan IV.



- $\angle XOH = -\alpha$ atau $\angle XOH = 360^\circ - \alpha$
- $\angle XOB = 90^\circ - \alpha$
- $\angle XOC = 90^\circ + \alpha$
- $\angle XOD = 180^\circ - \alpha$
- $\angle XOE = 180^\circ + \alpha$
- $\angle XOF = 270^\circ - \alpha$
- $\angle XOG = 270^\circ + \alpha$

Berdasarkan definisi perbandingan trigonometri untuk sudut α , berlaku:

$$\sin \alpha = \frac{b}{r}$$

$$\cos \alpha = \frac{a}{r}$$

$$\tan \alpha = \frac{b}{a}, \quad a \neq 0$$

Pandang $\angle XOH = -\alpha$, berdasarkan definisi perbandingan trigonometri, maka

$$\sin(-\alpha) = \frac{\text{ordinat } H}{r} = \frac{-b}{r} = -\sin \alpha, \quad \text{sehingga} \quad \sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \frac{\text{absis } H}{r} = \frac{a}{r} = \cos \alpha, \quad \text{sehingga} \quad \cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\tan(-\alpha) = \frac{\text{ordinat } H}{\text{absis } H} = \frac{-b}{a} = -\tan \alpha, \quad \text{sehingga} \quad \tan(-\alpha) = -\tan \alpha$$

Pandang $\angle XOB = 90^\circ - \alpha$, dan $B(b, a)$ maka

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{\text{ordinat } B}{r} = \frac{a}{r} = \cos \alpha, \quad \text{sehingga} \quad \sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{\text{absis } B}{r} = \frac{b}{r} = \sin \alpha, \quad \text{sehingga} \quad \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\tan(90^\circ - \alpha) = \frac{\text{ordinat } B}{\text{absis } B} = \frac{a}{b} = \cot \alpha, \quad \text{sehingga} \quad \tan(90^\circ - \alpha) = \cot \alpha$$

Dengan cara seperti di atas, maka perbandingan trigonometri untuk sudut berelasi yang lain adalah:

$$\begin{aligned}\sin(90^\circ + \alpha) &= \cos \alpha \\ \cos(90^\circ + \alpha) &= -\sin \alpha \\ \tan(90^\circ + \alpha) &= -\cot \alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(180^\circ - \alpha) &= \sin \alpha \\ \cos(180^\circ - \alpha) &= -\cos \alpha \\ \tan(180^\circ - \alpha) &= -\tan \alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(270^\circ - \alpha) &= -\cos \alpha \\ \cos(270^\circ - \alpha) &= -\sin \alpha \\ \tan(270^\circ - \alpha) &= \cot \alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(180^\circ + \alpha) &= -\sin \alpha \\ \cos(180^\circ + \alpha) &= -\cos \alpha \\ \tan(180^\circ + \alpha) &= \tan \alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(270^\circ + \alpha) &= -\cos \alpha \\ \cos(270^\circ + \alpha) &= \sin \alpha \\ \tan(270^\circ + \alpha) &= -\cot \alpha\end{aligned}$$

Aktivitas daring untuk eksplorasi fungsi trigonometri sudut berelasi dapat diakses di tautan <https://www.geogebra.org/m/nfnc4gs7>.

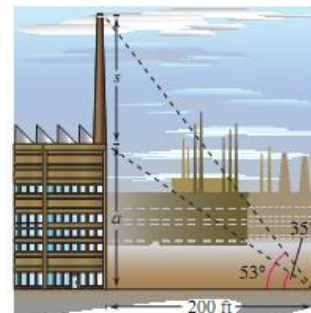
Latihan:

- Bagaimana cara membuktikan rumus-rumus di atas dan berilah contoh-contoh soalnya?
- Bagaimana mengingat rumus di atas setelah siswa memahami cara mendapatkannya?

Perhitungan pada segitiga Siku-siku

Selesaikan permasalahan-permasalahan berikut, gunakan kalkulator jika diperlukan:

- Sebuah petunjuk keselamatan operasional mobil tangga pemadam kebakaran menyatakan bahwa sudut elevasi maksimum tangga adalah 72° . Jika panjang maksimum tangga pada mobil tersebut adalah 30 meter, berapakah batas aman ketinggian yang dapat dicapai?
- Pada jarak 200 kaki dari dasar sebuah gedung, sudut elevasi bagian bawah cerobong asap adalah 35° , sementara itu sudut elevasi bagian puncaknya adalah 53° seperti terlihat pada gambar. Tentukan tinggi cerobong asap tersebut dihitung dari puncak gedung (s).



Identitas Trigonometri

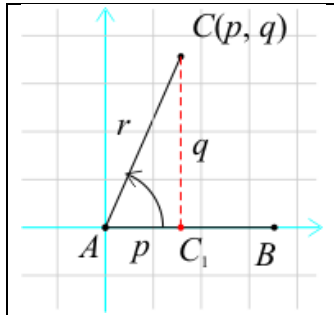
Identitas merupakan kesamaan yang menghubungkan dua ekspresi. Suatu identitas akan benar jika untuk setiap nilai pengganti untuk peubahnya, ruas kiri bernilai sama dengan ruas kanan. Identitas trigonometri merupakan identitas yang memuat perbandingan atau fungsi trigonometri.

- Identitas fundamental dan identitas Pythagoras

$\csc A = \frac{1}{\sin A}$	$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$
$\sec A = \frac{1}{\cos A}$	$\tan^2 A + 1 = \sec^2 A$

$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$	$1 + \cot^2 A = \csc^2 A$
$\cot A = \frac{\cos A}{\sin A}$	

Bukti untuk $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$.



Pandang sudut BAC dalam posisi baku, titik B di sumbu- x positif dan koordinat titik C adalah (p, q) . Sesuai dengan definisi, maka $\sin A = \frac{q}{r}$, $\cos A = \frac{p}{r}$ dengan $r = \sqrt{p^2 + q^2}$, yang merupakan jarak dari titik C ke titik pangkal koordinat $(0, 0)$.

Akibatnya

$$\sin^2 A + \cos^2 A = \left(\frac{q}{r}\right)^2 + \left(\frac{p}{r}\right)^2 = \frac{q^2}{r^2} + \frac{p^2}{r^2} = \frac{p^2 + q^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1$$

Sehingga diperoleh $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$. Terbukti.

Bukti identitas yang lain diserahkan kepada pembaca sebagai latihan.

2. Langkah-langkah pembuktian

- Ubah salah satu sisi (ruas), biasanya ruas yang memiliki bentuk lebih kompleks sampai diperoleh sisi yang lain.
- Untuk sekedar membantu, kedua sisi sehingga diperoleh ekspresi yang sama. Selanjutnya untuk bukti formal dipilih salah satu arah dari ruas kiri ke ruas kanan atau sebaliknya.

3. Strategi Pembuktian

- Ubah semua ekspresi ke sinus atau cosinus
- Ubah ekspresi menjadi bentuk yang sesederhana mungkin
- Kalikan dengan ekspresi yang bernilai 1.
- Tambahkan dengan ekspresi yang bernilai nol.
- Pergunakan identitas fundamental dan identitas pythagoras serta perbandingan trigonometri sudut yang berrelasi.

Contoh soal:

Buktikan bahwa $1 + \cos A = \frac{(\sin A)^2}{1 - \cos A}$.

Bukti:

Ruas kiri diuraikan

$$\begin{aligned} 1 + \cos A &= (1 + \cos A) \times \frac{1 - \cos A}{1 - \cos A} \quad \text{dengan } \cos A \neq 1 \\ &= \frac{1 - (\cos A)^2}{1 - \cos A} \\ &= \frac{(\sin A)^2}{1 - \cos A} \quad \text{terbukti.} \end{aligned}$$

Grafik fungsi Trigonometri

Langkah-langkah melukis dengan bantuan tabel:

- Susun tabel nilai untuk beberapa nilai x pada rentang yang diminta, kemudian tentukan nilai y yang bersesuaian (bisa dengan memilih x sudut-sudut istimewa, atau x bebas dan nilai y dicari dengan bantuan kalkulator atau lingkaran satuan)

2. Tentukan titik-titik yang bersesuaian.
3. Hubungkan titik-titik tersebut dengan kurva mulus.

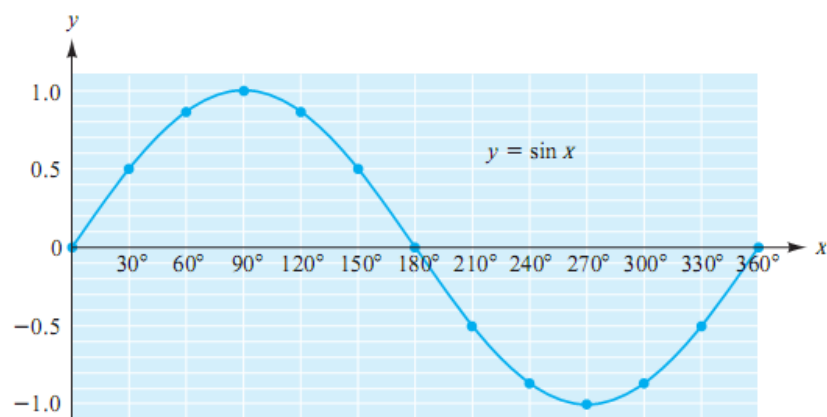
Contoh:

1. Grafik $y = \sin x$ dan $y = \cos x$ untuk $0 \leq x \leq 360^\circ$

Untuk grafik $y = \sin x$, lengkapi tabel di bawah,

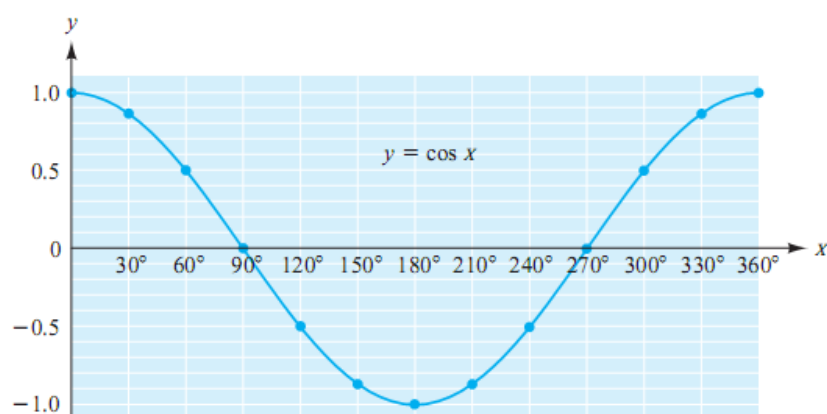
x	0°	30°	45°	60°	90°	...	...	...	...	360°
$y = \sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,71$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,87$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,87$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,71$	$\frac{1}{2}$	...	0

Setelah nilai x dan y yang bersesuaian pada tabel di atas dipindahkan ke sistem koordinat kartesius dan dihubungkan dengan kurva mulus, diperoleh grafik $y = \sin x$.



Untuk grafik $y = \cos x$ (lengkapi tabel di bawah)

x	0°	30°	45°	60°	90°	...	...	...	...	360°
$y = \cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,87$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,71$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} \approx -0,71$	$-\frac{\sqrt{3}}{2} \approx -0,87$	...	1

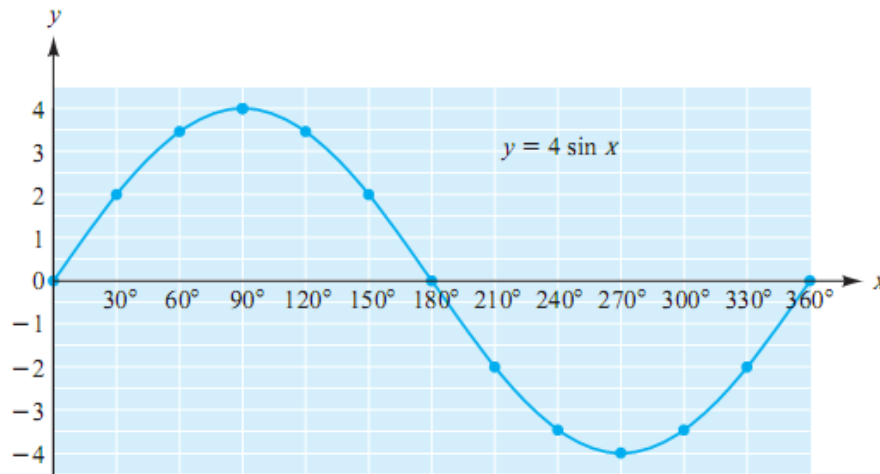


2. Grafik $y = 4 \sin x$ untuk $0 \leq x \leq 360^\circ$

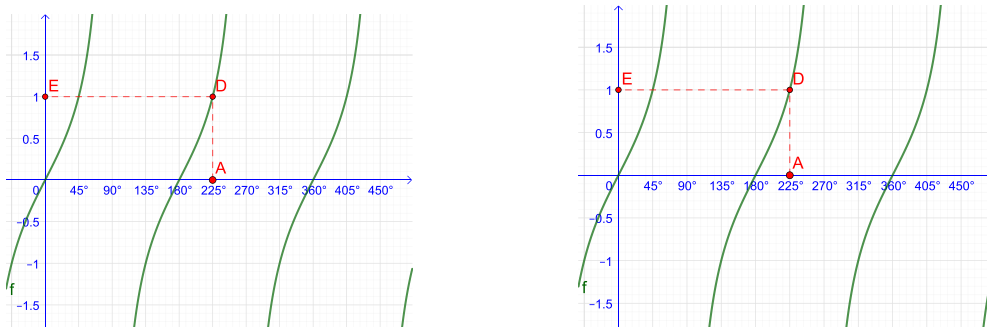
Tabel nilai-nilai y untuk beberapa nilai x adalah sebagai berikut.

x	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
y	0	2.0	3.5	4	3.5	2.0	0	-2.0	-3.5	-4	-3.5	-2.0	0

Dari tabel di atas, diperoleh grafik



3. Dengan cara serupa dengan cara memperoleh grafik di atas, grafik $y = \tan x$ dan $y = \cot x$ adalah seperti gambar berikut.



Grafik $f(x) = \tan x$ dan $g(x) = \cot x$

Bagaimana pengaruh nilai a , α , dan b pada grafik fungsi trigonometri $f(x) = a \sin(x + \alpha) + b$ jika dibandingkan dengan $g(x) = \sin x$? Silakan eksplorasi tautan <https://www.geogebra.org/m/hz3wCGr9>, kemudian beri kesimpulan (untuk x dalam derajat).

Selidiki juga untuk fungsi cosinus dan tangen.

Nilai-nilai y pada grafik fungsi trigonometri dapat juga ditentukan dengan menggunakan lingkaran satuan. Applet interaktif pada tautan <https://www.geogebra.org/m/r7pkbtqs> menggambarkan proses pembentukan kurva sinus melalui lingkaran satuan.

Applet untuk mengonstruksi kurva cosinus dan tangen menggunakan lingkaran satuan dapat diakses di

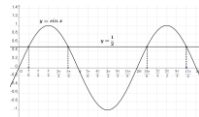
<https://www.geogebra.org/m/rfbqmghw>

<https://www.geogebra.org/m/y6xu9vuz>.

Tugas: Buatlah sketsa untuk dua grafik berikut:

1. Grafik $y = \sec x$ untuk $0 \leq x \leq 2\pi$
2. Grafik $y = \csc x$ untuk $0 \leq x \leq 2\pi$

Persamaan Trigonometri Sederhana



Misalkan diberikan persamaan $\sin x = \frac{1}{2}$. Visualisasi dari persamaan ini tampak seperti gambar di atas yang terdiri dari dua bagian yaitu grafik $y = \sin x$ dan $y = 1/2$. Perhatikan bahwa pada interval $0 \leq x \leq 2\pi$, kedua grafik berpotongan di $x = \frac{\pi}{6}$, dan $x = \frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$. Perpotongan ini akan terus berulang pada setiap penambahan 2π . Sehingga penyelesaian persamaan di atas adalah $x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$ atau $x = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi$, dengan k bilangan bulat. Secara umum, penyelesaian persamaan trigonometri yang sederhana adalah sebagai berikut:

1. Bentuk $\sin x = \sin \alpha$ maka $x = \alpha + k \cdot 2\pi$ atau $x = (\pi - \alpha) + k \cdot 2\pi$
2. Bentuk $\cos x = \cos \alpha$ maka $x = \pm \alpha + k \cdot 2\pi$
3. Bentuk $\tan x = \tan \alpha$ maka $x = \alpha + k \cdot \pi$
4. Bentuk $\sin x = a$, $\cos x = a$, dan $\tan x = a$ maka nilai a harus diubah menjadi bentuk perbandingan trigonometri yang sesuai terlebih dahulu.

Dengan k bilangan bulat.

Koordinat Kutub

Dalam sistem koordinat Kartesius, posisi suatu titik T dinyatakan dengan pasangan berurutan (a, b) dengan a dan b berturut-turut menyatakan jarak titik T terhadap sumbu- x dan sumbu- y . Alternatif lain untuk menyatakan posisi suatu titik adalah menggunakan koordinat kutub (polar). Perhatikan gambar di samping, lokasi titik P dinyatakan dalam (r, α) dimana r menyatakan

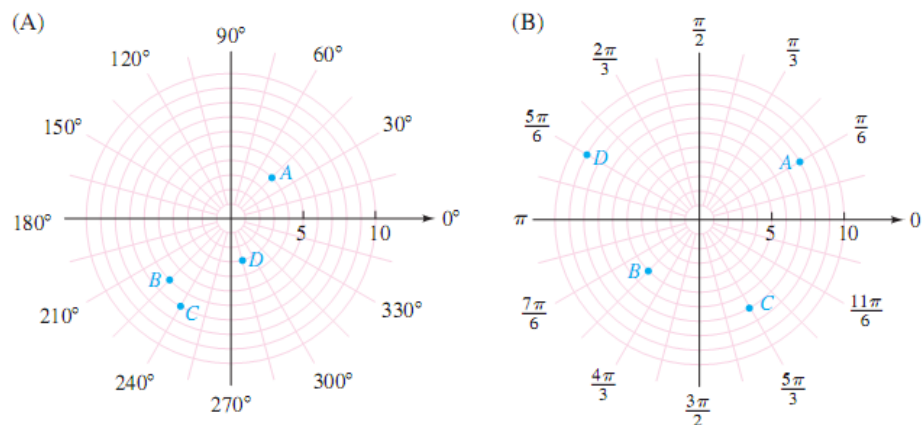
jarak P terhadap titik O , dan α menyatakan sudut yang dibentuk oleh OP terhadap sinar OX .

Dalam beberapa bidang, penggunaan sistim koordinat kutub lebih menguntungkan dibandingkan koordinat kartesius.

Contoh:

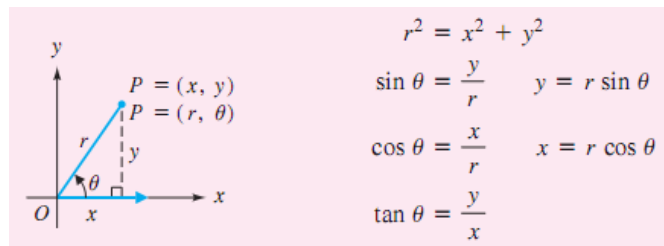
Tentukan posisi titik-titik berikut pada sistem koordinat kutub

- $A(4, 45^\circ)$, $B(6, 45^\circ)$, $C(7, 240^\circ)$, $D(3, -75^\circ)$
- $A(8, \frac{\pi}{6})$, $B(5, \frac{3\pi}{2})$, $C(7, \frac{5\pi}{3})$, $D(9, \frac{5\pi}{6})$



Mengubah koordinat kutub ke koordinat kartesius dan sebaliknya.

Pada gambar di bawah, perhatikan posisi titik P . Jika panjang $OP = r$, maka berlaku hubungan:



Dengan demikian

- Jika diketahui koordinat kartesius titik P adalah (x, y) maka koordinat kutub titik P adalah (r, α) dengan $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ dan $\tan \alpha = \frac{y}{x}$.
- Jika diketahui koordinat kutub titik P adalah (r, θ) maka koordinat kartesius titik P adalah (x, y) dengan $x = r \cos \theta$ dan $y = r \sin \theta$.

Contoh:

Tentukan koordinat Kartesius titik-titik berikut:

- $P(6, 30^\circ)$
- $Q(4, \frac{2\pi}{3})$

Penyelesaian

- a. Diketahui titik $P(6, 30^\circ)$, maka $r = 6$ dan $\alpha = 30^\circ$. Sehingga

$$x = r \cdot \cos \alpha = 6 \cdot \cos 30^\circ = 6 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

$$y = r \cdot \sin \alpha = 6 \cdot \sin 30^\circ = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3$$

Jadi koordinat Kartesius titik P adalah $P(3\sqrt{3}, 3)$

- b. Diketahui titik $Q(4, \frac{2\pi}{3})$, maka $r = 4$ dan $\alpha = \frac{2\pi}{3}$. Sehingga

$$x = r \cdot \cos \alpha = 4 \cdot \cos \frac{2\pi}{3} = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -2$$

$$y = r \cdot \sin \alpha = 4 \cdot \sin \frac{2\pi}{3} = 4 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

Jadi koordinat Kartesius titik Q adalah $Q(-2, 2\sqrt{3})$.

Contoh:

Tentukan koordinat Kutub dari titik-titik berikut:

- a. $A(3, 3\sqrt{3})$ b. $B(-4, 3)$

Penyelesaian

- a. Diketahui $A(3, 3\sqrt{3})$ maka $x = 3$ dan $y = 3\sqrt{3}$, sehingga

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + (3\sqrt{3})^2} = \sqrt{36} = 6$$

$$\tan \alpha = \frac{y}{x} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}, \text{ sehingga } \alpha = \tan^{-1}(\sqrt{3}), \text{ karena } A \text{ di kuadran I, diperoleh } \alpha = 60^\circ.$$

Jadi, koordinat kutub titik A adalah $(6, 60^\circ)$ atau $(6, \frac{\pi}{3})$.

- b. Diketahui $B(-4, 3)$ maka $x = -4$ dan $y = 3$, sehingga

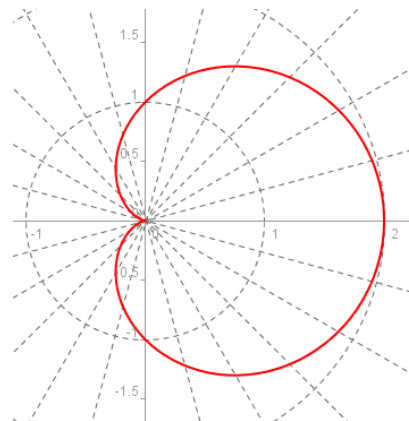
$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\tan \alpha = \frac{y}{x} = -\frac{3}{4}, \text{ sehingga } \tan \alpha = -\tan 36,87^\circ \text{ (gunakan kalkulator). Karena } B \text{ di kuadran II, diperoleh } \alpha = 180^\circ - 36,87^\circ = 143,13^\circ.$$

Jadi, koordinat kutub titik B adalah $(5, 143,13^\circ)$.

Diskusikan:

Gambar di samping merupakan grafik dengan persamaan $r = 1 + \cos \theta$ untuk $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Bagaimana langkah-langkah melukis grafik tersebut?



Aturan-aturan dalam Segitiga

Luas Segitiga

Diberikan segitiga ABC, dengan panjang sisi $AB = c$, $AC = b$, dan $BC = a$, dan AD garis tinggi dari titik A ke BC . Misalkan L_{ABC} menyatakan luas segitiga ABC, dengan memandang BC sebagai alas dan AD sebagai garis tinggi, maka $L_{ABC} = \frac{a \cdot AD}{2}$.

Sementara itu dengan menggunakan definisi sinus pada segitiga siku-siku, AD dapat dinyatakan dalam dua cara, yaitu $AD = c \cdot \sin B$ atau $AD = b \cdot \sin C$. Akibatnya

$$L_{ABC} = \frac{BC \cdot AB \sin B}{2} = \frac{1}{2} ac \sin B$$

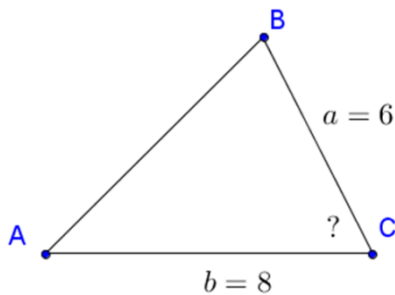
Dengan cara yang sama, dapat diperoleh:

$$L_{ABC} = \frac{1}{2} ab \sin C \quad \text{dan} \quad L_{ABC} = \frac{1}{2} bc \sin A$$

Contoh:

Diketahui sebuah segitiga ABC dengan $a = 6$, dan $b = 8$. Jika luas segitiga ABC adalah $12\sqrt{3}$, hitunglah besar sudut C .

Penyelesaian:



$$L_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot ab \sin C$$

$$12\sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 \cdot \sin C$$

$$\sin C = \frac{1}{2} \sqrt{3} \Rightarrow C = 60^\circ \text{ atau } C = 120^\circ$$

Jadi besar sudut C adalah 60° atau 120° .

Aturan Sinus

Dari rumus luas segitiga diperoleh hubungan

$$\frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} ab \sin C$$

Jika seluruhnya dikalikan dengan $\frac{2}{abc}$ akan diperoleh

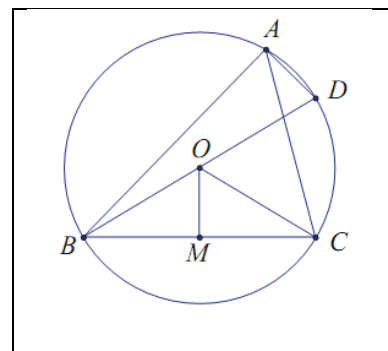
$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

Atau dapat ditulis sebagai

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Aturan di atas dinamakan sebagai aturan sinus.

Pandang segitiga ABC dengan lingkaran luarnya seperti pada gambar di samping. Misalkan O adalah titik pusat lingkaran, maka $\angle BOC = 2\angle CAB$. Perhatikan bahwa $OB = OC$, sehingga segitiga BOC sama kaki dan $\angle OBC = \angle OCB$. Ambil M titik tengah BC , akibatnya $a = 2 \cdot BM$ dengan a sisi di depan sudut A , dan $\angle CAB = \angle BOM$ (mengapa?). Dengan demikian pada segitiga siku-siku BOM berlaku $BM = OB \cdot \sin(\angle BOM) = OB \cdot \sin A$.



Diperoleh $\frac{a}{\sin A} = \frac{2 \cdot BM}{\sin A} = 2 \cdot OB = 2R$, dengan R jari-jari lingkaran luar segitiga ABC .

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

Terdapat beberapa macam pembuktian aturan sinus. Applet untuk aktivitas daring penurunan aturan sinus dapat diakses di tautan <https://www.geogebra.org/m/GQMTtf5b>.

Contoh:

Diberikan segitiga ABC dengan $AB = 2$, panjang sisi $AC = 1$ dan $\angle CBA = 30^\circ$. Tentukan

- Besar sudut C .
- Besar sudut A .
- Panjang sisi BC .

Penyelesaian:

Diketahui $AB = c = 1$, $AC = b = 2$, dan $\angle B = 30^\circ$.

- Besar sudut C dicari dengan

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{2}{\sin 30^\circ} = \frac{1}{\sin C} \Rightarrow \sin C = \frac{\sin 30^\circ}{2} \Rightarrow \sin C = \frac{1}{4}$$

Dengan bantuan kalkulator diperoleh besar sudut $C = \arcsin \frac{1}{4} = 14,48^\circ$.

- Besar $\angle A$ dicari dengan sifat jumlah sudut segitiga adalah 180° .

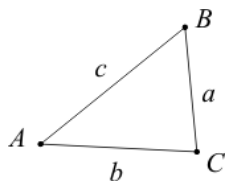
$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ \Rightarrow \angle A + 30^\circ + 14,48^\circ = 180^\circ \Rightarrow \angle A = 135,52^\circ$$

Jadi besar sudut A adalah $135,52^\circ$

- Panjang sisi BC dicari dengan $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$,

Dengan demikian $a = \frac{b}{\sin B} \cdot \sin A = \frac{1}{(1/2)} \cdot \sin 135,52^\circ = 2 \cdot 0,7 = 1,4$. Jadi panjang sisi BC adalah 1,4.

Aturan Cosinus



Pandang segitiga ABC , dengan AB sebagai alas dan CD garis tinggi dari titik C . Pada segitiga BCD , $BD = a \cos B$ dan $CD = a \sin B$, akibatnya $AD = c - a \cos B$. Dengan menggunakan teorema Pythagoras diperoleh

$$\begin{aligned} b^2 &= CD^2 + AD^2 = a^2 \sin^2 B + (c - a \cos B)^2 \\ &= a^2 \sin^2 B + c^2 + a^2 \cos^2 B - 2ac \cos B \\ &= c^2 + a^2 - 2ac \cos B \end{aligned}$$

Dengan cara yang serupa, dapat ditemukan hubungan untuk sisi-sisi dan sudut-sudut yang lain sehingga pada setiap segitiga ABC berlaku:

- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$
- $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

Applet untuk penurunan aturan cosinus dapat diakses pada tautan

<https://www.geogebra.org/m/rnaatu5t>.

Contoh soal 7

Pada $\triangle ABC$ diketahui panjang $a = 6$, $b = 3$ dan $\angle ACB = 60^\circ$. Tentukan panjang sisi c .

Penyelesaian:

Perhatikan ilustrasi di samping.

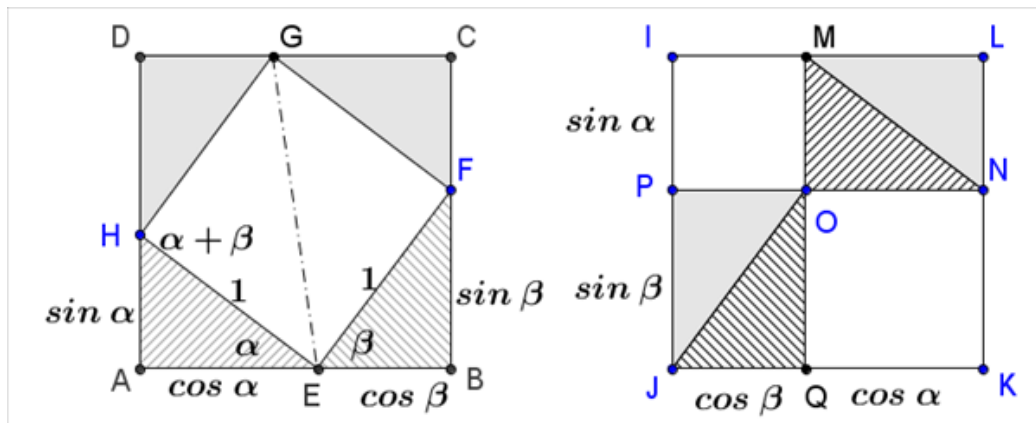
$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C \\ &= 6^2 + 3^2 - 2 \cdot 6 \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ \\ &= 36 + 9 - 18 \\ &= 27 \end{aligned}$$

$$c = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

Jadi panjang sisi c adalah $3\sqrt{3}$

Perbandingan Trigonometri Jumlah dan selisih dua Sudut

Perhatikan ilustrasi berikut:



Segitiga AEH kongruen dengan CGF , BEF kongruen dengan DGH . Panjang $EH = FE = 1$, besar sudut FEB dan AEH berturut-turut β dan α . Panjang sisi FB , BE , EA , dan AH berturut-turut dapat dinyatakan dalam $\sin \beta$, $\cos \beta$, $\cos \alpha$, dan $\sin \alpha$. Dapat ditunjukkan juga bahwa $\angle EHG = \alpha + \beta$. Dengan menggunakan rumus luas segitiga, diperoleh

$$\text{Luas } EFGH = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot EH \cdot GH \cdot \sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha + \beta)$$

Selanjutnya segitiga-segitiga seperti gambar sebelah kiri digeser sehingga menjadi gambar kanan, maka diperoleh hubungan

$$\text{Luas } EFGH = \text{Luas } IMOP + \text{Luas } ONKQ$$

Sehingga

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta.$$

Terdapat beberapa cara membuktikan rumus jumlah dua sudut. Applet pada tautan <https://www.geogebra.org/m/sdymthuf> dapat digunakan untuk aktivitas interaktif daring membuktikan rumus tersebut.

Dengan mengubah $(\alpha - \beta) = \alpha + (-\beta)$ dapat diturunkan rumus

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha$$

Ingat kembali rumus $\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$, maka

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \sin(90^\circ - (\alpha + \beta)) = \sin((90^\circ - \alpha) - \beta) \\ &= \sin(90^\circ - \alpha) \cos \beta - \cos(90^\circ - \alpha) \sin \beta \end{aligned}$$

Jadi

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

Untuk rumus kosinus selisih dua sudut,

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha + (-\beta)) = \cos \alpha \cos(-\beta) - \sin(\alpha) \sin(-\beta) \text{ sehingga}$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

Rumus perbandingan trigonometri jumlah dan selisih dua sudut

1. $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$
2. $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$
3. $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$ (bukti sebagai latihan).
4. $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha$
5. $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$

Latihan:

- i. Buktikan rumus tangen jumlah dan selisih dua sudut di atas.
- ii. Adakah syarat yang harus dipenuhi untuk masing-masing rumus di atas?
- iii. Buatlah rumus-rumus untuk perbandingan trigonometri sudut ganda.

DAFTAR PUSTAKA

Ann Xavier Gantert, 2008, *Amsco's Geometry*, New York: Amsco School Publication

Ann Xavier Gantert, 2009, *Algebra 2 and Trigonometry*, New York, NY: Amsco School Publications, Inc.

Daniel C. Alexander & Geralyn M. Koeberlein, 2020, *Elementary Geometry for College Students*, Belmont: Brooks/Cole

H.S. Hall, & F.H. Stevens. 1949. *School Geometry Parts I – VI*. London: MacMillan and Co..

David M. Burton, 2011, *The History of Mathematics : An Introduction*, New York: McGraw-Hill.

Margaret L. Lial, John Hornsby, David Schneider, & Callie J. Daniel. 2021. *Trigonometry 12th ed.*. Boston: Pearson

Michael Serra, 2008, *Discovering Geometry: An Investigative Approach*, Emeryville California: Key Curriculum Press

Thomas H. Sidebotham. 2002. *The A to Z of Mathematics, A basic guide*. New York: John Wiley & Sons, Inc.

Untung T.S. & Ratna Herawati. 2018. *Modul Pelatihan Mata Pelajaran Ganda: Geometri dan Transformasi Geometri*. Direktorat Jenderal GTK, Kemdikbud.

W. Gellert, H. Kastner, & M. Helwich. 1977. *The VNR Concise Encyclopedia of Mathematics*, New York: Van Nostrand Reinhold Company.