



bbgp
Balai Besar Guru Penggerak

DI Yogyakarta



**MERDEKA
BELAJAR**

BAHAN AJAR BIMBINGAN TEKNIS PENGGERAK KOMUNITAS BELAJAR

KALKULUS

Sigit Tri Guntoro, M.Si



BALAI BESAR GURU PENGGERAK PROVINSI DIY

DIREKTORAT JENDERAL GURU DAN TENAGA KEPENDIDIKAN

KEMENTERIAN PENDIDIKAN, KEBUDAYAAN, RISET, DAN TEKNOLOGI

2023

BAHAN AJAR GEBRAK KOMBEL

KALKULUS

***PENYUSUN:
SIGIT TRI GUNTORO***

KATA PENGANTAR

Puji syukur kami panjatkan ke hadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan hidayahNya sehingga bahan ajar untuk program Gerakan Bersama Penggerak Komunitas Belajar (Gebrak Kombel) ini dapat terselesaikan.

Bahan ajar ini disusun sebagai bahan belajar pada kegiatan Bimbingan Teknis (Bimtek) Gebrak Kombel yang dilaksanakan sebagai upaya BBGP Provinsi D.I Yogyakarta dalam rangka melaksanakan tugas dan fungsinya sebagai Unit Pelaksana Teknis Direktorat Jenderal Guru dan Tenaga Kependidikan (UPT Dirjen GTK) Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan, Riset dan Teknologi (Kemendikbudristek) untuk meningkatkan kompetensi guru di Provinsi D.I Yogyakarta. Pada kegiatan Gebrak Kombel, para penggerak komunitas belajar yang berasal dari guru penggerak dan guru inti dibekali dengan muatan konten dan pedagogi agar memiliki kapasitas untuk berbagi dan bersinergi dengan guru-guru lain di dalam komunitas belajarnya. Melalui kegiatan ini diharapkan dapat terbangun ekosistem belajar guru berbasis komunitas belajar dengan memberdayakan penggerak komunitas dari guru penggerak dan guru inti sehingga guru dapat berkolaborasi meningkatkan kompetensi diri.

Bahan ajar ini tersusun melalui kolaborasi BBGP Provinsi D.I. Yogyakarta dengan BBGP Jawa Barat, BBGP Jawa Timur, dan BGP Banten. Penyusun bahan ajar ini adalah para Widyaiswara, Widyaprada, dan Pengembang Teknologi Pembelajaran dari BBGP/BGP tersebut. Ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya disampaikan atas dedikasi dan kesediaannya untuk mencurahkan gagasan dan inspirasi sehingga bahan ajar Gebrak Kombel ini dapat terselesaikan. Semoga Allah SWT memberikan balasan yang setimpal atas semua pengorbanan dan kontribusinya dalam menyelesaikan tugas penyusunan bahan ajar ini. Amiin.

Yogyakarta, 12 April 2023
Kepala BBGP DI Yogyakarta

Dr. Adi Wijaya, M.A.

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR.....	ii
DAFTAR ISI	iii
A. Pengantar	3
B. Uraian Materi	3
Bagian I Limit Fungsi	3
1. Pengertian limit fungsi.....	3
2. Limit kiri dan limit kanan.....	4
3. Limit tak hingga dan limit di tak hingga.....	6
4. Limit fungsi trigonometri	9
5. Sifat-sifat dan teorema limit	10
6. Bentuk tak tentu $0/0$, ∞/∞ dan $\infty - \infty$	12
7. Strategi Sederhana dalam Menyelesaikan Limit	12
Bagian II Turunan dan Integral	17
1. Pengertian Turunan	17
2. Sifat-sifat dan Teorema Turunan	18
3. Integral Tak Tentu (<i>Indefinite Integral</i>).....	19
4. Strategi sederhana dalam menentukan hasil integral tak tentu.....	20
5. Integral Tertentu (Definite Integral)	22
6. Menentukan luas daerah	22
C. Aktivitas	26
DAFTAR PUSTAKA.....	30

BAB I PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Sesuai dengan amanat Peraturan Menteri Pendidikan, Kebudayaan Riset dan Teknologi Republik Indonesia Nomor 14 Tahun 2022, Balai Besar Guru Penggerak (BBGP) mempunyai tugas melaksanakan pengembangan dan pemberdayaan guru, pendidik lainnya, tenaga kependidikan, calon kepala sekolah, kepala sekolah, calon pengawas sekolah, dan pengawas sekolah. Dua di antara sembilan fungsi BBGP DIY yang menjadi latar belakang dilaksanakannya penguatan pelibatan komunitas pendidikan adalah: a) pelaksanaan fasilitasi peningkatan kompetensi guru, pendidik lainnya, tenaga kependidikan, calon kepala sekolah, kepala sekolah, calon pengawas sekolah, dan pengawas sekolah; b) pelaksanaan pemantauan dan evaluasi pengembangan dan pemberdayaan guru, pendidik lainnya, tenaga kependidikan, calon kepala sekolah, kepala sekolah, calon pengawas sekolah, dan pengawas sekolah; dan c) pelaksanaan kemitraan di bidang pengembangan dan pemberdayaan guru, pendidik lainnya, tenaga kependidikan, calon kepala sekolah, kepala sekolah, calon pengawas sekolah, dan pengawas sekolah.

Program Gerakan Bersama Penggerak Komunitas Belajar (Gebrak Kombel) dilaksanakan untuk mendorong penguatan penguasaan konten keilmuan dan pedagogi guru. Kedua hal tersebut merupakan dua sisi mata uang keilmuan yang sangat penting harus dikuasai guru. Penguasaan materi merupakan komponen kunci guru menguasai kompetensi yang menjadi tanggungjawabnya. Demikian juga penguasaan pedagogi, sangat krusial agar guru mampu memfasilitasi siswa belajar berhasil belajarnya. Hal ini selaras dengan pernyataan Harel dan Kien (2004; Hospesová & Tichá, 2000: 2) bahwa penguasaan materi merupakan dasar penguasaan kompetensi yang harus dimiliki guru sehingga mampu menjalankan peran pengajarannya. Sedangkan menurut Baumert dan Kunter (2006: 26-42), penguasaan materi merupakan bagian kunci penguasaan kompetensi profesional guru sehingga mampu menjalankan tugas profesi dengan sebaik-baiknya.

Hill dan Ball (2004: 332) menggarisbawahi pada aspek pentingnya guru memiliki *specialized knowledge of content* maupun *common knowledge of content*. *Specialized knowledge of content* merujuk pada pengetahuan materi yang lebih detail dibandingkan siswa. Pada saat guru mengajarkan suatu pembagian, misalnya, guru tidak cukup memahami tentang prosedur melakukan pembagian seperti yang diajarkan kepada siswa, tetapi guru juga perlu menguasai tentang mengapa dan apa makna dari suatu proses pembagian. *Common knowledge of content* tidak merujuk semata-mata hanya materi di kelas, tetapi pengetahuan yang secara umum digunakan dalam kehidupan.

Pendalaman konten merupakan salah satu titik krusial untuk terwujudnya profil pelajar Indonesia seperti telah ditetapkan di Undang-Undang No. 20 Tahun 2003 tentang Sistem Pendidikan Nasional. Pada undang-undang tersebut dinyatakan bahwa *pendidikan nasional bertujuan untuk berkembangnya potensi peserta didik agar menjadi manusia yang beriman dan bertakwa kepada Tuhan Yang Maha Esa, berakhlak mulia, sehat, berilmu, cakap, kreatif, mandiri, dan menjadi warga negara yang demokratis serta bertanggung jawab*. Mencermati rumusan tujuan pendidikan nasional tersebut jelas bahwa belajar konten keilmuan adalah esensial dalam proses pendidikan. Penguasaan ilmu pengetahuan tentu menjadi prasyarat penting menjadikan generasi baru Indonesia yang cakap dan berilmu. Bagaimana bisa menjadi cakap dan berilmu tanpa penguasaan ilmu pengetahuan yang kuat. Lebih dari sekedar cakap dan berilmu, kajian berbagai materi dalam pembelajaran merupakan wahana hebat mengembangkan siswa menjadi kreatif,

mandiri, demokratis, bertanggung jawab, sehat, serta menjadi manusia berakhlak mulia yang beriman dan bertakwa kepada Tuhan Yang Maha Esa. Dalam konteks inilah penting bagi setiap siswa mendapatkan fasilitas terbaik dalam mengkaji materi keilmuan dalam pembelajaran. Dan, ini membutuhkan peran guru-guru yang cakap dan berilmu dengan penguasaan keilmuan bidang keahlian yang kuat.

Selain penguasaan konten, sangat esensial bagi guru memiliki penguasaan pedagogi dan mampu mengimplementasikannya dalam pembelajaran di kelas. Turnuklu & Yesildere (2007: 1) menyatakan bahwa pengetahuan guru tentang materi penting tetapi tidak cukup karena guru juga harus mampu menghubungkan antara pengetahuan yang dimiliki dengan pengajarannya di kelas. Menurut Gadanidis dan Namukasa (2007: 16), perlu ada hubungan dialektik penguasaan guru atas materi dan cara mengajarkannya. Menguasai materi saja tidak cukup tanpa didukung keilmuan untuk mengajarkannya kepada siswa. Begitu juga, menguasai dengan baik ilmu pedagogi juga tidak cukup tanpa didukung penguasaan keilmuan matematika yang memadai oleh guru. Kepincangan salah satu aspek keilmuan tersebut dapat menjadi faktor penghambat peran guru dalam mendorong sukses belajar siswa.

Sultan dan Artzt (2011: xviii) menyatakan bahwa guru dituntut menguasai *pedagogical content knowledge/PCK*. PCK memuat dua aspek, yaitu pengetahuan pedagogi dan pengetahuan konten (Setyaningrum, Mahmudi, & Murdanu, 2018: 1). Pengetahuan pedagogi merujuk pengetahuan bagaimana siswa belajar, bagaimana mengajarkan materi atau konsep, dan bagaimana menilai pemahaman siswa. Pengetahuan konten merujuk pada penguasaan guru tentang materi-materi matematika. Pengetahuan pedagogi dan konten merupakan dua aspek mendasar yang harus dikuasai guru untuk keberhasilan tugas mengajarnya. Keduanya seperti belahan ganda sekeping mata uang, menyatu, tidak terpisahkan satu dengan yang lain.

Memerhatikan hal tersebut di atas, BBGP Provinsi DIY pada tahun 2023 melaksanakan program Gebrak Kombel, akronim dari Gerakan Bersama Penggerak Komunitas Belajar. Program Gebrak Kombel merupakan program pemberdayaan dan pendampingan komunitas belajar sebagai ekosistem belajar guru melalui optimalisasi peran penggerak komunitas belajar dari guru penggerak (GP) dan guru inti (GI) sebagai penggerak kolaborasi dan sinergi belajar guru untuk meningkatkan kompetensi berbasis komunitas belajar. Guru penggerak dan guru inti yang merupakan para penggerak komunitas belajar dibekali dengan penguatan penguasaan konten dan pedagogi, yang selanjutnya mereka dapat mengimbaskannya pada rekan-rekan guru di komunitas belajarnya.

B. Tujuan

Program Gebrak Kombel bertujuan membangun *learning community* guru berbasis komunitas belajar melalui pemberdayaan penggerak komunitas dari guru penggerak dan guru inti sehingga guru dapat berkolaborasi dan bersinergi meningkatkan kompetensi diri.

C. Sasaran

Sasaran Program Gebrak Kombel adalah guru jenjang TK, SD, SMP, SMA di wilayah D.I. Yogyakarta.

D. Manfaat

1. Guru Penggerak dan Guru Inti diberdayakan sebagai penggerak kolaborasi dan sinergi guru.
2. Guru tergerak dan terfasilitasi untuk berkolaborasi dan bersinergi meningkatkan kompetensi diri.
3. *Learning community* guru dapat terbentuk berbasis komunitas belajar sebagai ekosistem belajar untuk melakukan pengembangan profesi guru secara berkelanjutan.

BAB II KALKULUS

A. Pengantar

Kalkulus merupakan salah satu cabang bahasan dalam matematika. Perannya amat penting dalam matematika itu sendiri dan juga untuk digunakan dalam pengembangan teknologi. Konsep yang dibicarakan dalam kalkulus paling banyak tentang limit, turunan dan integral, terlebih lagi bahasan tersebut sudah masuk dalam kurikulum sekolah. Kalkulus merupakan bahasan yang relatif sulit, oleh karena itu pembahasan kalkulus pada kurikulum sekolah dipilih bagian yang sesuai dengan tingkat perkembangan belajar mereka, harapannya pembelajaran di kelas (sekolah) menjadi lebih lancar. Namun demikian sangat dimungkinkan muncul miskonsepsi, oleh karena itu dalam modul ini akan dibahas terkait limit, turunan dan integral yang meliputi konsepnya dan penyelesaian masalah yang terkait dan disajikan pula kemungkinan miskonsepsi beserta penjelasannya.

B. Uraian Materi

Ada 2 bagian yang akan disajikan dalam uraian materi ini. Bagian pertama terkait pengertian limit fungsi dan strategi penyelesaiannya, sedangkan pada bagian kedua membahas turunan dan integral serta strategi penyelesaiannya. Strategi yang dimaksud disini adalah cara sederhana dalam menyelesaikan permasalahan limit maupun integral. Walaupun sederhana tetap diperlukan kecermatan dan kejelian dalam mempelajarinya.

Bagian I Limit Fungsi

1. Pengertian limit fungsi

Limit fungsi merupakan konsep yang amat penting dalam matematika. Tanpa pemahaman limit fungsi, pembahasan terkait turunan, integral dan topik-topik kalkulus lain tidak bisa jalan. Mengingat hal ini maka pemahaman yang benar perlu diketahui. Umumnya, pembahasan limit fungsi akan diawali dengan definisi formal. Definisi formal yang dimaksud.

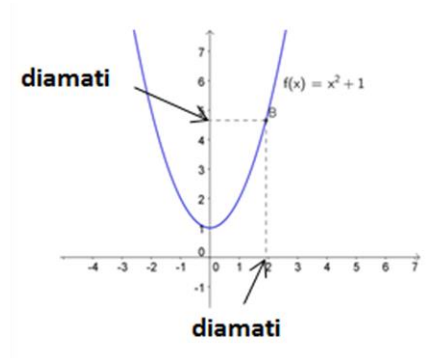
$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ artinya untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga berlaku $|f(x) - L| < \varepsilon$ untuk $0 < |x - a| < \delta$

Pemahaman limit melalui definisi formal seperti ini sangat mungkin membingungkan siswa bahkan guru. Oleh karena itu penyajian yang lebih sederhana perlu diberikan pada tahap awal. Sebagai contoh, diberikan fungsi $f(x) = x^2 + 1$. Penulisan atau penyajian $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 1) = 5$ sebenarnya hanya ingin mengungkapkan: *jika x mendekati 2 maka $(x^2 + 1)$ mendekati 5*. Sebagian literasi menggunakan kata “menuju” untuk mengganti kata “mendekati”, sehingga $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 1) = 5$ dimaknai sebagai *jika x menuju 2 maka $(x^2 + 1)$ menuju 5*. Itu saja yang dimaksud $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 1) = 5$, sederhana bukan? Sama halnya dengan $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, pemaknaannya adalah *jika x mendekati a maka $f(x)$ akan mendekati L*. Dengan demikian jika dimunculkan pertanyaan “Bilangan mana yang didekati $(x^2 + 1)$ saat x mendekati 2?” maka sama saja dengan mengatakan “tentukan hasil $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 1)$ ” dan tentu saja jawabannya 5. Untuk lebih jelasnya perhatikan Tabel

Tabel

x	1,997	1,998	1,999	2	2,001	2,011	2,111
$f(x) = x^2 + 1$	4,988	4,992004	4,996001	?	5,004001	5,044121	5,456321

Perhatikan tabel 1. Secara intuitif wajar orang akan menyimpulkan bahwa $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$ karena semakin x mendekati 2 maka $f(x)$ mendekati 5. Demikian juga apabila disajikan dalam gambar.



Namun apakah 5 benar-benar merupakan nilai limit fungsinya, tentu masih menjadi suatu pertanyaan. Bahasa sederhananya perlu bukti bahwa $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$. Inilah perlunya pendefinisian formal. Seorang matematikawan Perancis bernama Augustin-Louis Cauchy menyusun definisi tentang limit secara formal yang masih digunakan sampai sekarang sebagai berikut.

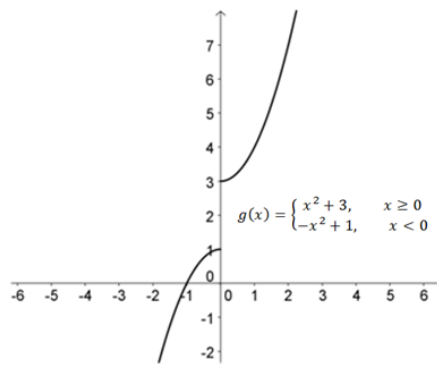
Definisi :

$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ secara formal didefinisikan sebagai: untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga $|f(x) - L| < \varepsilon$ untuk setiap $0 < |x - c| < \delta$.

Definisi ini sebenarnya sama dengan apa yang sudah dibahas sebelumnya yaitu sama saja mengatakan “ jika $x \rightarrow c$ maka $f(x) \rightarrow L$ ”. Keunggulan dari definisi formal ini adalah untuk keperluan pembuktian.

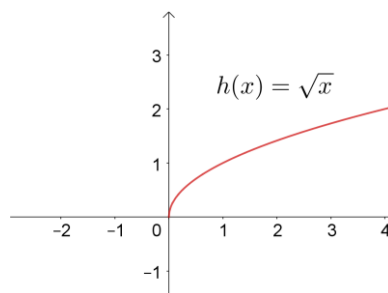
2. Limit kiri dan limit kanan

Seperti yang sudah disinggung pada bagian sebelumnya, saat pembahasan $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ maka yang dimaksud x mendekati c (ditulis: $x \rightarrow c$) adalah x mendekati c dari kiri ($x \rightarrow c^-$) dan juga mendekati x mendekati c dari kanan ($x \rightarrow c^+$). Sehingga $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ benar jika berlaku untuk $x \rightarrow c^-$ maka $f(x) \rightarrow L$ yang dinamakan sebagai limit kiri dan juga berlaku untuk $x \rightarrow c^+$ maka $f(x) \rightarrow L$ yang dinamakan limit kanan. Syarat ini dikenal orang sebagai limit kiri harus sama dengan limit kanan. Selanjutnya perhatikan grafik fungsi pada gambar berikut.



Dari gambar terlihat bahwa limit kiri tidak sama dengan limit kanan. Dengan demikian $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ tidak ada.

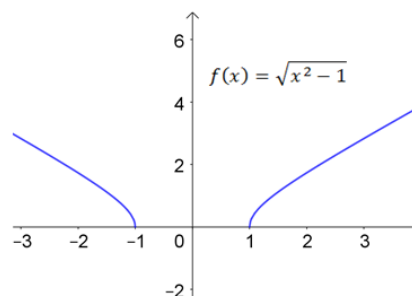
Hal penting yang tidak boleh dilupakan dalam pengertian limit ini adalah domain dari fungsi tersebut. Misalkan akan ditentukan hasil $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x}$. Domain fungsi $h(x) = \sqrt{x}$ adalah $D_h = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$. Dengan domain seperti ini jelas bahwa kita tidak akan berbicara mengenai limit kiri karena $h(x)$ tidak terdefinisi untuk $x < 0$. Oleh karena itu penyelidikan hanya untuk limit kanan. Perhatikan bahwa $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$.



Dengan demikian $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0$, meskipun hanya limit kanan saja yang dipertimbangkan.

Kemungkinan miskonsepsi dan penjelasannya:

Perhatikan grafik berikut.



Sangat mungkin banyak yang beranggapan bahwa $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x^2 - 1}$ tidak ada dengan alasan bahwa fungsinya terputus jauh. Atau mungkin $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x^2 - 1} = 0$ dengan alasan limit kiri sama dengan limit kanan yaitu 0. Dalam hal ini $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x^2 - 1} = 0$ benar, namun alasan limit kiri

sama dengan limit kanan adalah salah. Atau mungkin $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x^2 - 1}$ tidak ada, dengan alasan limit kiri tidak ada. Dalam hal ini alasan tidak ada adalah benar tetapi menyimpulkan limitnya tidak ada adalah salah.

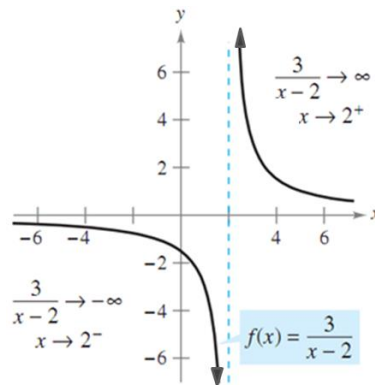
Perhatikan bahwa untuk $x \rightarrow 1$ pada fungsi tersebut, yang dibicarakan hanya untuk $x \rightarrow 1^+$ saja atau hanya limit kanan saja. Dengan demikian $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x^2 - 1} = 0$. Sama halnya untuk $\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{x^2 - 1}$ maka yang diselidiki hanya untuk x mendekati -1 dari arah kiri (ingat kembali domain fungsinya). Jadi hasilnya $\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{x^2 - 1} = 0$

3. Limit tak hingga dan limit di tak hingga

Penjelasan berkaitan limit tak hingga dan limit di tak hingga amat penting karena tidak jarang orang terbalik ketika membahas mengenai limit ini.

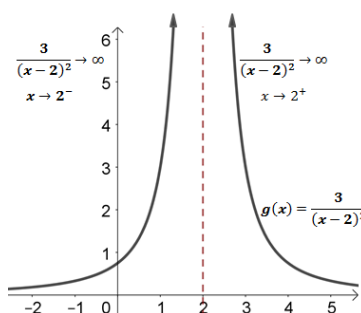
a. Limit tak hingga (*infinity limits*)

Pada bagian sebelumnya telah disajikan mengenai ketidakadaan limit suatu fungsi. Berikut akan disajikan ketidakadaan limit namun dengan cara pandang lain. Untuk mempermudah dimulai dari contoh. Perhatikan grafik $f(x) = \frac{3}{x-2}$.



Terlihat bahwa nilai $f(x)$ akan menuju positif tak hingga saat x menuju 2 dari arah kanan dan nilai $f(x)$ akan menuju negatif tak hingga saat x menuju 2 dari arah kiri. Kondisi ini menandakan bahwa $f(x)$ tidak menuju nilai tertentu jika x menuju 2. Dengan kata lain $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{x-2}$ tidak ada.

Bandingkan dengan grafik fungsi $g(x) = \frac{3}{(x-2)^2}$ berikut.



Jelas bahwa grafik nilai $g(x)$ akan menuju positif tak hingga baik x menuju 2 dari arah kanan maupun dari arah kiri. Artinya $\frac{3}{(x-2)^2} \rightarrow \infty$ saat $x \rightarrow 2$. Walaupun dalam hal ini $g(x)$ tidak menuju pada nilai atau bilangan tertentu saat x menuju 2, namun dalam kasus ini

$g(x)$ akan menuju tak hingga apabila x menuju 2. Inilah yang dinamakan limit tak hingga yang jika dituliskan menjadi $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{(x-2)^2} = \infty$. Coba bandingkan cara penulisannya. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{x-2}$ tidak ada, sementara $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{(x-2)^2} = \infty$. Sementara itu pendefinisian formal untuk limit tak hingga dinyatakan sebagai berikut.

Misalkan f suatu fungsi yang terdefinisi pada interval terbuka yang memuat c (boleh juga tidak terdefinisi di c) maka yang dimaksud dengan $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty$ adalah untuk setiap $M > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga $f(x) > M$ untuk $0 < |x - c| < \delta$.

Demikian pula untuk $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = -\infty$ pendefinisian formalnya adalah untuk setiap $N < 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga $f(x) < N$ untuk $0 < |x - c| < \delta$

Kemungkinan miskonsepsi dan penjelasannya:

Banyak yang menuliskan $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$. Hal ini dimungkinkan karena terinspirasi $\frac{1}{0} = \infty$. Padahal penulisan tersebut dua-duanya tidak benar. Penulisan yang benar adalah $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ tidak ada, dan $\frac{1}{0}$ tidak terdefinisi. Namun jika $\frac{1}{x}$ diganti dengan $\frac{1}{x^2}$ maka $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$. Sebagai tambahan catatan, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$ ini bukan berarti limitnya ada di tak hingga tetapi sekedar menyatakan bahwa jika x menuju 0 maka $f(x)$ menuju tak hingga. Dengan demikian sifat-sifat limit tidak bisa digunakan.

Miskonsepsi lain yang sering terjadi seperti contoh berikut.

Karena $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$ dan $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2x^2} = \infty$ maka $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\left(\frac{1}{2x^2}\right)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2x^2}} = \frac{\infty}{\infty} = 1$. Hal ini dikarenakan memaksakan sifat limit pada limit tak hingga yang sebenarnya tidak punya limit. Pengerjaan yang benar harusnya $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\left(\frac{1}{2x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} \cdot \frac{2x^2}{1}\right) = 2$. Oleh karena itu sebagai bentuk kehati-hatian jangan memperlakukan ∞ sebagai bilangan yang dapat dioperasikan..

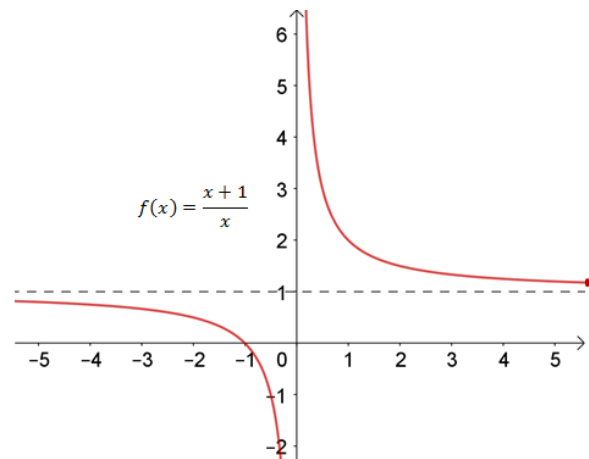
b. Limit di tak hingga (*limits at infinity*)

Limit di tak hingga sangat **berbeda** dengan limit tak hingga. Perbedaan utamanya terletak pada bilangan yang didekati dan hasil limitnya. Untuk limit tak hingga berkaitan dengan hasil limitnya ∞ , sementara untuk limit di tak hingga variabel independennya yang mendekati tak hingga. Coba bandingkan.

$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty \rightarrow$ disebut limit tak hingga

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L \rightarrow$ disebut limit di tak hingga

Untuk lebih jelasnya, perhatikan grafik fungsi $f(x) = \frac{x+1}{x}$ berikut.



Dengan mencermati grafik tersebut orang akan menyimpulkan bahwa $f(x) \rightarrow 1$ apabila $x \rightarrow \infty$. Dalam hal ini ditulis dengan $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x} = 1$. Sementara itu apabila disajikan dalam tabel maka gambarannya sebagai berikut.

x	1	5	10	20	10.000	10.000	100.000	$\rightarrow \infty$
$f(x)$	2	1,2	1,1	1,05	1,0001	1,0001	1,00001	$\rightarrow 1$

Dengan melihat kecenderungan nilai yang ada dalam tabel maka dapat disimpulkan $f(x)$ menuju 1 ketika x menuju ∞ . Dengan demikian $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x} = 1$. Apabila dicermati lebih lanjut, pernyataan x menuju tak hingga ($x \rightarrow \infty$) mengandung arti bahwa untuk setiap bilangan positif M selalu ada nilai x sehingga $x > M$. Demikian pula untuk x menuju negatif tak hingga ($x \rightarrow -\infty$) mengandung arti bahwa untuk setiap bilangan negatif N selalu ada nilai x sehingga $x < N$. Berdasarkan pemaknaan ini maka disusun definisi formal untuk limit di tak hingga sebagai berikut.

Misalkan L suatu bilangan real maka yang dimaksud dengan

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$$

adalah untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $M > 0$ sehingga jika $x > M$ berlaku $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Demikian pula untuk

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

artinya setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N < 0$ sehingga jika $x < N$ berlaku $|f(x) - L| < \varepsilon$

Kemungkinan miskonsepsi dan penjelasannya:

Ada sementara orang yang memproses pengerjaan limit seperti contoh berikut.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+3}{x+1} &= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} 2x+3}{\lim_{x \rightarrow \infty} x+1} \\ &= \frac{\infty}{\infty} \\ &= 1\end{aligned}$$

Kesalahan pengerjaan ini terjadi karena menggunakan sifat limit yang tidak tepat dan langsung menggunakan sifat $\frac{a}{a} = 1$ selanjutnya digunakan untuk menyimpulkan $\frac{\infty}{\infty} = 1$ (memperlakukan ∞ sebagai bilangan). Harusnya **tidak boleh** melakukan proses $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+3}{x+1} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} 2x+3}{\lim_{x \rightarrow \infty} x+1}$ karena sifat $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)}{\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)}$ berlaku jika $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ dan $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$ dua-duanya ada, dan syarat tambahan $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) \neq 0$. Langkah yang benar dalam pengerjaan soal ini sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+3}{x+1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x}{x} + \frac{3}{x}}{\frac{x}{x} + \frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{x}}{1 + \frac{1}{x}} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} 2 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x}}{\lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}} = \frac{2+0}{1+0} = 2\end{aligned}$$

4. Limit fungsi trigonometri

Pengertian limit fungsi trigonometri tidak ada beda dengan pengertian limit pada fungsi aljabar. Jadi $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, pemaknaannya tetap sama yaitu *jika x mendekati a maka f(x) akan mendekati L*, demikian pula pada definisi secara formalnya. Sebagai contoh $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}\pi} \sin x =$

1, pemaknaannya adalah *jika x mendekati $\frac{1}{2}\pi$ maka sin x akan mendekati 1*. Perhatikan disini bahwa untuk limit fungsi trigonometri maka variabel independennya (x) dalam satuan radian bukan dalam satuan derajat. Sehingga, misalkan diberikan $f(x) = x \sin x$, maka penyajian yang **benar**

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}\pi} (x \sin x) &= \frac{1}{2}\pi \cdot 1 \\ &= \frac{1}{2}\pi\end{aligned}$$

Sedangkan penyajian yang **salah** adalah

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 90^\circ} (x \sin x) &= 90^\circ \cdot 1 \\ &= 90^\circ\end{aligned}$$

Limit fungsi trigonometri khusus (*special trigonometric function limits*) yang paling sering dibahas dalam kurikulum sekolah adalah

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Dari hasil ini dapat diturunkan berbagai hasil limit fungsi trigonometri yang lain, dengan menggunakan sifat-sifat dan teorema limit.

Kemungkinan miskonsepsi dan penjelasannya:

Memandang limit fungsi trigonometri dalam satuan derajat. Sehingga

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x + 1) &= \cos 1^\circ \\ &= 0,9998\end{aligned}$$

Pengerjaan yang benar adalah

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x + 1) &= \cos 1 \\ &= 0,54 \quad (\approx \cos 57,3^\circ)\end{aligned}$$

Oleh karena itu, jika limit fungsi trigonometri dipandang sebagai satuan derajat, bagaimana hasil dari $\lim_{x \rightarrow a} (x + \cos x)$? Mungkinkah hasilnya $a^\circ + \cos a$?

5. Sifat-sifat dan teorema limit

Untuk menentukan nilai limit suatu fungsi, tidak harus kembali pada definisi limit, tetapi dapat memanfaatkan teorema atau sifat-sifat limit. Berikut ini beberapa sifat dan teorema terkait limit yang dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan limit.

Misalkan c suatu konstanta dan $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ serta $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ dua-duanya ada maka berlaku

- 1) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
- 2) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
- 3) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
- 4) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$ bila $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$
- 5) $\lim_{x \rightarrow a} cf(x) = c \lim_{x \rightarrow a} f(x)$
- 6) $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$
- 7) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^p = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^p$ bila p positif dan ruas kiri limitnya ada
- 8) $\lim_{x \rightarrow a} c = c$
- 9) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, jika $\frac{f(x)}{g(x)}$ dalam bentuk $\frac{0}{0}$ dan $f'(x)$ dan $g'(x)$ ada. (Teorema L'Hopital)
- 10) Untuk $f(x)$ suatu fungsi yang kontinu di a maka $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Beberapa contoh penggunaan sifat-sifat limit.

Contoh 1:

Tentukan hasil $\lim_{x \rightarrow 0} [(2x^2 + 1) + \sin x]$

Jawab:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} [(2x^2 + 1) + \sin x] &= \lim_{x \rightarrow 0} (2x^2 + 1) + \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x) \\ &= 1 + 0 \\ &= 1\end{aligned}$$

Contoh 2:

Tentukan hasil $\lim_{x \rightarrow 1} [2x^2 - x^3]$

Jawab:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} [2x^2 - x^3] &= \lim_{x \rightarrow 1} 2x^2 - \lim_{x \rightarrow 1} x^3 \\ &= 2 - 1 \\ &= 1\end{aligned}$$

Contoh 3:

Tentukan nilai $\lim_{x \rightarrow 2} \left[5x^2 \cdot \frac{1}{x^2+1} \right]$

Jawab:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \left[5x^2 \cdot \frac{1}{x^2+1} \right] &= \lim_{x \rightarrow 2} (5x^2) \cdot \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x^2+1} \right) \\ &= 20 \cdot \frac{1}{5} \\ &= 4\end{aligned}$$

Namun perhatikan untuk kasus berikut:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[2x \cdot \frac{1}{\sin x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} 2x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin x} \text{ (memanfaatkan sifat 3)}$$

Seperti kita ketahui ruas kiri hasilnya 2 sedangkan ruas kanan tidak terdefinisi. Mengapa demikian?

Contoh 4:

Diketahui $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, tentukan $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x}$.

Jawab:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin x}{x}} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} 1}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{1} = 1\end{aligned}$$

Contoh 5:

Tentukan nilai $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\frac{x^2-4}{x-2}}$

Jawab:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\frac{x^2-4}{x-2}} &= \sqrt{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2}} \\ &= \sqrt{4} \\ &= 2\end{aligned}$$

Kemungkinan miskonsepsi dan penjelasannya:

Contoh penggunaan sifat limit yang salah:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cdot \frac{1}{\sin x} \right) &= \left(\lim_{x \rightarrow 0} x \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin x} \right) \\ &= 0 \cdot \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin x} \right) \\ &= 0\end{aligned}$$

Kesalahan ini terjadi karena penggunaan sifat yang kurang cermat. Perhatikan bahwa $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)]$ tidak boleh dijadikan sebagai perlakuan $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ tanpa syarat semua limitnya ada. Kenyataan pada contoh tadi $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin x}$ tidak ada, sehingga tidak boleh menyajikan $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cdot \frac{1}{\sin x} \right) = \left(\lim_{x \rightarrow 0} x \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin x} \right)$

6. Bentuk tak tentu $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ dan $\infty - \infty$

Bentuk tak tentu $f(x)$ adalah tipe ekspresi dalam matematika yang diperoleh setelah ada substitusi bilangan yang didekati oleh variabel x (variable independen) ke dalam fungsi yang dicari nilai limitnya. Sebagai contoh:

- (i) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1}$. Limit ini memuat bentuk tak tentu $\frac{0}{0}$ sebab dengan mengganti $x = 1$ maka akan menghasilkan $\frac{1^2-1}{1-1} = \frac{0}{0}$
- (ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{x-1}$. Limit ini memuat bentuk tak tentu $\frac{\infty}{\infty}$ sebab dengan mengganti $x = \infty$ maka akan menghasilkan $\frac{2 \cdot \infty + 1}{\infty - 1} = \frac{\infty}{\infty}$
- (iii) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2+1} - (x-1)$. Limit ini memuat bentuk tak tentu $\infty - \infty$ sebab dengan mengganti $x = \infty$ maka akan menghasilkan $\sqrt{\infty^2+1} - (\infty - 1) = \infty - \infty$

Perlu diperhatikan bahwa $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ dan $\infty - \infty$ bukan suatu operasi pada bilangan melainkan hanya suatu bentuk (ekspresi). Dengan demikian tidak ada hasil pada bentuk itu.

Kemungkinan miskonsepsi dan penjelasannya:

Kesalahan yang sering terjadi dilakukan siswa maupun guru. Perhatikan perbedaan penulisan berikut:

Penulisan yang **salah** : $\frac{0}{0} = 1, \frac{\infty}{\infty} = 1, \infty - \infty = 0$

Penulisan yang **benar** : $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ dan $\infty - \infty$

7. Strategi Sederhana dalam Menyelesaikan Limit

Untuk menyelesaikan masalah limit dapat digunakan beberapa cara. Diantaranya sebagai berikut:

a. Limit fungsi $f(x)$ untuk x menuju nilai tertentu ($x \rightarrow a, a \in R$)**1) Substitusi langsung pada fungsinya.**

Misalkan ingin ditentukan hasil $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$. Jika $f(c)$ tidak menemui hasil “janggal” dalam arti tidak terdefinisi / tidak tentu / tak hingga, maka umumnya nilai limitnya adalah $f(c)$. Cara ini sejatinya sekedar memanfaatkan kekontinuan fungsi di titik c . Namun cara ini perlu pencermatan lebih lanjut, karena bila fungsinya tidak kontinu maka cara ini tidak bisa digunakan.

Contoh 1:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{3^2 - 4}{3 - 2} = 5$$

Contoh 2:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \left(\sqrt{\frac{x^2 - 2x}{x^3 + 1}} + x - 1 \right)^{\frac{x^2 - 1}{x - 1}} &= \left(\sqrt{\frac{2^2 - 2(2)}{2^3 + 1}} + 2 - 1 \right)^{\frac{2^2 - 1}{2 - 1}} \\ &= \left(\sqrt{\frac{0}{9}} + 2 - 1 \right)^3 = 1 \end{aligned}$$

Bedakan dengan contoh berikut.

Diberikan fungsi $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3}, & \text{untuk } x \neq 3 \\ 0, & \text{untuk } x = 3 \end{cases}$. Tentukan $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$

Jelas bahwa $f(3) = 0$, tetapi $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$.

Jadi tidak berlaku $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = f(3)$ walaupun $f(3)$ ada yaitu 0.

2) Substitusi memuat bentuk $\frac{0}{0}$.

Jika dengan substitusi langsung memuat bentuk $\frac{0}{0}$ maka dilakukan penyederhanaan sampai tidak memuat bentuk $\frac{0}{0}$. Cara ini sesungguhnya sekedar mengubah bentuk rasional menjadi bentuk lain sehingga mempunyai faktor yang sama di pembilang maupun di penyebut sehingga faktor yang sama ini dapat dihilangkan. Cara lain menggunakan *teorema L'hospital* apabila sudah dipelajari (lihat sifat limit). Untuk fungsi trigonometri, dapat digunakan identitas trigonometri yang sesuai.

Contoh 1:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x^2 - 3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x^2 + 3x + 9)}{(x - 3)(x + 3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 3x + 9}{x + 3} \\ &= \frac{9}{6} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Ingat: $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

Contoh 2:

$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3-64}{x^2-16}$ memuat bentuk $\frac{0}{0}$ karena $\frac{4^3-64}{4^2-16} = \frac{0}{0}$. Penyelesaiannya dapat menggunakan 2 cara yaitu:

$$(i). \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3-64}{x^2-16} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(x^2-4x+16)}{(x-4)(x+4)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x^2+4x+16)}{(x+4)} = 6$$

$$(ii). \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3-64}{x^2-16} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x^3-64)'}{(x^2-16)'} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2}{2x} = 6$$

Contoh 3:

$$\lim_{x \rightarrow 9} \sqrt{\frac{x-3}{x-9}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 9} \frac{(\sqrt{x}-3)'}{(x-9)'}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1}} = \frac{1}{2\sqrt{6}}$$

3) Substitusi memuat bentuk $\frac{k}{0}$ dengan $k \neq 0$.

Apabila dengan substitusi memuat bentuk $\frac{k}{0}$ dalam satu suku maka limit fungsi tidak ada atau menjadi limit tak hingga (∞). Namun cara ini tetap perlu pencermatan lebih lanjut dan kejelian.

Contoh:

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ tidak ada
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x^2} = \infty$

Kemungkinan **miskonsepsi dan penjelasannya:**

Miskonsepsi yang mungkin terjadi diantaranya sebagai berikut.

Pengerjaan yang salah:

Karena $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2}{2x-4} - \frac{x-1}{x-2} \right)$ memuat bentuk $\frac{k}{0}$ dengan $k \neq 0$ yaitu $\frac{2}{0} - \frac{1}{0}$ maka $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2}{2x-4} - \frac{x-1}{x-2} \right)$ tidak ada. Kesalahan ini terjadi karena sebenarnya ada dua suku yang memuat bentuk $\frac{k}{0}$ tetapi diabaikan.

Pengerjaan yang benar:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2}{2x-4} - \frac{x-1}{x-2} \right) &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2}{2x-4} - \frac{2x-2}{2x-4} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - (2x-2)}{2x-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4-2x}{2x-4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(-\frac{2x-4}{2x-4} \right) = -1 \end{aligned}$$

b. Limit fungsi $f(x)$ untuk x menuju tak hingga (*limits at infinity*)

1) Limit fungsi yang memuat bentuk $\infty - \infty$.

Limit fungsi yang memuat bentuk $\infty - \infty$ umumnya diselesaikan melalui cara mengalikan dengan sekawannya

Contoh 1:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \infty} (2x - \sqrt{4x^2 - x}) &= \lim_{x \rightarrow \infty} (2x - \sqrt{4x^2 - x}) \cdot \frac{(2x + \sqrt{4x^2 - x})}{(2x + \sqrt{4x^2 - x})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - (4x^2 - x)}{2x + \sqrt{4x^2 - x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2x + \sqrt{4x^2 - x}} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{x}}{\frac{2x}{x} + \sqrt{\frac{4x^2}{x^2} - \frac{x}{x^2}}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2 + \sqrt{4 - \frac{1}{x}}} \\
 &= \frac{1}{2 + \sqrt{4 - 0}} = \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

Contoh 2:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 7x} - \sqrt{x^2 - x}) &= \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 7x} - \sqrt{x^2 - x}) \cdot \frac{(\sqrt{x^2 + 7x} + \sqrt{x^2 - x})}{(\sqrt{x^2 + 7x} + \sqrt{x^2 - x})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 7x - (x^2 - x)}{\sqrt{x^2 + 7x} + \sqrt{x^2 - x}} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6x}{\sqrt{x^2 + 7x} + \sqrt{x^2 - x}} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6}{\sqrt{1 + \frac{7}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}} \right) \text{ [pembilang dan penyebut dibagi } x] \\
 &= \frac{6}{\sqrt{1+0} + \sqrt{1-0}} = 3
 \end{aligned}$$

2) Limit fungsi yang memuat bentuk $\frac{\infty}{\infty}$

a). Limit fungsi yang memuat bentuk $\frac{\infty}{\infty}$ dengan pembilang dan penyebut suatu polinomial, perlu memperhatikan

- Pangkat tertinggi variabel pembilang lebih besar dari penyebut maka limitnya ∞ atau $-\infty$

Contoh.

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x^2 + x - 5}{x^2 + 1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3}{x^2} - 2\frac{x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2} - \frac{5}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 2 + \frac{1}{x} - \frac{5}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} \\
 &= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} x - \lim_{x \rightarrow \infty} 2 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{x^2}}{\lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2}} \\
 &= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} x - 2 + 0 - 0}{1 + 0} = \infty
 \end{aligned}$$

- Pangkat tertinggi variabel penyebut lebih besar dari pangkat tertinggi variabel pembilang maka nilai limitnya nol

Contoh.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + x - 5}{x^3 + 1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2}{x^3} + \frac{1}{x} - \frac{5}{x^2}}{\frac{x^3}{x^3} + \frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{5}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2+0-0}{1+0} = 0\end{aligned}$$

- Pangkat tertinggi variabel pembilang sama dengan pangkat tertinggi variabel penyebut maka nilai limitnya adalah perbandingan koefisien variabel tertinggi dari pembilang dan penyebut

Contoh.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 2x^2 + x - 5}{2x^3 + 1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{5x^3}{x^3} - \frac{2x^2}{x^3} + \frac{x}{x^3} - \frac{5}{x^3}}{\frac{2x^3}{x^3} + \frac{1}{x^3}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{5}{x^3}}{2 + \frac{1}{x^3}} = \frac{5-0+0-0}{2+0} = \frac{5}{2}\end{aligned}$$

- b). Limit fungsi yang memuat bentuk $\frac{\infty}{\infty}$ dengan pembilang atau penyebut bukan polinomial

Cara penyelesaiannya sama dengan bagian a.) namun perlu kejelian lebih lanjut dalam menentukan pangkat tertinggi pembilang dan penyebutnya.

Contoh 1:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9x^4 - 2x^2 + x - 5}}{2x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9x^4 - 2x^2 + x - 5}}{2x^2 + 1} \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{x^4}}}{\frac{1}{\sqrt{x^4}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{9x^4}{x^4} - \frac{2x^2}{x^4} + \frac{x}{x^4} - \frac{5}{x^4}}}{\frac{2x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}} = \frac{\sqrt{9}}{2} = \frac{3}{2}.$$

Perhatikan bahwa khusus untuk $x \rightarrow \infty$ maka $\sqrt{9x^4 - 2x^2 + x - 5}$ dapat dipandang hanya $\sqrt{9x^4}$ saja (menghilangkan suku $-2x^2 + x - 5$). Mengapa demikian? Lihat Aktivitas. Dengan demikian pengerjaan menjadi lebih sederhana, yaitu

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9x^4 - 2x^2 + x - 5}}{2x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9x^4}}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9}x^2}{2x^2} = \frac{\sqrt{9}}{2} = \frac{3}{2}$$

Contoh 2.

Dengan mengingat contoh 1 maka

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x}{\sqrt{2x^4 - x - 5}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{\sqrt{2x^4}} = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

Contoh 3.

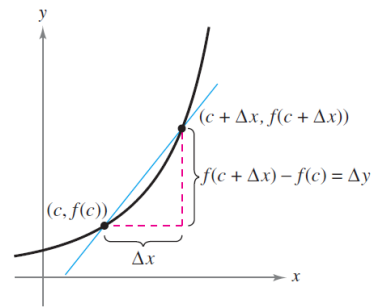
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^5 - 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^{\frac{5}{2}}} = 0$$

[pangkat tertinggi pembilang kurang dari pangkat tertinggi penyebut]

Bagian II Turunan dan Integral

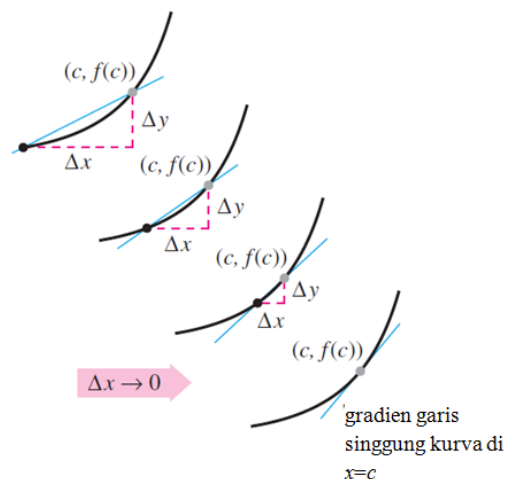
1. Pengertian Turunan

Jika berbicara mengenai kecepatan, percepatan, nilai maksimum dan minimum suatu fungsi maka sebenarnya kita sedang membahas mengenai turunan. Sementara itu turunan (secara definisi) adalah pengembangan dari konsep limit. Sebagai awal pembicaraan marilah kita memahami turunan sebagai gradien garis singgung. Perhatikan gradien garis (bukan garis singgung) yang memotong kurva $y = f(x)$ berikut.



Gardien garis $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}$.

Untuk $\Delta x \rightarrow 0$ dapat diilustrasikan seperti gambar berikut



Dengan demikian **gradien garis singgung** kurva di titik $(c, f(c))$ namakan m dapat dipahami sebagai formula

$$m = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}$$

jika nilai limitnya ada. Perhatikan bahwa m ini suatu bilangan, sehingga berlaku juga sifat-sifat dan operasi pada bilangan. Sebagai contoh, jika $m_1 < m_2$ dan $m_2 < m_3$ maka berlaku $m_1 < m_3$, dan sebagainya. Selanjutnya, misalkan fokus kita tidak pada satu titik, tetapi pada titik sembarang di domainnya maka formula di atas dapat dinyatakan sebagai suatu fungsi yang dilambangkan dengan $f'(x)$ dimana

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

jika limitnya ada. Bentuk terakhir inilah yang dinamakan **turunan** dari fungsi f pada domainnya. Mengingat penjelasan sebelumnya maka turunan fungsi f ini dapat dikatakan sebagai fungsi gradien garis singgung kurva f . Berkaitan dengan notasi ini, ada sebagian buku yang menyajikan $f'(x)$ sebagai $[f(x)]'$ atau $(f(x))'$

Contoh :

Tentukan turunan dari $f(x) = x^2$

Jawab:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 2xh + h^2) - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) \\ &= 2x \end{aligned}$$

2. Sifat-sifat dan Teorema Turunan

Ketika ingin menentukan turunan suatu fungsi, tentu saja tidak perlu harus kembali pada definisinya, tetapi dapat memanfaatkan teorema atau sifat-sifat pada turunan. Berikut ini beberapa sifat dan teorema terkait turunan serta beberapa hasil turunan yang sering digunakan.

- 1) $[x^n]' = nx^{n-1}$
- 2) $[cf(x)]' = c[f(x)]'$
- 3) $[f(x) \pm g(x)]' = [f(x)]' \pm [g(x)]'$
- 4) $[f(x) \cdot g(x)]' = [f(x)]'g(x) + f(x)[g(x)]'$
- 5) $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{[f(x)]'g(x) - f(x)[g(x)]'}{[g(x)]^2}$
- 6) $[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
- 7) $[e^x]' = e^x$
- 8) $[\ln|x|]' = \frac{1}{x}$
- 9) $[a^x]' = a^x \ln a$
- 10) $[\sin x]' = \cos x$
- 11) $[\cos x]' = -\sin x$
- 12) $[\tan x]' = \sec^2 x$

Contoh

Tentukan turunan dari $f(x) = x^2 - \frac{\sin x}{2x}$

Jawab:

Dengan memanfaatkan sifat turunan diperoleh

$$\begin{aligned} \left[x^2 - \frac{\sin x}{2x}\right]' &= [x^2]' - \left[\frac{\sin x}{2x}\right]' \\ &= 2x - \frac{2x \cos x - 2 \sin x}{4x^2} \end{aligned}$$

Contoh

Tentukan gardien garis singgung kurva $f(x) = \log x$ di titik (10,1)

Jawab:

Untuk menentukan gradien garis singgung di suatu titik, dapat dilakukan melalui definisi (menggunakan limit) atau dengan cara menentukan fungsi turunannya terlebih dahulu. Misalnya digunakan cara menentukan fungsi turunannya terlebih dahulu, maka

$$f'(x) = [\log x]' = \left[\frac{\ln x}{\ln 10} \right]' = \frac{1}{\ln 10} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln 10}$$

Berarti $f'(10) = \frac{1}{10 \ln 10}$.

Jadi gradien garis singgung di titik (10,1) adalah $\frac{1}{10 \ln 10}$

3. Integral Tak Tentu (*Indefinite Integral*)

Mengapa ada kata tak tentu? Misalkan kita ingin mencari fungsi F yang mempunyai turunan $f(x) = 3x^2$. Mungkin saja ada sebagian orang yang langsung menentukan $F(x) = x^3$ karena $F'(x) = 3x^2$. Tetapi jika diperhatikan lagi, masih banyak fungsi yang turunannya $3x^2$. Contoh $F_1(x) = x^3 + 1$, $F_2(x) = x^3 + 25$ mempunyai hasil turunan $F_1'(x) = 3x^2$ dan $F_2'(x) = 3x^2$. Tentu masih banyak lagi fungsi lain yang turunannya $f(x) = 3x^2$. Pengerjaan seperti ini dinamakan menemukan suatu antiturunan dari suatu fungsi. Proses menentukan fungsi $F(x)$ sedemikian hingga $F'(x) = f(x)$ dinamakan proses **antiturunan** atau **pengintegralan tak tentu**. Secara definisi dituliskan sebagai berikut.

Fungsi F dinamakan suatu antiturunan dari f pada interval I jika $F'(x) = f(x)$ untuk setiap x yang berada dalam interval I

Perlu menjadi perhatian bahwa kata “suatu” pada definisi tersebut amat penting, karena kata “suatu” itu menunjuk pada salah satu fungsi antiturunannya. Operasi untuk menentukan semua anti turunan $f(x)$ ditulis dengan simbol integral “ $\int$ ”. Jadi penyelesaian proses ini dituliskan sebagai

$$\int f(x) dx = F(x) + c.$$

Dengan melihat hubungan antara proses pengintegralan dengan proses turunan maka dapat dikatakan bahwa integral adalah invers dari turunan.

Contoh

- a. Diberikan $f(x) = x^2$, tentukan
- (i) suatu anti turunan dari $f(x)$
 - (ii) hasil dari $\int f(x) dx$

Jawab:

- (i) Karena yang diminta hanya menentukan suatu antiturunan, kita dapat dengan bebas memilih suatu fungsi yang turunannya x^2 , misalkan saja ambil fungsi $g(x) = \frac{1}{3}x^3 + 10$ maka $g(x)$ ini adalah suatu anti turunan dari $f(x)$.
- (ii) Untuk pertanyaan kedua, sebenarnya kita diminta menentukan semua fungsi yang turunannya x^2 . Jadi hasilnya adalah

$$\int f(x) dx = \frac{1}{3}x^3 + c \text{ dimana } c \text{ suatu konstanta}$$

b. Tentukan hasil dari

- (i) $\int (x^3 + 1)x dx$
- (ii) $\int (x^3 + \cos x + \sin x) dx$

Jawab:

$$(i) \int (x^3 + 1)x \, dx = \int (x^4 + x) \, dx = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^2 + c$$

$$(ii) \int (x^3 + \cos x + \sin x) \, dx = \frac{1}{4}x^4 + \sin x - \cos x + c$$

4. Strategi sederhana dalam menentukan hasil integral tak tentu

a. Sedapat mungkin disederhanakan (jika bisa dilakukan)

Contoh 1:

$$\int \frac{x^2-1}{x-1} \, dx = \int \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} \, dx$$

$$= \int (x+1) \, dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + x + c$$

Contoh 2:

$$\int (x+1) \left(\frac{1}{x^{-1}+2} + \frac{2}{x+2} \right) \, dx = \int (x+1) \left(\frac{2}{x^{-1}+2} \cdot \frac{x}{x} + \frac{1}{2x+1} \right) \, dx$$

$$= \int (x+1) \left(\frac{2x}{1+2x} + \frac{1}{2x+1} \right) \, dx$$

$$= \int (x+1) \cdot 1 \, dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + x + c$$

b. Jika ada faktor yang bentuk aljabarnya relatif sederhana, **hindari** untuk pemisalan

Contoh 1:

$$\text{Tentukan } \int x^2 \sqrt{x^3 + 7} \, dx$$

Perhatikan bahwa bentuk aljabar x^2 lebih mudah dari bentuk aljabar $x^3 + 7$. Oleh karena itu hindari pemisalan $u = x^2$. Gunakan pemisalan $u = x^3 + 7$.

$$du = 3x^2 dx \leftrightarrow dx = \frac{1}{3x^2} du.$$

Jadi

$$\int x^2 \sqrt{x^3 + 7} \, dx = \int x^2 \sqrt{u} \frac{1}{3x^2} du = \frac{1}{3} \int \sqrt{u} du = \frac{2}{9} u^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{9} \sqrt{(x^3 + 7)^3} + c$$

c. Untuk fungsi rasional, dengan mengubah fungsinya sebagai penjumlahan dengan penyebut faktor-faktornya umumnya akan membantu

Contoh :

$$\text{Tentukan } \int \frac{2}{x^2-x-2} \, dx$$

Perhatikan bahwa

$$\frac{2}{x^2-x-2} = \frac{2}{(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x-2)}{x^2-x-2} = \frac{(A+B)x+(A-2B)}{x^2-x-2}$$

Dari sini diperoleh $A = \frac{2}{3}$, $B = -\frac{2}{3}$. Sehingga

$$\begin{aligned} \int \frac{2}{x^2-x-2} \, dx &= \int \left(\frac{2}{3} \frac{1}{(x-2)} - \frac{2}{3} \frac{1}{(x+1)} \right) \, dx \\ &= \frac{2}{3} \ln(x-2) - \frac{2}{3} \ln(x+1) \end{aligned}$$

- d. Untuk kasus campuran (kombinasi) yang merupakan perkalian dua fungsi dimana salah satu fungsi bisa diturunkan terus sampai menghasilkan 0 dan fungsi yang lain selalu dapat ditentukan integralnya maka pengerjaannya dapat dilihat seperti pada contoh.

Contoh 1:

Misalnya akan ditentukan hasil dari $\int x^3 \cos 2x \, dx$.

Pengerjaan sebagai berikut:

Bagian Aljabar (diturunkan)		Bagian Transenden (diintegralkan)
x^3		$\cos 2x$
$3x^2$	+	$\frac{1}{2} \sin 2x$
$6x$	-	$-\frac{1}{4} \cos 2x$
6	+	$-\frac{1}{8} \sin 2x$
0	-	$\frac{1}{16} \cos 2x$

Jadi, diperoleh

$$\begin{aligned} \int x^3 \cos 2x \, dx &= x^3 \cdot \frac{1}{2} \sin 2x + 3x^2 \cdot \frac{1}{4} \cos 2x - 6x \cdot \frac{1}{8} \sin 2x - 6 \cdot \frac{1}{16} \cos 2x + c \\ &= \frac{1}{2} x^3 \sin 2x + \frac{3}{4} x^2 \cos 2x - \frac{3}{4} x \sin 2x - \frac{3}{8} \cos 2x + c \end{aligned}$$

Contoh 2:

Tentukan hasil $\int (x^2 - 1)x^3 \, dx$

Cara 1:

Pengerjaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \int (x^2 - 1)x^3 \, dx &= (x^2 - 1) \cdot \frac{1}{4} x^4 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{20} x^5 \right) + 2 \cdot \frac{1}{120} x^6 \\ &= \frac{1}{6} x^6 - \frac{1}{4} x^4 + c \end{aligned}$$

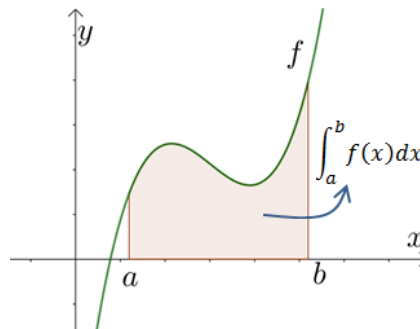
Cara 2:

$$\begin{aligned} \int (x^2 - 1)x^3 \, dx &= \int (x^5 - x^3) \, dx \\ &= \frac{1}{6} x^6 - \frac{1}{4} x^4 + c \end{aligned}$$

Selain strategi sederhana dalam menentukan integral, perlu diingat juga beberapa sifat-sifat dan rumus integral tak tentu seperti tertuang pada lampiran

5. Integral Tertentu (Definite Integral)

Sebenarnya cukup rumit untuk menjelaskan integral tertentu karena berkaitan dengan limit jumlah Riemann. Untuk mudahnya, pandang fungsi kontinu $f(x)$ pada interval tertutup $[a, b]$ seperti gambar berikut.



Dengan pengertian ini maka $\int_a^b f(x)dx$ merupakan area yang diarsir. Untuk menentukan nilainya digunakan partisi yang selanjutnya diperoleh limit jumlah Riemann. Misalkan limit tersebut L maka L bernilai positif jika berada di atas sumbu- x dan bernilai negatif jika berada di bawah sumbu- x . Sebagai catatan disini bahwa simbol " $\int$ " berbeda makna dengan simbol " $\int$ " pada antiturunan. Apa perbedaannya? Simbol " $\int$ " pada integral tertentu menghasilkan bilangan, sedangkan simbol " $\int$ " pada integral tak tentu menghasilkan keluarga fungsi.

Untuk menentukan hasil dari $\int_a^b f(x)dx$ tidak harus dengan partisi, bahkan penentuan nilai integral tertentu dengan partisi jarang digunakan karena sebenarnya jumlah Riemann hanya bermain pada tataran teoritis sehingga kemanfaatannya paling banyak pada ranah pembuktian dan terkait konsep lanjutan. Oleh karena itu untuk keperluan praktis gunakan Teorema Fundamental Kalkulus yang sudah cukup dikenal yang mengaitkan integral tertentu dan integral tak tentu, yaitu

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

dimana $F(x)$ adalah anti turunan dari fungsi kontinu $f(x)$ pada interval $[a, b]$.

Contoh 1:

Untuk menentukan hasil dari $\int_0^2 \frac{1}{2}x \, dx$, langkah pertama adalah menentukan anti turunan (*primitive*) dari $f(x) = \frac{1}{2}x$ yaitu

$$F(x) = \int \frac{1}{2}x \, dx = \frac{1}{4}x^2 + c$$

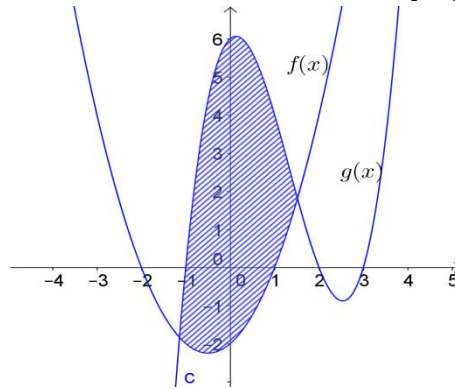
Dengan memakai TFK maka diperoleh

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x)dx &= F(2) - F(0) \\ &= \left[\frac{1}{4}2^2 + c \right] - \left[\frac{1}{4}0^2 + c \right] \\ &= 1 \end{aligned}$$

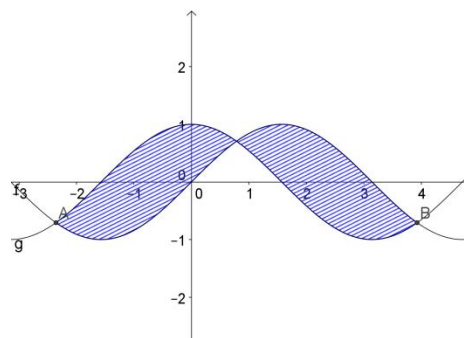
6. Menentukan luas daerah

Untuk menentukan luas daerah khususnya daerah yang dibatasi oleh dua grafik dilakukan dengan menghitung integral tertentu masing-masing kurva. Proses ini dapat dilakukan jika integral tak tentu sudah diperoleh. Untuk itu, gunakan cara-cara untuk menentukan integral tak tentu yang sudah dibahas pada bagian sebelumnya. Jika dua grafik membentuk kurva tertutup sederhana (misalkan fungsi f dan g) maka untuk menentukan luas daerah yang

dimaksud adalah dengan menentukan integral tertentu $f - g$ dengan batas integral titik-titik potongnya. Mengapa demikian? Uraian berikut akan memperjelas alasannya.

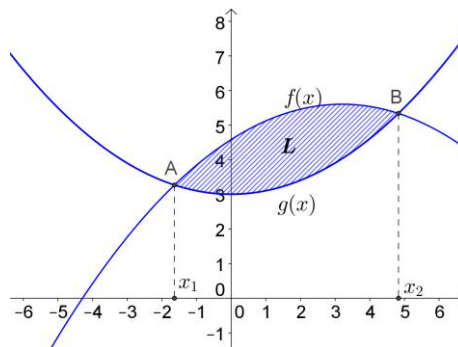


kurva tertutup sederhana



kurva tertutup tidak sederhana

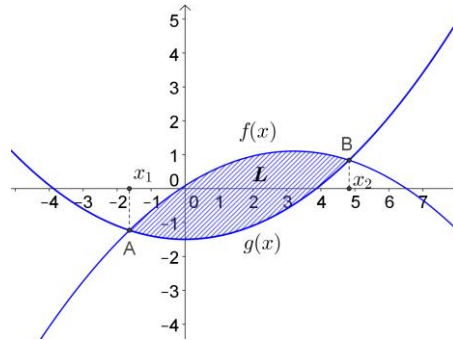
Diberikan fungsi f dan g seperti gambar di bawah ini.



Dengan memperhatikan grafik di atas jelas bahwa L dapat ditentukan dengan

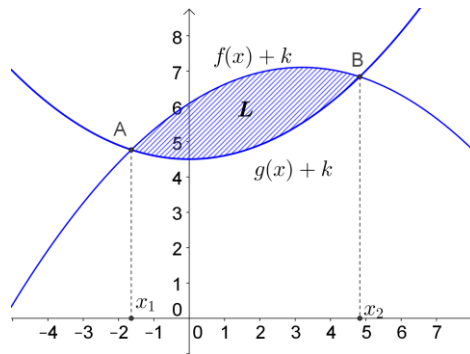
$$\begin{aligned} L &= \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx - \int_{x_1}^{x_2} g(x) dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} f(x) - g(x) dx \end{aligned}$$

Selanjutnya, untuk daerah berikut, apakah untuk menghitung luas juga dilakukan pengurangan seperti cara sebelumnya?



Apakah $L = \int_{x_1}^{x_2} f(x) - g(x) dx$?

Sekarang coba perhatikan bila kedua fungsi di atas masing-masing ditambah k sehingga luasnya berada di atas sumbu- x .



Perhatikan bahwa menambahkan k pada masing-masing fungsi tidak mengubah luas maupun absis titik potong kedua fungsi tersebut. Dengan demikian luas L adalah luas daerah dibawah kurva $f(x) + k$ dikurangi luas daerah dibawah kurva $g(x) + k$ dengan batas x_1 dan x_2 . Atau dalam bentuk integral dinyatakan dengan

$$L = \int_{x_1}^{x_2} (f(x) + k) dx - \int_{x_1}^{x_2} (g(x) + k) dx$$

Akibatnya,

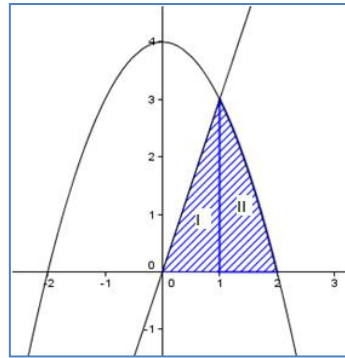
$$\begin{aligned} L &= \int_{x_1}^{x_2} (f(x) + k) dx - \int_{x_1}^{x_2} (g(x) + k) dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} ((f(x) + k) - (g(x) + k)) dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} (f(x) - g(x)) dx \end{aligned}$$

Berarti luas daerah yang dibatasi oleh kurva tertutup sederhana dimanapun letaknya dapat ditentukan dengan cara menghitung integral tertentu hasil pengurangan kurva pertama oleh kurva kedua (atau sebaliknya) dengan batas-batas titik potongnya.

Sedangkan untuk kurva tertutup tidak sederhana, menentukan luas harus memperhatikan bagian-bagian luasannya

Contoh

- a. Berapa luas daerah yang dibatasi oleh $y = 3x$, $y = -x^2 + 4$ dan sumbu- x ?



Jawab:

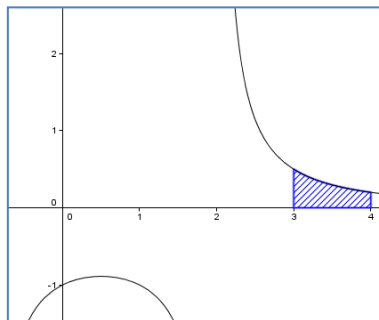
Untuk daerah I sangat mudah ditentukan luasnya yaitu $Luas I = 1\frac{1}{2}$. Sedangkan daerah II dihitung dengan menggunakan integral

$$\begin{aligned} Luas II &= \int_1^2 -x^2 + 4 \\ &= -\frac{1}{3}x^3 + 4x \Big|_1^2 \\ &= -\frac{1}{3}2^3 + 4(2) - \left(-\frac{1}{3}1^3 + 4(1)\right) \\ &= 1\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Sehingga,

$$Luas I + Luas II = 1\frac{1}{2} + 1\frac{2}{3} = 3\frac{1}{6}$$

- b. Hitunglah luas daerah yang dibatasi oleh $f(x) = \frac{1}{x^2 - x - 2}$, $x = 3$, dan $x = 4$ serta sumbu- x .



Jawab:

Untuk menentukan luas daerah yang diarsir, sama saja dengan menentukan hasil dari

$$\int_3^4 \frac{2}{x^2-x-2} dx.$$

$$\int_3^4 \frac{2}{x^2-x-2} dx = \frac{2}{3} \ln(x-2) - \frac{2}{3} \ln(x+1) \Big|_3^4$$

$$= \ln \frac{8}{5}$$

- c. Tentukan luas daerah yang dibatasi kurva $f(x) = 4 - x^2$ dan $g(x) = x + 2$

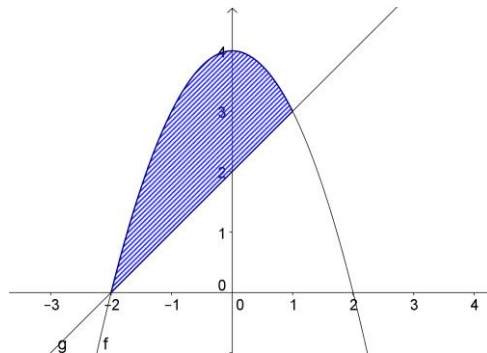
Jawab:

Ditentukan terlebih dahulu titik potongnya (dalam hal ini adalah batas integralnya).

$$4 - x^2 = x + 2$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$(x+2)(x-1) = 0 \rightarrow \text{titik potongnya } (-2,0) \text{ dan } (1,3).$$



Luas daerah yang dimaksud adalah

$$\begin{aligned} \int_{-2}^1 (f(x) - g(x)) dx &= \int_{-2}^1 ((4 - x^2) - (x + 2)) dx \\ &= -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x \Big|_{-2}^1 \\ &= 4\frac{1}{2} \end{aligned}$$

C. Aktivitas

Aktivitas 1

Ada seorang siswa mencoba menyelesaikan soal limit dan soal persamaan sebagai berikut.

(i) Soal tentang limit

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 \cdot (x+2)}{1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) \\ &= 4 \end{aligned}$$

(ii) Soal tentang persamaan

$$\begin{aligned}\frac{x^2 - 1}{x - 1} &= 2x \\ \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} &= 2x \\ x+1 &= 2x \\ 1 &= 2x - x \\ x &= 1\end{aligned}$$

tetapi, $x = 1$ bukan penyelesaian

persamaan tersebut

Cermati pekerjaan tersebut. Coba selidiki mengapa proses mencoret pada pengerjaan (i) boleh dilakukan tetapi proses mencoret pada pengerjaan (ii) tidak boleh dilakukan?

Aktivitas 2

Seorang siswa mengerjakan soal limit di bawah ini dengan hasil akhir 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+x} - 1}$$

Siswa tersebut langsung menduga 0 karena bagian pembilang ada unsur x dan kebetulan x menuju 0. Selidiki apakah hasil limitnya juga 0 dan apakah benar anggapan siswa tersebut?

Aktivitas 3

Pernahkah Anda mendengar seseorang mengatakan “limitnya tak hingga” atau “limitnya tidak ada”? Berkaitan dengan ini berikan penjelasan secara rinci bagaimana cara menulis hasil limit fungsi berikut.

- (i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x}$
 (ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x^2}$

Aktivitas 4

Pernahkah Anda mendengar limit tak hingga (*infinite limits*) dan limit di tak hingga (*limits at infinity*). Jelaskan perbedaan limit tersebut.

Aktivitas 5

Dalam menyelesaikan $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{16x^4 - 2x^2 + x - 5}}{2x^2 + 1}$, bolehkah kita “pandang” $\sqrt{16x^4 - 2x^2 + x - 5}$ sebagai $\sqrt{16x^4}$ saja (dengan menghilangkan suku $-2x^2 + x - 5$ di bawah akar) sehingga pengerjaan menjadi lebih sederhana? Selidiki dan jelaskan.

Aktivitas 6

Dalam menyelesaikan $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x - \sqrt{4x^2 - x})$, bolehkah kita “pandang” $\sqrt{4x^2 - x}$ sebagai $\sqrt{4x^2}$ saja (menghilangkan suku “ $-x$ ” di bawah akar) sehingga pengerjaan menjadi lebih sederhana? Selidiki dan jelaskan.

Aktivitas 7

Dengan menggunakan definisi turunan (melalui limit), tentukan turunan $f(x) = x^3$? Apa yang paling dirasa sulit dalam menentukan turunan tadi?

Aktivitas 8

Gambarlah sketsa grafik fungsi $f(x) = (x^2 - 1)^3$ dan tentukan titik-titik pada grafik tersebut dimana garis singgungnya mendatar. Apa yang unik dari grafik tersebut?

Aktivitas 9

Cermati pengerjaan dua yang berusaha menyelesaikan persoalan berikut

Orang 1:

Tentukan hasil dari $\int x^2 \sqrt{x^3 + 1} dx$.

Jawab:

Misalkan $t = x^3 + 1$, maka $dt = 3x^2 dx$ dan $x = t^{\frac{1}{3}}$ sehingga

$$\begin{aligned} \int x^2 \sqrt{x^3 + 1} dx &= \int t^{\frac{1}{3}} \sqrt{t} \cdot \frac{1}{3t^{\frac{2}{3}}} dt \\ &= \frac{1}{3} \int t^{\frac{1}{3}} t^{\frac{1}{2}} dt \\ &= \frac{1}{3} \int t^{\frac{5}{6}} dt \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{11} t^{\frac{11}{6}} + C \\ &= \frac{2}{11} t^{\frac{11}{6}} + C \end{aligned}$$

tidak bisa melanjutkan.

Orang 2:

Tentukan hasil dari $\int x^2 \sqrt{x^3 + 1} dx$.

Jawab:

Misalkan $t = x^3 + 1$, maka $dt = 3x^2 dx$ sehingga

$$\begin{aligned} \int x^2 \sqrt{x^3 + 1} dx &= \int \sqrt{t} \cdot \frac{1}{3} dt \\ &= \frac{1}{3} \int \sqrt{t} dt \\ &= \frac{1}{3} \int t^{\frac{1}{2}} dt \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + C \\ &= \frac{2}{9} t^{\frac{3}{2}} + C \end{aligned}$$

$$\text{Jadi } \int x^2 \sqrt{x^3 + 1} dx = \frac{2}{9} t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{9} (x^3 + 1)^{\frac{3}{2}} + C$$

Mengapa orang 1 tidak mampu menyelesaikan soal tetapi orang 2 mampu menyelesaikannya? Berikan penjelasan.

Aktivitas 10

Kerjakan soal berikut.

(i) $\int (\sin x + x^3) dx$

(ii) $\int_0^\pi (\sin x + x^3) dx$

Selanjutnya, jelaskan apa yang membedakan hasil (i) dan (ii).

Aktivitas 11

Dengan memanfaatkan TFK hitunglah

(i) $\int_0^2 x^2 dx$

(ii) $\int_{-1}^1 x^3 dx$

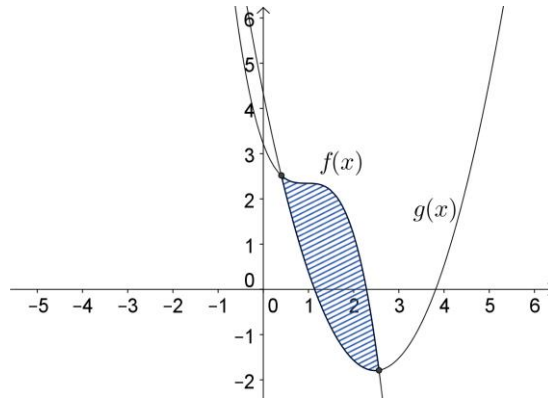
(iii) $\int_1^2 \frac{x^2+1}{\sqrt{x}} dx$

(iv) $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\sin x - \cos x) dx$

(v) $\int_0^1 (x^2 - 1)x^4 dx$

Aktivitas 12

Perhatikan luasan berikut.



Apakah luas daerah tersebut dapat dihitung secara langsung dengan

$\int_a^b [f(x) - g(x)] dx$ dengan a dan b absis titik potongnya? Jelaskan

Aktivitas 13

Karena hasil dari $\int_{-2}^2 x^5 dx = 0$ maka luas daerah yang dibatasi kurva x^5 , garis $x = -2$, garis $x = 2$ dan sumbu- x adalah 0. Setujukan Anda dengan pernyataan tersebut. Berikan penjelasan.

DAFTAR PUSTAKA

- Paul A. Foerester. 2005. *Calculus: Concepts and Applications*, California: Key Curriculum Press
- Robert Wrede & Murray Spiegel. 2010. *Advanced Calculus 3rd*. New York: McGraw-Hill Companies
- Ron Larson. 2006. *Calculus 3rd*. California: Key Curriculum Press
- , 2006. *Discovering Advanced Algebra: An Investigation Approach*. California: Key Curriculum Press
- Sullivan, 2012, *Precalculus 8th Ed*, Boston: Pearson Education, Inc.