

Edisi Nomor 35, November 2016

LIMAS

**IMPLEMENTASI KURIKULUM 2013
HEMBUSAN ANGIN SEGAR
BAGI EKSISTENSI PENDIDIK DAN PESERTA**

**MENGAPA KEMAMPUAN
MENGOMUNIKASIKAN GAGASAN PENTING
BAGI GURU MATEMATIKA?**

KONEKSI MATEMATIS

**INTEGRASI PENDIDIKAN
ETIKA BERLALU LINTAS (ELL)
PADA MATA PELAJARAN MATEMATIKA SMP**

TIM REDAKSI

Penanggung Jawab

Kasubbag Tata Usaha dan Rumah Tangga
Harwasono, S.Kom., MM.

Redaktur

Cahyo Sasongko, S.Sn.

Editor

Dra. Th. Widyantini, M.Si.
Dra. Pujiati, M.Ed.
Wiworo, S.Si., MM.
Agus Dwi Wibawa, S.Pd., M.Si.
Ashari Sutrisno, M.T.
Indarti, M.Ed.
Anang Heni Tarmoko, S.IP., M.Sn.

Grafis/Fotografer

Cahyo Sasongko, S.Sn.

Sekretariat

Agus Santoso
Siti Fatonah
Karwiyana

ALAMAT REDAKSI

Sub bagian TU dan RT

PPPPTK Matematika Yogyakarta

Jl. Kaliurang Km.6, Sambisari, Depok, Sleman,
D.I.Yogyakarta

 : (0274) 885725, 881717

 : (0274) 885752

 : www.p4tkmatematika.org

 : limas.p4tkmatematika@gmail.com

Diterbitkan : Pusat Pengembangan dan
Pemberdayaan Pendidik dan Tenaga
Kependidikan Matematika

Izin terbit :
No. 2426/Ditjen
PPG/STT/1998

DARI REDAKSI

Redaksi menerima tulisan atau artikel dari pembaca.

Artikel yang dimuat akan mendapatkan imbalan sepiantasnya, sedangkan yang tidak dimuat akan dikembalikan bila disertai perangko secukupnya. Redaksi berhak memperbaiki naskah yang akan dimuat tanpa mengubah makna/isi. Kritik atau saran dikirimkan langsung ke redaksi **LIMAS**



salam redaksi

Assalamualaikum wr wb

Syukur Alhamdulillah, Buletin LIMAS Edisi November No 35 dapat kami selesaikan dengan baik. Redaksi menyampaikan apresiasi yang tinggi kepada semua penulis yang telah berpartisipasi membagi pengetahuannya melalui Buletin LIMAS. Setelah melalui proses seleksi, Redaksi memutuskan untuk menerbitkan 12 artikel pada edisi tahun ini. Semoga tulisan yang diterbitkan dapat bermanfaat dan menambah wawasan bagi para pembaca sekalian. Kami tetap menunggu partisipasi dari semua khalayak untuk mengirimkan tulisan dengan tema yang terkait dunia matematika dan pendidikan matematika ke Buletin LIMAS. Saran dan kritik untuk menjadikan LIMAS lebih baik lagi kedepan tetap kami nantikan dari Anda semua. Terima kasih.

Wassalamualaikum wr wb

Sampul Depan



DAFTAR ISI



1 Daftar Isi

WAWASAN

2 Implementasi Kurikulum 2013 Hembusan Angin Segar bagi Eksistensi Pendidik dan Peserta Didik

7 Mengapa Kemampuan Mengomunikasikan Gagasan Penting bagi Guru Matematika?

12 Koneksi Matematis



19 Integrasi Pendidikan Etika Berlalu Lintas (ELL) Pada Mata Pelajaran Matematika SMP

27 Investigasi Atau Eksplorasi Dalam Pembelajaran Matematika (Bagian Pertama)



36 Menuju Pembelajaran Matematika Aktif dan Kreatif Bersama Si “Topi Pintar”

43 Menyelesaikan Soal Pemecahan Masalah dengan Strategi Bekerja Mundur

48 Belajar dengan Kalkulator Saintifik



53 Pembuktian Volume Piramida dengan Berbantuan GeoGebra



59 *The Napkin Ring Problem*

63 Aritmatika Mesir Kuno Sebagai Cara Alternatif dalam Menyelesaikan Perkalian dan Pembagian Bilangan Bulat

67 Cara Mudah Mengingat Rumus-rumus Trigonometri dengan Menggunakan Sentrig (Segi Enam Trigonometri)

Implementasi Kurikulum 2013 Hembusan Angin Segar bagi Eksistensi Pendidik dan Peserta

*) Ida Yulia

Direktorat Pembinaan SMA pada tahun 2016 memprogramkan pembinaan implementasi Kurikulum 2013 melalui kegiatan pelatihan dan pendampingan untuk Kurikulum 2013. Pelaksanaan pelatihan dan pendampingan tersebut dilakukan oleh Direktorat Pembinaan SMA dan LPMP (Lembaga Penjamin Mutu Pendidikan). Dalam rangka persiapan pelaksanaan pelatihan dan pendampingan Kurikulum 2013 Tingkat Kabupten/Kota, maka diadakanlah ToT Tim Pengembang Kurikulum 2013 (Instruktur Kabupaten/Kota Jenjang SMA). Selanjutnya ToT diselenggarakan di LPMP Sumatera Selatan.

Pelaksanaan kegiatan tersebut di atas dilatarbelakangi oleh keluarnya kebijakan penataan implementasi Kurikulum 2013 melalui Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan pada tahun 2014 melalui Permendikbud (Peraturan Menteri Pendidikan dan Kebudayaan) Nomor 160 Tahun 2014. Berdasarkan kebijakan yang dikeluarkan tersebut, maka implmentasi Kurikulum 2013 akan dilaksanakan secara bertahap mulai TP (Tahun Pelajaran) 2014/2015 Semester II hingga TP 2018/2019.

TP 2015/2016 jumlah SMA yang melaksanakan Kurikulum 2013 berjumlah 2.151 SMA yang tersebar di 34 provinsi dan 312 kabupaten/kota yang tersebar di seluruh wilayah Indonesia. Selanjutnya, TP 2016/1017 implemetasi Kurikulum 2013 diperluas menjadi 3.212 SMA atau sekitar 25% dari jumlah SMA yang ada. Penambahan jumlah SMA yang melaksanakan Kurikulum 2013 tersebut berjumlah 2.049 SMA.

Tambahan jumlah SMA sebagai sasaran pelaksana Kurikulum 2013 pada tahun anggaran 2016 diberikan pembinaan dalam bentuk pelatihan dan pendampingan Kurikulum 2013. Pelatihan Kurikulum

2013 dilaksanakan secara bertahap dimulai dari pelatihan IN (Instruktur Nasional) di Bumi Tapos Bogor, pada 10-13 Maret 2016, pelatihan IP (Instruktur Provinsi) di Jakarta pada 26-30 April 2016, pelatihan IK (Instruktur Kabupaten/Kota) di LPMP Sumatera Selatan, pada 20-25 Mei 2016, dan pelatihan GS (Guru Sasaran).

Dasar hukum penyelenggaraan ToT Tim Pengembang Kurikulum 2013 Tingkat Kabupaten/Kota (IK Jenjang SMA) Provinsi Sumatera Selatan tahun 2016 antara lain:

- (1) UURI (Undang-Undang Republik Indonesia) No.20 Tahun2003 tentang Sistem Pendidikan Nasional,
- (2) UURI No.14 Tahun 2005 tentang Guru dan Dosen,
- (3) UURI No.17 Tahun 2007 tentang Rencana Pembangunan Nasional Tahun 2005-2025,
- (4) PP (Peraturan Pemerintah) No.19 Tahun 2005 tentang Standar Nasional Pendidikan,
- (5) Permendikbud RI (Peraturan Menteri Pendidikan dan Kebudayaan) No.54 Tahun 2013 tentang Standar Kompetensi Kelulusan Pendidikan Dasar dan Menengah,
- (6) Permendikbud RI No. 160 tahun 2014 tentang Pemberlakuan K13 Tahun 2016,
- (7) Permendikbud RI No. 61 Tahun 2014 tentang Kurikulum Tingkat Satuan Pendidikan,
- (8) Permendikbud RI No.103 Tahun 2014 tentang Pembelajaran,
- (9) Permendikbud RI No.105 tentang Pendampingan Pelaksanaan K13 pada PendidikanDasar dan Menengah,
- (10) Permendikbud RI No.23 Tahun 2015 tentang Penumbuhan Budi Pekerti,
- (11) Permendikbud RI No.53 Tahun 2015 tentang Penilaian Hasil Belajar.

Dari pelaksanaan ToT Tim Pengembang Kurikulum 2013 Tingkat Kabupaten/ Kota Instruktur Kabupaten Kota Jenjang SMA terdapat banyak hal yang didapat sebagai angin segar yang bertiup untuk pendidik dan peserta didik. Hal-hal tersebut adalah sebagai berikut.

Pertama, Gerakan Penumbuhan Pendidikan Budi Pekerti di Sekolah merupakan pembelajaran pertama yang disampaikan dalam kegiatan diklat. Pada bagian ini peserta didik dan pendidik diharapkan untuk saling menjaga keteladan atau suriteladan yang baik. Pendidik memberikan contoh nyata dalam kegiatan pembiasaan yang baik di sekolah. Selanjutnya, menjaga konsistensi antara perkataan dengan perbuatan. Sebagai penilaian budi pekerti yang harus diciptakan kepada peserta didik yang memilai adalah pendidik Mapel (Mata Pelajaran) PPKn dan Pendidikan Agama, sebagai suplemen pengetahuan.

Tujuan dari Gerakan Penumbuhan Pendidikan Budi Pekerti adalah menjadikan sekolah sebagai taman belajar, menumbuhkembangkan kebiasaan yang baik sebagai bentuk pendidikan karakter, menumbuhkembangkan lingkungan budaya belajar yang serasi antara sekolah, keluarga, dan masyarakat. Proses penumbuhan pendidikan budi pekerti dilaksanakan selama tiga tahun pembelajaran.

Kedua, Pembelajaran Aktif atau *Active Learning* merupakan pembelajaran yang wajib diciptakan oleh pendidik kepada peserta didiknya. Hal ini dilakukan agar dapat mengubah pola pikir peserta didik dari yang tidak tahu menjadi tahu. Selain itu, dalam proses pembelajaran diharapkan dapat menggali dimensi pengetahuan, dimensi tingkat berpikir, dan dimensi keterampilan, dan yang paling penting adalah dimensi sikap dan tingkah laku peserta didik. Dimensi sikap merupakan bagian terpenting dalam pembelajaran aktif dalam sikap sosial dan spiritual yang dapat dilakukan peserta didik. Hal ini dapat dinilai melalui observasi secara tidak langsung dengan catatan jurnal sebagai deskripsi sikap.

Ciri Pembelajaran Aktif yang dilakukan adalah menggerakkan semua anggota tubuh peserta didik untuk mencapai kompetensi yang akan dikuasai

dari yang tidak tahu menjadi tahu, dengan cara atau melalui hasil menyimpulkan dalam pembelajaran. Pendidik dalam pembelajaran aktif berperan sebagai fasilitasi/sarana alat dalam proses pembelajaran.

Ketiga, Dinamika Perkembangan Kurikulum 2013 merupakan bagian terpenting dalam pelaksanaannya. Penerapan SI (Standar Isi), SK (Standar Kompetensi), KD (Kompetensi Dasar), dan IPK (Indikator Pencapaian Kompetensi) merupakan urutan penting bagi pelaksanaan pembelajaran yang dilakukan. Sikap, pengetahuan, dan keterampilan merupakan kompetensi peserta didik yang harus dikembangkan, digali, dan dinilai.

Penilaian sikap dilaksanakan melalui observasi, jurnal, penilaian diri, dan penilaian teman. Observasi dan jurnal merupakan penilaian utama untuk penilaian rapot, penilaian dilakukan selama 24jam yang bersifat sosial dan religius yang dilakukan oleh peserta didik. Penilaian dengan huruf A, B, C, atau D. Penilaian Diri dan Penilaian Teman sebagai unsur penunjang selama satu semester. Bila tidak ada catatan berarti nilai sikap siswa B, bila ada catatan sikap baik maka diberi nilai A, apabila ada catatan nilai sikap yang kurang baik dinilai C selanjutnya diperbaiki dengan sikap setelah diberikan bimbingan, bila ada perubahan menjadi lebih baik maka dinilai B. Nilai sikap untuk rapot diambil dari modus nilai yang telah tersedia dari penilaiannya.

Penilaian pengetahuan dilakukan melalui Penilaian Harian (Tes Lisan, Tes Tertulis, dan Penugasan) dan Penilaian Akhir Semester. Nilai pengetahuan untuk rapot diambil secara rata-rata dari tiap KD yang harus dikuasai oleh peserta didik. Sebagai contoh pembelajaran Bahasa Indonesia Kelas X, Semester I terdapat sembilan KD maka nilai nilai pengetahuan diambil rata-ratanya dari KD1-9.

Penilaian keterampilan diambil dari rata-rata optimum kompetensi yang dicapai oleh peserta didik. Penilaian keterampilan peserta didik diambil dari penilaian praktik, produk, proyek, dan portofolio. Penilaian sikap, pengetahuan, dan keterampilan dalam pembelajaran dilakukan dengan cara penilaian Autentik.

Model pembelajaran Saintifik (5 M) sebagai ciri Kurikulum 2013 dapat berkolaborasi dengan model-model pembelajaran yang lain. Model pembelajaran yang dimaksud harus disesuaikan dengan IPK yang ingin dicapai dalam pembelajaran. Selain itu, 5M tidak harus berurutan hadir dalam pembelajaran dan tidak harus hadir semua 5M-nya. Dalam proses pembelajaran digunakan konsep *ubah pengumuman menjadi penemuan, ubah hujatan menjadi pujian*. Peserta didik diajak pendidik untuk melakukan pembelajaran yang aktif dan menyenangkan. Pendidik harus mencatat yang akan diajarkan dan harus mengajarkan yang dicatat. Hal ini maksudnya pendidik harus mempersiapkan proses pembelajaran yang dapat mengaktifkan peserta didik.

KKM (Kriteria Ketuntasan Minimal) setiap Mapel dalam tingkat pendidikan diusahakan untuk sama semua Mapel. Hal ini agar kriteria penilaian akan sama untuk mempermudah mengkategorikan predikat A, B, C, atau D yang didapat oleh peserta didik. Akan tetapi, hal ini harus dipersiapkan dan dimusyawarahkan berdasarkan rapat pendidik dalam satu sekolah. Kesamaan nilai KKM untuk tiap Mapel agar nilai ketuntasan yang harus dicapai juga menjadi sama.

Kesamaan nilai KKM untuk tiap Mapel pun memberikan dampak positif bahwa tidak ada lagi anggapan Mapel yang sulit mencapai KKM dan Mapel yang dianggap mudah untuk mencapai KKM. Semua Mapel yang ada sama dalam hal untuk mencapai ketuntasannya. Nilai KKM sekolah minimal 55. Seperti contoh menurut beberapa pendidik bahwa Mapel Bahasa Indonesia dianggap lebih mudah, maka nilai KKM-nya harus lebih besar dari KKM Mapel Matematika yang dianggap sulit. Hal ini tidak berlaku lagi. Termasuk juga pada saat kenaikan kelas. Semua Mapel dianggap sama pentingnya.

Pengembangan Mapel dengan muatan lokal (pemanfaatan ciri khas daerah/lingkungan sekolah) dan aktualisasi kepramukaan (kecakapan umum dan SKU), serta pengembangan budaya daerah (kebiasaan khas daerah) merupakan ciri khusus yang penting. Selain itu, harus dikembangkan dan dimanfaatkan dalam implementasi Kurikulum 2013.

Keempat, GLS (Gerakan Literasi Sekolah) adalah gerakan khusus yang dikembangkan dalam Kurikulum 2013 kepada peserta didik untuk memiliki kemampuan membaca dan menulis. Pendidik sebagai Literan yang dapat memberikan motivasi dan memberikan fasilitas agar peserta didik gemar membaca dan menulis. Selain itu, pendidik diharapkan menjadi teladan untuk GLS. GLS dapat dilakukan dengan menyediakan ruang baca di dalam setiap kelas selain perpustakaan sekolah.

GLS dapat pula dilaksanakan dengan menyediakan buku-buku bacaan bagi peserta didik. Ketersediaan buku-buku bacaan dapat memberikan dorongan bagi peserta didik untuk membaca. Selanjutnya, setelah buku-buku dibaca dan diberikan kegiatan untuk membuat resensi atau menulis ringkasan/rangkuman. Lanjutan kegiatan ini adalah menceritakan kembali secara lisan ataupun tulisan.

Prinsip GLS adalah disesuaikan dengan usia atau tingkatan peserta didik dan kegiatan yang dilaksanakan secara berkelanjutan. Bagi peserta didik dan pendidikan di sekolah agar pelaksanaan GLS terlaksana diwajibkan untuk menyediakan waktu 15 Menit untuk membaca. Kegiatan ini diusahakan agar sekolah dijadikan taman yang indah sebagai tempat membaca. GLS diusahakan agar melibatkan seluruh warga sekolah. Pada akhirnya GLS menjadikan peserta didik senang membaca dan membaca sebagai kebutuhan.

Kelima, Peran Keluarga dalam Pembelajaran Peserta Didik merupakan hal penting sebagai bagian dari implementasi Kurikulum 2013. Kemitraan antara sekolah dan keluarga sangat berperan penting. Pentingnya kemitraan tersebut adalah a) banyak keluarga menyerahkan tanggung jawab pendidikan di sekolah, b) tidak semua kebutuhan pendidikan peserta didik dapat dipenuhi keluarga dan satuan pendidikan, c) peran sekolah adalah membantu keluarga agar pelaksanaan lebih sistematis sehingga memperoleh pengarahan dari pihak yang berkepentingan, d) kerjasama keluarga dengan satuan pendidikan/sekolah mutlak diperlukan, e) satuan pendidikan wajib mendorong kemitraan dan pelibatan keluarga dalam memajukan pendidikan peserta didik.

Bagi pendidik ditanamkan bahwa tidak ada peserta didik yang nakal, yang ada hanya minta diperhatikan. Selain itu, tidak ada peserta didik yang bodoh, yang ada hanya lambat dalam memproses sesuatu. Ancaman yang ditakuti bagi peserta didik adalah kekerasan verbal, pornografi, paham radikal, narkoba, dan amoral. Bekal yang dapat diberikan kepada peserta didik adalah keimanan dan ketaqwaan.

Tahapan pembinaan keluarga hebat yang dapat dijadikan kemitraan sekolah adalah strategi, program, dan mode pembinaan. Tiga hal ini disebut trisentra adalah keluarga, sekolah, dan masyarakat. Indikator pelibatan keluarga di sekolah adalah kesepakatan. Pembinaan hubungan trisentra berupa kegiatan gorong royong, saling melengkapi, saling memperkuat, saling asah, asih, dan asuh.

Keenam, Pelatihan dan Pendampingan Implementasi Kurikulum 2013 Tingkat SMA merupakan rangkaian kegiatan yang berkelanjutan. Bahan pelatihan diberikan kepada IN, IP, IK, dan GS/SS (Guru Sasaran/Sekolah Sasaran). Kriteria instruktur yang digunakan dalam istilah adalah TPK (Tim Pengembang Kurikulum), Guru, Kepala Sekolah, Pengawas, dan Manajemen. Semua unsur tersebut akan manerima Matum (Materi Umum) dan Mapok (Materi Pokok untuk tiap Mapel). Kriteria pelaksana Kurikulum 2013 sekolah terakreditasi A atau B, mendapat dukungan secara internal dan eksternal, memiliki sarana dan prasarana, seperti laboratorium, rombongan, perpustakaan, dan ruang belajar.

Kegiatan pendampingan Implementasi Kurikulum 2013 tersebut akan dilanjutkan dengan IHT (in house training) dengan sekolah induk kluster dan klusternya. Tujuan kegiatan ini adalah a) memperluas sasaran dan meningkatkan pemahaman substansi Kurikulum 2013 untuk warga sekolah, b) meningkatkan keterampilan teknis implementasi Kurikulum 2013 di sekolah, c) menggerakkan ekosistem sekolah sasaran implementasi K13.

Setelah IHT dilaksanakan, maka akan dilanjutkan dengan ON I selama dua hari. Pendamping atau IK akan mendatangi sekolah Kluster, GS akan mendapatkan materi pembelajaran tentang K13. Kemudian akan dilaksanakan IN I, pada

kegiatan ini akan dilakukan pembahasan evaluasi atau pembahasan masalah yang dihadapi dalam ON I yang telah dilaksanakan. Hal yang dilakukan adalah merumuskan perbaikan untuk ON 2 dengan berkumpul di sekolah Induk Kluster. Pada kegiatan ON 2 dilakukan penerapan perbaikan yang disusun pada IN 1. Selanjutnya, dilaksanakan IN 2 dengan Monev (Monitoring dan Evaluasi) untuk seluruh kegiatan yang telah dilakukan.

Enam materi umum di atas merupakan bagian penting yang harus diketahui dan dipahami oleh sekolah yang melaksanakan Kurikulum 2013. Selain itu, terdapat Mapok untuk tiap pelajaran yang terdapat dalam tingkat pendidikan. Mata pelajaran pokok yang penting diperhatikan dalam implementasi K13 adalah sebagai berikut.

Hal yang harus diperhatikan oleh Pendidik Mapel adalah a) mengidentifikasi perubahan konsep yang dipakai dalam K13, b) menganalisis kompetensi pembelajaran dan penilaian, c) merancang RPP, melaksanakan pembelajaran dan penilaian, d) melakukan pengelolaan penilaian, dan e) melakukan pelaporan penilaian hasil belajar peserta didik. Dalam pembelajaran, pendidik tidak menggunakan metode ceramah dan hafalan.

IPK merupakan tolak ukur pencapaian kompetensi untuk peserta didik yang mengacu pada Silabus, KD, KI, dan SKL. Penyusunan IPK dilaksanakan oleh pendidik dengan mencermati kata kerja domain tingkat berpikir yang selaras dengan pembelajaran aktif. Taksonomi Anderson merupakan acuan yang dipakai dalam penyusunan IPK untuk K13. Sintak dimensi pengetahuan yang terkandung dalam IPK adalah konseptual, faktual, prosedural, dan metakognitif. Sedangkan taksonomi kognitif Anderson adalah LOTS (low order thinking skill) yang ditandai dimendi proses berpikir mengingat, memahami, dan menerapkan, dan HOTS (high order thinking skill) yang terdiri atas menganalisis, mengevaluasi, dan mencipta.

Penyusunan RPP untuk tiap Mapel sesuai dengan Permen 103 Tahun 2015 yang terdiri dari tujuh komponen. Pembelajaran aktif dengan prinsip pemberdayaan dan pembudayaan dengan menggali

potensi peserta didik. Pendidik mengupayakan belajar menjadi budaya atau kebiasaan bagi peserta didiknya. Keteladanan pendidik merupakan contoh nyata untuk peserta didik. Optimalisasi IPK agar terjadi interaksi antara pendidik dan peserta didik dalam pembelajaran merupakan hal yang penting. Interaksi pendidik dan peserta didik harus memperhatikan hal-hal berikut: a) memberi penghargaan kepada peserta didik, b) memberi pengalaman, c) mengaplikasikan aktivitas dan kreativitas, d) mendorong ekosistem sekolah berbasis pengetahuan, e) menyajikan pembelajaran menantang, dan e) memotivasi peserta didik dalam pembelajaran.

Ketuntasan dalam pembelajaran diputuskan sesuai dengan KKM yang telah ditetapkan oleh

sekolah melalui rapat sekolah. Laporan akhir tahun untuk tingkat pendidikan dengan memenuhi syarat kenaikan kelas yang telah ditetapkan untuk tiap jenjang/tingkat pendidikan. Laporan tersebut dilaporkan pula melalui aplikasi elektronik langsung secara *on line* melalui operator sekolah ke Kemdikbud RI. Nilai-nilai hasil yang diperoleh peserta didik dilaporkan setiap akhir semester.

Demikian hembusan angin segar bagi pendidik dan peserta didik dalam implementasi Kurikulum 2013. Semoga memberikan informasi tambahan untuk pendidik dan peserta didik, keluarga serta masyarakat. Salam Kurikulum 2013 Maju Bersama, Hebat Bersama.

*) Ida Yulia, M.Pd.

Peserta ToT TPK 2013 IK Mapel Bahasa Indonesia, Pendidik SMAN 1 Indralaya Selatan, Kab. Ogan Ilir.



Sumber gambar: <http://www.jawapos.com/>

Mengapa Kemampuan Mengomunikasikan Gagasan Penting bagi Guru Matematika?

*) Puji Iryanti

Pernahkah Anda meminta siswa menyelesaikan soal atau pertanyaan tertentu tetapi jawaban siswa tidak Anda pahami atau sangat berbeda dengan apa yang diharapkan? Jika itu terjadi apa yang Anda lakukan? Daripada marah-marah kepada siswa, lebih baik Anda melakukan refleksi. Ada kemungkinan kejadian seperti ini disebabkan oleh komunikasi yang belum baik.

Komunikasi antara guru dan siswa memegang peranan penting dalam pembelajaran. Kata komunikasi berasal dari bahasa Inggris “communication” yang dalam bahasa Latin *commūnicāre* artinya membagikan. Menurut *en.oxforddictionaries.com*, arti *communication* adalah “*the imparting or exchanging of information by speaking, writing, or using some other medium*” atau dapat dikatakan komunikasi adalah pertukaran informasi melalui berbicara, menulis atau menggunakan media lainnya. Dikutip dari Wikipedia, Harold Dwight Lasswell (1902–1978) dalam bukunya “The Structure and Function of Communication in Society” mengatakan “*a convenient way to describe an act of communication is to answer the following questions: Who, Says What, In Which Channel, To Whom, With What Effect?*” Dari pernyataan ini, dapat ditafsirkan “who” adalah siapa yang mengatakan, “says what” adalah apa yang dikatakan, “in which channel” adalah media apa yang digunakan, “to whom” adalah kepada siapa dan “with what effect” adalah apa pengaruh pesan. Dengan kata lain unsur-unsur penting dalam komunikasi adalah pemberi pesan, pesan, media, penerima pesan dan pengaruh pesan.

Di dalam pembelajaran, guru dan siswa melakukan komunikasi verbal dan tulisan. Pentingnya berkomunikasi dalam proses pembelajaran matematika ini dikuatkan oleh NCTM (*National Council of Teachers of Mathematics*) dengan memasukkan komunikasi sebagai salah satu unsur

dalam Standar Proses pembelajaran matematika sekolah. Mengenai komunikasi dalam pembelajaran matematika, NCTM menyatakan sebagai berikut.

Instructional programs from prekindergarten through grade 12 should enable each and every student to

- *Organize and consolidate their mathematical thinking through communication*
- *Communicate their mathematical thinking coherently and clearly to peers, teachers, and others*
- *Analyze and evaluate the mathematical thinking and strategies of others*
- *Use the language of mathematics to express mathematical ideas precisely.*

NCTM menekankan bahwa program pengajaran mulai dari usia dini sampai kelas 12 dirancang sehingga membuat setiap siswa mampu:

- mengorganisasi dan memperkuat pemikiran matematika melalui komunikasi.
- **mengomunikasikan pemikiran matematika secara koheren dan jelas kepada sesama siswa, guru, dan orang lain.**
- menganalisa dan mengevaluasi pemikiran dan strategi matematika orang lain
- menggunakan bahasa matematika untuk mengekspresikan ide-ide matematika dengan tepat.

Seperti juga NCTM, kurikulum Indonesia juga menyadari pentingnya komunikasi dalam pembelajaran matematika sebagaimana dinyatakan dalam tujuan pembelajaran matematika nomor d

Peraturan Menteri Pendidikan Nasional (Permendiknas) nomor 22 tahun 2006 berikut ini.

- a. Memahami konsep matematika, menjelaskan keterkaitan antar konsep dan mengaplikasikan konsep atau algoritma secara luwes, akurat, efisien, dan tepat dalam pemecahan masalah.
- b. Menggunakan penalaran pada pola dan sifat, melakukan manipulasi matematika dalam membuat generalisasi, menyusun bukti, atau menjelaskan gagasan dan pernyataan matematika.
- c. Memecahkan masalah yang meliputi kemampuan memahami masalah, merancang model matematika, menyelesaikan model dan menafsirkan solusi yang diperoleh.
- d. Mengomunikasikan gagasan dengan simbol, tabel, diagram, atau media lain untuk memperjelas keadaan maupun masalah.**
- e. Memiliki sikap menghargai kegunaan matematika dalam kehidupan yaitu memiliki rasa ingin tahu, perhatian, dan minat dalam mempelajari matematika, serta sikap ulet dan percaya diri dalam pemecahan masalah.

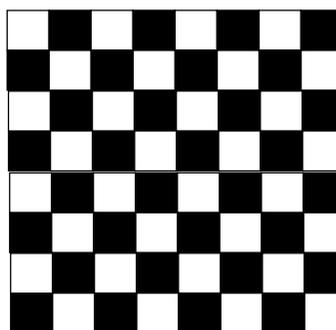
Berkaitan dengan komunikasi tertulis dalam kelas matematika, pemberi pesan yang dimaksud di sini adalah guru, sedangkan penerima pesan adalah siswa. Pesan tertulis yang dimaksudkan adalah penyelesaian masalah matematika yang dikomunikasikan menggunakan beragam media, antara lain melalui papan tulis atau media elektronika dan sebagainya. Pengaruh pesan ini ternyata sangat berbeda ketika siswa mendapatkan langsung dari guru di kelas dibandingkan ketika siswa mempelajarinya lagi melalui catatannya. Pesan yang langsung dari guru lebih mudah dipahami karena didampingi dengan penjelasan verbal sedangkan ketika siswa mempelajari lagi seringkali mereka bingung karena hanya berhadapan dengan simbol-simbol atau gambar-gambar tanpa disertai penjelasan yang perlu tentang simbol-simbol atau gambar-gambar itu. Seringkali mereka sudah lupa dengan penjelasan verbal dari guru yang disampaikan di kelas.

Masalah lain bagi siswa adalah ketika guru menganggap siswa dapat memahami dengan mudah apa yang dikatakan dan/atau dituliskan oleh guru sehingga seringkali guru tidak mengatakan atau menuliskan secara sistematis penjelasannya. Guru

menganggap penyelesaian masalah yang sedang dibahas itu mudah dimengerti oleh siswa karena guru menganggap masalah itu mudah. Keadaan ini akan menjadi lebih memprihatinkan kalau siswa “takut” untuk bertanya kepada guru. Tidak heran jika apa yang dimodelkan oleh guru ini ditiru oleh siswanya. Ini akan menjadi bumerang bagi guru ketika siswa melakukan hal yang sama ketika menyelesaikan masalah atau soal.

Uraian berikut ini adalah pengamatan praktik berkomunikasi melalui tulisan mengenai penyelesaian soal para calon guru mahasiswa FKIP Universitas Swadaya Gunung Jati Cirebon dalam bimbingan teknis yang diselenggarakan di PPPPTK Matematika bulan Maret 2016.

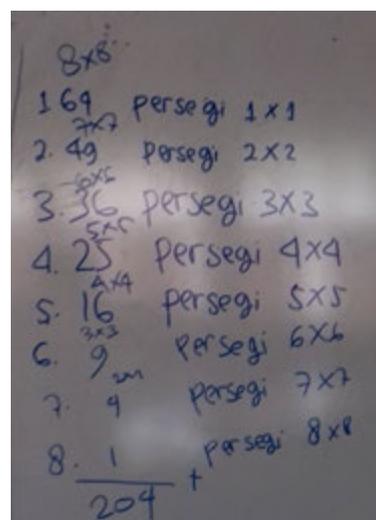
Persegi pada Papan Catur



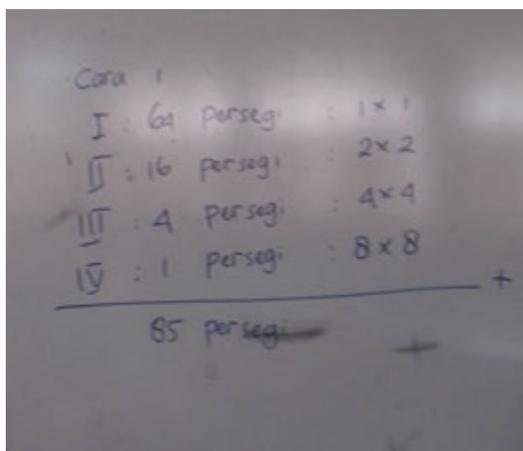
Berapa banyak semua persegi yang terdapat pada papan catur berukuran 8×8 ?
(Jawabanya bukan 64)

Problem Solving Mat SMA - Iryanti

Dua sampel jawaban ini memperlihatkan bagaimana mereka mengomunikasikan jawabannya secara tertulis.



Gambar 1. Jawaban A



Gambar2. Jawaban B

Gambar 1 memperlihatkan A tidak menggunakan penalaran pada pola dan sifat, sehingga A tidak dapat menggeneralisasikan jawaban jika soal dikembangkan lebih jauh. Disamping itu cara mengomunikasikan jawaban juga kurang tepat. Tulisan “64 persegi : 1 × 1” lebih baik ditulis “64 persegi 1 × 1”, atau lebih baik lagi ditulis “64 persegi berukuran 1 × 1”. Berbeda dengan A, B memperlihatkan penggunaan penalaran pada pola dan sifat. Dari jawaban yang diberikan, B akan dapat menggeneralisasi jawaban jika pertanyaan dikembangkan menjadi “berapa banyak semua persegi yang terdapat pada papan catur berukuran 10 × 10?”. Cara mengomunikasikan jawaban juga sudah bagus. Siswa dari guru B lebih mudah memahami jawaban dan melacak mengapa jawabannya seperti itu.

Selanjutnya adalah soal yang dikerjakan oleh guru matematika SMA peserta pelatihan Instruktur Nasional (IN) Guru Pembelajar Matematika yang diselenggarakan oleh PPPPTK Matematika bulan Agustus tahun 2016.

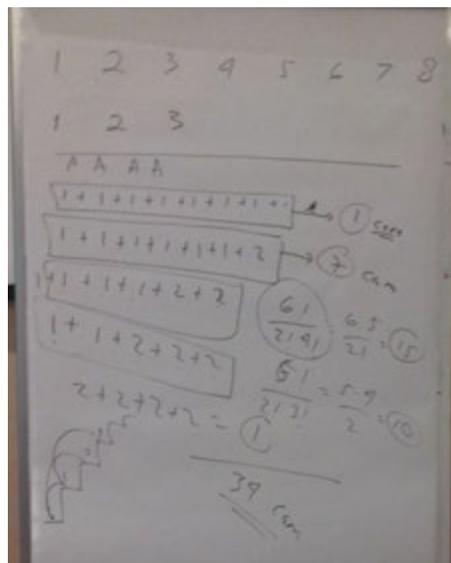
Ditentukan aturan permainan untuk melalui tangga sebagai berikut.

- Melangkah per anak tangga atau melompati satu anak tangga.
- Tidak diperbolehkan melompati dua anak tangga atau lebih sekaligus.

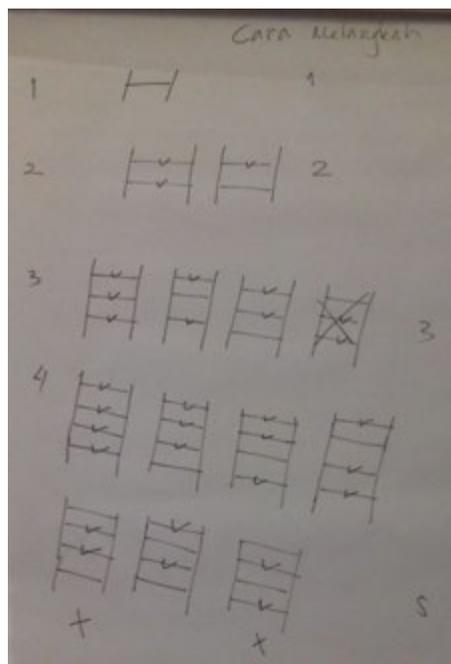
Untuk melalui satu anak tangga hanya dapat dilakukan dengan satu cara, untuk melalui dua anak tangga dapat dilakukan dengan dua cara, dan untuk melalui tiga

anak tangga dapat dilakukan dengan tiga cara, demikian seterusnya. Berapa banyak cara untuk melalui delapan anak tangga?

Sampel jawaban terlihat di bawah ini.



Gambar 3. Jawaban C



Gambar 4. Jawaban D

Dari dua jawaban di atas, jawaban manakah yang paling Anda pahami? Dengan hanya diagram, angka-angka dan simbol, mungkin penyelesaian di atas agak sulit dipahami oleh siswa.

Pada gambar 3, banyak cara yang diperoleh C adalah 34, tetapi tidak ada deskripsi bagaimana memperolehnya. Akan lebih baik bila ditambahkan deskripsi untuk menjelaskan penjumlahan dan simbol-simbol. Salah satu alternatif penjelasan yang dapat digunakan sebagai berikut.

1. melangkah per anak tangga satu-satu untuk setiap anak tangga, terdapat 1 cara.
2. melangkah per anak tangga satu-satu untuk 6 anak tangga, dan melompati satu anak tangga sekaligus sekali. Ini ada 7 cara.
3. melangkah per anak tangga satu-satu untuk 4 anak tangga, dan melompati satu anak tangga sekaligus dua kali. Menurut C kejadian ini dirumuskan sebagai kombinasi 2 dari 6 atau ${}_6C_2 = 15$ cara.
4. melangkah per anak tangga satu-satu untuk 2 anak tangga, dan melompati satu anak tangga sekaligus 3 kali. Menurut C kejadian ini dirumuskan sebagai kombinasi 3 dari 5 atau ${}_5C_3 = 10$ cara.
5. melompati satu anak tangga sekaligus 4 kali, terdapat 1 cara.

Setelah diberikan penjelasan untuk gambar 3, apakah sekarang Anda mulai dapat memahami penyelesaian pada gambar 4? Menurut D, gambar-gambar yang dibuatnya adalah tangga.

- Gambar 4 no.1 menggambarkan 1 anak tangga. Cara melangkah hanya ada satu.
- No.2 menggambarkan 2 anak tangga. Cara melangkah ada dua yaitu yang pertama dengan melangkah satu-satu dan kedua dengan melompati satu anak tangga.
- No. 3 menggambarkan 3 anak tangga. Cara melangkah ada tiga, yaitu melangkah per anak tangga satu-satu sebanyak 3 anak tangga; melangkah per anak tangga sekali kemudian melompati satu anak tangga sekali; melompati satu anak tangga sekali kemudian melangkah per anak tangga dua kali. Sedangkan yang tidak akan terjadi adalah

melangkah per anak tangga dua kali dilanjutkan dengan melompati satu anak tangga.

- No 4 menggambarkan 4 anak tangga. Cara melangkah ada 5 yang dapat dipahami dengan menggunakan logika berpikir seperti yang dijelaskan sebelumnya.

Kalau kita membandingkan penyelesaian C dan D, jika dengan disertai deskripsi yang dapat dipahami siswa, penyelesaian D akan menuntun kepada generalisasi. Banyaknya cara 1, 2, 3, 5, ... berkorespondensi dengan banyak anak tangga 1, 2, 3, 4, Ternyata, banyaknya cara mengikuti aturan barisan Fibonacci sehingga jika ada 8 anak tangga maka ada 34 cara.

Penyelesaian C tidak menggunakan pola, tetapi langsung dikembangkan dari 8 anak tangga sehingga banyaknya semua kemungkinan adalah $1 + 7 + 15 + 10 + 1 = 34$.

Dari beberapa contoh penyelesaian di atas, dapat dilihat jika suatu penyelesaian masalah/soal hanya dikomunikasikan dengan diagram/ gambar dan simbol-simbol saja tanpa disertai dengan keterangan/ penjelasan yang diperlukan, akan sangat sulit bagi siswa untuk memahaminya. Akan tetapi, penyelesaian soal-soal yang ditulis secara sistematis, dan ada keterangan tentang gambar/diagram yang digunakan akan sangat membantu siswa ketika nanti membacanya lagi.

Untuk mencapai tujuan nomor d dalam Permendiknas nomor 22 tahun 2006 mengenai komunikasi dalam pembelajaran matematika, sangat penting guru memodelkan komunikasi verbal maupun tulisan secara sistematis disertai dengan keterangan/ penjelasan yang perlu sehingga ide-ide yang dikomunikasikan itu dapat dipahami oleh siswanya. Guru yang mengomunikasikan penyelesaian seperti itu menjadi model bagi siswanya dalam berkomunikasi sehingga selanjutnya siswa terlatih dalam mengomunikasikan gagasan dengan simbol, tabel, diagram, atau media lain untuk memperjelas keadaan maupun masalah.

Referensi

Permendiknas nomor 22 tahun 2006 tentang Standar Isi untuk Satuan Pendidikan Dasar dan Menengah

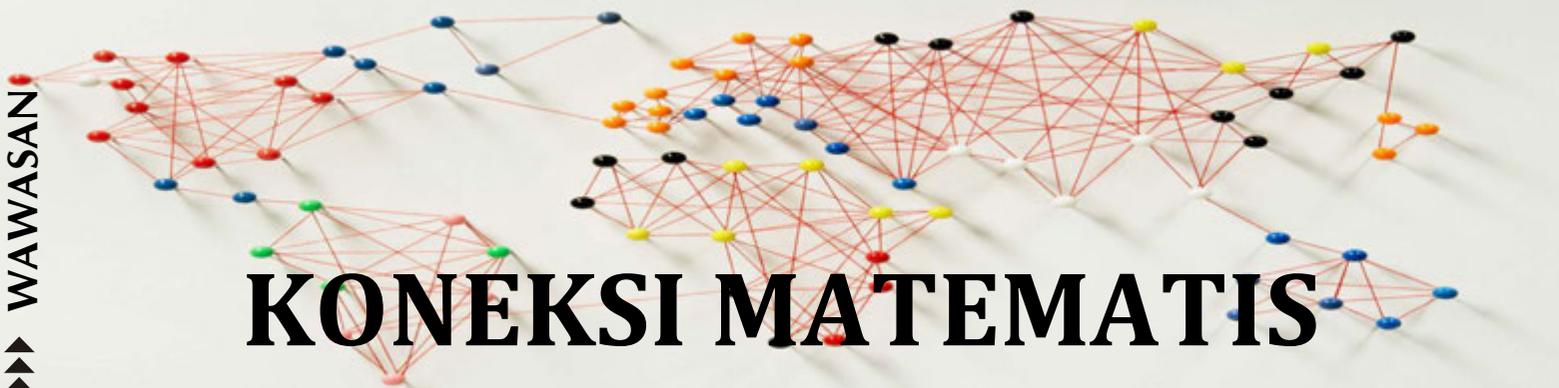
<http://www.nctm.org/Standards-and-Positions/Principles-and-Standards/Process/> diakses pada 1 November 2016

Lasswell's model of communication. 1 November 2016. Dalam *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. Diakses pada 1 November 2016, dari https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Lasswell%27s_model_of_communication&oldid=733829264

*) Puji Iryanti
Widyaiswara SMA PPPPTK Matematika Yogyakarta



Sumber gambar: <http://archive.appraisalbuzz.com/>



KONEKSI MATEMATIS

*) Agus Prianto

PENDAHULUAN

Matematika dikenal sebagai ilmu yang terstruktur dan sistematis. Hal ini disebabkan susunan unsur-unsurnya terstruktur, dalam arti bagian-bagian matematika tersusun secara hierarkis dan terjalin dalam hubungan fungsional yang erat (Hendriana & Soemarmo, 2014:3). Bruner (dalam Sapti, 2010:63) menjelaskan bahwa pada dasarnya dalam ilmu matematika setiap konsep berkaitan dengan konsep lain, atau antara topik berkaitan dengan topik lainnya. Oleh karena itu agar siswa lebih berhasil dalam belajar matematika, maka siswa harus banyak diberikan kesempatan untuk melihat keterkaitan-keterkaitan antar konsep atau topik tersebut. Karena berbagai konsep dalam matematika tidak bersifat parsial, maka dalam proses pembelajaran matematika seharusnya berbagai konsep dan prinsip matematika sebaiknya tidak dikenalkan kepada siswa secara parsial, namun berbagai konsep dan prinsip matematika yang terkait seharusnya diajarkan secara bersamaan, sehingga diharapkan bisa mengenalkan dan membangun lebih dari satu konsep, walaupun ada konsep yang dominan (Wijaya, 2012:23).

Penyajian ide dan konsep matematika secara utuh merupakan kebutuhan dalam belajar matematika dan berpikir matematis. Guru harus memahami kebutuhan siswa sebaik mungkin bahwa pada dasarnya siswa telah mempelajari beberapa materi pada jenjang terdahulu dan siswa juga akan mempelajari materi pada jenjang selanjutnya. Guru harus mampu mengeksplorasi pengalaman siswa sebelumnya, dan sebaiknya menjauhi untuk mengulang secara utuh materi yang telah siswa pelajari. Dengan langkah ini diharapkan siswa mampu berpikir lebih mendalam dan mampu membuka memorinya terhadap pengetahuan dan pengalaman sebelumnya, kemudian menggunakannya dalam mengontruksi permasalahan yang dihadapi sehingga akan mendapatkan ide dan konsep baru (NCTM, 2000:64).

Pandangan siswa terhadap matematika dapat diperluas melalui kegiatan eksplorasi terhadap keterkaitan antara ide materi matematika, matematika dengan ilmu lain, dan matematika dengan berbagai permasalahan sehari-hari. Siswa perlu mendapat kesempatan untuk mengamati interaksi antar ide, prinsip, konsep dan materi matematika baik antara matematika sendiri, matematika dengan pelajaran lainnya, dan matematika dengan permasalahan sehari-hari. Hal ini sangat penting untuk mengantisipasi pandangan siswa tentang matematika sebagaimana yang diungkapkan Johnson dan Litynsky (dalam Sugiman, 2008:4) bahwa matematika sebagai ilmu yang statis, karena matematika yang dipelajari siswa tidak terkait dengan kehidupan siswa.

PEMBAHASAN

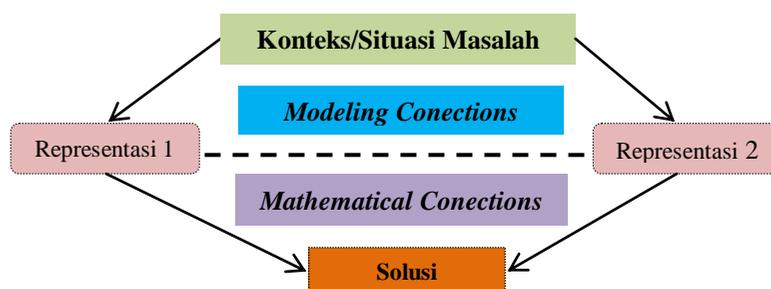
A. Koneksi Matematis

Koneksi matematis merupakan salah satu standar proses pembelajaran matematika sekolah (NCTM, 2000). Kemampuan koneksi matematis merupakan salah satu kemampuan penting dan mendasar yang seharusnya dimiliki oleh siswa, dan merupakan salah satu tujuan pembelajaran matematika yaitu bagaimana siswa memahami konsep matematika, menjelaskan keterkaitan antar konsep dan mengaplikasikan konsep atau algoritma, secara luwes, akurat, efisien, dan tepat, dalam pemecahan masalah (Peraturan Menteri Pendidikan Nasional, Nomor 22 Tahun 2006).

NCTM (2000:64) merumuskan tiga standar koneksi matematis sekolah... "Connections standard instructional programs from prekindergarten through grade 12 should enable all students to: (1) recognize and use connections among mathematical ideas, (2) understand how mathematical ideas interconnect and build on one another to produce a coherent whole, (3) recognize and apply mathematics in contexts outside of mathematics. Tiga standar koneksi matematis, yaitu: (1) mengenali dan menggunakan koneksi antara ide-ide matematika, (2) memahami bagaimana ide interkoneksi matematika dan membangun satu sama lain untuk menghasilkan keterkaitan secara keseluruhan, dan (3) mengenali dan menerapkan matematika dalam konteks di luar matematika.

Kemampuan koneksi matematis begitu penting dalam belajar matematika dikarenakan: (1) ilmu matematika tidaklah terpartisi dan terpisah antar topik atau materi, namun ilmu matematika merupakan satu kesatuan, tidak bisa terpisah antar topik, dari ilmu lainnya dan dengan berbagai masalah dalam kehidupan, (2) koneksi matematis sebagai salah satu tujuan pembelajaran matematika (Peraturan Menteri Pendidikan Nasional, Nomor 22 Tahun 2006), (3) apabila siswa mampu mengaitkan berbagai ide dan prinsip matematis, maka pemahaman matematika siswa semakin dalam dan bertahan lama karena siswa mampu melihat keterkaitan antar ide dan prinsip matematis dengan suatu konteks permasalahan (NCTM, 2000:64), (4) melalui mengaitkan berbagai ide dan konsep matematika, siswa tidak hanya belajar matematika, tetapi akan mengetahui manfaat dan pentingnya matematika dalam kehidupan (NCTM, 2000:64), (5) tanpa kemampuan koneksi matematis, siswa harus belajar dan mengingat terlalu banyak konsep, prinsip dan prosedur matematika yang saling terpisah satu sama lain (NCTM, 2000:274), dan (6) dengan kemampuan koneksi matematis yang baik, matematika akan menjadi lebih bermakna (Sugiman, 2008).

Dua tipe koneksi matematis yaitu koneksi pemodelan (*modeling connections*) dan koneksi matematika (*mathematical connections*). Koneksi pemodelan terkait hubungan antara situasi dan permasalahan yang dapat muncul di dunia nyata atau dalam disiplin ilmu lain dengan representasi matematika. Koneksi matematika berkaitan dengan hubungan antara dua atau lebih representasi ekuivalen dan antara proses penyelesaian dari masing-masing representasi. Sebagai contoh jika suatu situasi masalah memiliki koneksi pemodelan dengan persamaan aljabar dan grafik, maka representasi aljabar memiliki koneksi matematika dengan representasi grafik. Koneksi matematika juga terjadi antara proses perhitungan aljabar dengan analisis grafik yang menghasilkan penyelesaian yang sama (Yuli, 2011).



Gambar 1: Hubungan Modeling Connections dan Mathematical Connections

Coxford (1995) (dalam Yuli, 2011) merumuskan tiga aspek koneksi matematika, yaitu: (1) penyatuan tema-tema, seperti: perubahan (*change*), data (*data*), dan bentuk (*shape*) dapat digunakan terhadap sifat dasar matematika yang saling berkaitan, misalnya: Bagaimana keliling atau luas suatu bidang bangun datar dapat berubah ketika bangun datar tersebut ditransformasikan? Bagaimana suatu bentuk kurva atau grafik berkaitan dengan karakteristik datanya?, (2) proses matematika, meliputi: representasi, aplikasi, penyelesaian permasalahan (*problem solving*) dan penalaran (*reasoning*), dan (3) penghubung-penghubung matematika, seperti: suatu fungsi, relasi, algoritma, variabel, dan perbandingan merupakan ide-ide matematika yang menjadi penghubung ketika mempelajari materi atau topik matematika yang lebih luas.

B. Pemahaman Matematis

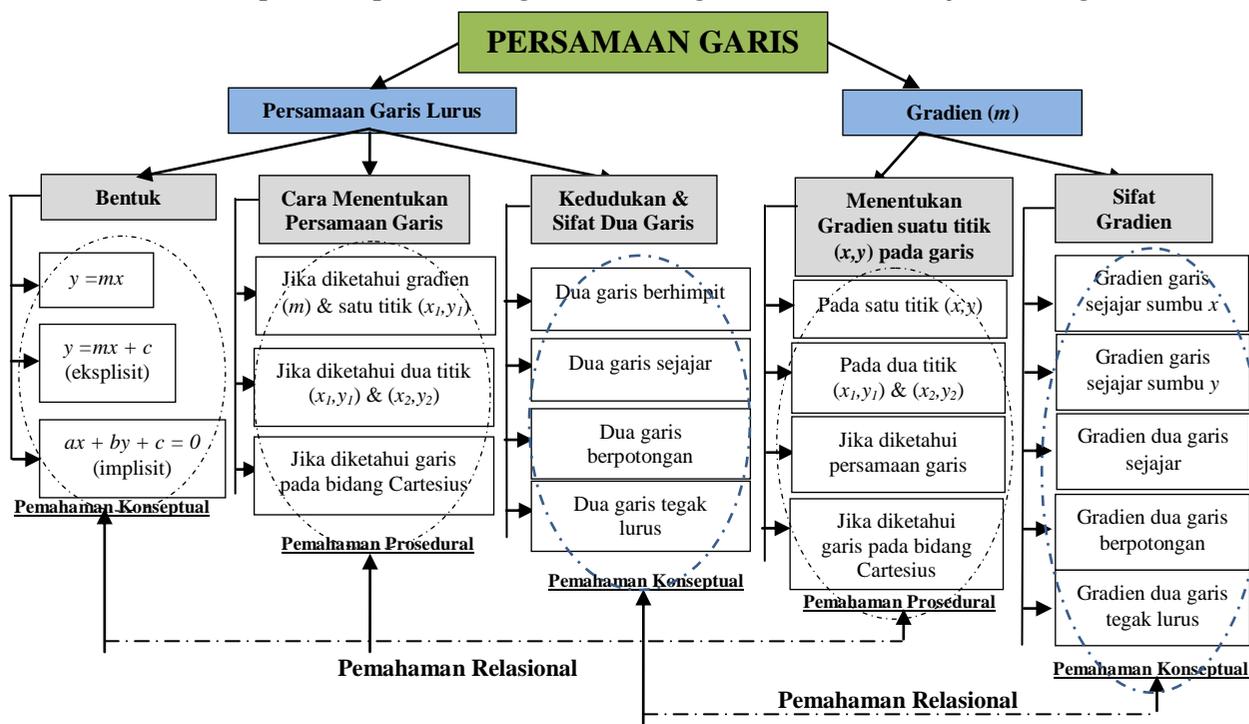
Pemahaman (*understanding*) siswa dalam proses pembelajaran matematika merupakan hal yang sangat esensi. Pemahaman siswa ketika belajar matematika dapat dibangun jika siswa aktif mengonstruksi permasalahan dengan menggunakan pengetahuan dan pengalaman yang telah didapatkan sebelumnya. Keaktifan siswa membangun pengetahuan dan konsep baru melalui pengalaman dan pengetahuan siswa sendiri merupakan prinsip pembelajaran matematika (NCTM, 2000:20). Dengan pemahaman matematis, siswa dapat mengemukakan ide, gagasan dan dugaannya sendiri, siswa juga dapat menggunakan strategi informal untuk menyelesaikan permasalahan, dan dapat saling mengevaluasi hasil pemikiran siswa lain (NCTM, 2000:21). Siswa juga dapat mengembangkan kemampuan penalaran, menggunakan bukti dan logika (Subanji, 2013:34).

Skemp (2008) membedakan dua jenis pemahaman matematika, yaitu: pemahaman relasional dan pemahaman instrumental. Jenis dua pemahaman tersebut sama makna dengan pemahaman prosedural dan pemahaman konseptual (Usiskin, 2012:2). Keempat jenis pemahaman tersebut dapat dirumuskan sebagai berikut: “...relational understanding as the ability to deduce specific rules and procedures from more general mathematical relations. Instrumental understanding describes the ability to apply a rule to the solution of a problem without understanding how it works” (Long, 2005:59). “...relational understanding as “knowing both what to do and why”, and the process of learning relational mathematics as “building up a conceptual structure”. Instrumental understanding, on the other hand, was simply described as “rules without reasons” (Barmby, et al. 2007:41).

Pemahaman relasional merupakan jaringan ide yang kaya terkait satu ide dengan ide yang lain secara makna. Pemahaman instrumental merupakan jaringan ide yang terpisah-pisah tanpa makna. Pemahaman konseptual dapat dirumuskan sebagai pengetahuan yang berisi banyak hubungan atau jaringan ide, atau pengetahuan yang dipahami dari suatu konsep. Pemahaman prosedural merupakan pengetahuan tentang aturan atau cara yang digunakan untuk menyelesaikan tugas matematika yang mencakup pengetahuan tentang langkah demi lang

C. Koneksi Matematis Persamaan Garis Lurus

Peta konsep materi persamaan garis lurus tingkat SMP/MTs disajikan sebagai berikut:



Gambar 2: Peta Konsep Materi Persamaan Garis

Berdasarkan peta konsep gambar 2, maka rumusan koneksi matematis sesuai standar NCTM materi persamaan garis lurus meliputi: (K1) koneksi dalam materi matematika yaitu mengaitkan pemahaman konseptual dan pemahaman prosedural persamaan garis lurus, (K2) koneksi antar materi matematika yaitu mengaitkan materi persamaan garis lurus dengan materi matematika lain, (K3) koneksi materi persamaan garis lurus dengan materi pelajaran lain, dan (K4) koneksi materi persamaan garis lurus dengan permasalahan kehidupan sehari-hari.

1. K1: Koneksi dalam Materi Persamaan Garis Lurus

Contoh:

Tentukan persamaan garis h yang melalui $K(-2, 3)$ dan sejajar garis $x + y + 5 = 0$

Penyelesaian:

Untuk menyelesaikan soal tersebut diperlukan pemahaman konseptual dan pemahaman prosedural persamaan garis lurus yang berkaitan dengan gradien, sifat gradien dua garis sejajar, dan cara menentukan persamaan garis jika diketahui gradien (m) dan satu titik (x_1, y_1).

Alternatif urutan penyelesaiannya soal tersebut yaitu:

- ✓ Mengidentifikasi informasi
 - Sifat garis sejajar memiliki gradien sama ($m_1 = m_2$)
 - Garis h sejajar garis $x + y + 5 = 0$, garis h memiliki gradien sama dengan garis $x + y + 5 = 0$
 - Garis h melalui $K(-2, 3)$, maka $x_1 = -2, y_1 = 3$
- ✓ Menentukan gradien garis h sejajar dengan garis $x + y + 5 = 0$
 Garis $x + y + 5 = 0 \rightarrow y = -x - 5, m_1 = -1$, maka gradien garis $h, m_2 = -1$
- ✓ Menentukan persamaan garis h jika diketahui $m_2 = -1$ dan melalui $K(-2, 3)$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 3 = -1(x + 2)$$

$$y = -x - 2 + 3$$

$$y = -x + 1$$
- ✓ Menuliskan simpulan
 Persamaan garis h adalah $y = -x + 1$ atau $x + y - 1 = 0$

2. K2: Koneksi Persamaan Garis Lurus dengan Materi Matematika Lain

Contoh:

Diketahui tiga titik A, B dan C berada dibidang Cartesius dengan $A(-2, 0), B(0, 6)$ dan $C(2, 2)$. Tentukan bentuk bidang ABC tersebut? Jelaskan alasannya!

Penyelesaian:

Alternatif urutan penyelesaian soal tersebut yaitu:

- ✓ Diketahui $A(-2, 0), B(0, 6)$ dan $C(2, 2)$
- ✓ Menentukan gradien jika diketahui dua titik (x_1, y_1) dan (x_2, y_2)

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \text{ maka: } m_{AB} = \frac{6-0}{0-(-2)} = 3, m_{AC} = \frac{2-0}{2-(-2)} = \frac{1}{2}, m_{BC} = \frac{2-6}{2-0} = -2$$

Berdasarkan sifat gradien dua garis, maka garis AC dan garis BC tegak lurus, $m_{AC} \times m_{BC} = -1$.

- ✓ Menentukan jarak dari dua titik (x_1, y_1) dan (x_2, y_2)

$$j = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$j_{AB} = \sqrt{(0+2)^2 + (6-0)^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40} \text{ satuan panjang}$$

$$j_{BC} = \sqrt{(2-0)^2 + (2-6)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} \text{ satuan panjang}$$

$$j_{AC} = \sqrt{(2+2)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} \text{ satuan panjang}$$

Karena garis BC dan AC sama panjang, maka bidang ABC berbentuk segitiga siku-siku sama kaki dengan siku-siku di titik C .

3. K3: Koneksi Persamaan Garis Lurus dengan Materi Pelajaran Lainnya

Contoh: Pada pelajaran IPS/Ekonomi (Titik impas/*break-even point*)

Suatu pabrik Garmen PT. Sentosa menjual produk kaos Rp. 50.000,00/kaos dan akan menjual semua produk kaos tersebut. Biaya tetap produk tersebut adalah Rp. 35.000.000,00 perbulan dan biaya variabel per kaos sebesar Rp. 15.000,00. Hitunglah banyak produk dan penerimaan per bulan dalam keadaan impas! (Adaptasi: Sukino & Simangunsong, S. 2006:128)

Penyelesaian:

✓ Misal: x = banyak produk kaos yang terjual

y = total penerimaan dan total pengeluaran (dalam puluhan ribu)

✓ Persamaan matematika: Total pengeluaran = biaya tetap + biaya variabel

$$y = 35.000.000 + 15.000x \rightarrow y = 3.500 + 1.5x \dots\dots(\text{persamaan 1})$$

Total penerimaan = harga per unit x banyak produk yang terjual

$$y = 50.000x \rightarrow y = 5x \dots\dots(\text{persamaan 2})$$

✓ Menentukan nilai x dan y dengan substitusi

$$5x = 3.500 + 1.5x$$

$$3.5x = 3.500$$

$$x = 1.000$$

Nilai $x = 1.000$ substitusikan ke persamaan (2): $y = 5x \rightarrow y = 5(1.000)$

$$y = 5.000$$

Berdasarkan proses selesaian tersebut diperoleh bahwa titik impas (1.000, 5.000)

Jadi banyak produk yang harus terjual adalah 1.000 kaos agar mencapai keadaan impas. Banyaknya uang yang diterima $5.000 \times \text{Rp. } 10.000,00 = \text{Rp. } 50.000.000,00$.

4. K4: Koneksi Materi Persamaan Garis Lurus dengan Permasalahan Sehari-Hari

Contoh:

Siswa kelas VIIIA SMP Negeri 1 Jepara merencanakan studi wisata ke Kota Malang. Pengurus kelas mendiskusikan paket wisata yang ditawarkan oleh dua biro wisata. Untuk biro wisata “*Indah Tour*” menawarkan paket wisata dengan aturan: biaya pemesanan 2.000.000 dan 150.000 per siswa, sedangkan biro wisata “*Abadi Tour*” menawarkan paket wisata dengan aturan: biaya pemesanan 4.000.000 dan 100.000 per siswa.

(a) Buatlah bentuk persamaan berdasarkan informasi tersebut!

(b) Biro wisata mana yang kamu pilih? Jelaskan alasannya!

Penyelesaian:

✓ Persamaan matematika:

Misal: Biro wisata “*Indah Tour*” = y_1

Biro wisata “*Abadi Tour*” = y_2

Banyak peserta/siswa = x

Diperoleh bahwa $y_1 = 150.000x + 2.000.000$

$$y_2 = 100.000x + 4.000.000$$

✓ Untuk menjawab pertanyaan tersebut dapat digunakan tabel berikut:

Banyak Peserta/Siswa	Biaya Biro wisata “Indah Tour”	Biaya Biro wisata “Abadi Tour”
	$y_1 = 150.000x + 2.000.000$	$y_2 = 100.000x + 4.000.000$
15	Rp. 4.250.000	Rp. 5.500.000
20	Rp. 5.000.000	Rp. 6.000.000
25	Rp. 5.750.000	Rp. 6.500.000
30	Rp. 6.500.000	Rp. 7.000.000
40	Rp. 8.000.000	Rp. 8.000.000
45	Rp. 8.750.000	Rp. 8.500.000
50	Rp. 9.500.000	Rp. 9.000.000

Berdasarkan tabel tersebut didapatkan bahwa jika peserta wisata kurang dari 40 siswa (dengan pertimbangan harga), maka akan dipilih Biro wisata “Indah Tour” karena lebih murah. Demikian juga jika peserta wisata lebih dari 40 siswa, maka akan dipilih Biro wisata “Abadi Tour”. Bagaimana Jika peserta wisata berjumlah 40 siswa, biro wisata mana yang kamu pilih?

PENUTUP

Beberapa langkah yang dapat dilakukan guru untuk mengembangkan kemampuan koneksi matematis siswa (NCTM: 2000) dalam pembelajaran matematika diantaranya: (1) memilih permasalahan yang sesuai tingkat berpikir siswa dan sesuai situasi lingkungan siswa yang terintegratif dengan materi matematika maupun pelajaran lain, (2) memulai pembelajaran dengan penyajian permasalahan yang memungkinkan adanya beragam dan beberapa solusi. Hal ini dilandasi bahwa setiap siswa pasti mempunyai kemampuan dan pengalaman yang berbeda-beda. Dengan penyajian permasalahan dengan beragam dan beberapa solusi, diharapkan siswa mampu menggunakan kemampuan dan pengalamannya dalam menyelesaikan permasalahan dengan cara-cara yang berbeda pula, dan (3) ketika solusi permasalahan ditemukan siswa sendiri, guru perlu mendorong lebih lanjut kepada siswa untuk memikirkan kembali dan membandingkan solusi yang ditemukan siswa lainnya dengan tujuan sebagai sarana untuk mengkoneksikan berbagai solusi permasalahan dengan solusi lainnya, mengembangkan pemikiran matematis siswa, dan untuk memperlihatkan bahwa ide dan prinsip matematika saling terhubung satu dengan yang lainnya.

DAFTAR RUJUKAN

- Barmby, P., Harries, T., Higgins, S. & Suggate, J. 2007. How Can We Assess Mathematical Understanding? *Proceedings of the 31 Conference of the International Group for the Psychology of Mathematic Education (PME)*, Vol. 2:41-48.
- Hendriana, H & Soemarmo, U. 2014. *Penilaian Pembelajaran Matematika*. Bandung: PT. Refina Aditama.
- Long, C. 2005. Maths Concepts in Teaching: Procedural and Conceptual Knowledge. *Journal Pythagoras* 62, December, 2005:59-65.
- Peraturan Menteri Pendidikan Nasional Nomor 22 Tahun 2006. *Standar Kompetensi dan Kompetensi Dasar Mata Pelajaran Matematika untuk SMP/MTs*. Jakarta. Depdiknas.
- Sapti, M. 2010. *Kemampuan Koneksi Matematis (Tinjauan terhadap Pendekatan pembelajaran SAVI)*. (online) (<http://ejournal.umpwr.ac.id/index.php/limitarticle>), diunduh 12 Desember 2015.

Skemp, R.R. 2008. *Mathematics in the Primary School* (First published in 1989 by Routledge). London: Taylor & Francis Group.

Subanji. 2013. *Pembelajaran Matematika Kreatif dan Inovatif*. Malang: UM Press.

Sugiman, 2008. *Koneksi Matematik dalam Pembelajaran Matematika di Sekolah Menengah Pertama*. (Online). (<http://journal.uny.ac.id/index.php/pythagoras/art-icle/view/687>), diunduh 10 Juli 2015.

Sukino & Simangunsong, S. 2006. *Matematika SMP Jilid 2 Kelas VIII*. Jakarta: Penerbit Erlangga.

The National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). 2000. *Principles and Standards for School Mathematics*. United States of America: NCTM Inc.

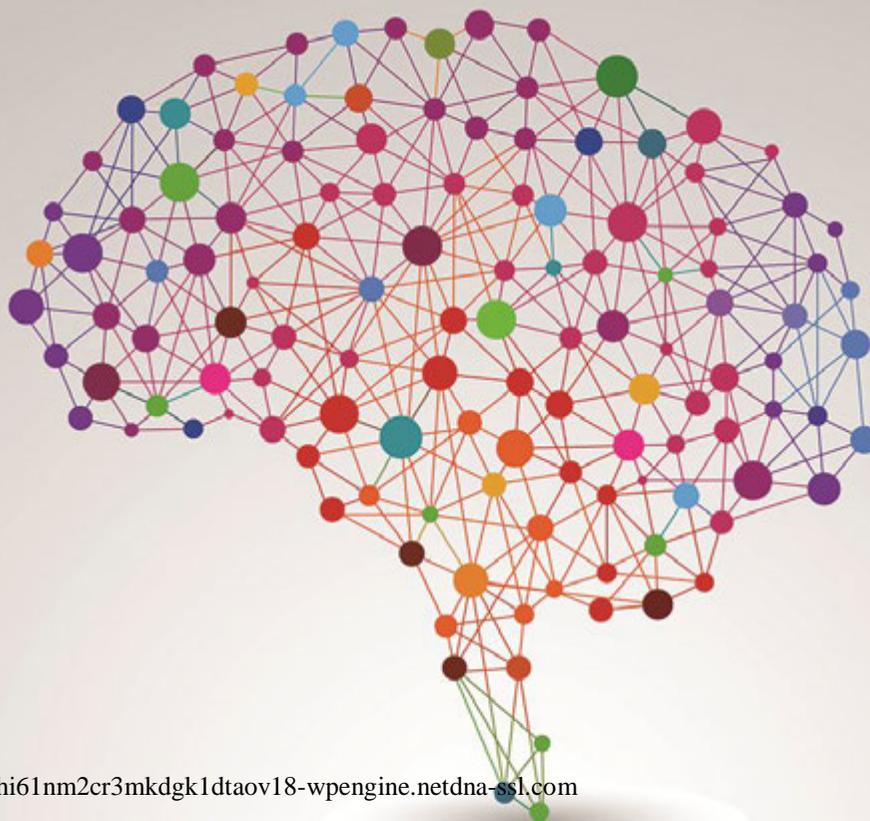
Usiskin, Z. 2012. What does it Mean to Understand some Mathematics? *International Congress on Mathematical Education (ICME)*, 8 July-15 July 2012:1-20.

Wijaya, A. 2012. *Pendidikan Matematika Realistik: Suatu Alternatif Pendekatan Pembelajaran Matematika*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

Yuli. 2011. *Makalah Koneksi Matematika*. (online) (<http://yulimpd.wordpress.com> 20110127-makalah-koneksi-matematika), diunduh 12 Desember 2015.

*) Agus Prianto

Guru Matematika SMP Negeri 1 Jepara, Jawa Tengah



Sumber gambar: <https://bhi61nm2cr3mkgk1dtaov18-wpengine.netdna-ssl.com>

INTEGRASI PENDIDIKAN ETIKA BERLALU LINTAS (ELL) PADA MATA PELAJARAN MATEMATIKA SMP

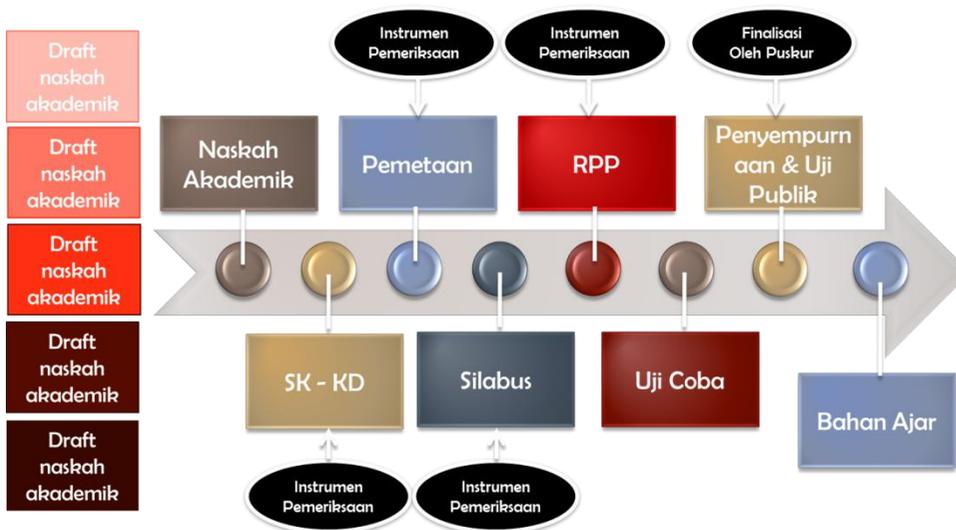
*) Wahyu Cahyaning Pangestuti

A. PENDAHULUAN

Berdasarkan Naskah Akademik Pendidikan Etika Berlalu Lintas (Tim Penyusun, 2010: 34) dinyatakan bahwa Pendidikan etika berlalu lintas dimaksudkan untuk menanamkan kultur tertib berlalu lintas (ELL) yang dimulai dari para peserta didik melalui pembiasaan-pembiasaan di sekolah.

Pembuatan pedoman pembelajaran Pendidikan ELL dapat digambarkan sebagai berikut:

PEMBUATAN PEDOMAN PEMBELAJARAN ELL



Gambar 1. Langkah pembuatan pedoman pembelajaran Pendidikan ELL

Dinas Pendidikan Kota Yogyakarta mulai menyusun naskah akademik yang merangkul para pemangku kepentingan, seperti kepolisian, para ahli, guru, MKKS, MGMP, KKG, dosen, siswa, dan lain-lain. Fungsi naskah akademik adalah sebagai pengembangan kompetensi, rambu-rambu metode & strategi, pemberi arah materi silabus, dan pedoman pengembangan sumber belajar. Penetapan Standar Kompetensi (SK) dan Kompetensi Dasar (KD) Pendidikan ELL melibatkan Dinas Pendidikan Kota Yogyakarta, kepolisian, para ahli, dan guru. Para guru masing-masing mata pelajaran melakukan pemetaan antara SK dan KD pendidikan ELL dengan SK dan KD masing-masing mapel. Langkah berikutnya adalah menyusun silabus dan RPP yang diujicobakan di sekolah yang ditunjuk, dan diakhiri dengan pembuatan bahan ajar.

Adapun tujuan Pendidikan ELL (Tim Penyusun, 2012: 4) adalah:

1. Menumbuhkembangkan norma etika berlalu lintas bagi peserta didik melalui pengembangan pengetahuan dan pembiasaan etika berlalu lintas;

2. Meningkatkan keamanan, keselamatan dan ketertiban berlalu lintas;
3. Meningkatkan kelancaran dan kenyamanan dalam berlalu lintas;
4. Mewujudkan budaya tertib berlalu lintas yang santun, dan bermartabat bagi sesama.
5. Mengurangi terjadinya kecelakaan lalu lintas

Pengembangan Pendidikan ELL dalam satuan pendidikan melalui pengintegrasian dalam mata pelajaran, pengembangan diri, dan budaya sekolah. Dalam tulisan ini akan dibahas pengintegrasian dalam mata pelajaran matematika. Pembelajaran ELL yang terintegrasi dalam mata pelajaran dimaksudkan untuk memberikan pembiasaan berlalu lintas agar peserta didik memiliki etika yang baik, dengan mendasarkan pada konsep etika berlalu lintas yang dilandasi oleh komitmen untuk sopan dalam berlalu lintas. Berikut adalah alur pengintegrasian dalam mata pelajaran.



Gambar 2. Alur pengintegrasian dalam mata pelajaran

Satuan pendidikan yang akan mengintegrasikan pendidikan ELL perlu melaksanakan langkah-langkah sebagai berikut: (1) menyusun rumusan visi, misi, dan tujuan satuan pendidikan dengan memasukkan Pembelajaran Etika Berlalu Lintas; (2) rumusan SK, KD dan Standar Kompetensi Lulusan (SKL) Pembelajaran ELL digunakan sebagai pedoman/acuan dalam penyusunan perangkat pembelajaran dan pelaksanaan proses pembelajaran, untuk berbagai mapel yang SK/KD dan SKL-nya sesuai untuk diintegrasikan. (3) Melakukan pencermatan terhadap SK dan KD Pembelajaran ELL dan SK dan KD pada masing-masing mata pelajaran; (4) Guru menyusun silabus dan RPP mata pelajaran yang diintegrasikan dengan SK dan KD Pembelajaran ELL; (5) Melakukan penghitungan beban belajar dan alokasi waktu; (6) Melakukan pengkajian terhadap sarana/prasarana pembelajaran yang sesuai dengan pembelajaran yang akan diintegrasikan. (7) Satuan pendidikan melaksanakan pembelajaran, pemantauan, evaluasi, tindak lanjut dan penyempurnaan.

Secara aplikatif, pembelajaran etika berlalu lintas dilaksanakan adaptif sesuai dengan keadaan atau kondisi satuan pendidikan, peserta didik, serta sarana-prasarana yang ada di sekitarnya. Pembelajaran etika berlalu lintas menjadi efektif jika dilaksanakan terintegrasi dalam banyak matapelajaran.

Standar kompetensi dan kompetensi dasar Pendidikan ELL, sesuai naskah akademik Pendidikan ELL (Tim Penyusun, 2010: 39) adalah sebagai berikut:

Tabel 1: SK dan KD Pendidikan ELL

Standar Kompetensi	Kompetensi Dasar
ELL 1. Memahami bagian-bagian kendaraan	ELL 1.1 Menjelaskan bagian-bagian kendaraan dan mampu menggunakan/memanfaatkan dengan tepat
ELL 2. Memahami fungsi perlengkapan kendaraan	ELL 2.1 Menjelaskan fungsi perlengkapan kendaraan dan mampu menggunakan/mengoperasikan dengan benar/tepat

Standar Kompetensi	Kompetensi Dasar
ELL 3. Memahami ketentuan-ketentuan lalu lintas dan angkutan jalan	ELL 3.1 Mendiskripsikan ketentuan-ketentuan lalu lintas dan angkutan jalan ELL 3.2 Menjelaskan rambu-rambu lalu lintas meliputi rambu-rambu petunjuk, peringatan, larangan, dan perintah
ELL 4. Mewujudkan keselamatan dan kenyamanan berkendara	ELL 4.1 Mengoperasionalkan kendaraan dengan benar dan tepat sesuai dengan situasi/kondisi ELL 4.2 Memahami penyebab dan mencegah terjadinya kecelakaan lalu lintas
ELL 5. Mematuhi Peraturan Perundangan Lalu Lintas dan Angkutan Jalan	ELL 5.1 Memahami dan menaati peraturan perundangan Lalu Lintas dan Angkutan Jalan.

SKL Pendidikan ELL yang tercantum dalam naskah akademik (Tim Penyusun, 2010: 52) adalah sebagai berikut:

1. Memahami bagian dan fungsi kendaraan serta mampu menggunakannya dengan benar dan tepat.
2. Memahami ketentuan-ketentuan lalu lintas dan angkutan jalan serta mampu menerapkannya dalam kehidupan.
3. Memahami dan menerapkan prinsip-prinsip keamanan, keselamatan, kelancaran, dan ketertiban dalam berlalu lintas.
4. Mampu mewujudkan keamanan dan keselamatan dalam berkendara.

SK 3 untuk mata pelajaran matematika kelas 9 adalah melakukan pengolahan dan penyajian data. Sedangkan KD yang dibahas pada tulisan ini adalah KD 3.2, yaitu menyajikan data dalam bentuk tabel dan diagram batang, garis, dan lingkaran.

Salah satu langkah pengintegrasian pada mata pelajaran adalah melakukan pemetaan SK-KD Standar Isi (SI) dengan SK-KD Etika Berlalu Lintas (ELL). Guru melakukan pencermatan terhadap SK-KD SI dan SK-KD ELL pada mata pelajaran yang diampunya. Pencermatan terhadap SK-KD SI dan SK-KD ELL mata pelajaran matematika, antara lain seperti berikut.

Standar Isi		Pendidikan Etika Berlalu Lintas		Materi Pokok
Standar Kompetensi	Kompetensi Dasar	Standar Kompetensi	Kompetensi Dasar	
3. Melakukan pengolahan dan penyajian data	3.2 Menyajikan data dalam bentuk tabel dan diagram batang, garis, dan lingkaran	ELL 4. Mewujudkan keselamatan dan kenyamanan berkendara	ELL 4.2 Memahami penyebab dan mencegah terjadinya kecelakaan lalu lintas	Statistika

CONTOH RPP YANG TERINTEGRASI PENDIDIKAN ELL

Berikut ini disajikan RPP yang terintegasi Pendidikan ELL. Karena keterbatasan halaman, RPP pada tulisan ini disajikan sampai dengan metode pembelajaran.

RENCANA PELAKSANAAN PEMBELAJARAN

Nama Sekolah : SMP Akhlak Mulia
Mata Pelajaran : Matematika
Kelas/Semester : IX /1

STANDAR KOMPETENSI : 3. Melakukan pengolahan dan penyajian data

ELL 4. Mewujudkan keselamatan dan kenyamanan berkendara

KOMPETENSI DASAR : 3.2. Menyajikan data dalam bentuk tabel dan diagram batang, garis, dan lingkaran

ELL 4.2 Memahami penyebab dan mencegah terjadinya kecelakaan lalu lintas

ALOKASI WAKTU : 4 Jam Pelajaran (2 pertemuan)

A. INDIKATOR PENCAPAIAN KOMPETENSI

Setelah pembelajaran selesai, peserta didik diharapkan dapat:

1. Menyajikan data dalam bentuk tabel dan diagram batang, garis dan lingkaran
2. Membaca diagram suatu data.

B. TUJUAN PEMBELAJARAN

Setelah pembelajaran selesai, peserta didik diharap dapat :

1. Menyajikan data tunggal dalam bentuk tabel
2. Menyajikan data tunggal dalam bentuk diagram batang
3. Menyajikan data tunggal dalam bentuk diagram garis
4. Menyajikan data tunggal dalam bentuk diagram lingkaran
5. Membaca diagram suatu data.

C. MATERI PEMBELAJARAN

Diagram yang dipelajari adalah diagram batang, garis dan lingkaran. Untuk membuat tabel distribusi frekuensi yang baik, gunakan aturan-aturan berikut:

1. Tentukan jangkauan data yang merupakan selisih antara datum terkecil dan datum terbesar
Jangkauan data = datum terbesar – datum terkecil
2. Tentukan banyaknya interval kelas, misalnya p dengan perkiraan yang memenuhi ketentuan berikut
 $6 \leq p \leq 15$
3. Tentukan panjang interval kelas dengan rumus panjang kelas sebagai berikut
$$\text{Panjang Kelas} = \frac{\text{Jangkauan}}{\text{banyak interval kelas}}$$
4. Tentukan batas bawah dan batas atas setiap kelas
5. Tentukan frekuensi pada masing-masing interval kelas dengan menggunakan turus (*tally*).

Langkah-langkah yang dilakukan untuk menyajikan data dalam bentuk diagram batang adalah sebagai berikut:

1. Gambarlah sumbu mendatar yang berisikan nilai yang berupa data tunggal atau data berkelompok
2. Gambarlah sumbu tegak yang berisikan frekuensi
3. Gambarlah batang yang berbentuk persegi panjang dengan lebar yang sama untuk setiap data yang diperoleh dan dengan panjang setinggi frekuensi untuk masing-masing data.

Langkah-langkah untuk membuat diagram garis.

1. Gambarlah sumbu mendatar dan sumbu tegak seperti membuat diagram batang
2. Tentukan titik-titik yang merupakan perpotongan garis mendatar yang menyatakan nilai dengan garis

tegak yang menyatakan frekuensi untuk tiap-tiap data

3. Hubungkan titik-titik tersebut dengan garis

Langkah-langkah untuk membuat diagram lingkaran

1. Buatlah lingkaran

2. Gambarlah juring menggunakan busur dan penggaris, pada lingkaran tersebut dengan sudut pusat sesuai dengan perbandingan antara frekuensi data dan jumlah frekuensi

Data yang disajikan dalam bentuk diagram dapat diterjemahkan sehingga lebih bermakna.

Membaca diagram dapat berarti menerjemahkan diagram.

D. METODE PEMBELAJARAN

Metode Pembelajaran: Diskusi, tanya jawab, dan pemberian Tugas.

B. BAHAN AJAR MATEMATIKA INTEGRASI PENDIDIKAN ELL

Berikut disajikan contoh sebagian bahan ajar yang sesuai dengan SK, KD, dan indikator yang tertulis pada bagian sebelumnya. Siswa diminta untuk membaca dengan seksama tulisan yang disajikan oleh guru.

Secara umum kecelakaan lalu lintas yang terjadi disebabkan oleh beberapa faktor, seperti kelalaian manusia, kondisi jalan, kelalaian kendaraan, dan belum optimalnya penegakan hukum lalu lintas. Berdasarkan *Outlook* 2013 Transportasi Indonesia, terdapat empat faktor penyebab kecelakaan, yakni kondisi sarana transportasi, prasarana transportasi, faktor manusia, dan faktor alam. Penyebab kecelakaan selain akibat faktor kelalaian manusia, juga akibat faktor kondisi jalan yang rusak, terutama akibat terjadinya banjir yang menggenangi sebagian besar wilayah Indonesia.

Data statistik menunjukkan angka kecelakaan lalu lintas dari tahun ke tahun cenderung meningkat. Peningkatan jumlah kecelakaan secara drastis terjadi pada periode 2004-2005 dan periode 2010-2012. Pada periode 2004-2005 meningkat tajam dari 17.732 kasus pada 2004, menjadi 91.623 kasus pada 2005, atau meningkat 5 kali lipat. Sedangkan periode 2010-2012 meningkat tajam dari 66.488 kasus pada 2010, menjadi 109.776 kasus pada 2011, dan 117.949 kasus pada 2012. Namun, pada tahun 2013 tingkat kecelakaan mengalami penurunan menjadi 93.578 kasus atau menurun sekitar 21% dibanding tahun sebelumnya. Sedangkan berdasarkan jumlah korban meninggal dunia, terjadi peningkatan tajam pada periode 2010-2011, yakni meningkat dari 19.873 jiwa menjadi 31.185 jiwa atau meningkat sekitar 36%. Meskipun tingkat kecelakaan periode 2012-2013 mengalami penurunan sekitar 21%, namun tingkat kematian akibat kecelakaan masih tergolong tinggi, yakni sekitar 25% atau sama dengan tahun sebelumnya.



Sumber: <http://www.sorsow.com/2013/01/html>

Setelah membaca dua paragraf di atas, data dari pernyataan tersebut dapat disajikan dalam bentuk tabel dan diagram garis seperti berikut.

Tabel Data Kecelakaan Lalu Lintas Tahun 2000-2013 adalah sebagai berikut.

Tahun	Jumlah Kecelakaan	Meninggal Dunia	Luka Berat	Luka Ringan	Kerugian Materiil (Juta Rp)
2000	12.649	9.536	7.100	9.518	36.281
2001	12.791	9.522	6.656	9.181	37.617
2002	12.267	8.762	6.012	8.929	41.030
2003	13.399	9.856	6.142	8.694	45.778
2004	17.732	11.204	8.983	12.084	53.044
2005	91.623	16.115	35.891	51.317	51.556
2006	87.020	15.762	33.282	52.310	81.848
2007	49.553	16.955	20.181	46.827	103.289
2008	59.164	20.188	23.440	55.731	131.207
2009	62.960	19.979	23.469	62.936	136.285
2010	66.488	19.873	26.196	63.809	158.259
2011	108.696	31.195	35.285	108.945	217.435
2012	117.949	29.544	39.704	128.312	298.627
2013	93.578	23.385	27.054	104.976	233.842

(Sumber: <https://polmas.wordpress.com/.../perubahan-perilaku-p>)

Grafik Jumlah Kecelakaan Lalu Lintas Tahun 2000-2013 adalah sebagai berikut.



(Sumber: <https://polmas.wordpress.com/.../perubahan-perilaku-p>)

Secara berkelompok, siswa diminta mencari informasi terkait lalu lintas, kemudian menyajikannya dalam bentuk tabel dan diagram garis.

C. PENILAIAN

Berikut disajikan contoh instrumen.

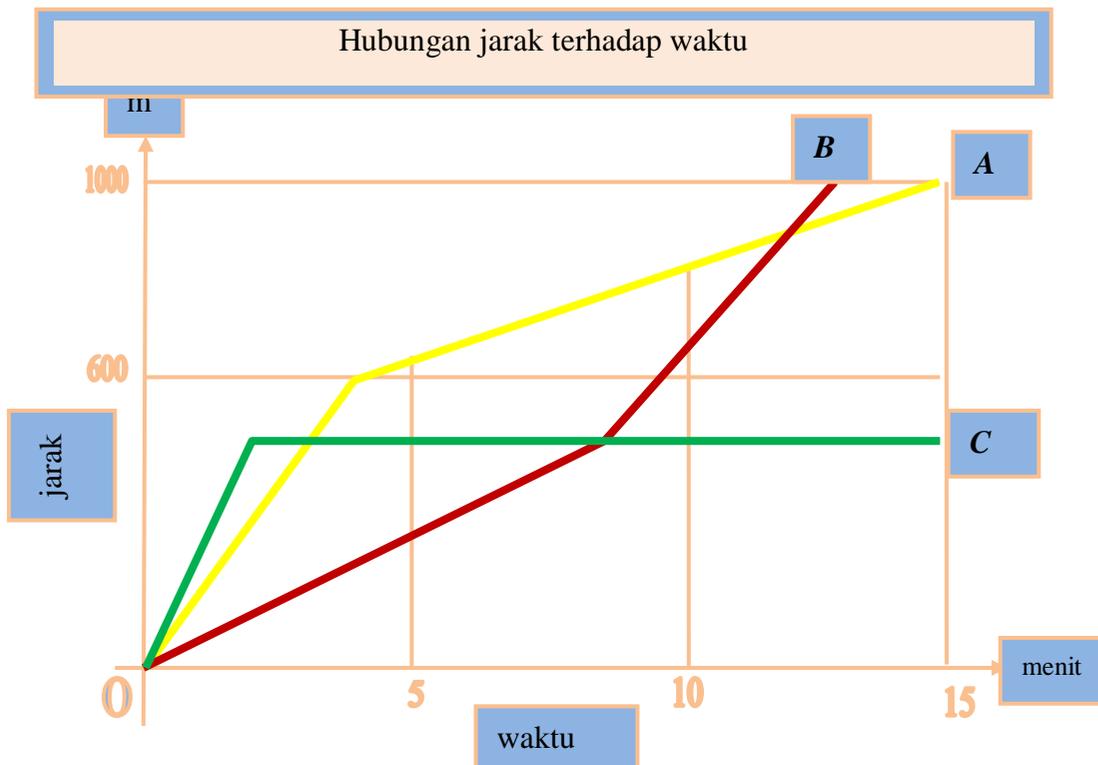
Bersama teman satu kelompokmu, jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut dan presentasikan hasilnya pada teman satu kelas dan gurumu.

Pada hari Minggu pagi, tiga orang sahabat, Ari, Budi, dan Candra, mengadakan lomba bersepeda di sirkuit dekat rumah mereka, menempuh jarak 1.000 meter. Pada kegiatan tersebut salah seorang di antara mereka jatuh dari sepeda akibat melanggar lalu lintas, yaitu mengendarai sepeda di trotoar sehingga tidak dapat melanjutkan perlombaan.



Sumber: <https://andy727.wordpress.com/category/sepeda/>

Diagram garis berikut menunjukkan hubungan antara jarak tempuh terhadap waktu pada kegiatan bersepeda ketiga anak tersebut.



Perhatikan pernyataan berikut:

1. Budi paling cepat sejak menit-menit awal dan memenangi lomba.
2. Candra paling cepat pada menit-menit pertama dan memenangi lomba.
3. Budi paling lambat pada titik-titik awal tetapi memenangi lomba.
4. Ari paling cepat mencapai garis *finish* dan memenangi lomba.
5. Ari dan Budi bertabrakan setelah menempuh perjalanan sekitar 12 menit.
6. Candra paling cepat pada menit-menit pertama tetapi tidak memenangi lomba.

Dari pernyataan di atas jawablah pertanyaan berikut!

- a. Pernyataan manakah yang sesuai dengan grafik di atas?
- b. Mengapa *option* yang lain tidak sesuai?
- c. Siapa yang melanggar lalu lintas karena mengendarai sepeda di trotoar?
- d. Bagaimana menurutmu, orang yang melanggar lalu lintas?

D. PENUTUP

Pendidikan ELL ditanamkan melalui penanaman nilai-nilai. Nilai merupakan keyakinan tentang perbuatan, tindakan atau perilaku yang dianggap baik atau jelek. Nilai merupakan suatu objek, aktivitas atau ide yang dinyatakan oleh individu dalam mengendalikan minat, sikap, dan kepuasan. Nilai-nilai beretika dalam berlalu lintas pada satuan pendidikan ditanamkan melalui pengintegrasian dalam mata pelajaran, pengembangan diri, dan budaya sekolah. Pengintegrasian dalam mata pelajaran dimaksudkan untuk memberikan pembiasaan berlalu lintas agar peserta didik memiliki etika yang baik, dengan mendasarkan pada konsep etika berlalu lintas yang dilandasi oleh komitmen untuk sopan dalam berlalu lintas. Pembelajaran etika berlalu lintas menjadi efektif jika dilaksanakan secara terintegrasi dalam banyak mata pelajaran, termasuk mata pelajaran matematika.

DAFTAR PUSTAKA

- Tim Penyusun. (2010). *Naskah Akademik Pendidikan Etika Berlallintas Pendidikan Dasar dan Menengah*. Yogyakarta: Dinas Pendidikan Kota Yogyakarta.
- Tim Penyusun. (2012). *Pedoman Penyelenggaraan Pendidikan Etika Berlalu lintas pada SMP*. Yogyakarta: Dinas Pendidikan Kota Yogyakarta.

*) Dra. Hj. Wahyu Cahyaning Pangestuti, M.Pd.
Guru SMP Negeri 4 Kota Yogyakarta, D.I. Yogyakarta

INVESTIGASI ATAU EKSPLORASI DALAM PEMBELAJARAN MATEMATIKA (Bagian Pertama)

*) Fadjar Shadiq

Menteri Pendidikan dan Kebudayaan RI, Anies R. Baswedan (Kemdikbud, 2014b:58), ketika baru diangkat menjadi Menteri, pada acara Silaturahmi Menteri Pendidikan dan Kebudayaan RI dengan Kepala Dinas Pendidikan dan Kebudayaan seluruh Indonesia di Jakarta pada 1 Desember 2014, telah mempresentasikan percikan pemikiran, perenungan dan kebijakan beliau dengan judul paparan: ‘Gawat Darurat Pendidikan di Indonesia’. Dari paparan tersebut, beliau mengungkapkan bahwa hasil akhir (*the ultimate goal*) yang harus dicapai jajaran Pendidikan dan Kebudayaan di Indonesia, terutama sekolah, adalah menghasilkan ‘lulusan yang mandiri dan berkepribadian.’ Penulis sangat sependapat dengan pernyataan tersebut dan kebijakan beliau tersebut harus kita dukung bersama. Penulis (Shadiq, 2014) pada saat yang hampir bersamaan menyatakan bahwa ada dua permasalahan besar bangsa yaitu yang pertama berkaitan dengan karakter bangsa dan yang kedua berkaitan dengan keterampilan pemecahan masalah, berpikir, kreativitas, dan inovasi. Tulisan penulis dapat *download* melalui [<https://fadjarp3g.wordpress.com/2014/06/04/seminar-nasional-semnas-matematika-dan-pendidikan-matematika-di-universitas-pgri-yogyakarta/>]. Pertanyaan reflektif yang dapat diajukan pada saat ini adalah: “Sejauh mana keinginan luhur tersebut yaitu menghasilkan ‘lulusan yang mandiri dan berkepribadian sudah terlaksana?’ Ataukah keinginan luhur tersebut baru pada tataran kebijakan saja?” Secara umum, sebagai umat yang beragama, sebagai mana disampaikan Mendikbud RI saya mengidamkan pendidikan di Indonesia akan menghasilkan intelektual yang berkarakter.

Permasalahan Berkait dengan Karakter Bangsa

Menurut penulis, pada satu sisinya, berkaitan dengan karakter bangsa kita, sebagai pendidik kita harus merasa gagal melihat perkelahian antar pelajar, penyalahgunaan narkoba, korupsi yang telah merambah segala segi dan sisi kehidupan, kolusi, nepotisme, plagiarisme, menghalalkan segala cara, ataupun kecurangan lainnya.

Berkait dengan karakter bangsa, Ki Hadjar Dewantara (Majelis Luhur Persatuan Taman Siswa, 1977:94) yang dikenal sebagai Bapak Pendidikan Nasional telah menyatakan:

“Pengetahuan dan kepandaian janganlah dianggap maksud dan tujuan; tetapi hanya merupakan alat atau perkakas. Lain tidak. Bunganya yang kelak akan jadi buah yang harus diutamakan. Buah pendidikan adalah matangnya jiwa yang akan dapat mewujudkan hidup dan kehidupan yang tertib, suci, dan bermanfaat bagi orang lain.”

Selanjutnya Ki Hadjar Dewantara juga pernah menyatakan: “Aku hanya orang biasa yang bekerja untuk bangsa Indonesia dengan cara Indonesia. Sesaatpun aku tidak pernah mengkhianati tanah air dan bangsaku. Aku tidak pernah mengkorup kekayaan Negara.”

Tentunya, contoh dari para pemimpin bangsa dan agama adalah untuk secara sungguh-sungguh melaksanakan perintah-Nya dan menjauhi larangan-Nya. Tentunya teladan tersebut akan berperan sangat besar untuk umat. Pada intinya, warga Indonesia harus beradab, dengan mengamalkan ajaran agamanya dalam segala sisi kehidupannya. Jelaslah bahwa pendidikan di Indonesia, seperti yang

diharapkan Ki Hadjar Dewantara, adalah dapat mewujudkan perilaku hidup dan kehidupan yang tertib, suci, dan bermanfaat bagi orang lain. Sejatinya, pendidikan harus dapat mendidik Bangsa Indonesia ini untuk mewujudkan Indonesia Raya yang maju dan beradab, utamanya pada tahun emas 2045, di saat Negara RI berusia 100 tahun. Bukankah itu cita-cita jajaran Kemdikbud? Karena itu, pendidikan harus menyiapkan kader-kader bangsa berikutnya yang memiliki karakter, idealis, berpikiran maju, dan rasional. Kata lainnya, warga bangsa ini ke depan harus memiliki sikap, keterampilan, pengetahuan, dan etos kerja prima sehingga pada akhirnya para siswa tersebut dapat bersaing dengan para siswa dari Negara lain.

Kalaulah bangsa dan negara ini berhasil mengelola pendidikan seperti yang diinginkan Ki Hadjar Dewantara, di mana pendidikan karakter yang dikenal luas merupakan aspek sikap, maka tentunya tidak akan terjadi perkelahian antar sesama bangsa, korupsi, jurang antara si miskin dan si kaya, ataupun menghalalkan segala cara untuk tujuan yang dapat merugikan bangsa dan negaranya. Pernyataan Ki Hadjar Dewantara di atas menunjukkan bahwa beliau menempatkan pendidikan karakter sebagai dasar dan fondasi yang sangat penting. Kurikulum 2013 menempatkan hal itu pada Kompetensi Inti 1 dan 2. Di atasnya, Kompetensi Inti 3 (berkaitan dengan pengetahuan) dan Kompetensi Inti 4 (berkaitan dengan keterampilan) akan ditempatkan. Di masa sekarang ini, kemampuan berpikir semakin dibutuhkan sebagaimana dinyatakan *National Research Council (NRC, 1989:1)* beberapa tahun yang lalu: *“Communication has created a world economy in which working smarter is more important than merely working harder. ... require worker who are mentally fit – workers who are prepared to absorb new ideas, to adapt to change, to cope with ambiguity, to perceive patterns, and to solve unconventional problems.”* Secara umum, sekali lagi sebagai orang dan warga Indonesia, maka saya mengidamkan pendidikan di Indonesia akan menghasilkan intelektual yang berkarakter.

Permasalahan Berkait dengan Keterampilan Berpikir

Di samping itu, pada sisi lainnya, berkaitan dengan keterampilan berpikir dan bertindak warga bangsa kita, mengapa bangsa lain di Asia seperti Jepang dan Korea Selatan berpikiran maju, kritis, dan kreatif? Untuk hal-hal tertentu, harus diakui bahwa mereka telah mengalahkan AS dan negara-negara Eropa. Korea Selatan contohnya yang telah memenangkan persaingan bahkan dengan Jepang sekalipun dalam hal *BlackBerry*. Jepang sudah sejak lama berjaya di bidang otomotif. Cina, Thailand, dan Vietnam juga sudah mulai menggeliat menjadi negara yang kompetitif. Pertanyaan berikutnya yang dapat diajukan adalah: “Bagaimana pikiran mereka bisa maju seperti itu?” Berdasar penjelasan di atas dan sebelumnya, dapatlah disimpulkan bahwa ada dua permasalahan besar bangsa Indonesia menurut Mendikbud dan penulis yang perlu segera diselesaikan. Yang pertama berkaitan dengan karakter atau kepribadian bangsa dan yang kedua berkaitan dengan keterampilan berpikir dan kreativitas bangsa. Gambar ini menunjukkan Pythagoras (NCTM, 1973:235) yang sedang bereksplorasi yang seharusnya dimiliki lulusan sekolah di Indonesia.



Jika masalah karakter dan kepribadian, pada Kurikulum 2013, berkait dengan Kompetensi Inti 1 dan 2, dan hal itu dapat ditunjukkan dengan teladan dan contoh para pemimpin dan guru, seperti perilaku tepat waktu, jujur, taat azas dan pantang menyerah; maka artikel yang ditulis ini, selanjutnya hanya akan membicarakan hal-hal yang berkait dengan pencapaian Kompetensi Inti 4 yang berkait dengan keterampilan berpikir dan bertindak saja. Pertanyaan yang dapat diajukan di antaranya adalah:

- (1) Bagaimana pendidikan memberi solusi terhadap masalah keterampilan tersebut?
 - (2) Apa kekurangan pembelajaran selama ini?
 - (3) Apa yang harus diubah?
 - (4) Bagaimana cara mengubahnya?
- ‘Pengembangan Kurikulum 2013’ (Kemdikbud, 2012), menyatakan bahwa model pembelajaran yang ideal untuk abad 21 yaitu:

- (1) Pembelajaran yang diarahkan untuk mendorong peserta didik mencari tahu dari berbagai sumber dan bukan hanya diberi tahu.
- (2) Pembelajaran yang diarahkan untuk mampu merumuskan masalah [menanya], bukan hanya untuk menyelesaikan masalah atau menjawab.
- (3) Pembelajaran yang diarahkan untuk melatih berpikir analitis [pengambilan keputusan] bukan berpikir mekanistik atau rutin.
- (4) Pembelajaran yang menekankan pentingnya kerjasama dan kolaborasi dalam menyelesaikan masalah.

Berkait dengan pencapaian keterampilan berpikir dan bertindak di kelas, Salinan Lampiran Peraturan Menteri Pendidikan dan Kebudayaan Republik Indonesia Nomor 105 Tahun 2014 Tentang Pendampingan Pelaksanaan Kurikulum 2013 Pada Pendidikan Dasar dan Pendidikan Menengah (Kemendikbud, 2014a:7) juga menyatakan bahwa salah satu pendekatan pembelajaran pada pelaksanaan pembelajaran adalah pendekatan pembelajaran saintifik, yang meliputi: (a) mengajak peserta didik untuk mengamati; (b) memotivasi peserta didik untuk menanya; (c) memotivasi peserta didik untuk mengumpulkan informasi; (d) memotivasi peserta didik untuk menalar/mengasosiasi; dan (e) memotivasi peserta didik untuk mengomunikasikan. Berkait dengan arahan Menteri Pendidikan dan Kebudayaan, Anies R. Baswedan, bahwa hasil akhir

(*the ultimate goal*) yang harus dicapai jajaran Pendidikan dan Kebudayaan di Indonesia adalah menghasilkan ‘lulusan mandiri dan berkepribadian’, maka pertanyaan yang dapat diajukan adalah: ‘sudah mandiri dan berkepribadiankah kita?’ ‘Bagaimana membantu siswa menjadi mandiri dan berkepribadian? Seperti yang ada pada judul maka tulisan ini dimaksudkan untuk membantu guru matematika di kelas, sehingga para siswa menjadi mandiri melalui kegiatan penyelidikan.

Pengertian Penyelidikan

Beberapa cara untuk mengaktifkan siswa agar berpikir dan bernalar adalah dengan memberikan soal yang mengarah pada jawaban konvergen, divergen, dan penyelidikan (investigasi) atau eksplorasi. Istilah investigasi sendiri lebih banyak muncul di Inggris Raya (*United Kingdom*) dan Australia bersamaan dengan terbitnya laporan Cockcroft. Tulisan singkat ini akan membahas selintas tentang kegiatan yang disebut dengan penyelidikan tersebut dan akan dibagi dalam beberapa bagian dan akan dimulai dengan membahas pengertian penyelidikan, terutama apa bedanya dengan pemecahan masalah; diikuti dengan contoh penyelidikan tentang lompat katak; dan akan diakhiri dengan pembahasan mengenai mengapa guru harus memfasilitasi siswanya untuk melakukan kegiatan penyelidikan ini.

Menurut Evans (1987), di Inggris, istilah investigasi (penyelidikan) mulai muncul di kancah pembicaraan para guru sejak diterbitkannya laporan Cockcroft pada tahun 1982 yang menyatakan bahwa pengajaran matematika harus melibatkan aktivitas-aktivitas berikut:

- (1) eksposisi atau pemaparan guru (*exposition*)
- (2) diskusi di antara siswa sendiri, ataupun antara siswa dengan guru (*discussion*),
- (3) kerja praktek (*practical work*)
- (4) pemantapan dan latihan pengerjaan soal (*consolidation*)
- (5) pemecahan masalah (*problem solving*)
- (6) penyelidikan (*investigation*)

Masih menurut Evans (1987); jika di Inggris pemecahan masalah (*problem solving*) dibedakan dari penyelidikan (*investigation*), maka di AS kedua

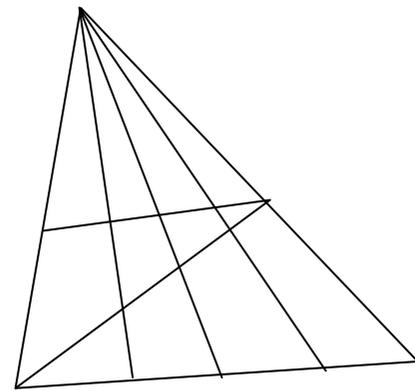
istilah tersebut tersebut tidak dibedakan, dalam arti penyelidikan dimasukkan ke lingkup kegiatan pemecahan masalah yang sejak tahun 1985 sudah menjadi agenda aksi para guru matematika untuk dilaksanakan berdasarkan rekomendasi *NCTM* (*National Council of Teachers of Mathematics*), suatu organisasi para guru matematika di AS yang sangat disegani di seluruh dunia.

Lalu, apa beda antara pemecahan masalah dengan penyelidikan? Evans, (1987) menyatakan bahwa pemecahan masalah merupakan kegiatan memusat (*convergent activity*) di mana para siswa harus belajar mencari penyelesaian yang sudah jelas arahnya, sedangkan investigasi adalah suatu kegiatan menyebar (*divergent activity*) di mana para siswa lebih diberikan kesempatan untuk memikirkan, mengembangkan, dan menyelidiki hal-hal menarik yang mengusik rasa keingintahuan mereka. Pada kegiatan investigasi, dapat saja terjadi, si A tertarik untuk menyelidiki x sedangkan si B berminat untuk menyelidiki bagian yang lain, yaitu y . Di samping itu, dapat saja si A hanya tertarik untuk menyelidiki bagian-bagian permukaannya saja, sedangkan si B dengan kemampuan berpikir yang sangat prima menyelidiki hal-hal tersebut secara mendalam dan terinci. Itulah sebabnya penyelidikan ini disebut juga suatu kegiatan terbuka dan tidak terbatas, karena kegiatan ini sangat tergantung pada ketertarikan dan perbedaan kemampuan berpikir setiap siswa yang tentunya sangat berbeda.

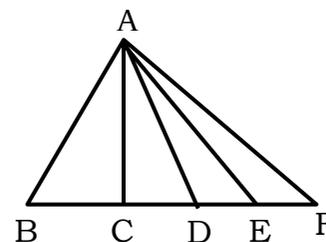
Contoh Pertama Penyelidikan

Dari seorang teman, melalui WA, penulis mendapat masalah berikut, yaitu untuk menentukan banyaknya segitiga pada gambar di bawah ini. Jika Anda yang mendapat masalah seperti itu apa yang akan Anda lakukan? Berhentilah sejenak membaca artikel ini. Cobalah untuk membayangkan para siswa yang saat ini sedang duduk di bangku sekolah yang mendapati masalah seperti itu di kelak kemudian hari, di tempat kerjanya. Bagaimana cara Anda sebagai guru matematika memfasilitasi para siswa agar dapat menyelesaikan masalah seperti itu? Untuk itu, cobalah untuk menyelesaikan masalah itu sendiri lebih dahulu. Sekali lagi apa yang akan Anda lakukan? Apakah Anda akan memecahkan soal atau

masalah di atas dengan mencoba-coba saja tanpa aturan yang jelas, sekehendak Anda sendiri dan tanpa aturan yang jelas, atau dengan aturan yang dapat Anda tentukan sendiri lebih dahulu? Ingatlah, Marquis de Condorcet seperti dikutip Fitzgerald dan James (2007:ix) menyatakan bahwa matematika adalah cara terbaik untuk melatih kemampuan kita, dalam arti bahwa matematika akan dapat mengembangkan kekuatan dan ketepatan berpikir para siswa. Namun bagaimana caranya?



Jika Anda yang mendapatkan soal seperti di atas, salah satu strategi yang mungkin dapat Anda gunakan adalah dengan strategi mencobakan pada soal yang lebih sederhana dan lebih mudah. Sebelum menyelesaikan soal di atas, perhatikan dahulu gambar segitiga di bawah ini yang lebih sederhana. Ada empat garis dari puncak segitiga ke sisi di depannya, yang terletak di antara kaki-kaki segitiga tersebut. Ada berapa gambar segitiga pada gambar di atas? Tunjukkan. Jika dibuat duapuluh ruas garis dari salah satu titik sudut segitiga tersebut ke sisi didepannya, tentukan banyaknya segitiga yang terjadi.



Namun sekali lagi, sebelum Anda memecahkan masalah di mana akan dibuat duapuluh ruas garis dari salah satu titik sudut segitiga tersebut ke sisi didepannya, maka ada baiknya Anda

mempelajari penyelesaian soal di atas terlebih dahulu. Intinya, di dalam proses penyelidikan dapat saja Anda memulai kegiatan dari hal-hal yang mudah dan sederhana untuk dipelajari. Di samping strategi ‘mencobakan pada soal yang lebih sederhana dan lebih mudah’, strategi lainnya yang dapat Anda gunakan adalah strategi ‘bekerja dengan sistematis’, yaitu strategi yang berkaitan dengan penggunaan aturan-aturan yang dibuat sendiri oleh Anda sendiri selama proses pemecahan masalah sehingga tidak akan ada satupun alternatif yang terabaikan atau malah dihitung lebih dari satu kali. Perhatikan sekarang bangun yang sudah diberi label seperti gambar di atas. Salah satu aturan yang dapat ditentukan adalah dengan menentukan susunan huruf yang dapat membentuk segitiga atau tidak secara berurutan sebagai berikut.

1. Dimulai dari huruf A, lalu diikuti huruf B sehingga didapat segitiganya adalah ABC, ABD, dan seterusnya ABE dan ABF. Seluruhnya akan didapat 4 segitiga yang dimulai dengan dua huruf AB.
2. Dimulai dari huruf A, lalu diikuti huruf C sehingga didapat segitiganya adalah ACD, ACE, dan ACF. Seluruhnya akan didapat 3 segitiga yang dimulai dengan dua huruf AC. Pertanyaan yang dapat diajukan adalah: “Mengapa Anda tidak dapat memulai kegiatan dan menghitung segitiga ACB?” Ya. Tepat sekali, karena ACB pada kenyataannya adalah sama dengan segitiga ABC yang sudah dihitung pada kegiatan 1 di atas.
3. Dimulai dari huruf A, lalu diikuti huruf D sehingga didapat dua segitiga yaitu segitiga ADE dan ADF. Seluruhnya akan didapat 2 segitiga yang dimulai dengan dua huruf AD. Pertanyaan yang dapat diajukan adalah: “Mengapa Anda tidak dapat memulai kegiatan dan menghitung segitiga ADB dan ADC?”
4. Dimulai dari huruf A, lalu diikuti huruf E sehingga didapat hanya satu segitiga, yaitu segitiga AEF. Seluruhnya akan didapat 1 segitiga yang dimulai dengan dua huruf AE.
5. Dimulai dari huruf A, lalu diikuti huruf F namun tidak didapat satupun segitiga berikutnya yang didapat bukan?

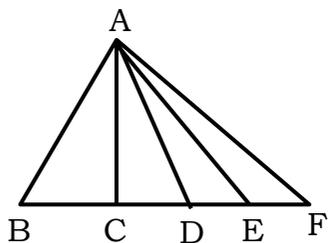
Proses menentukan banyaknya segitiga di mana dimulai dari huruf A, lalu diikuti huruf B, C, D, E dan

F sudah selesai. Selanjutnya, menentukan banyaknya segitiga dengan huruf-huruf berikutnya.

6. Dimulai dari huruf B, lalu diikuti huruf-huruf C, D, E dan F, namun tidak didapat satupun segitiga yang didapat bukan? Begitu juga jika proses pencariannya dimulai dari huruf C, lalu diikuti huruf-huruf D, E dan F, tidak akan didapat satupun segitiga bukan? Begitu juga jika proses tersebut dilanjutkan.

Dengan dua huruf awal AB didapat empat segitiga yang memenuhi, yaitu segitiganya ABC, ABD, ABE dan ABF. Dengan dua huruf awal AC didapat tiga segitiga yang memenuhi, yaitu ACD, ACE dan ACF. Dengan dua huruf awal AD, akan didapat dua segitiga yang memenuhi, yaitu segitiga ADE dan ADF. Selanjutnya, dengan dua huruf awal AE, akan didapat satu segitiga yang memenuhi, yaitu segitiga AEF. Namun jika hurufnya dimulai dari huruf B, lalu diikuti huruf-huruf C, D, E dan F, tidak akan didapat satupun segitiga yang memenuhi, begitu juga jika proses pencariannya dimulai dari huruf C, lalu diikuti huruf-huruf D, E dan F, tidak akan didapat satupun segitiga bukan? Begitu juga jika proses tersebut dilanjutkan. Dengan demikian dapatlah disimpulkan bahwa ada $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ segitiga pada gambar di atas.

Contoh di atas menunjukkan juga bahwa proses pemecahan masalah dalam menentukan banyaknya segitiga akan memfasilitasi siswa untuk bekerja secara sistematis sehingga Anda yakin bahwa tidak akan ada segitiga yang dihitung dua kali maupun akan ada segitiga yang tidak dihitung sama sekali karena terabaikan. Itulah kehebatan mempelajari pemecahan masalah matematika. Sekali lagi itulah sebabnya, Marquis de Condorcet seperti dikutip Fitzgerald dan James (2007:ix) menyatakan bahwa: “*Mathematics ... , is the best training for our abilities, as it develops both the power and the precision of our thinking.*” Artinya, matematika adalah cara terbaik untuk melatih kemampuan kita, dalam arti bahwa matematika akan dapat mengembangkan kekuatan dan ketepatan berpikir para siswa. Pada masa sekarang; kemampuan bernalar, berkomunikasi, dan memecahkan masalah ditengarai akan jauh lebih penting daripada jika siswa hanya memiliki pengetahuan matematika saja.



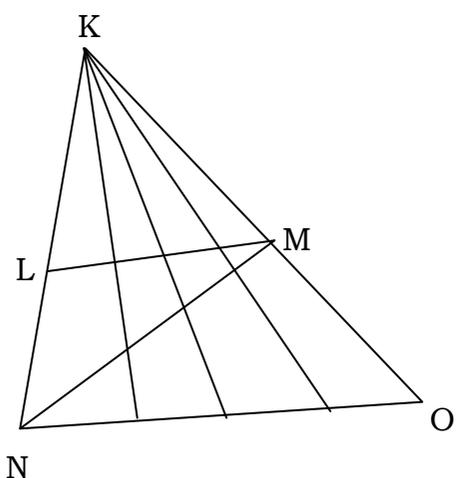
Perhatikan sekali lagi segitiga ABF di atas ini. Kembali ke masalahnya, ada berapa segitiga seluruhnya pada gambar tersebut. Adakah strategi lain yang dapat digunakan di samping strategi mencobakan pada soal yang lebih sederhana dan lebih mudah tadi? Termasuk pada strategi bekerja dengan sistematis, yang dapat digunakan untuk memecahkan masalah adalah dengan mengelompokkan, sehingga Anda yakin dan dapat meyakinkan orang lain bahwa tidak akan ada segitiga yang dihitung dua kali maupun akan ada segitiga yang tidak dihitung sama sekali karena terabaikan. Sebagai salah satu alternatif pengelompokan segitiganya dapat saja berdasarkan:

1. Satu segitiga terbesar yaitu segitiga ABF.
2. Segitiga terbesar berikutnya yaitu dua segitiga ABE dan ACF.
3. Segitiga terbesar berikutnya lagi yaitu tiga segitiga ABD, ACE dan ADF.
4. Segitiga terkecil yaitu empat segitiga ABC, ACD, ADE dan AEF.

Dengan demikian dapatlah disimpulkan bahwa ada $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ segitiga pada gambar di atas. Perhatikan susunan atau struktur pada hasil perhitungannya, yaitu $4 + 3 + 2 + 1$ yang indah. Dari dua cara yang dikemukakan, seorang guru dapat memfasilitasi siswanya untuk belajar menentukan cara yang menurutnya lebih mudah. Biarlah mereka belajar untuk menetapkan secara mandiri cara terbaik menurut mereka sendiri (*decision making*). Bagaimana jika dibuat 20 ruas garis dari salah satu titik sudut segitiga tersebut ke sisi didepannya, tentukan banyaknya segitiga yang terjadi. Lebih mudah mendapatkannya setelah mengetahui dan mendapatkan pola atau keteraturannya? Hasil ini, meskipun dengan cara yang lain namun hasilnya akan sama. Dengan demikian diharapkan, pada proses pembelajaran di kelas, hendaknya para siswa dapat difasilitasi untuk:

1. Saling belajar memecahkan masalah, serta mengorganisasi dan mengkonsolidasikan pemikiran dan ide matematika dengan cara mengomunikasikannya. Belajar menggunakan bahasa matematika untuk menyatakan ide-ide mereka dengan tepat.
2. Saling belajar mengemukakan cara, ide dan penalaran yang digunakan. Mengomunikasikan pemikiran matematika mereka secara logis dan jelas kepada teman sejawatnya, gurunya, dan orang lain.
3. Saling belajar mendengarkan cara, ide dan penalaran yang digunakan, yang mungkin berbeda dengan caranya sendiri.
4. Saling belajar menghargai cara, ide dan penalaran yang digunakan kelompok lain, yang mungkin berbeda dengan caranya sendiri atau mungkin salah menganalisis dan mengevaluasi pemikiran matematika orang lain
5. Saling belajar dengan cara yang paling santun untuk menunjukkan kesalahan dan kekeliruan argumen yang dikemukakan kelompok lain sehingga kelompok lain tersebut dapat menerima dan mengakui bahwa kesimpulan yang mereka kemukakan adalah salah atau keliru.
6. Saling belajar berpikir tentang kesalahan dan kebenaran kelompok sendiri maupun kelompok lain.

Menurut Kurikulum 2013, kegiatan ‘mengomunikasikan’ merupakan langkah terakhir pada pendekatan saintifik. Pada kegiatan ‘mengomunikasikan’ ini, tidak semua siswa ataupun kelompok siswa diminta menjelaskan langkah-langkah penyelesaian masalah, kecuali mungkin berbeda hasilnya atau berbeda caranya. Jadi, meskipun ‘mengomunikasikan’ merupakan langkah terakhir pada pendekatan saintifik tidak berarti semua siswa ataupun kelompok siswa diminta menjelaskan langkah-langkah penyelesaian masalahnya, perhatikan juga waktunya. Kembali ke soal awal seperti ditunjukkan gambar berikut, ada berapa segitiga yang Anda dapatkan dan bagaimana caranya?



Salah satu alternatif penyelesaiannya adalah berdasar pengelompokannya. Dengan menggunakan pengetahuan yang didapat tadi, akan didapat 10 gambar segitiga pada segitiga KLM. Yang didapat dari $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ segitiga. Begitu juga, dengan cara yang sama, pada segitiga KNM dan segitiga KNO, masing-masing akan didapat 10 gambar segitiga. Selanjutnya dengan mudah juga dapat ditentukan hanya akan didapat empat gambar segitiga pada segitiga MLN. Begitu juga pada segitiga NOM ada empat gambar segitiga lainnya. Dengan demikian, akan didapat $3 \cdot 10 + 2 \cdot 4 = 38$ gambar segitiga seluruhnya. Berkait dengan pengetahuan tentang banyaknya segitiga yang menjadi dasar penyelesaian soal di atas, sudah sejak lama Descartes, yang mengenalkan sumbu Kartesius, dalam CEuvres, vol. VI, hal 20-21 dan hal 67 menyatakan dua pernyataan berikut. Dua pernyataan tersebut dapat dibaca pada buku Polya (...: 2).

“Each problem that I solved became a rule which served afterwards to solve other problems. [Setiap masalah yang dapat saya pecahkan dapat menjadi suatu aturan yang dapat digunakan untuk memecahkan masalah lain].”

“If I found any new truths in the sciences, I can say that they all follow from, or depend on, five or six principal problems which I succeeded in solving and which I regard as so many battles where the fortune of war was on my side. [Jika saya

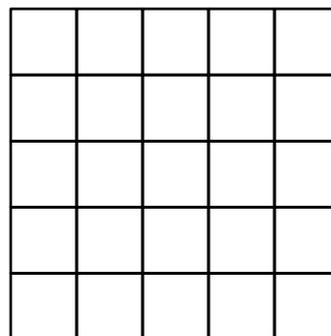
mendapatkan suatu kebenaran baru di bidang sains, maka saya dapat menyatakan bahwa hal tersebut mengikuti dari, atau tergantung pada, lima atau enam prinsip pemecahan masalah yang sukses saya lakukan sehingga dapat saya nyatakan bahwa seperti dalam beberapa pertempuran maka keberuntungan berpihak pada diri saya].”

Contoh Kedua Penyelidikan

Contoh ini dapat ditemui pada buku berjudul: ‘*Mathematical Thinking*’ yang ditulis Isoda & Katagiri (2012:31). Masalah penyelidikannya adalah: “Ada berapa gambar persegi pada diagram di bawah ini?” Untuk para guru matematika pada umumnya, Isoda & Katagiri (2012:31) mengajukan beberapa pertanyaan reflektif yang menggelitik berikut.

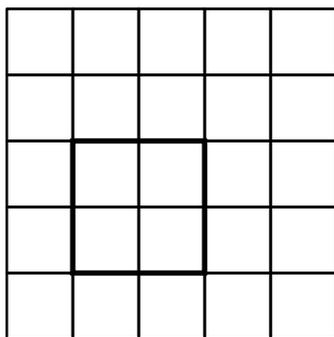
1. Bagaimana proses pembelajarannya?
2. Apa keunggulan jika cara seperti itu yang digunakan?
3. Apa kekurangannya?
4. Bagaimana meningkatkan metode itu?”

Sejatinya empat pertanyaan di atas merupakan pertanyaan reflektif yang dapat ditanyakan setiap guru setelah selesai melakukan suatu kegiatan untuk mengevaluasi setiap proses pembelajaran yang sudah dilakukan. Seorang guru tidak akan pernah menjadi guru berpengalaman jika ia tidak mau belajar dari kesalahan yang dilakukan para siswanya.



Penulis ketika menjadi guru SMA, pernah mengajukan masalah yang sama, setelah itu penulis berkeliling kelas untuk memantau para siswa. Hasil

pemantauan yang didapat banyak siswa yang menjawab 25 persegi. Lalu mereka berhenti tidak memikirkan persegi lainnya. Sejalan dengan itu, Isoda & Katagiri (2012) menyatakan tentang pentingnya: “Kejelasan tugas #1 yang menunjukkan bahwa semua persegi yang harus dihitung.” Berdasar temuan itu, pada kelas lain, penulis memberi gambar yang agak lain (lihat gambar di bawah ini) dengan perintah sebagai berikut. “Ada berapa gambar persegi pada diagram di bawah ini? Salah satu gambar perseginya sudah ditebalkan.” Dengan gambar yang baru diharapkan para siswa akan mencari dan belajar beberapa kelompok persegi lainnya, dan tidak hanya fokus pada persegi berukuran 1×1 saja. Inilah contoh pentingnya mengobservasi pekerjaan siswa beserta pentingnya tindak lanjutnya.



Di samping itu, Isoda & Katagiri (2012) menyatakan juga tentang pentingnya: “Kejelasan tugas #2 dengan memberi kesempatan kepada siswa untuk belajar menentukan cara terbaik dan termudah.” Dengan demikian para siswa hendaknya difasilitasi untuk belajar menentukan cara terbaik dan termudah, terutama untuk belajar menemukan dan mempelajari pola serta keteraturan, dan bukan bekerja secara serabutan tanpa aturan yang jelas dan bukan dengan pengerjaan tanpa pengelompokan. Itulah sebabnya Isoda & Katagiri (2012) menyatakan tentang pentingnya: “Para siswa merasakan pentingnya mengelompokkan.”

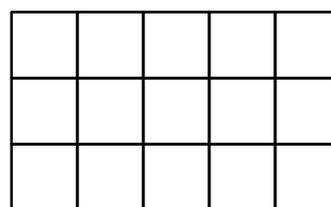
Para siswa hendaknya difasilitasi untuk bekerja secara sistematis, yaitu strategi yang berkait dengan penggunaan aturan-aturan yang dibuat sendiri oleh si pelaku, dalam hal ini Anda sendiri, sehingga selama proses pemecahan masalah di atas tidak akan ada satupun alternatif yang terabaikan ataupun

dihitung dua kali atau lebih. Pengelompokan yang dapat dilakukan adalah sebagai berikut.

- (1) Banyaknya gambar persegi berukuran 1×1 adalah 25 persegi atau sebanyak 5×5 persegi.
- (2) Banyaknya gambar persegi berukuran 2×2 seperti dicontohkan pada gambar persegi dengan garis tebal adalah 16 persegi atau sebanyak 4×4 persegi.
- (3) Banyaknya gambar persegi berukuran 3×3 adalah 9 persegi atau sebanyak 3×3 persegi.
- (4) Banyaknya gambar persegi berukuran 4×4 adalah 4 persegi atau sebanyak 2×2 persegi.
- (5) Banyaknya gambar persegi berukuran 5×5 adalah 1 persegi atau sebanyak 1×1 persegi.

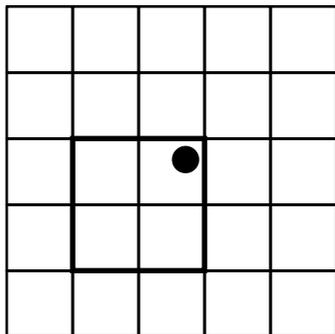
Sehingga banyaknya seluruh persegi adalah: $5 \times 5 + 4 \times 4 + 3 \times 3 + 2 \times 2 + 1 \times 1 = 55$ persegi. Perhatikan kecantikan (*the beauty*) ketika mempelajari matematika berupa pola atau keteraturan yang ada, yaitu $5 \times 5 + 4 \times 4 + 3 \times 3 + 2 \times 2 + 1 \times 1$. Cantik dan indah bukan? Tidak hanya itu siswa hendaknya difasilitasi juga untuk mengajukan pertanyaan seperti:

1. Apa hasil seperti itu kebetulan saja atau bisa dibuktikan? Keteraturannya bagaimana?
2. Bagaimana membuktikannya? Dengan kata lain, bagaimana menunjukkan kebenaran hasil tadi?
3. Ada berapa gambar persegi selanjutnya jika pola gambarnya diperbesar?
4. Ada berapa gambar persegi jika gambarnya diubah seperti gambar berikut ini?

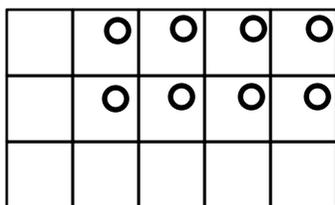


Isoda & Katagiri (2012) juga menyatakan tentang pentingnya: “Mengetahui kegunaan memberi nama.” Dengan memberi nama akan memudahkan pengelompokannya dan proses pemecahan masalahnya. Bayangkan jika kita tidak mengenalkan “persegi berukuran 1×1 , 2×2 , 3×3 ,” Alangkah sulitnya proses pengelompokannya dan proses menjelaskannya bukan? Selanjutnya, Isoda & Katagiri (2012) juga menyatakan tentang pentingnya: “Memvalidasi kebenaran hasil.” Artinya, hendaknya

siswa difasilitasi juga untuk menjelaskan dengan argumen yang benar dan runtut bahwa hasil tersebut sudah benar. Di samping itu, Isoda & Katagiri (2012) juga menyatakan tentang pentingnya: “Dapat menemukan cara terakurat dan terbaik dalam menghitung.”



Isoda & Katagiri (2012) menunjukkan cara terakurat dan terbaik dalam menghitung seperti ditunjukkan pada gambar di atas. Gambar satu persegi dengan ukuran 2×2 ditunjukkan dengan noktah hitam. Selanjutnya, dengan mudah akan dapat dihitung sebanyak 2×4 atau 4×2 persegi berukuran 2×2 pada gambar di bawah ini. Jelaslah bahwa Isoda & Katagiri (2012) menunjukkan tentang pentingnya siswa kita di Indonesia difasilitasi untuk belajar berpikir, bernalar dan bertindak sebagaimana yang telah dilakukan para matematikawan.



Daftar Pustaka

Evans, J. (1987). Investigations, the state of the art. *Mathematics in School*. January, hal. 27-30.

Fitzgerald, M. and James, I. (2007). *The Mind of the Mathematician*. Baltimore: The Johns Hopkins University Press.

Isoda, M. & Katagiri, S. (2012). *Mathematical Thinking*. Singapore: World Scientific.

Kemdikbud (2012). *Pengembangan Kurikulum 2013*. Jakarta: Kemdikbud.

Kemendikbud (2014a). *Salinan Lampiran Peraturan Menteri Pendidikan dan Kebudayaan Republik Indonesia Nomor 105 Tahun 2014 Tentang Pendampingan Pelaksanaan Kurikulum 2013 Pada Pendidikan Dasar dan Pendidikan Menengah*. Jakarta: Kemendikbud.

Kemendikbud (2014b). *Silaturahmi Kementerian dengan Kepala Dinas di Jakarta. 'Gawat Darurat Pendidikan di Indonesia'*. Jakarta: Kemendikbud.

Majelis Luhur Persatuan Taman Siswa (1977). *Karya Ki Hadjar Dewantara. Bagian Pertama: Pendidikan*. Yogyakarta: Majelis Luhur Persatuan Taman Siswa.

NCTM (1973). *Instructional Aids in Mathematics*. Washington D.C.: NCTM.

NRC (1989). *Everybody Counts. A Report to the Nation on the Future of Mathematics Education*. Washington DC: National Academy Press.

Polya, G (...). *Mathematical Discovery. Combined Edition*. New York: John Wiley and Sons Inc.

Shadiq, F (2014). *Pemecahan Masalah dalam Pembelajaran Matematika di Sekolah*. Makalah Disampaikan pada Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika (MAPIKA) di Universitas PGRI Yogyakarta, 24 Mei 2014. Yogyakarta: SEAMEO QITEP in Mathematics.

*) Fadjar Shadiq, M.App.Sc.
Purna tugas Widyaiswara PPPPTK Matematika dan sekarang bertugas di SEAMEO QITEP in Mathematics, Yogyakarta.

MENUJU PEMBELAJARAN MATEMATIKA AKTIF DAN KREATIF BERSAMA SI “TOPI PINTAR”

*) Nurhayati

Latar Belakang

Pembelajaran merupakan proses yang kompleks. Setiap kata, pikiran, tindakan dan asosiasi sejauh mana kita mengubah lingkungan, presentasi dan rancangan pembelajaran, sejauh itu pula proses berlangsung. Proses pembelajaran di sekolah sangat dipengaruhi oleh seorang guru, karena guru adalah *planner, desainer, fasilitator, motivator* dan *eksekutor*. Artinya pengaruh seorang guru sangatlah besar, guru harus mampu memahami bahwa perasaan dan sikap siswa akan terlihat dan berpengaruh kuat terhadap proses belajarnya. (Bobbi DePotter: 2001).

Pentingnya peran guru untuk meningkatkan mutu pendidikan menjadi permasalahan yang selalu masuk ranah kebijakan. Guru menjadi determinan faktor dalam meningkatkan mutu pendidikan baik dalam arti proses maupun hasil, maka upaya peningkatan kompetensi guru harus merupakan proses yang berkelanjutan. Tugas utama seorang guru, selain mendidik adalah mengajar. Sebagai pengajar, guru dihadapkan pada tuntutan profesi untuk selalu melakukan perbaikan atas kekurangan dan meningkatkan kemampuannya dalam melaksanakan tugas profesional. Guru profesional adalah seorang yang memiliki jabatan guru berdasarkan keilmuan dan keahliannya dengan mengabdikan diri sepenuhnya atas pekerjaan yang dipilihnya, dengan selalu berusaha mengembangkan diri dan keahlian yang berkaitan dengan jabatan gurunya. Sedangkan makna pendidik sebagai agen pembelajaran (*learning agent*) sebagaimana diuraikan dalam penjelasan Peraturan Pemerintah nomor 19 tahun 2005 adalah peran guru antara lain sebagai fasilitator, motivator, pemacu, dan pemberi inspirasi belajar bagi siswanya. Yang dihadapi seorang guru adalah siswa, yang mempunyai perasaan, minat dan ketertarikan terhadap sesuatu bernilai sangat subjektif.

Oleh karena itu, keberhasilan proses pembelajaran sangatlah bergantung kepada perasaan, minat dan ketertarikan siswa terhadap gurunya. Dalam hal ini bagaimana seorang guru menerapkan suatu model ataupun metode pembelajaran akan sangat berpengaruh terhadap proses pembelajaran. Tidak terkecuali untuk mata pelajaran matematika. Walau tidak lagi seangker dan sesulit dulu, bukan berarti membelajarkan matematika itu mudah.

Agar pembelajaran matematika tetap menarik, aktif dan efektif, maka perlu menggunakan model pembelajaran yang sesuai dengan karakteristik siswa dan ketersediaan sarana pendukung di sekolah. Salah satunya adalah model pembelajaran kooperatif. Model pembelajaran kooperatif merupakan strategi belajar dalam kelompok kecil, yang memungkinkan siswa saling membantu dalam memahami suatu konsep, memeriksa dan memperbaiki jawaban teman sebagai masukan serta kegiatan lain yang bertujuan untuk mencapai hasil belajar yang optimal. Aktivitas pembelajaran kooperatif disamping menekankan pada kesadaran siswa belajar, memecahkan masalah dan mengaplikasikan pengetahuan, konsep serta keterampilan kepada teman lain, siswa akan merasa senang menyumbangkan pengetahuannya kepada teman atau anggota lain dalam kelompoknya. Oleh karena itu belajar kooperatif adalah saling menguntungkan antar siswa yang berkemampuan rendah, sedang dan siswa yang berkemampuan tinggi.

Struktur kooperatif dibandingkan dengan struktur kompetisi dan usaha individual, lebih menunjang komunikasi yang lebih efektif dan pertukaran informasi diantara siswa, saling membantu tercapainya hasil belajar yang baik, lebih banyak bimbingan perorangan, berbagi sumber diantara siswa, perasaan terlibat yang lebih besar,

berkurangnya rasa takut akan gagal dan berkembangnya sikap saling mempercayai diantara para siswa. Trik dan teknik pembelajaran akan efektif bila disesuaikan dengan karakteristik siswa di kelas yang kita pandu.

Untuk mewujudkan pembelajaran matematika yang aktif, kreatif dan efektif, penulis mencoba memodifikasi pembelajaran kooperatif Number Head Together (NHT) dengan sesuatu yang baru bersama siswa kelas XI IPA yang diberi nama “Topi Pintar”.

Pembelajaran Aktif Dan Kreatif

Model pembelajaran aktif dan kreatif ini masih sangat cocok untuk era di kurikulum 2013, yang senantiasa berorientasi pada aktivitas siswa. Model pembelajaran aktif dan kreatif juga berorientasi pada proses dan tujuan. Orientasi proses dalam model pembelajaran ini berusaha untuk meningkatkan motivasi belajar siswa. Kemandirian dan tanggung jawab dibina sejak awal. Kebersamaan dan bekerja sama untuk mengasah emosional. Persaingan yang sehat ditumbuhkan dengan saling menghargai satu sama lain serta menumbuhkan sikap kepemimpinan. Orientasi tujuannya adalah agar anak belajar lebih mendalam, anak lebih kritis dan kreatif, suasana belajar menjadi bervariasi serta meningkatkan kematangan emosional. Tidak kalah pentingnya anak siap menghadapi perubahan dan berpartisipasi dalam proses perubahan.

Tetapi tampaknya untuk memaknai aktif dan kreatif masih terlalu abstrak. Banyak guru masih kabur dengan ini. Sebenarnya makna ini masih perlu dikembangkan lagi sesuai dengan kondisi yang sesungguhnya. Untuk sedikit memberi gambaran mengenai makna aktif dan kreatif berikut ini.

- 1. Aktif:** 1)Selalu mencoba; 2)Tidak ingin menjadi penonton; 3)Memanfaatkan modalitas belajar (visual, auditorial, atau kinestetik; 4)Penuh perhatian dalam setiap proses pembelajaran.
- 2. Kreatif:** 1)Menginginkan adanya perubahan yang baru; 2)Ingin mengadakan inovasi; 3)Mempunyai banyak cara untuk melakukan sesuatu; 4)Tidak cepat putus asa; 5)Tidak mudah puas dengan hasil kerjanya dan selalu ingin berbuat terus;

- 6)Menumbuhkan motivasi, percaya diri dan kritis;

Pembelajaran Kooperatif

Pembelajaran Kooperatif merupakan strategi pembelajaran melalui kelompok kecil siswa yang saling bekerja sama dalam memaksimalkan kondisi belajar untuk mencapai tujuan belajar.(Depdiknas, 2003). Sedangkan menurut Suprijono (2010) “Model pembelajaran kooperatif adalah konsep yang lebih luas meliputi semua jenis kerja kelompok termasuk bentuk-bentuk yang dipimpin oleh guru atau diarahkan oleh guru”. Ada empat unsur penting, yaitu: (1) adanya peserta dalam kelompok, (2) adanya aturan kelompok, (3) adanya upaya belajar setiap anggota kelompok dan (4) adanya tujuan yang harus dicapai. (Slavin, 2010).

Dari beberapa pengertian menurut para ahli dapat disimpulkan bahwa pembelajaran kooperatif adalah cara belajar dalam bentuk kelompok-kelompok kecil yang saling bekerjasama dan diarahkan oleh guru untuk mencapai tujuan pembelajaran yang diharapkan”. Ini berarti bahwa pembelajaran kooperatif adalah suatu model pembelajaran dimana sistem belajar dan bekerja kelompok-kelompok kecil berjumlah 4-6 orang secara kolaboratif sehingga dapat merangsang siswa lebih bergairah dalam belajar.

Model pembelajaran kooperatif adalah suatu model pembelajaran yang dalam pelaksanaannya mengedepankan pemanfaatan kelompok-kelompok siswa. Prinsip yang harus dipegang teguh dalam kaitan dengan kelompok kooperatif adalah setiap siswa yang ada dalam suatu kelompok harus mempunyai tingkat kemampuan yang heterogen (tinggi, sedang dan rendah) dan bila perlu mereka harus berasal dari ras, budaya, suku yang berbeda serta mempertimbangkan kesetaraan gender. Model pembelajaran kooperatif bertumpu pada kerjasama (kerjasama) saat menyelesaikan permasalahan belajar yaitu dengan menerapkan pengetahuan dan keterampilan sehingga tujuan pembelajaran dapat dicapai. Sebuah model pembelajaran dicirikan oleh adanya struktur tugas belajar, struktur tujuan pembelajaran dan struktur penghargaan (*reward*).

Dalam kaitan dengan model pembelajaran kooperatif, maka tentu saja struktur tugas, struktur tujuan dan struktur penghargaan pada model pembelajaran ini tidak sama dengan struktur tugas, struktur tujuan serta struktur penghargaan model pembelajaran yang lain.

Pembelajaran Kooperatif NHT

Struktur Numbered-Head-Together (NHT) biasanya juga disebut berpikir secara berkelompok adalah suatu pendekatan yang dikembangkan oleh *Russ Frank*. Huda (2014). NHT digunakan untuk melibatkan lebih banyak siswa dalam menelaah materi yang tercakup dalam suatu pelajaran dan mengecek pemahaman mereka terhadap isi pelajaran tersebut. Sebagai gantinya mengajukan pertanyaan kepada seluruh kelas. Menurut Suyatno(2009), langkah-langkah pembelajarannya adalah sebagai berikut: 1) Mengarahkan; 2) Membuat kelompok heterogen dan tiap siswa memiliki nomor tertentu; 3) memberikan persoalan materi bahan ajar (untuk tiap kelompok sama tapi untuk tiap siswa tidak sama sesuai dengan nomor siswa, tiap siswa dengan nomor sama mendapat tugas yang sama) kemudian bekerja kelompok; 4) Mempresentasikan hasil kerja kelompok dengan nomor siswa yang sama sesuai tugas masing-masing sehingga terjadi diskusi kelas; 5) Mengadakan kuis individual dan membuat skor perkembangan tiap siswa; 6) Mengumumkan hasil kuis dan memberikan reward.

Model Pembelajaran Topi Pintar

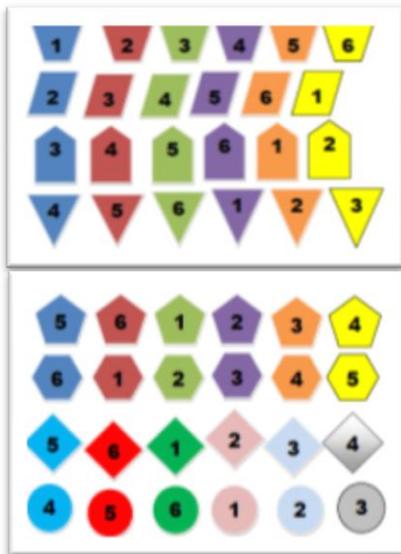
Ciri dari model pembelajaran kooperatif adalah tim belajar. Menurut Melvin (2014), strategi pembentukan kelompok sangat menentukan kesuksesan suatu tim. Seorang guru harus memberi kesempatan dan memfasilitasi siswa untuk membangun semangat tim dengan sebuah kelompok yang sudah kenal satu sama lain. Di jaman sekarang siswa sangat terbiasa dengan tayangan pembuka tertentu yang sudah populer sehingga hal itu tidak membuat mereka antusias. Cobalah untuk bereksperimen dengan strategi-strategi yang masih baru baik bagi guru maupun bagi siswa.

Berdasarkan pemikiran itu, penulis mencoba memodifikasi suatu model pembelajaran kooperatif, yang sesuai dengan karakteristik siswa di sekolah penulis dan diberi nama model pembelajaran topi pintar. Model pembelajaran “topi pintar” merupakan modifikasi dari model pembelajaran kooperatif tipe *number head together* (NHT). Adapun langkah-langkah pelaksanaannya sebagai berikut: 1) Guru membagi kelompok belajar yang heterogen terdiri dari 5-6 siswa; 2) Setiap siswa diberi nomor urut (sesuai tingkat kemampuan siswa dalam pembelajaran matematika menurut guru matematika di kelas itu) yang dituliskan pada topi buatan kelompok masing-masing; 3) Setiap kelompok memberi nama kelompoknya dari unsur-unsur matematika dan membuat yel-yel yang akan ditampilkan bagi kelompok dengan skor tertinggi; 4) Guru menyampaikan tujuan, materi dan tugas berupa soal-soal dalam jumlah yang relatif banyak; 5) Setiap kelompok melaporkan jumlah soal yang telah diselesaikan; 6) Kelompok yang tampil presentasi sesuai urutan banyak soal yang dikerjakan; 7) Skor yang diberikan pada kelompok yang tampil sesuai dengan nomor topinya dikali 100; 8) Nomor soal yang dipresentasikan ditentukan oleh guru, misalnya menggunakan kalimat” selesaikan soal dengan nomor terbesar sesuai dengan hasil yang dilaporkan”; 9) Kelompok lain yang mengajukan pertanyaan atau menanggapi mendapat skor yang sama dengan kelompok penampil; 10) Kelompok yang memperoleh skor tertinggi berhak untuk menampilkan yel-yelnya.

Penerapan Model Topi Pintar Dalam Pembelajaran Matematika

Model pembelajaran topi pintar telah diterapkan dikelas XI IPA SMAN 15 Palembang pada tahun pelajaran 2014/2015 dan 2015/2016. Langkah-langkah dalam pembelajaran adalah sebagai berikut.

1. Guru mengelompokkan siswa sesuai nomor peringkat.
2. Guru membuat kertas undian warna-warni terdiri dari delapan bentuk yang berbeda dan diberi nomor.



Gambar.1. Kertas Undian Bernomor

3. Guru memanggil siswa yang bernomor urut sama untuk mengambil undian. Dimulai siswa yang mempunyai nomor urut satu, dua, tiga, dan seterusnya, kemudian siswa menuliskan nama di belakang kertasnya.
4. Setelah semuanya selesai, salah satu siswa kembali ke tempat undian dan mengelompokkan kertas undiannya. Misal: sesuai dengan warna yang sama, sesuai dengan bentuk yang sama, dan sebagainya.



Gambar.2. Mengambil Undian dan Membentuk Kelompok

5. Langkah berikutnya adalah memberi nama kelompok dan membuat yel-yel.

6. Guru menyampaikan tujuan dan materi pelajaran, serta memberikan tugas.
7. Siswa membuat topi, mengerjakan tugas secara berkelompok.
8. Siswa mempresentasikan hasil kelompoknya, skor yang diberikan sesuai dengan nomor topi siswa yang mempresentasikan. (Skor = nomor topi x 100)
9. Kelompok yang lain memberikan tanggapan dan diberi skor yang sama dengan kelompok penampil.



Gambar.3. Diskusi Kelompok dan Presentasi

10. Guru mengumumkan kelompok yang mempunyai skor tertinggi dan diberikan kesempatan untuk menampilkan yel-yelnya.





Gambar.4. Kelompok Terbaik

Dari beberapa pertemuan menggunakan model pembelajaran “TOPI PINTAR” dapat dilihat bahwa siswa semakin termotivasi dan menyenangi

pembelajaran matematika yang semula mereka benci bahkan menjadi momok. Siswa menjadi aktif bertanya ataupun memberikan tanggapan, walau motivasinya semula adalah agar kelompoknya mendapat skor yang tinggi.

Dari yel-yel dan topi yang mereka kreasikan terlihat bahwa siswa semakin kreatif, terutama untuk siswa yang mempunyai kecerdasan di bidang seni merasa dihargai melalui karya-karyanya. Yang paling menggembirakan dan paling membanggakan adalah ketika melihat hasil kuesioner yang diberikan kepada siswa, semuanya bersikap positif tentang topi pintar. Berikut adalah beberapa hasil scan dari kuesioner tersebut.

Jawaban Kuis



Enjely Firiski replied to your discussion thread for "KUESIONER TENTANG TOPI PINTAR" on the XI IPA.4 TP 15/16: Section 1 discussion board:

1. pembelajaran topi pintar sangat menarik, melatih siswa lebih berpikir lebih keras dan kreatif.
2. Ya, menurut saya pembelajaran topi pintar sangat menumbuhkan motivasi dan ketertarikan dengan pelajaran matematika karena dengan model pembelajaran ini siswa akan berusaha menjadi yg terbaik saat proses belajar maka siswa akan berusaha belajar lebih giat.
3. Menurut saya perubahan yang terjadi pada diri saya adalah saya lebih aktif dalam menjawab, bertanya, memberi solusi, dll. Saya lebih dapat berpikir kreatif untuk menjawab pertanyaan, lebih berani berbicara dan mengemukakan pendapat.
4. Menurut saya sedikit membantu, karena dalam model topi pintar siswa harus berusaha sendiri memahami dan menjawab soalsoal yang terkadang soalsoal itu sulit bahkan siswa tidak mampu mengerjakannya.
5. Saran saya, dalam proses model topi pintar sebelum memulai pembahasan baru atau bab baru dijelaskan dulu caracaranya baik yang mudah maupun sulit.

To view the discussion post, click the link below:

<http://app.schoolology.com/course/383962967/materials/discussion/view/417016229>

prayoga rozihan replied to your discussion thread for "KUESIONER TENTANG TOPI PINTAR" on the XI IPA.4 TP 15/16: Section 1 discussion board:

1. sistem pembelajaran yg menuntut murid untuk aktif

2. telah munculnya rasa tertarik untuk mempelajari mtk .apalagi yg peringkat nya dibawah 1(yaitu 2,3,4,5,6)yg membuat mereka lebih semangat blajar karena ingin menunjukkan bahwa mereka juga bisa. dan yg peringkat 1 juga berfikir gimana caranya agar kelompoknya unggul dengan kelompok yg lain .yaitu dengan cara mengajari kelompoknya sendiri yg bernomor lebih besar darinya (yaitu 2,3,4,5,6) karena semakin besar nomornya semakin banyak poin yg didapat

3. perubahannya cukup banyak . dari yg agak mengerti menjadi lebih mengerti dan saya dituntut bukan hanya menghafal rumus lalu mengerjakan soal melainkan saya dituntut agar lebih nalar dan logika saya berjalan saat membaca dan mengerjakan soal. saya juga diajarkan cara bicara dan cara mengajar di depan teman sekelas

4. ya sangat membantu. karena saya dituntut untuk belajar dirumah dan memahaminya dengan cara saya sendiri ,dan melaporkan hasil belajar saya ke guru . jika ada yg salah guru langsung menjelaskan bagaimana yg benar .itu yg membuat saya menjadi aktif . kalau ada sistem pembelajaran guru menjelaskan materi terus mengasih soal kepada murid .itu yg membuat saya menjadi malas untuk belajar .terkadang guru hanya menjelaskan kepada orang-orang pintar saja(juara kelas) dan jika si pintar mengerti dan si bodoh tidak mengerti .maka materi tersebut akan dilewatkan. karena si pintar sudah mengerti

5. posisi duduk kelompok kami selalu dibelakan yg membuat saya dan kelompok saya harus berdiri untuk melihat materi yg sedang dijelaskan . saran saya adalah bergantian untuk duduk diposisi didepan ,agar lebih adil.

saran saya untuk setiap murid ,duduk di barisan kelompoknya sendiri. jangan kesana-kemari ke kelompok orang lain agar tidak menimbulkan keributan.

Novendri Isra Asriny replied to your discussion thread for "KUESIONER TENTANG TOPI PINTAR" on the XI IPA.4 TP 15/16: Section 1 discussion board:

1. Unik dan Asik

2.Bisa, karena yang pertama itu kami memakai atribut yang unik dan kami juga bisa menyalurkan bakat handcraft kami , lalu proses KBM tidak TEGANG (rileks tapi serius) dan suasana nya aktif , selain itu di mode topi pintar ini di ajarkan untuk speaking public walaupun masih intern , tetapi insyaAllah apabila kedepannya sudah terbiasa, maka kami akan bisa berbicara di khalayak

3. pemikiran saya menjadi tambah luas , saya semakin terbiasa untuk berbicara dan mengemukakan pendapat di khalayak , dan dengan metode ini saya dan teman teman mulai banyak menggunakan Nalar kami untuk menyelesaikan soal / memecahkan permasalahan kami dengan cara bersama

4.bisa , karena dengan topi pintar kami memahami materi dengan bahasa kami sehari-hari, mengapa begitu ? karena yang menjelaskan pertama kali itu adalah teman kami dari kelompok lain

5. saran dari saya , agar suasana selalu menjadi baru dan makin mengasikkan belajarnya , rolling seluruh kelompok setiap 3/4 kali pertemuan atau juga setiap selesai 1 materi selesai . saran saya itu saja , terimakasih .. sukses terus bunda 😊

Simpulan dan Saran

Dari pembahasan di atas, dapat disimpulkan bahwa model topi pintar dapat menjadikan pembelajaran matematika sebagai ajang keaktifan dan kreativitas siswa.

Oleh karena itu disarankan agar guru selalu mencoba model pembelajaran yang baru dan mencoba berkreasi untuk memodifikasi yang sudah ada sesuai dengan karakteristik siswa di sekolah kita masing-masing. Model pembelajaran topi pintar dapat dijadikan sebagai alternatif pembelajaran baik dalam matematika, maupun mata pelajaran lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

- Bobbi De Porter dan Mike Hernacki. 2001. *Quantum Learning, Membiasakan Belajar Nyaman dan Menyenangkan*. Bandung: Penerbit Kaifa.
- Depdiknas.2003. *Undang-Undang Republik Indonesia Nomor 20 Tahun 2003 Tentang Sistim Pendidikan Nasional*. Jakarta: Depdiknas
- Huda, Miftahul. 2014. *Cooperative Learning, Metode, Teknik, Struktur dan Model Penerapan*. Yogyakarta: Pustaka Pelajar.
- Melvin, L. Silberman.2014. *Active Learning, 101 Cara Belajar Siswa Aktif*. Bandung: Nuansa Cendekia.
- Peraturan Pemerintah nomor 19 tahun 2005. *Standar Nasional Pendidikan*. Jakarta: Depdiknas
- Slavin, 2015. *Cooperative Learning, Teori, Riset dan Praktik*. Bandung: Nusa Media
- Suprijono, Agus. 2010. *Cooperative Learning Teori & Aplikasi Paikem*. Yogyakarta: Pustaka Pelajar.
- Suyatno. 2009. *Menjelajah Pembelajaran Inovatif*. Sidoarjo: Masmedia Buana Pustaka.

*) Nurhayati, M.Pd.
Guru SMAN 15 Palembang, Sumatera Selatan.

MENYELESAIKAN SOAL PEMECAHAN MASALAH DENGAN STRATEGI BEKERJA MUNDUR

*) Su'udi

A. Pendahuluan

1. Pemecahan Masalah dalam Pembelajaran Matematika

Kemampuan memecahkan masalah menjadi salah satu tujuan utama dalam pembelajaran matematika. Suatu pertanyaan menjadi masalah jika menunjukkan adanya suatu tantangan yang tidak dapat diselesaikan dengan prosedur rutin (Dhurori dan Markaban, 2010). Di dalam pembelajaran matematika, selain pemecahan masalah mempunyai arti khusus, istilah tersebut mempunyai interpretasi yang berbeda, misalnya menyelesaikan soal cerita yang tidak rutin dan mengaplikasikan matematika dalam kehidupan sehari-hari (Lidinillah, 2014)

Menurut Polya (dalam Suherman, 2001), solusi soal pemecahan masalah memuat empat langkah:

- a) Memahami masalah
Siswa tidak akan mampu menyelesaikan suatu masalah tersebut dengan benar tanpa adanya pemahaman terhadap masalah yang diberikan.
- b) Merencanakan penyelesaian
Pada fase ini sangat tergantung pada pengalaman siswa dalam menyelesaikan masalah. Pada umumnya semakin bervariasi pengalaman siswa, ada kecenderungan lebih kreatif dalam menyusun rencana penyelesaian suatu masalah.
- c) Menyelesaikan masalah sesuai rencana
Penyelesaian masalah sesuai dengan rencana yang dianggap paling tepat, jika rencana penyelesaiannya telah dibuat, baik secara tertulis atau tidak.
- d) Melakukan pengecekan kembali terhadap semua langkah yang telah dikerjakan
Melakukan pengecekan mulai dari fase pertama sampai fase ketiga, sehingga berbagai kesalahan dapat terkoreksi kembali dan siswa dapat sampai

pada jawaban yang benar sesuai masalah yang diberikan.

2. Keterampilan Pemecahan Masalah

Guru sering memberikan penilaian di kelas dalam hal penguasaan materi atau kemampuan pemecahan masalah, akan tetapi siswa yang mampu memecahkan masalah saja tidak cukup untuk menjadikannya sebagai *problem solver* yang handal. Siswa juga harus memiliki keterampilan dalam memecahkan masalah sehingga mereka mampu memecahkan masalah-masalah baru. Pengetahuan atau kemampuan merupakan salah satu hal penting dari hasil pendidikan, tetapi tidak boleh memandang bahwa pendidikan semata-mata sebagai hasil pembelajaran tunggal. Siswa dapat membuktikan bahwa ia memiliki pengetahuan dalam menerapkannya pada situasi baru. Secara umum, siswa dapat menangani materi dan masalah baru, siswa dapat memilih dan menentukan teknik yang tepat untuk digunakan baik bersifat fakta, prinsip dan prosedur. Jadi, kemampuan pemecahan masalah saja tidak cukup untuk menunjukkan hasil belajar, tetapi keterampilan pemecahan masalah juga merupakan suatu prestasi yang dapat diamati oleh guru terhadap peserta didik. Marsigit (dalam Wulandari, 2013) menyebutkan indikator-indikator keterampilan pemecahan masalah meliputi:

- a) memahami pokok persoalan,
- b) mendiskusikan alternatif pemecahannya,
- c) memecah persoalan utama menjadi bagian-bagian kecil,
- d) menyederhanakan persoalan,
- e) menggunakan pengalaman masa lampau dan menggunakan intuisi untuk menemukan alternatif pemecahannya,
- f) mencoba berbagai cara, bekerja secara sistematis, mencatat apa yang terjadi, mengecek

hasilnya dengan mengulang kembali langkah-langkahnya, dan

- g) mencoba memahami dan menyelesaikan persoalan yang lain.

3. Kemampuan Pemecahan Masalah

Kemampuan pemecahan masalah dalam matematika merupakan salah satu tujuan utama dari pembelajaran matematika di sekolah. Kemampuan pemecahan masalah ini sangat penting untuk ditanamkan dan dilatih dalam kegiatan proses pembelajaran agar siswa menjadi terlatih dalam menyelesaikan setiap masalah yang dihadapi. Kemampuan ini dapat diperoleh jika seseorang memiliki banyak pengalaman dalam memecahkan berbagai masalah. Berbagai hasil penelitian menunjukkan bahwa peserta didik yang diberi latihan pemecahan masalah memiliki nilai lebih tinggi dalam tes pemecahan masalah dibandingkan dengan peserta didik yang latihannya lebih sedikit (Suherman, 2001). Kemampuan pemecahan masalah matematika yang dimiliki oleh siswa dapat diartikan sebagai proses dimana siswa menemukan kombinasi aturan-aturan yang telah dipelajarinya lebih dahulu yang digunakan untuk menyelesaikan masalah baru yang mengandung tantangan dan tidak dapat diselesaikan oleh suatu prosedur rutin. Kemampuan tersebut mencakup kemampuan memahami masalah, membuat rencana pemecahan masalah, menjalankan rencana/ melakukan perhitungan, dan memeriksa kembali hasil yang diperoleh.

Kemampuan pemecahan masalah dapat diukur dengan menggunakan tes kemampuan pemecahan masalah, yang penilaiannya dilakukan menggunakan pedoman penskoran yang dibuat dengan memperhatikan tahapan-tahapan pemecahan masalah menurut Polya (dalam Utomo, 2012) sebagai berikut.

- Siswa dapat memahami masalah (soal) dengan benar.
- Siswa membuat perencanaan penggunaan berbagai macam prosedur, langkah dan strategi yang mengarah pada jawaban yang benar.
- Siswa dapat menggunakan berbagai macam prosedur dan strategi untuk melaksanakan perencanaan yang mengarah pada jawaban yang benar.

- d) Siswa melakukan pemeriksaan kembali atau melihat kembali terhadap hasil yang diperoleh.

B. Penyelesaian Jalan Mundur

1. Strategi untuk Pemecahan Masalah

Pembelajaran pemecahan masalah tidak sama dengan pembelajaran soal-soal yang telah diselesaikan (*solved problems*). Pemecahan (*problem solving*) masalah merupakan latihan bagi siswa untuk berhadapan dengan sesuatu yang tidak rutin dan kemudian mencoba menyelesaikannya. Strategi ataupun teknik untuk menyelesaikan soal dengan berbagai cara disebut dengan *heuristics*, karena pada dasarnya siswa harus menemukan sendiri.

Ada berbagai strategi dalam menyelesaikan soal pemecahan masalah, baik dari strategi yang paling sederhana sampai strategi yang paling kompleks. Diantara strategi-stategi tersebut adalah menerka dan menguji kembali, membuat daftar yang teratur, mengasumsikan jika sebagian dari soal telah terselesaikan, menghapuskan beberapa kemungkinan, menyelesaikan soal yang setara, menggunakan simetri, memperhatikan hal-hal khusus, menggunakan alasan langsung, menyelesaikan suatu persamaan, melihat pola yang muncul, mensketsa suatu gambar, memikirkan soal sejenis yang telah diselesaikan, menyelesaikan soal yang mirip, bekerja mundur dan menggunakan formula atau rumus. (Budhi, 2006)

2. Strategi Bekerja Mundur

Perhatikan contoh berikut ini (Budhi, 2006):

Contoh 1:

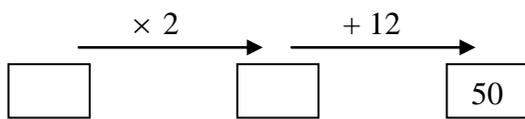
Saya adalah bilangan. Dua kali saya dan kemudian ditambah 12 memberikan nilai 50. Siapakah saya?

Untuk menyelesaikan masalah di atas adalah dengan:

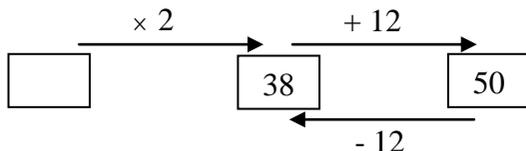
- Memahami soal
Kita harus mencari bilangan yang memenuhi suatu proses dan hasil akhir dari proses yang diketahui.
- Memilih strategi
Kita dapat mencari bilangan tersebut dengan mengikuti secara mundur proses yang diberikan.

c) Melakukan strategi

Kita berhadapan dengan situasi:



Kita mulai dari belakang:



Kemudian terakhir, karena kotak kedua diperoleh dari kotak pertama dengan mengalikan 2, maka isi kotak pertama adalah setengah dari kotak kedua. Sehingga isi dari kotak pertama adalah 19.

d) Melihat kembali

Kita dapat menyelesaikan soal di atas dengan variabel. Tetapi dengan strategi bekerja mundur ini akan lebih mudah dipahami

Contoh 2:

Untuk sembarang bilangan positif a, b dan c , buktikan bahwa berlaku:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$$

Penyelesaian :

Dengan mengasumsikan bahwa pertidaksamaan di atas benar dan kemudian setiap sisi dikalikan 2, maka diperoleh:

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2bc + 2ca$$

$$a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ca + a^2 \geq 0$$

$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0$$

Karena bagian terakhir adalah benar untuk sembarang bilangan a, b dan c , maka bagian atasnya juga sudah benar.

C. Contoh Soal OSN Matematika dengan Karakter Penyelesaian Bekerja Mundur

Ada beberapa soal Olimpiade Sains Nasional (OSN) matematika yang memiliki karakter menggunakan strategi penyelesaian bekerja mundur. Salah satu diantaranya adalah soal OSN Matematika SMP tingkat kabupaten/kota pada tahun 2013.

Tiga orang A, B , dan C pinjam-meminjam kelereng. Pada awalnya ketiga orang tersebut memiliki sejumlah kelereng dan selama pinjam-meminjam

mereka tidak melakukan penambahan kelereng selain melalui pinjam-meminjam diantara ketiga orang tersebut. Pada suatu hari A meminjami kelereng pada B dan C sehingga jumlah kelereng B dan C masing-masing menjadi dua kali lipat jumlah kelereng sebelumnya. Hari berikutnya, B meminjami kelereng pada A dan C sehingga jumlah kelereng A dan C masing-masing menjadi dua kali lipat jumlah kelereng sebelumnya. Hari terakhir, C meminjami kelereng pada A dan B sehingga jumlah kelereng A dan B masing-masing menjadi dua kali lipat jumlah kelereng sebelumnya. Setelah dihitung, akhirnya masing-masing memiliki 16 kelereng. Banyaknya kelereng A mula-mula adalah

Salah satu pembahasan untuk menyelesaikan masalah di atas adalah dengan cara berikut:

Misal mula-mula banyak kelereng A adalah a , banyak kelereng B adalah b , dan banyak kelereng C adalah c

Hari Pertama:

Banyak kelereng A adalah $a - x$

Banyak kelereng B adalah $b + x_1 \rightarrow b + x_1 = 2b$ atau $b = x_1$

Banyak kelereng C adalah $c + x_2 \rightarrow c + x_2 = 2c$ atau $c = x_2$

Dengan $x_1 + x_2 = x = b + c$

Sehingga:

Banyak kelereng A adalah $a - b - c$

Banyak kelereng B adalah $2b$

Banyak kelereng C adalah $2c$

Hari Kedua:

Banyak kelereng B adalah $2b - y$

Banyak kelereng A adalah $a - b - c + y_1 = 2(a - b - c) \rightarrow a - b - c = y_1$

$2c + y_2 = 2(2c) \rightarrow 2c = y_2$

Karena $y_1 + y_2 = y$ maka $a - b - c + 2c = y$ atau $y = a - b + c$

Sehingga:

Banyak kelereng A adalah $2a - 2b - 2c$

Banyak kelereng B adalah $2b - (a - b + c) = 3b - a - c$

Banyak kelereng C adalah $4c$

Hari ketiga:

Banyak kelereng C adalah $4c - z$

Banyak kelereng A adalah $2a - 2b - 2c + z_1$
 $\rightarrow 2a - 2b - 2c + z_1 = 2(2a - 2b - 2c)$

Banyak kelereng B adalah $3b - a - c + z_2$
 $\rightarrow 3b - a - c + z_2 = 2(3b - a - c)$

Karena $z = z_1 + z_2$ maka $z = 2a - 2b - 2c + 3b - a - c = a + b - 3c$

Sehingga :

Banyak kelereng A adalah $4a - 4b - 4c$

Banyak kelereng B adalah $6b - 2a - 2c$

Banyak kelereng C adalah $4c - (a + b - 3c) = 7c - a - b$

Ketiganya masing-masing memiliki 16 kelereng, sehingga:

$$4a - 4b - 4c = 16 \text{ atau } a - b - c = 4 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$6b - 2a - 2c = 16 \text{ atau } -a + 3b - c = 8 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$7c - a - b = 16 \text{ atau } -a - b + 7c = 16 \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\text{Persamaan (1) dikurangi persamaan (2) : } 2a - 4b = -4 \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$7 \times \text{persamaan (2) ditambah persamaan (3) : } -8a + 20b = 72 \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$5 \times \text{persamaan (4) ditambah persamaan (5) : } 2a = 52 \rightarrow a = 26$$

Jadi banyaknya kelereng A adalah 26.

Penyelesaian di atas bukanlah satu-satunya strategi untuk menemukan selesaian dari permasalahan tersebut. Sehingga perlu suatu strategi yang bisa menghemat waktu, hal ini mengingat durasi waktu yang tersedia pada suatu perlombaan sangat terbatas. Bagaimana jika masalah di atas dikerjakan dengan strategi bekerja mundur? Adapun langkah-langkahnya adalah sebagai berikut:

	Banyak Kelereng			Jumlah Total Kelereng
	A	B	C	
Hari Ketiga (Akhir)	16	16	16	48

Hari ketiga yang dimaksud pada tabel di atas adalah hari ketiga setelah dilakukan tukar-menukar kelereng. Banyak kelereng yang dimiliki A, B, dan C pada hari ketiga (keadaan terakhir) masing-masing adalah 16 buah kelereng. Perhatikan pada kalimat : *hari*

terakhir, C meminjami kelereng pada A dan B sehingga jumlah kelereng A dan B masing-masing menjadi dua kali lipat jumlah kelereng sebelumnya. Sehingga pada hari sebelumnya (pada akhir hari kedua), A memiliki $\frac{1}{2} \times 16 = 8$ kelereng, B memiliki $\frac{1}{2} \times 16 = 8$ kelereng dan C memiliki $48 - 8 - 8 = 32$ kelereng.

	Banyak Kelereng			Jumlah Total Kelereng
	A	B	C	
Hari Kedua	8	8	32	48
Hari Ketiga (Akhir)	16	16	16	48

Sedangkan pada akhir hari pertama setelah dilakukan tukar menukar adalah pada kalimat: *B meminjami kelereng pada A dan C sehingga jumlah kelereng A dan C masing-masing menjadi dua kali lipat jumlah kelereng sebelumnya*. Sehingga pada hari sebelumnya (pada akhir hari pertama), A memiliki $\frac{1}{2} \times 8 = 4$ kelereng, C memiliki $\frac{1}{2} \times 32 = 16$ kelereng dan B memiliki $48 - 4 - 16 = 28$ kelereng.

	Banyak Kelereng			Jumlah Total Kelereng
	A	B	C	
Hari Pertama	4	28	16	48
Hari Kedua	8	8	32	48
Hari Ketiga (Akhir)	16	16	16	48

Untuk menghitung keadaan awal kelereng sebelum terjadi tukar menukar adalah pada kalimat: *A meminjami kelereng pada B dan C sehingga jumlah kelereng B dan C masing-masing menjadi dua kali lipat jumlah kelereng sebelumnya*. Sehingga pada hari sebelumnya (pada keadaan awal), B memiliki $\frac{1}{2} \times 28 = 14$ kelereng, C memiliki $\frac{1}{2} \times 16 = 8$ kelereng, dan A memiliki $48 - 14 - 8 = 26$ kelereng. Seperti pada tabel berikut:

	Banyak Kelereng			Jumlah Total Kelereng
	A	B	C	
Keadaan Awal	26	14	8	48

	Banyak Kelereng			Jumlah Total Kelereng
	A	B	C	
Hari Pertama	4	28	16	48
Hari Kedua	8	8	32	48
Hari Ketiga (Akhir)	16	16	16	48

D. Simpulan

Bekerja mundur adalah salah satu strategi dalam menyelesaikan soal pemecahan masalah, dari sekian banyak strategi. Pada soal OSN umumnya merupakan soal-soal pemecahan masalah (soal-soal yang tidak rutin), yang dalam menyelesaikan biasanya memerlukan strategi khusus dan tidak dapat diselesaikan hanya dengan menggunakan perhitungan rutin biasa. Salah satu solusinya adalah dengan menggunakan penyelesaian dengan bekerja mundur.

DAFTAR PUSTAKA

Budhi, W.S. (2006). *Langkah Awal Menuju ke Olimpiade Matematika*. Jakarta: Ricardo

Dhurori, A. dan Markaban (2010). *Pembelajaran Kemampuan Memecahkan Masalah Dalam Kajian Aljabar Di SMP/MTs (Modul Matematika SMP Program Bermutu)*. Jakarta

Lidinillah, D. A. M. (2014). *Heruistik dalam Pemecahan Masalah Matematika dan Pembelajarannya di Sekolah Dasar*. Diambil 7 September 2014, dari situs Word Wide Web: [http://file.upi.edu/Direktori/KD-TASIKMALAYA/DINDIN ABDUL MUIZ LIDINILLAH \(KD-TASIKMALAYA\)-197901132005011003/132313548%20-%20dindin%20abdul%20muiz%20lidinillah/Heuristik%20Pemecahan%20Masalah.pdf](http://file.upi.edu/Direktori/KD-TASIKMALAYA/DINDIN ABDUL MUIZ LIDINILLAH (KD-TASIKMALAYA)-197901132005011003/132313548%20-%20dindin%20abdul%20muiz%20lidinillah/Heuristik%20Pemecahan%20Masalah.pdf)

Suherman, E (2001). *Strategi Pembelajaran Matematika Kontemporer*. Bandung: JICA-UPI

Utomo, D. P. (2012). Pembelajaran Lingkaran dengan Pendekatan Pemecahan Masalah Versi Polya Pada Kelas VIII. Di SMP PGRI 01 Dau. *Jurnal Widya Warta*, No. 01 Tahun XXXVI Januari 2012, halaman 145-158. Diambil 20 September 2014, dari situs Word Wide Web: <http://portal.widyamandala.ac.id/jurnal/index.php/warta/article/download/68/71>

Wulandari, A. N. (2013). *Pengembangan Karakter dan Pemecahan Masalah Peserta Didik Melalui Pembelajaran Matematika dengan Model TAPPS Berbatuan Kartu Permasalahan Kelas VIII Pada Materi Segi Empat*. Diambil 7 September 2014, dari situs Word Wide Web: <http://lib.unnes.ac.id/17086/1/4101409030.pdf>

*) Su'udi, M. Pd

Guru SMP Negeri 2 Tenggarang, Kabupaten, Bondowoso, Jawa Timur

Belajar dengan Kalkulator Saintifik *)

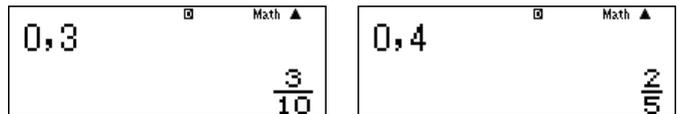
*) Emeritus Profesor Barry Kissane

Ketika kalkulator pertama kali muncul - sekitar 40 tahun yang lalu - sebagian besar hanya digunakan untuk komputasi, yaitu membuat perhitungan aritmetika menjadi lebih efisien. Kemudian kalkulator berkembang menjadi media pembelajaran sehingga terjadi perubahan fungsi kalkulator. Selanjutnya kemudahan penggunaan dan tampilan dari kalkulator dirancang untuk mendukung siswa dalam belajar matematika. Kalkulator yang ada saat ini digunakan di seluruh dunia oleh siswa sekolah menengah dan telah menjadi peralatan standar untuk belajar matematika. Misalnya, di Australia, semua siswa menggunakan kalkulator saintifik pada pelajaran matematika (dan dalam ujian) di sekolah menengah. Hasil penelitian (seperti Ronau et al, 2011) secara konsisten menunjukkan bahwa kalkulator bermanfaat dan tidak merugikan untuk digunakan dalam pendidikan. Pada artikel ini, kami akan secara singkat membahas bagaimana kalkulator saintifik dapat mendukung pembelajaran.

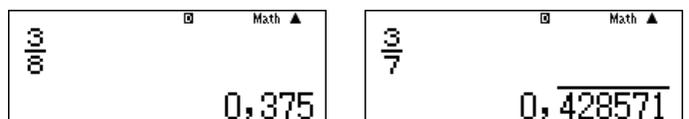
Sebuah model yang bermanfaat tentang penggunaan kalkulator dalam pendidikan ditawarkan oleh Kissane dan Kemp (2014). Mereka mengamati bahwa sering terjadi anggapan yang keliru, yaitu bahwa kalkulator dibutuhkan hanya untuk berhitung saja. Mereka menyarankan bahwa kalkulator bisa digunakan untuk representasi, komputasi, eksplorasi dan afirmasi. Kami akan menjelaskan beberapa kemungkinan penggunaan kalkulator dalam empat kategori tersebut, dengan menggunakan kalkulator CASIO fx-991ID PLUS yang merupakan tipe yang dirancang khusus untuk digunakan di Indonesia.

Representasi

Kalkulator modern mampu merepresentasikan ide-ide matematika dengan baik, biasanya menggunakan istilah-istilah matematika yang lazim dan dikenali secara umum. Dua gambar layar kalkulator berikut ini menunjukkan ketika siswa mengetikkan bilangan desimal, kalkulator menampilkannya sebagai pecahan. Layar pertama dapat membantu siswa untuk memahami makna dari pecahan maupun desimal. Layar kedua juga memungkinkan siswa untuk melihat bahwa terdapat beberapa cara berbeda untuk menuliskan bilangan pecahan. Kalkulator memungkinkan siswa untuk beralih dari desimal ke pecahan, sehingga memberikan kesempatan bagi mereka untuk belajar tentang pecahan setara.



Kalkulator juga dapat digunakan untuk merepresentasikan ide yang lebih kompleks. Sebagai contoh, ketika pecahan direpresentasikan sebagai desimal kadang-kadang dihasilkan bilangan desimal dengan digit/angka yang berhingga, dan kadang-kadang dengan digit yang berulang. Seperti ditunjukkan pada dua gambar layar berikut ini.



Bilangan desimal dengan digit yang berulang merupakan bentuk eksak, sementara bentuk pendekatannya juga tersedia, tergantung dan dibatasi oleh ukuran layar kalkulator. Hal ini

membantu siswa untuk memahami perbedaan antara bentuk eksak dan pendekatan dari suatu bilangan pecahan.

$$\frac{3}{7} \approx 0,4285714286$$

Bentuk lain dari representasi ide-ide matematika ditampilkan pada kalkulator modern. Misalnya, suatu fungsi dapat direpresentasikan secara simbolis (sebagai sebuah persamaan) atau sebagai himpunan pasangan terurut dalam bentuk tabel, seperti yang ditunjukkan pada layer berikut ini. Meskipun hanya tiga baris dari tabel yang dapat ditampilkan oleh layar, baris berikutnya dapat ditampilkan dengan menggulirkan/men-*scroll*. Menggunakan kalkulator memungkinkan siswa untuk mengalami sendiri bagaimana merepresentasikan ide-ide matematika dan memanipulasinya untuk mendukung/menciptakan pengalaman belajar siswa.

$$f(x) = x^2 + x$$

x	f(x)
1	2
2	6
3	12

Komputasi

Sebuah kalkulator saintifik memungkinkan siswa untuk menyelesaikan perhitungan yang terlalu kompleks apabila dikerjakan secara manual. Secara praktis, ini memungkinkan siswa untuk menggunakan pengukuran nyata dan aplikasi nyata dari matematika dan untuk belajar masalah nyata melalui pemodelan matematika. Tanpa kalkulator, siswa terbatas hanya dapat melakukan perhitungan formal dan abstrak saja, atau hanya menggunakan data rekaan saja.

Sebagai contoh, menurut data PBB, penduduk Indonesia pada tahun 2015 sebanyak kurang lebih 247 juta dan tingkat pertumbuhan tahunan selama periode 2010-2015 adalah sekitar 1,2%. Data ini dapat digunakan untuk memperkirakan populasi pada tahun 2020:

$$247 \times 1,012^5 \approx 262,1799738$$

Menurut model matematika yang mengasumsikan tingkat pertumbuhan tetap konstan, penduduk Indonesia akan menjadi sekitar 262 juta pada tahun 2020. Perhitungan lebih lanjut juga dapat dilakukan. Misalnya, seperti yang ditunjukkan berikut ini, kalkulator memungkinkan siswa untuk menentukan kapan penduduk akan mencapai 300 juta (akan dicapai sekitar tahun 2031) jika tingkat pertumbuhan tetap sekitar 1,2% per tahun, atau berapa berapa besar populasi penduduk di tahun 2025 jika tingkat pertumbuhan tahunan dikurangi menjadi 1,1% (sekitar 276 juta).

$$109 \times 1,012 \left(\frac{300}{247} \right) \approx 16,29651533$$

$$247 \times 1,011^{10} \approx 275,5551354$$

Jika siswa tidak menggunakan kalkulator, perhitungan seperti di atas akan dilakukan dengan secara manual. Akibatnya pertanyaan/masalah sesungguhnya dari permasalahan matematika di atas tidak akan bisa dipecahkan (meskipun siswa mengetahui cara pemecahannya).

Tentu saja, siswa harus terus mempelajari berbagai cara untuk melakukan perhitungan numerik, termasuk beberapa metode dengan menggunakan kertas dan pensil dan metode perhitungan secara mental (*mental computation*), serta metode estimasi. Kalkulator merupakan bagian dari rangkaian metode komputasi di negara-negara lain, seperti Australia. Siswa yang terdidik dengan baik seharusnya mampu memilih metode perhitungan yang paling tepat, tetapi siswa menjadi tidak memiliki beberapa alternatif (metode perhitungan) untuk dipilih jika kalkulator tidak tersedia bagi mereka.

Ketika siswa memiliki akses ke kalkulator, beberapa perhitungan yang umumnya membosankan dan rawan kesalahan, seperti

memecahkan sistem persamaan simultan, dapat dilakukan secara otomatis. Sebagai contoh, suatu sistem persamaan linear ditampilkan pada kalkulator seperti berikut ini, setelah memilih tipe persamaan 1.

$$2x + 3y = 7$$

$$5x - 2y = 9$$

1: $ax+by=c$
 2: $ax+by+cz=d$
 3: $ax^2+bx+c=0$
 4: $ax^3+bx^2+cx+d=0$

Math
 $\left[\begin{array}{ccc|c} a & b & c & d \\ \hline 2 & 3 & 7 & \\ \hline 5 & -2 & 9 & \end{array} \right]$

Solusinya akan muncul hanya dengan menekan masing-masing satu tombol untuk x dan y :

X= $\frac{41}{19}$

Y= $\frac{17}{19}$

Jika prosedur seperti ini dapat dengan cepat diperoleh pada kalkulator, siswa memiliki lebih banyak waktu untuk menyelesaikan tugas yang lebih penting seperti merumuskan persamaan dan menafsirkan solusi.

Eksplorasi

Sebuah aspek penting dari penggunaan kalkulator untuk pembelajaran adalah pelibatan siswa melakukan eksplorasi atas ide-ide matematika dan keterkaitannya. Kalkulator seperti CASIO fx-991ID PLUS menawarkan banyak kesempatan bagi siswa untuk melakukan hal ini. Sementara pekerjaan produktif dapat dilakukan oleh siswa sendiri. Pengalaman menunjukkan bahwa apabila siswa bekerja bersama-sama dengan satu sama lain (secara kolaboratif) siswa akan dapat belajar lebih baik. Kalkulator modern sebagai alat penting untuk pembelajaran yang berpusat pada siswa semakin diakui di Indonesia dan negara-negara lain, seperti Australia.

Misalnya, sebagaimana melakukan tabulasi fungsi $f(x) = x^2 + x$, siswa dapat melakukannya untuk fungsi yang lain, $f(x) = x(x + 1)$, seperti ditunjukkan pada gambar berikut.

Math
 $f(x)=x(x+1)$

Math

x	F(x)
1	2
2	6
3	12
4	20
5	30

 1

Dengan cara ini, dengan melihat bahwa tabel nilai-nilai identik dalam segala hal, siswa dapat memperoleh apresiasi baru dari ide tentang ekspresi ekuivalen dan makna dari relasi: $x(x + 1) = x^2 + x$. Kalkulator adalah perangkat fleksibel yang memungkinkan masing-masing siswa menghasilkan contoh yang berbeda-beda dari suatu ide/hal yang sama.

Pada tingkat yang lebih sederhana, siswa dapat melihat sendiri bagaimana perilaku fungsi linear diperoleh dengan mengevaluasi tabel nilai fungsinya dan mendapatkan bahwa setiap peningkatan variabel independen (x) menghasilkan peningkatan yang sama dalam variabel dependen (y). Pada contoh berikut, nilai y meningkat sebesar 3 ketika nilai x meningkat 1. Dengan menggulir/men-*scroll* ke bawah, terlihat tabel memiliki pola perubahan konstan.

Math
 $f(x)=3x+7$

Math

x	F(x)
1	10
2	13
3	16

 10

Dengan menggunakan kalkulator, siswa dapat secara mudah melakukan eksplorasi apa yang terjadi untuk nilai x yang berbeda dan untuk fungsi linear lainnya, seperti $f(x) = 3x - 2$ atau $f(x) = 2x + 7$.

Kalkulator memungkinkan siswa untuk bereksperimen dan melihat perilaku yang berbeda dari fungsi kuadrat, ketika peningkatan y tidak sama untuk setiap kenaikan x :

Math
 $f(x)=x^2+x+1$

Math

x	F(x)
1	3
2	7
3	13
4	21

 3

Pada tahap yang lebih kompleks, siswa dapat melihat sendiri bahwa fungsi linear memiliki kemiringan yang konstan (turunan pertama) untuk semua nilai x :

$$\frac{d}{dx}(3x+7)|_{x=5} = 3$$

$$\frac{d}{dx}(3x+7)|_{x=50} = 3$$

Kalkulator juga dapat digunakan oleh siswa untuk melihat bahwa sifat ini tidak terjadi untuk fungsi kuadrat, yang memiliki kemiringan yang berbeda untuk nilai yang berbeda dari .

Kalkulator modern dirancang untuk dapat memberikan kegunaan di banyak area matematika, bukan hanya untuk perhitungan numerik saja, seperti yang terlihat pada layar menu berikut ini.

Dari layar menu terlihat kegunaan kalkulator mencakup analisis statistik, distribusi probabilitas, bilangan kompleks, matriks, vektor, persamaan dan pertidaksamaan, serta bilangan dalam berbagai basis, ... terlalu banyak untuk digambarkan dalam artikel singkat ini.

Afirmasi

Kalkulator dapat digunakan oleh siswa untuk memeriksa dugaan/konjektur dan untuk meyakinkan diri sendiri tentang pemikiran matematika mereka. Dimulai dari hal-hal yang sederhana (seperti untuk memeriksa apakah perhitungan yang telah dilakukan dengan tangan hasilnya benar), atau bisa juga untuk hal-hal yang lebih penting.

Ketika kalkulator digunakan secara lebih serius, siswa memiliki dugaan akan hasilnya, dan dapat meyakinkan pemikiran mereka sebelum menentukan hasilnya. Misalnya, setelah melihat dan mempelajari dua hasil berikut,

$$\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

siswa mungkin menduga bahwa akar kuadrat dari 20 adalah $2\sqrt{5}$ dan akar kuadrat dari $\sqrt{50}$ adalah $5\sqrt{2}$. Kalkulator akan menegaskan hasil di bawah ini untuk siswa:

$$\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

CASIO fx-991D PLUS juga memiliki fasilitas khusus yaitu Mode Verifikasi (Mode Cek), yang dapat memungkinkan siswa untuk memeriksa keterkaitan yang lebih rumit. Dua layar berikut ini menunjukkan seorang siswa dengan kesalahpahaman yang jelas tentang hukum perkalian bilangan berpangkat.

$$7^3 \times 7^5 = 7^{15} \quad \text{SALAH}$$

$$6^3 \times 6^5 = 6^{15} \quad \text{SALAH}$$

Sebaik mendeteksi kesalahan, kalkulator dapat memberikan penguatan/penegasan kepada siswa atas cara berpikirnya, serta memberikan umpan balik yang cepat dan personal:

$$7^3 \times 7^5 = 7^8 \quad \text{BENAR}$$

$$6^3 \times 6^5 = 6^8 \quad \text{BENAR}$$

Siswa dapat menggunakan cara mengecek jawaban/dugaan ini di banyak aspek matematika. Berikut adalah contoh di trigonometri dan logaritma:

$$\sin(2A) = 2\sin(A) \quad \text{SALAH}$$

$$3^{\log_3(175)} = 175 \quad \text{BENAR}$$

Alih-alih hanya menjadi perangkat untuk berhitung, kalkulator adalah perangkat untuk eksperimen dan umpan balik, keduanya merupakan mekanisme belajar yang *'powerful'*.

Kesimpulan

Kalkulator bukan hanya perangkat untuk aritmetika. Hasil penelitian menunjukkan bahwa kalkulator dapat digunakan untuk membantu pembelajaran jika digunakan dengan benar. Akan lebih bermanfaat jika kita menempatkan kalkulator sebagai alat untuk membantu siswa belajar matematika dan guru mengajarkan matematika. Seperti yang telah ditunjukkan dalam artikel ini, kalkulator dapat digunakan untuk

merepresentasikan konsep matematika, melakukan berbagai perhitungan, mengeksplorasi ide-ide matematika dan membantu siswa untuk menguji pemikiran mereka sendiri. Ada banyak contoh lain di Kissane & Kemp (2013) yang menunjukkan bahwa sebuah kalkulator ilmiah merupakan alat pembelajaran yang 'powerful'. Seyogyanya kalkulator tersedia di kelas-kelas di SMP dan SMA sebagai alat ICT khusus untuk matematika, dan dapat terjangkau secara luas oleh pelajar Indonesia.

Referensi

- Kissane, B. & Kemp, M. (2013). *Learning Mathematics with ES PLUS Series Scientific Calculator*, Tokyo, Japan: CASIO. [dapat diunduh di <http://researchrepository.murdoch.edu.au/24812/>]
- Kissane, B. & Kemp, M. (2014). *A model for the educational role of calculators*. 19th Asian Technology Conference on Mathematics, Yogyakarta, ATCM. [dapat diunduh di <http://researchrepository.murdoch.edu.au/24816/>]
- Ronau, R.N., Rakes, C. R., Bush, S. B., Driskell, S., Niess, M. L. & Pugalee, D. (2011). *Research Brief: Using Calculators for Teaching and Learning Mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics.

*) Judul Asli : *Learning with a Scientific Calculator*

Penulis : Emeritus Profesor Barry Kissane (School of Education, Murdoch University, AUSTRALIA; b.kissane@murdoch.edu.au)

Diterjemahkan atas permintaan penulis untuk diterbitkan dalam buletin LIMAS.

Penerjemah:

1. Jakim Wiyoto (PPPPTK Matematika, Yogyakarta; jakim.wiyoto@gmail.com)
2. Titik Sutanti (PPPPTK Matematika, Yogyakarta; titik.sutanti@p4tkmatematika.org)



Sumber gambar: <https://lh3.googleusercontent.com>

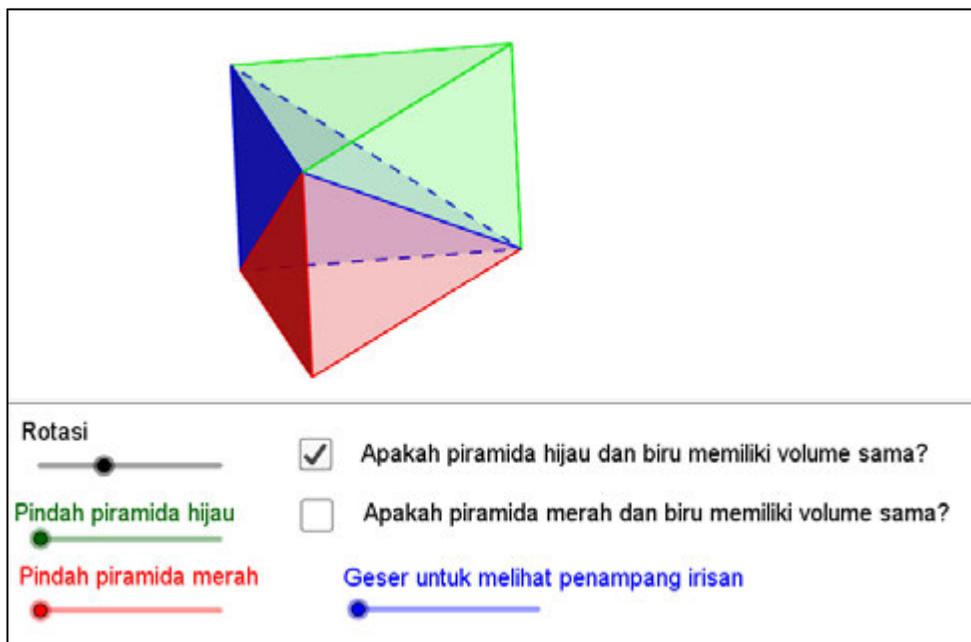
Pembuktian Volume Piramida dengan Berbantuan GeoGebra

*) Indarti

“Inilah salah satu bukti bahwa - kita tidak seharusnya percaya sains tanpa bukti” kata Richard Dedekind. Rumus volume piramida biasanya dipelajari dalam bentuk dasar tanpa pembuktian. Umumnya orang berfikir bahwa pembuktian tersebut membutuhkan kalkulus yang rumit, sehingga memilih menerima apa adanya rumus tersebut. Sebenarnya, jika kita melihat kembali sejarah, kita akan menemukan beberapa penjelasan dan pembuktian yang dapat dipahami oleh siswa dengan mudah bahkan pada tataran pemikiran yang sederhana. Pembuktian rumus *volume* piramida ini lebih mudah dipahami dengan menggunakan figur 3D yang dinamis pada GeoGebra. Tentu saja dalam sejarahnya, pembuktian ini tidak menggunakan aplikasi komputer apapun, GeoGebra merupakan alat bantu sebagai manipulasi obyek-obyek abstrak dalam matematika.

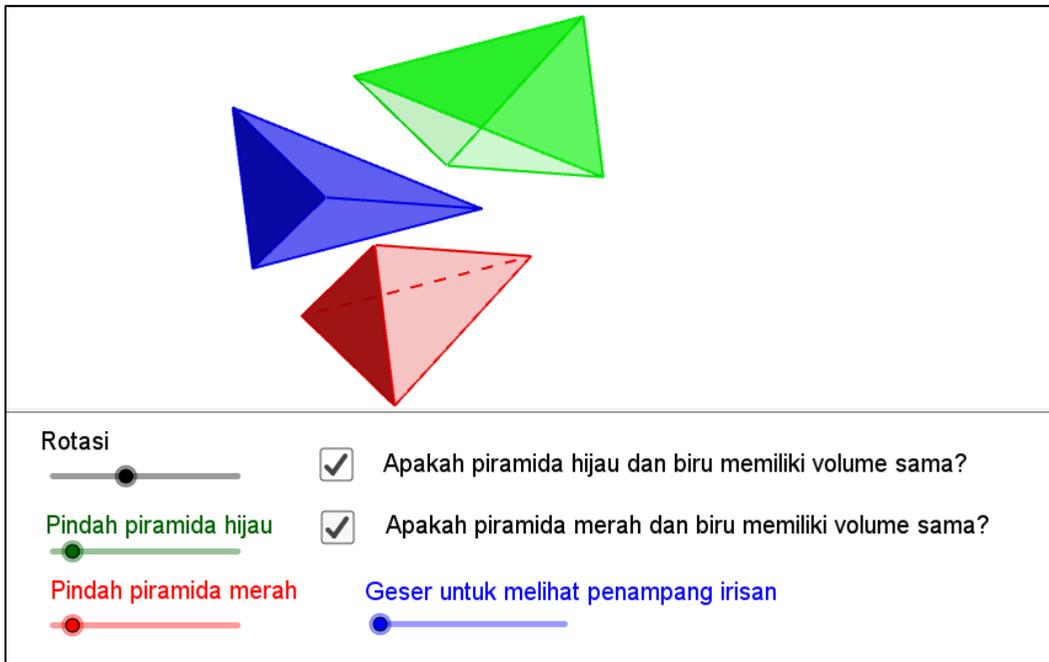
Pembuktian kesatu (Democritus)

Sebagai catatan penurunan rumus piramida berikut ini disampaikan oleh Democritus (Edward 1979, p.8-10). Gambar 1 menunjukkan piramida segitiga merah, piramida segitiga biru, dan piramida segitiga hijau yang secara lengkap membentuk prisma.



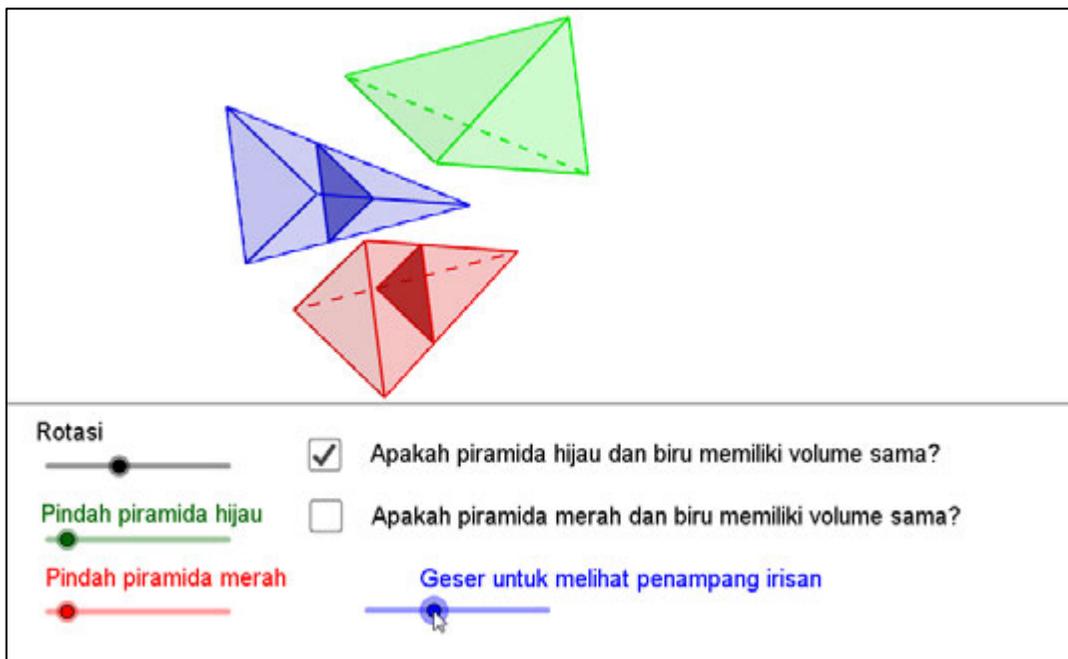
Gambar 1

Dengan menggeser luncuran (*slider*) hijau dan luncuran merah, kita dapat melihat prisma itu terbagi menjadi tiga piramida (Gambar 2). Luncuran hitam digunakan untuk memutar tampilan prisma agar tampak dari sudut pandang yang berbeda.



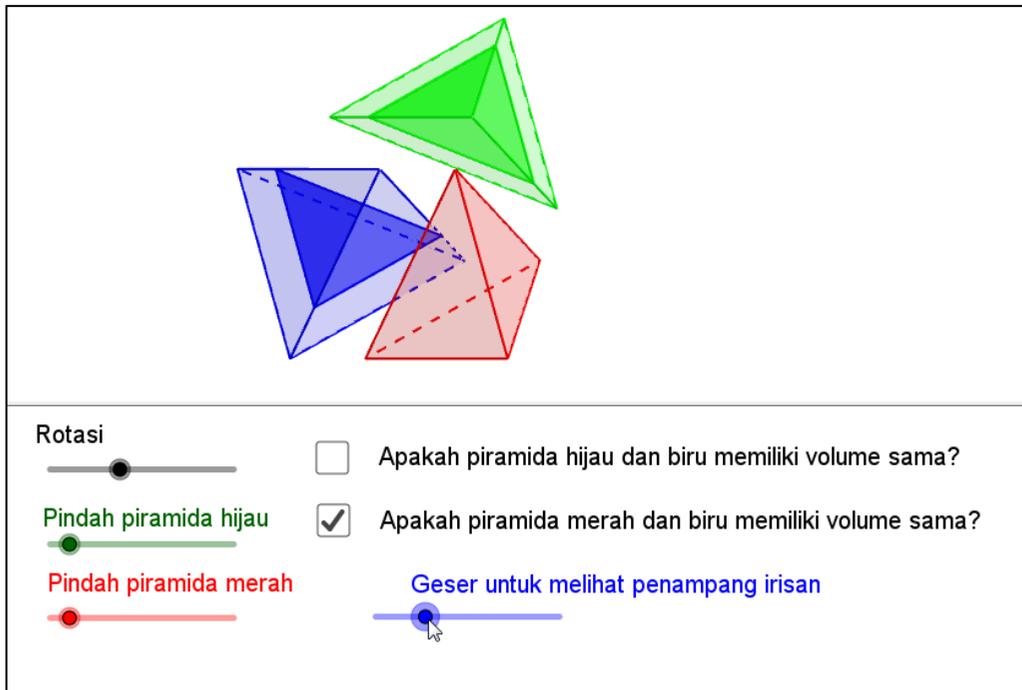
Gambar 2

Dengan mencentang kotak *checkboxlist* dan menggeser luncuran biru, kita akan melihat bahwa piramida hijau dan piramida biru selalu memiliki bagian/penampang irisan yang sama pada ketinggian yang sama (Gambar 3).



Gambar 3

Demikian juga dengan piramida biru dan piramida hijau, akan memiliki bagian/penampang irisan yang sama pada ketinggian yang sama pula (Gambar 4).

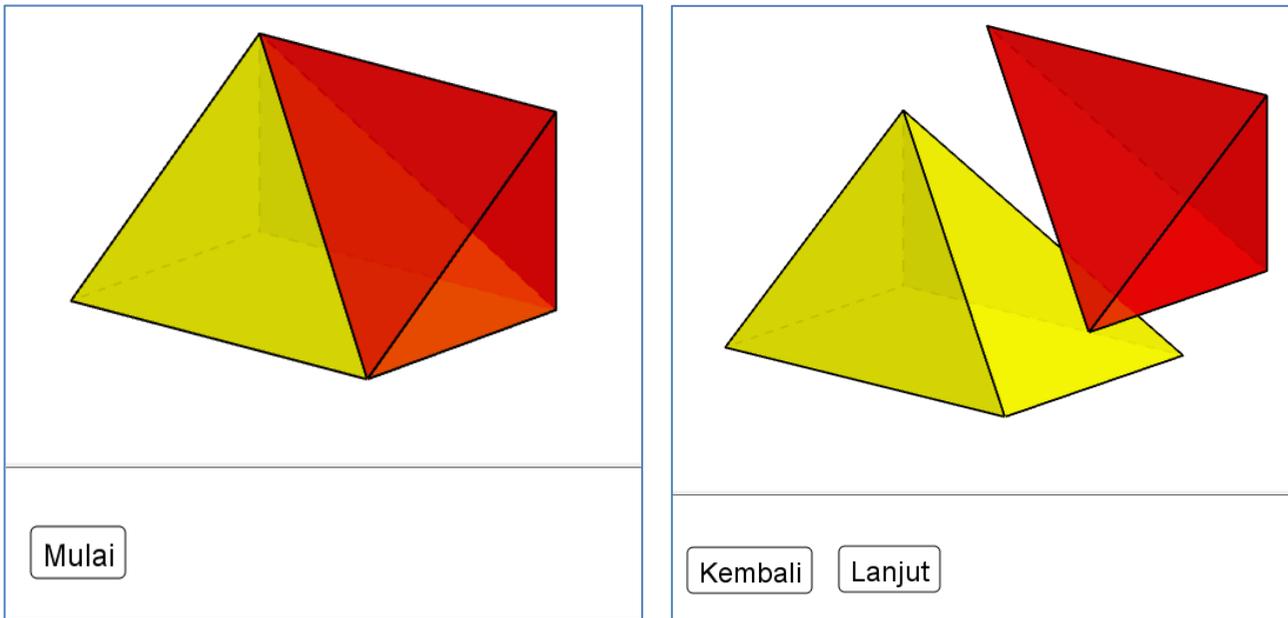


Gambar 4

Perhatikan, bahwa piramida tersebut terdiri atas bagian-bagian yang sejajar dengan alasnya, piramida merah dan piramida biru memiliki *volume* sama, demikian juga untuk piramida biru dengan piramida hijau. Hal ini sesuai dengan prinsip Cavalieri yang dikemukakan oleh Bonaventura Cavalieri (1598-1647), yang menyatakan bahwa dua bangun ruang yang memiliki ketinggian sama dan luas bidang irisan yang sama, ketika diiris pada ketinggian yang sama, maka kedua bangun ruang tersebut memiliki *volume* yang sama pula (www.matematicasvisuales.com). Karena ketiga piramida memiliki *volume* yang sama dan membentuk sebuah prisma, maka *volume* dari piramida merah adalah sepertiga dari *volume* prisma. Demikian juga untuk piramida hijau dan biru. Masing-masing memiliki *volume* sepertiga dari *volume* prisma, yaitu sepertiga dari perkalian antara alas dan tinggi prisma. Aplet GeoGebra dari pembuktian *volume* piramida dengan prinsip Cavalieri ini dapat dilihat dan diunduh pada alamat situs <http://tinyurl.com/vol-piramida1> atau <https://ggbm.at/ynpPW9pZ>

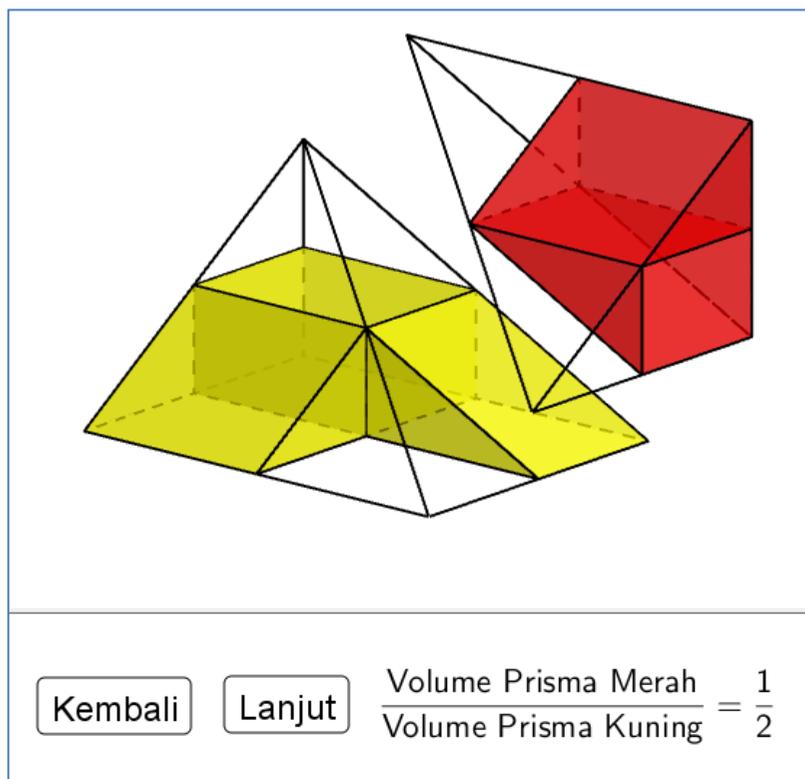
Pembuktian kedua (LIU Hui)

Matematikawan China, LIU Hui (abad ke-3) dapat membuktikan rumus piramida tersebut dengan cara yang unik. Dalam komentarnya tentang matematika klasik "*Arithmetic in Nine Chapter*", prisma segitiga dapat dibagi menjadi sebuah piramida segitiga dan sebuah piramida segiempat. Pada aplet yang tersedia, dengan menekan tombol "**Mulai**", sebuah prisma segitiga membelah menjadi sebuah piramida segitiga dan sebuah piramida segiempat (Gambar 5).

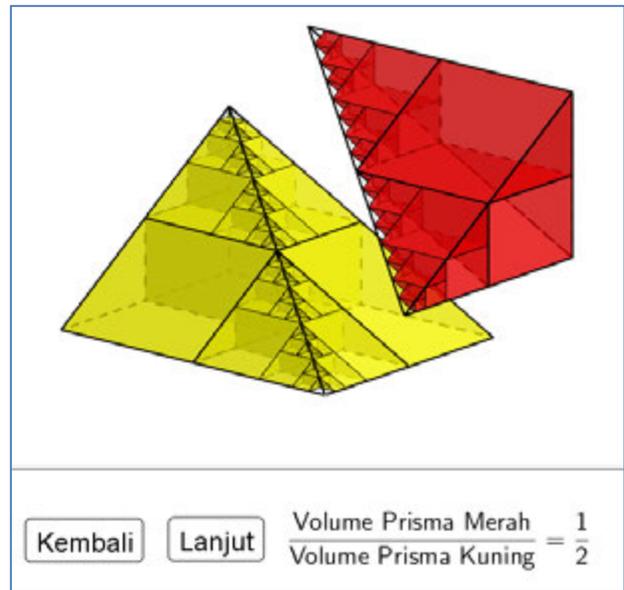
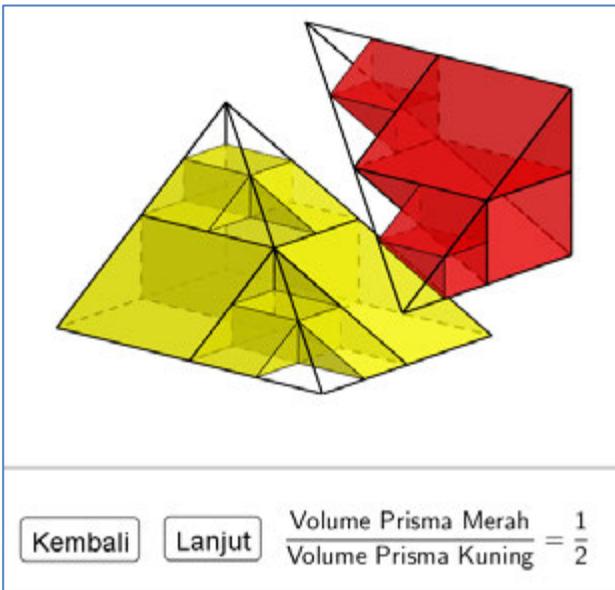


Gambar 5

Dengan menekan tombol “**Lanjut**”, dengan menghubungkan titik tengah sisi piramida, masing-masing piramida akan terbagi menjadi beberapa beberapa prisma (bagian merah dan bagian kuning) dan beberapa piramida kosong yang lebih kecil. Dari sini tampak bahwa jumlah dari volume bagian-bagian yang berwarna merah adalah setengah dari bagian yang berwarna kuning (Gambar 6).

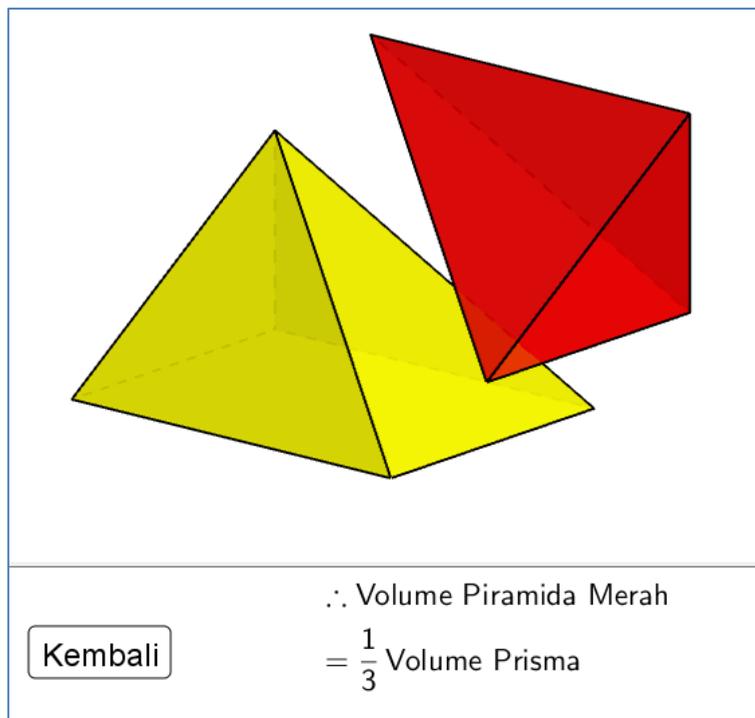


Gambar 6



Gambar 7

Piramida-piramida kecil tersebut dapat terus dibagi lagi. Untuk melihat visualisasinya dalam aplet yang disiapkan pada tautan di bawah, yaitu dengan cara menekan tombol “**Lanjut**”. Terlihat bahwa jumlah volume dari bagian-bagian warna merah adalah setengah dari bagian berwarna kuning. Proses yang sama ini dapat dilanjutkan sampai tak terbatas dengan menekan tombol “**Lanjut**” berulang-ulang. Hasilnya kita dapat melihat bahwa volume piramida segitiga merah dan volume piramida segiempat kuning akan memiliki perbandingan 1:2. Sehingga volume piramida merah adalah 1/3 dari volume prisma awal. Slider “**Reset**” digunakan untuk kembali pada posisi awal ketika prisma masih utuh belum terbagi menjadi dua piramida.



Gambar 8

LIU Hui mengekspresikan idenya tentang “mengarahkan proses pada limit” dengan kalimat sebagai berikut (Wagner, 1979):

The smaller they are halved, the finer are the remaining. The extreme of the fineness is called “subtle”. That which is subtle is without form. When it is explained in this way, why concern oneself with the remainder?

Kalimat itu menjelaskan bahwa semakin kecil piramida tersebut dibelah, semakin halus sisanya. Ekstrimnya kehalusan ini disebut “subtle”. Yaitu halus tanpa bentuk. Ketika pembuktian itu dijelaskan dengan cara ini, kita dapat saja mengabaikan sisa yang sangat halus itu.

Sangat mengagumkan ketika LIU Hui dapat memvisualisasikan “the subtle limit process” tersebut tanpa bantuan teknologi modern. Kita dapat melihat ilustrasi proses tersebut dengan figure dinamis pada tautan aplet GeoGebra di alamat <http://tinyurl.com/vol-piramida2> atau di alamat <https://ggbm.at/bRRdd8gd>

Judul Asli: Volume of Pyramids with GeoGebra

Penulis: Anthony C.M. Or Chair of the GeoGebra Institute of Hong Kong.

<http://community.geogebra.org/en/2014/12/24/pyramid-volume/>

Applets tersebut juga tersedia di GeoGebraBook: <http://tube.geogebra.org/material/show/id/359361>.

Referensi:

Anthony, 2014, Volume of Pyramids with GeoGebra, <http://community.geogebra.org/en/2014/12/24/pyramid-volume/>

Edwards, C. H. Jr. 1979. The Historical Development of the Calculus. Springer-Verlag, New York

Wagner, D.B. 1979. An Early Chinese Derivation of the Volume of a Pyramid: Liu Hui, Third Century A.D. *Historia Mathematica* 6 p.164-188

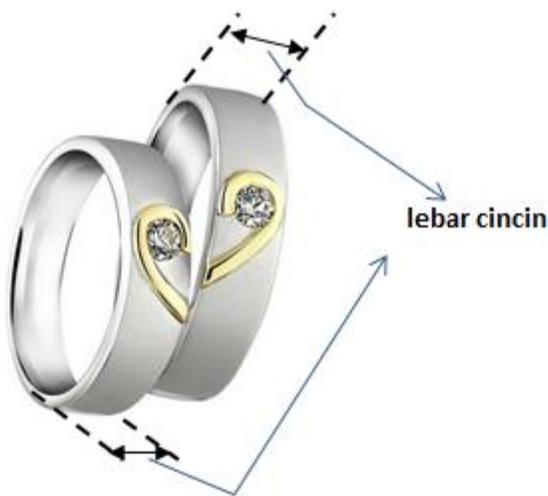
www.matematicasvisuales.com

*) Diterjemahkan, diterangkan, dan dimodifikasi dari tulisan Anthony CM.Or.
Oleh Indarti, Pengembang Teknologi Pembelajaran, PPPPTK Matematika Yogyakarta

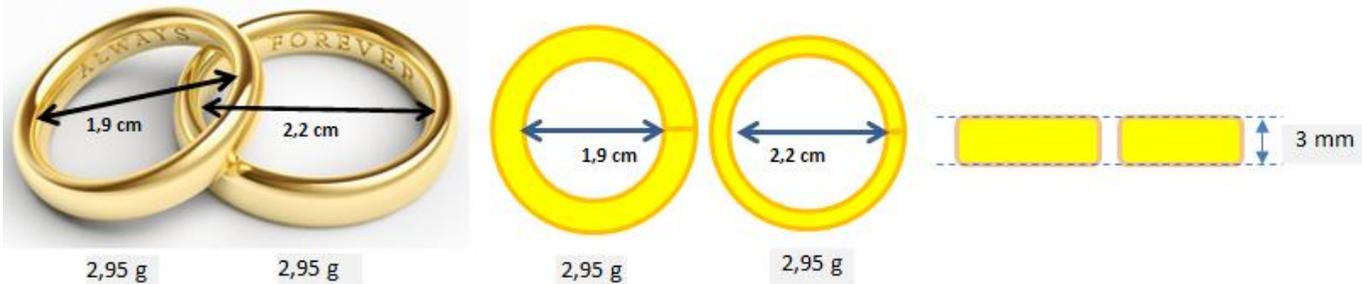
The Napkin Ring Problem

*) Sigit Tri Guntoro

Pernahkah Anda membeli cincin emas atau mencermati suatu cincin pernikahan? Apakah terpikirkan cara membuat cincin dengan diameter berbeda namun mempunyai lebar dan berat yang sama? Sebagai catatan disini bahwa yang dimaksud lebar adalah jarak sisi cincin seperti contoh gambar berikut.

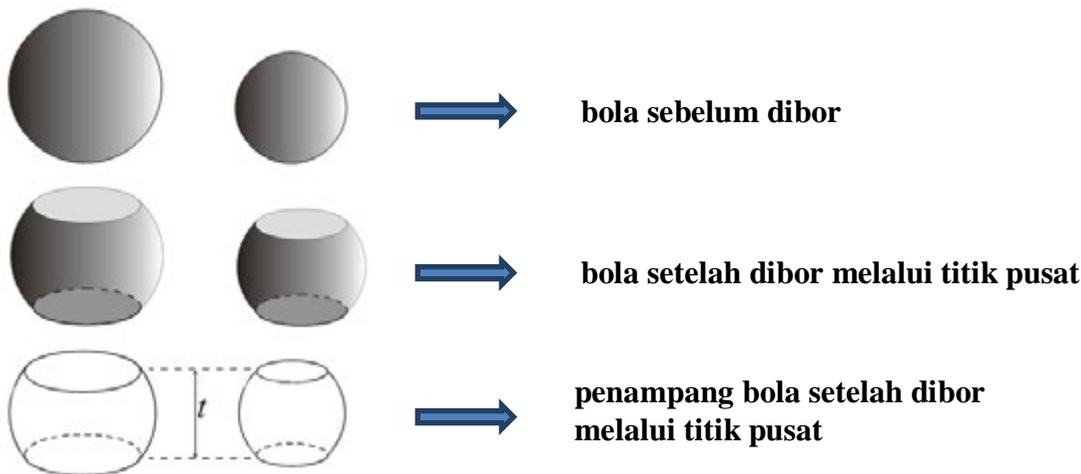


Bagaimana seorang pengrajin membuat cincin dengan berat dan lebar sama tetapi diameternya berbeda? Sebagai pemahaman awal perhatikan dua cincin dibawah ini.



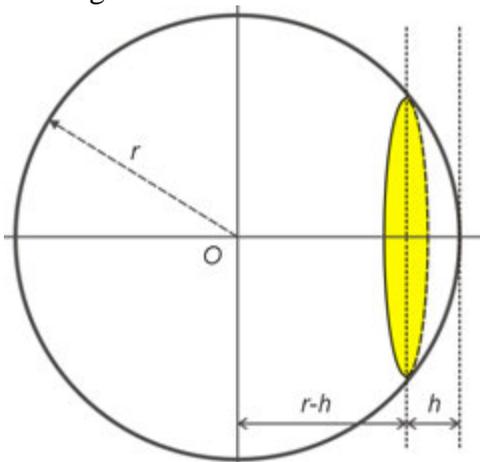
Perhatikan bahwa dua cincin tersebut mempunyai berat sama, yaitu 2,95 gram dan mempunyai lebar sama yaitu 3 mm tetapi diameter berbeda yaitu 1,9 cm dan 2,2 cm. Bagaimana cara pengrajin membuatnya? Tentu pemikiran pertama tertuju pada tebal dan tipisnya cincin. Walaupun kenyatannya para pengrajin membuat cincin tersebut dengan cara yang berbeda, namun ada suatu fenomena dalam matematika yang dapat menjelaskan atau mungkin merupakan solusi permasalahan di atas. Fenomena yang dimaksud adalah *The Napkin Ring Problem*.

Apa itu *The Napkin Ring Problem*? Perhatikan dua bola yang dibor (pelobangan bola dengan suatu bor) melalui titik pusatnya sebagai berikut.



Dari proses pemboran bola tersebut masih menyisakan bahan yang tertinggal, yaitu bola yang berlubang di tengahnya. Bahan atau sisa bola yang berlubang di tengah ini membentuk suatu cincin. Cincin inilah yang dinamakan *Napkin Ring*. Apa yang menarik dari *Napkin Ring* ini?

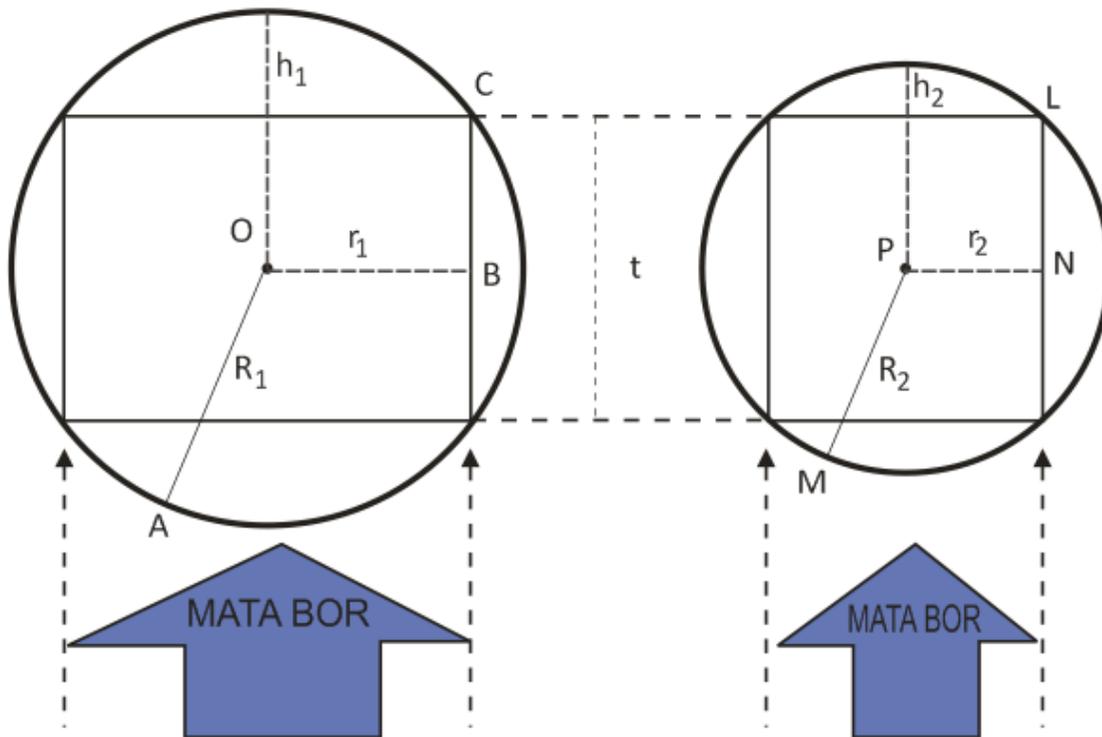
Sebelum membahas lebih lanjut, kita ulang lagi volume benda putar yang pernah dipelajari di sekolah menengah.



Pandang seperempat lingkaran di kuadran I sebagai fungsi $y = \sqrt{r^2 - x^2}$. Volume benda putar yang terbentuk bila kurva dirotasi sekeliling sumbu- x dari $x = r - h$ sampai $x = r$ merupakan tembereng bola setinggi h . Namakan volume tembereng tersebut sebagai V_h , maka

$$\begin{aligned}
 V_h &= \pi \int_{r-h}^r (\sqrt{r^2 - x^2})^2 dx \\
 &= \pi \int_{r-h}^r (r^2 - x^2) dx \\
 &= \pi \left(r^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_{r-h}^r \\
 &= \pi \left(\left(r^3 - \frac{1}{3} r^3 \right) - \left(r^2 (r - h) - \frac{1}{3} (r - h)^3 \right) \right) \\
 &= \pi \left(rh^2 - \frac{1}{3} h^3 \right)
 \end{aligned}$$

Selanjutnya perhatikan gambar berikut yang merupakan penampang dari samping bola yang dibor seperti proses di atas.



Sebagai contoh awal, perhatikan untuk bola yang besar, namakan Bola 1. Misalkan NB_1 adalah cincin yang terbentuk akibat proses pelubangan bola seperti cara di atas, maka

$$NB_1 = VB_1 - 2V_{h_1} - VT_1$$

dengan

VB_1 = Volume Bola 1

V_{h_1} = Volume tembereng Bola 1

VT_1 = Volume tabung dalam Bola 1

Jadi diperoleh

$$NB_1 = \frac{4}{3}\pi(R_1)^3 - 2\left(\pi\left(R_1h_1^2 - \frac{1}{3}h_1^3\right)\right) - \pi r_1^2 t$$

Dari gambar tersebut jelas bahwa $\frac{1}{2}t = R_1 - h_1$, dan berlaku $r_1^2 = R_1^2 - \left(\frac{1}{2}t\right)^2$. Sehingga didapatkan

$$\begin{aligned} NB_1 &= \frac{4}{3}\pi(R_1)^3 - 2\left(\pi\left(R_1\left(R_1 - \frac{1}{2}t\right)^2 - \frac{1}{3}\left(R_1 - \frac{1}{2}t\right)^3\right)\right) - \pi\left(R_1^2 - \left(\frac{1}{2}t\right)^2\right)t \\ &= \pi\left[\frac{4}{3}R_1^3 - 2R_1\left(R_1^2 - R_1t + \frac{1}{4}t^2\right) + \frac{2}{3}\left(R_1^3 - \frac{3}{2}R_1^2t + \frac{3}{4}R_1t^2 - \frac{1}{8}t^3\right) - R_1^2t + \frac{1}{2}t^3\right] \\ &= \pi\left[\frac{4}{3}R_1^3 - 2R_1^3 + 2R_1^2t - \frac{1}{2}R_1t^2 + \frac{2}{3}R_1^3 - R_1^2t + \frac{1}{2}R_1t^2 - \frac{1}{12}t^3 - R_1^2t + \frac{1}{2}t^3\right] \\ &= \pi\left[\left(\frac{4}{3}R_1^3 - 2R_1^3 + \frac{2}{3}R_1^3\right) + (2R_1^2t - 2R_1^2t) + \left(\frac{1}{2}R_1t^2 - \frac{1}{2}R_1t^2\right) + \left(\frac{1}{4}t^3 - \frac{1}{12}t^3\right)\right] \\ &= \pi\left[0 + 0 + 0 + \frac{1}{6}t^3\right] \\ &= \frac{1}{6}\pi t^3 \end{aligned}$$

Sama halnya untuk untuk Bola 2 akan berlaku

$$NB_2 = VB_2 - 2V_{h_2} - VT_2$$

dengan

VB_2 = Volume Bola 2

V_{h_2} = Volume tembereng Bola 2

VT_2 = Volume tabung dalam Bola 2

Jadi diperoleh

$$NB_2 = \frac{4}{3}\pi(R_2)^3 - 2\left(\pi\left(R_2h_2^2 - \frac{1}{3}h_2^3\right)\right) - \pi r_2^2 t$$

Dari gambar tersebut jelas bahwa $\frac{1}{2}t = R_2 - h_2$, dan berlaku $r_2^2 = R_2^2 - \left(\frac{1}{2}t\right)^2$. Sehingga didapatkan

$$\begin{aligned} NB_2 &= \frac{4}{3}\pi(R_2)^3 - 2\left(\pi\left(R_2\left(R_2 - \frac{1}{2}t\right)^2 - \frac{1}{3}\left(R_2 - \frac{1}{2}t\right)^3\right)\right) - \pi\left(R_2^2 - \left(\frac{1}{2}t\right)^2\right)t \\ &= \pi\left[\frac{4}{3}R_2^3 - 2R_2\left(R_2^2 - R_2t + \frac{1}{4}t^2\right) + \frac{2}{3}\left(R_2^3 - \frac{3}{2}R_2^2t + \frac{3}{4}R_2t^2 - \frac{1}{8}t^3\right) - R_2^2t + \frac{1}{2}t^3\right] \\ &= \pi\left[\frac{4}{3}R_2^3 - 2R_2^3 + 2R_2^2t - \frac{1}{2}R_2t^2 + \frac{2}{3}R_2^3 - R_2^2t + \frac{1}{2}R_2t^2 - \frac{1}{12}t^3 - R_2^2t + \frac{1}{2}t^3\right] \\ &= \pi\left[\left(\frac{4}{3}R_2^3 - 2R_2^3 + \frac{2}{3}R_2^3\right) + (2R_2^2t - 2R_2^2t) + \left(\frac{1}{2}R_2t^2 - \frac{1}{2}R_2t^2\right) + \left(\frac{1}{4}t^3 - \frac{1}{12}t^3\right)\right] \\ &= \pi\left[0 + 0 + 0 + \frac{1}{6}t^3\right] \\ &= \frac{1}{6}\pi t^3 \end{aligned}$$

Hal yang cukup menarik disini adalah volume kedua cincin tersebut sama yaitu $\frac{1}{6}\pi t^3$, sehingga berapapun besar bolanya, asalkan dibor menghasilkan cincin yang lebarnya sama pasti volume cincinnya juga sama. Jadi cara ini dapat digunakan oleh pengrajin untuk membentuk cincin yang berat dan lebarnya sama tetapi diameternya berbeda. Dengan demikian orang akan lebih leluasa memilih cincin dengan berat dan lebar yang sama tetapi diameter menyesuaikan jari-jari mereka.

Referensi:

- [1] Ron Larson, 2010, *Calculus*, California: Brooks/Cole, Cengage Learning
- [2] *Mathworld.wolfram.com, Spherical Ring*, diakses 12 November 2016
- [3] *www.physicsforums.com, Volume of a Napkin Ring*, diakses 12 November 2016

*) Sigit Tri Guntoro, M.Si
Widyaiswara SMA PPPPTK Matematika Yogyakarta

ARITMATIKA MESIR KUNO SEBAGAI CARA ALTERNATIF DALAM MENYELESAIKAN PERKALIAN DAN PEMBAGIAN BILANGAN BULAT

*) Slamet Hariyadi

Sampai saat ini, buku pegangan siswa (buku teks), dalam hal ini buku paket matematika belum dapat memberikan apa yang dibutuhkan siswa. Buku paket tersebut hanya mengacu pada target kurikulum semata, tidak banyak memberikan informasi secara luas, sebagai contoh pada operasi hitung perkalian dan pembagian bilangan bulat di sekolah dasar (SD) hanya menggunakan cara tunggal, yaitu cara bersusun pada perkalian dan cara porogapit pada pembagian. Akibatnya sampai pada jenjang sekolah berikutnya siswa tidak akan pernah mendapatkan metode atau cara lain dalam menyelesaikan perkalian atau pembagian bilangan bulat yang mungkin lebih mudah dan menarik, jika hanya mengandalkan belajar dari kegiatan tatap muka di kelas.

Oleh karena itu pola belajar mandiri perlu dikembangkan dan dibudayakan pada setiap siswa, karena guru bukan satu-satunya sumber belajar. Sumber belajar bisa diperoleh antara lain melalui pemberdayaan lingkungan, perpustakaan, media internet, dan lain sebagainya. Menurut Martinis Yamin; dkk (2008:19) belajar mandiri memiliki manfaat yang banyak terhadap kemampuan kognisi, afeksi, dan psikomotorik siswa, manfaat tersebut antara lain:

- a) memupuk tanggung jawab
- b) meningkatkan keterampilan
- c) memecahkan masalah
- d) mengambil keputusan
- e) berfikir kreatif
- f) berfikir kritis
- g) percaya diri yang kuat
- h) menjadi guru bagi dirinya sendiri

Dengan demikian guru perlu mengembangkan belajar mandiri pada setiap siswanya, karena selain dapat menutup kekurangan yang belum siswa dapatkan dari guru melalui kegiatan tatap muka di kelas, belajar mandiri akan menjadikan siswa lebih bertanggung jawab akan tugas dan kewajibannya,

berpikir kritis, kreatif, terampil memecahkan masalah, serta memiliki sikap percaya diri yang lebih kuat.

Teori *multiple intelligences* yang digagas oleh Gardner, sangat menggugah kesadaran bahwa setiap siswa punya potensi untuk cerdas, artinya tidak ada istilah anak bodoh. Meminjam istilah Yohanes Surya (dalam Talk Show Kick Andy: 2011) bahwa sebenarnya tidak ada anak bodoh, yang ada hanyalah karena belum mendapatkannya seorang guru yang baik.

Menurut Munif Chatib (2009: 75) kecerdasan seseorang dapat dilihat dari banyak dimensi, tidak hanya kecerdasan verbal (berbahasa) atau kecerdasan logika. Kecerdasan lebih dititikberatkan pada proses untuk mencapai kondisi akhir terbaik. Dalam menemukan kecerdasan-nya, seorang anak harus dibentuk oleh lingkungannya, baik orang tua, guru, sekolah, maupun sistem pendidikan yang diimplementasikan di suatu negara.

Multiple Intelligences memiliki metode *discovering ability*, artinya proses menemukan kemampuan seseorang. Metode ini meyakini bahwa setiap siswa pasti memiliki kecenderungan jenis kecerdasan tertentu. Kecenderungan tersebut harus ditemukan melalui pencarian kecerdasan.

Menyimak dari uraian tersebut bahwa setiap siswa pada hakikatnya mempunyai potensi untuk cerdas, tidak ada anak bodoh. Peran gurulah yang harus lebih maksimal, baik dalam kapasitasnya sebagai partner belajar, fasilitator, dan motivator.

Belajar dari sejarah aritmatika Mesir kuno sebagaimana dikemukakan Wahyudin (2011:1.12) bahwa matematika Mesir pada dasarnya “bersifat penjumlahan”, artinya untuk menemukan hasil perkalian dan pembagian menggunakan penjumlahan berulang. Perkalian dua bilangan yang dilakukan oleh bangsa Mesir dapat diselesaikan dengan cara menggandakan secara berurutan salah satu dari bilangan tersebut (yang diasumsikan sebagai

multiplikan) dan kemudian menambahkan pengulangan yang sesuai untuk memperoleh hasil kalinya. Sebagai contoh, untuk mencari hasil kali 14 dan 52. Diasumsikan 52 adalah multiplikan (bilangan yang akan dikalikan), dengan menggandakan bilangan itu diperoleh:

	1	52
√	2	104
√	4	208
√	8	416

Kita berhenti menggandakannya sampai di sini, karena jika langkah tersebut dilanjutkan, maka pengali yang muncul selanjutnya untuk 52 akan lebih besar dari 14. Karena $14 = 2 + 4 + 8$, maka beri tanda centang “√” di kolom paling kiri untuk menunjukkan bahwa pengali-pengali tersebut harus dijumlahkan. Sehingga hasil kali 14 dan 52 tersebut akan tampak seperti berikut.

	1	52
√	2	104
√	4	208
√	8	416
Jumlah	14	728

Dengan menjumlahkan bilangan-bilangan pada kolom paling kanan yang bersebrangan dengan tanda centang “√”, matematikawan Mesir akan memperoleh hasil yang dibutuhkan, yaitu 728, jika diuraikan akan tampak seperti berikut ini.

$$\begin{aligned}
 728 &= 104 + 208 + 416 \\
 &= (2 + 4 + 8) \times 52 \\
 &= 14 \times 52
 \end{aligned}$$

Dari contoh, di atas jika memilih 14 sebagai multiplikan dan 52 sebagai pengalinya, maka uraian perkalian tersebut dapat disusun sebagai berikut.

	1	14
	2	28
√	4	56
	8	112
√	16	224
√	32	448
Jumlah	52	728

Dengan menjumlahkan bilangan-bilangan pada kolom paling kanan yang bersebrangan dengan tanda centang “√”, maka akan memperoleh hasil 728. Jika diuraikan akan tampak seperti berikut ini.

$$\begin{aligned}
 728 &= 56 + 224 + 448 \\
 &= (4 + 16 + 32) \times 14 \\
 &= 52 \times 14
 \end{aligned}$$

Pembagian yang dilakukan oleh bangsa Mesir menggunakan proses perkalian yang dibalik, pembagi digunakan secara berulang untuk memperoleh hasil baginya. Sebagai contoh untuk membagi 85 oleh 5, sebuah bilangan n digunakan, sehingga $5n = 85$. Ini diperoleh dengan cara menggandakan 5 sampai jumlahnya 85, langkah-langkahnya dapat ditunjukkan sebagai berikut.

√	1	5
	2	10
	4	20
	8	40
√	16	80
Jumlah	17	85

Diketahui bahwa $5 + 80 = 85$, dan dengan menjumlah bilangan pangkat dua yang berkorespondensi dengan bilangan-bilangan yang ditandai centang “√”, yaitu $1 + 16 = 17$,

memberikan kuosien (pembagi) yang dibutuhkan. Prosedur pembagian Mesir memiliki keuntungan pedagogis karena tidak membutuhkan operasi yang baru.

Perlu diperhatikan bahwa dalam pembagian bilangan bulat, tidak selalu sesederhana sebagaimana contoh di atas. Adakalanya memerlukan keterlibatan pecahan dalam penyelesaiannya. Sebagai contoh misalnya untuk membagi 48 oleh 9.

√	1	9
	2	18
√	4	36
√	$\frac{1}{3}$	3
Jumlah	$5\frac{1}{3}$	48

Dengan memperhatikan tanda centang “√” dan jumlah pada kolom paling kanan yaitu $9 + 36 + 3 = 48$, maka hasil baginya adalah jumlah dari bilangan yang berkorespondensi dengan bilangan tersebut, yaitu $1 + 4 + \frac{1}{3} = 5\frac{1}{3}$.

Dengan mengadopsi prinsip-prinsip matematikawan Mesir kuno tersebut, maka dapat ditentukan hasil kali ataupun hasil bagi. Adapun proses adopsi yang dilakukan adalah dengan penyesuaian, artinya tetap berprinsip bagaimana siswa mudah memahami metode baru tersebut, senang dalam melakukannya dan dapat membangun kreativitas berpikirnya. Proses penyesuaian tersebut sangat diperlukan, mengingat dalam operasional pembagian yang melibatkan pecahan-pecahan, matematikawan Mesir hanya mengenal pecahan satuan. Sebagaimana ditulis Wahyudin (2011:1.15),¹ bahwa praktek perhitungan pecahan yang dilakukan matematikawan Mesir menggunakan pecahan satuan,² yaitu pecahan-pecahan dengan bentuk $\frac{1}{n}$, dimana n adalah bilangan Asli. Untuk membantu perubahan ke dalam pecahan-pecahan satuan, banyak tabel referensi harus tersedia. Tabel-tabel aritmatika paling fenomenal yang ditemukan diantara kumpulan papirus bangsa Mesir kuno dengan panjang gulungan

mencapai 18 kaki, adalah tabel yang memuat uraian dari pecahan-pecahan dengan pembilang 2 dan penyebutnya adalah bilangan ganjil diantara 5 dan 101. Pecahan-pecahan $\frac{2}{n}$ yang penyebut-penyebutnya habis dibagi 3 harus mengikuti aturan umum:

$$\frac{2}{3k} = \frac{1}{2k} + \frac{1}{6k}$$

Berdasarkan pada kondisi tersebut, maka pada penyelesaian pembagian bilangan bulat tidak sepenuhnya murni sebagaimana cara yang dilakukan matematikawan Mesir kuno yang hanya mengenal pecahan-pecahan satuan, akan tetapi pecahan yang muncul pada perhitungan pembagian setelah proses adopsi dan penyesuaian didapat dari sisa hasil jumlah pengulangannya (penggan-daan multiplikannya) sebagai pembilang, dan pembagi sebagai penyebutnya. Hasil akhir dari pembagian dua bilangan bulat tersebut dapat dijelaskan sebagai berikut.

Jika diketahui p dan q adalah bilangan bulat, dimana $p > q$; dan $q \neq 0$, maka q membagi p didefinisikan sebagai:

$p \div q = h + s$, dimana:
 h = hasil bagi, yaitu diperoleh dari jumlah penggandaan multiplikannya yang sesuai dalam hal ini q sebagai multiplikannya.
 s = sisa, dengan ketentuan;
 $s = 0$, jika q merupakan faktor dari p
 $s = \frac{a}{q}$, jika q bukan merupakan faktor dari p , dan a adalah sisa hasil jumlah pengulangannya, dimana $a + h = p$

Berikut ini ditampilkan simulasi dalam menyelesaikan perkalian dan pembagian bilangan bulat dengan Aritmatika Mesir Kuno.

$$126 \times 78 = \dots$$

Untuk menyelesaikan soal tersebut jika secara konsep perkalian, maka multiplikannya adalah 78. Akan tetapi dalam hal menganut matematikawan Mesir kuno dapat saja untuk mempercepat proses atau efisiensi waktu pada soal tersebut ambillah sebagai multiplikannya adalah 126.

	1	126
√	2	252
√	4	504
√	8	1008
	16	2016
	32	4032
√	64	8064
Jumlah	78	9828

Sehingga hasil dari $126 \times 78 = 9828$

2. $245 \div 12 = \dots$

Untuk membagi 245 oleh 12, dapat dimisalkan bilangan anu n , dimana $12n = 24$. Dengan 12 sebagai multiplikan, maka:

	1	12
	2	24
√	4	48
	8	96
√	16	192
Jumlah	20	240
	Sisa	5

Sehingga hasil dari $245 \div 12 = 20 \frac{5}{12}$

*) Drs. Slamet Hariyadi, M.Pd
Guru SMP Negeri 1 Tenggarang Kabupaten Bondowoso, Jawa Timur

DAFTAR PUSTAKA

- Chatib, Munif. 2009. *Sekolahnya Manusia*. Bandung: Kaifa
- Muhsetyo, Gatot. 2007. *Pembelajaran Matematika SD*. Jakarta: Universitas Terbuka
- McBride, Elf. 2004. *MQ Merangsang Kejeniusan Matematika Anak*. Jakarta: Prestasi Pustaka
- Nuharini, Dewi. 2008. *Matematika Konsep dan Aplikasinya 1*. Jakarta: Pusat Perbukuan Departemen Pendidikan Nasional
- Siswono, Eko. 2003. *Membangun Kompetensi Matematika 2*. Surabaya: Esis
- Wahyudin. 2011. *Sejarah dan Filsafat Matematika*. Jakarta: Universitas Terbuka
- Wahyudin. 2004. *Ensiklopedi Matematika Untuk SLTP*. Jakarta: CV. Tarity Samudra Berlian
- Undang-undang Republik Indonesia Nomor 20 Tahun 2003. 2003. *Sistem Pendidikan Nasional*. Jakarta: Departemen Pendidikan Nasional Republik Indonesia
- Yamin, Martinis; dkk. 2008. *Taktik Mengembangkan Kemampuan Individual Siswa*. Jakarta: Gaung Persada Press

CARA MUDAH MENGINGAT RUMUS-RUMUS TRIGONOMETRI DENGAN MENGGUNAKAN SENTRIG (Segi Enam Trigonometri)

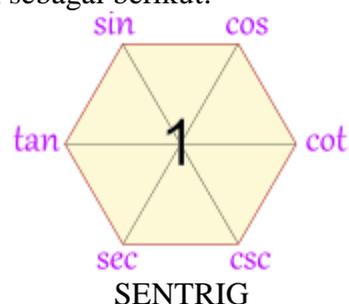
*) Deni Megawati

Materi trigonometri yang diajarkan di jenjang SMA merupakan materi yang penting karena sebagian besar digunakan sebagai materi prasyarat untuk beberapa materi yang lain diantaranya limit, turunan, integral, transformasi geometri, dimensi tiga dan beberapa materi lainnya. Selain itu, jumlah Standar Kompetensi Lulusan (SKL) Matematika SMA pada materi trigonometri itu sendiri juga lumayan banyak yaitu tentang nilai perbandingan trigonometri, fungsi trigonometri, aturan sinus dan aturan cosinus, jumlah dan selisih sudut serta jumlah dan selisih perbandingan trigonometri. Namun, kebanyakan siswa mengalami kesulitan dalam mempelajari trigonometri. Alasan utamanya adalah pada materi trigonometri banyak rumus-rumus dan aturan-aturan yang hampir mirip sehingga mereka merasa bingung kapan menggunakannya untuk menyelesaikan soal-soal yang diberikan. Contoh sederhana ketika peneliti menanyakan tentang kebenaran dari sebuah pernyataan $\sec x = \tan x \cdot \csc x$ kepada siswa di salah satu kelas XII SMA. Hanya 2 dari 25 siswa yang mampu menjawab pernyataan tersebut dengan benar. Dari hasil tersebut, dapat dikatakan bahwa konsep-konsep dalam trigonometri belum dipahami secara utuh dan menyeluruh sehingga mereka kesulitan menyelesaikan soal-soal trigonometri.

Untuk memudahkan siswa memahami rumus-rumus dan aturan-aturan dalam trigonometri yang katanya siswa hampir mirip tersebut, biasanya siswa menghafal beberapa konsep dasar pada trigonometri. Namun, agar siswa dapat mengingat beberapa hubungan-hubungan perbandingan trigonometri tanpa terlalu banyak menghafal aturan-aturan tersebut, guru dapat menggunakan alat bantu ketika pembelajaran trigonometri yang diharapkan dapat membantu siswa dalam mengingat aturan-aturan dalam trigonometri,

sehingga lebih lanjut diharapkan dapat meningkatkan pemahaman siswa pada bab trigonometri.

Alat bantu tersebut berupa sebuah bidang segi enam. Bidang segienam mempunyai enam titik sudut. Tiap titik sudut tersebut mewakili suatu perbandingan trigonometri tertentu. Segienam trigonometri dapat digambarkan sebagai berikut:

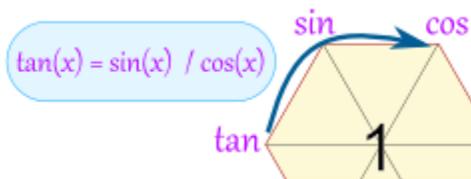


SENTRIG
(Segienam trigonometri)

Gambar di atas merupakan suatu segienam trigonometri dengan masing-masing titik sudut pada segienam tersebut mewakili perbandingan trigonometri sinus (\sin), cosinus (\cos), cotangen (\cot), cosecan (\csc), secan (\sec) dan tangen (\tan). Dalam mengingat nama-nama setiap titik sudut tersebut, dapat menggunakan cara bahwa sisi kanan segienam tersebut semua namanya diawali dengan “CO” yaitu COsinus, COtangen, dan COsecan, sedangkan nama titik sudut yang segaris merupakan pasangannya, Cosinus-Sinus, Cotangen-Tangen, dan Cosecan-Secan.

Dari segienam trigonometri tersebut akan menghasilkan beberapa konsep trigonometri yang lain dengan beberapa aturan sebagai berikut:

1. Suatu nama trigonometri pada suatu titik sudut tertentu merupakan perbandingan antara dua titik sudut setelah titik tersebut dengan arah sesuai dengan jarum jam maupun berlawanan dengan arah jarum jam, seperti pada gambar berikut ini:



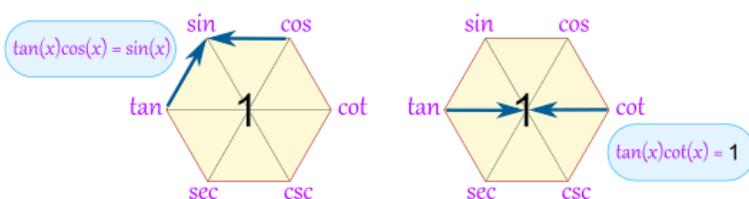
Dengan menggunakan aturan searah jarum jam maka akan didapatkan enam bentuk perbandingan trigonometri. Perbandingan trigonometri tersebut adalah sebagai berikut:

- a) $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$
- b) $\sin x = \frac{\cos x}{\cot x}$
- c) $\cos x = \frac{\cot x}{\csc x}$
- d) $\cot x = \frac{\csc x}{\sec x}$
- e) $\csc x = \frac{\sec x}{\tan x}$
- f) $\sec x = \frac{\tan x}{\sin x}$

Jika arah putarnya dibalik, yaitu berlawanan dengan arah jarum jam maka akan didapatkan enam bentuk perbandingan trigonometri yang lain sebagai berikut:

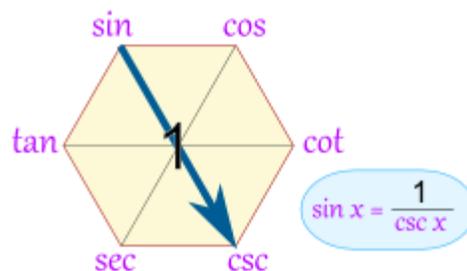
- a) $\cos x = \frac{\sin x}{\tan x}$
- b) $\sin x = \frac{\tan x}{\sec x}$
- c) $\tan x = \frac{\sec x}{\csc x}$
- d) $\sec x = \frac{\csc x}{\cot x}$
- e) $\csc x = \frac{\cot x}{\cos x}$
- f) $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$

2. Suatu nama trigonometri pada suatu titik sudut tertentu merupakan perkalian antara dua titik sudut yang mengapit titik sudut tertentu, seperti pada gambar berikut ini:



Dengan menggunakan aturan ini akan didapatkan sembilan bentuk trigonometri yang didapat dari perkalian trigonometri dengan aturan tersebut. Bentuk-bentuk trigonometri tersebut adalah sebagai berikut:

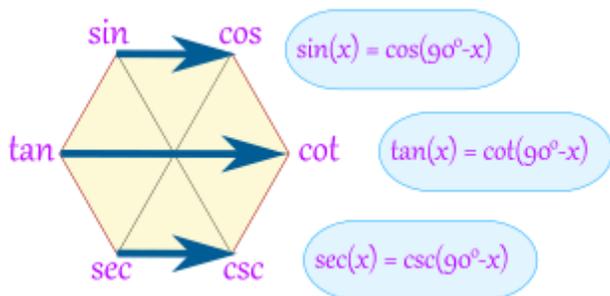
- a) $\tan x \cdot \cos x = \sin x$
 - b) $\sin x \cdot \cot x = \cos x$
 - c) $\cos x \cdot \csc x = \cot x$
 - d) $\cot x \cdot \sec x = \csc x$
 - e) $\csc x \cdot \tan x = \sec x$
 - f) $\sec x \cdot \sin x = \tan x$
 - g) $\tan x \cdot \cot x = 1$
 - h) $\sin x \cdot \csc x = 1$
 - i) $\cos x \cdot \sec x = 1$
3. Suatu nama trigonometri pada suatu titik sudut tertentu merupakan kebalikan dari suatu bentuk trigonometri pada titik yang segaris yang dapat ditarik dari titik sudut tersebut dan melewati pusat segienam, seperti pada gambar berikut ini:



Dengan menggunakan aturan ini maka akan didapatkan enam bentuk trigonometri yang merupakan kebalikan dari trigonometri yang lain. Bentuk-bentuk trigonometri tersebut adalah sebagai berikut:

- a) $\sin x = \frac{1}{\csc x}$
- b) $\cos x = \frac{1}{\sec x}$
- c) $\tan x = \frac{1}{\cot x}$
- d) $\csc x = \frac{1}{\sin x}$
- e) $\sec x = \frac{1}{\cos x}$
- f) $\cot x = \frac{1}{\tan x}$

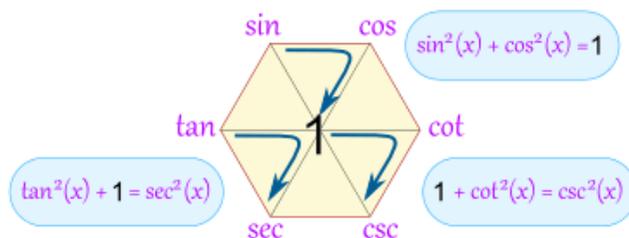
4. Nilai suatu trigonometri untuk suatu x pada titik sudut tertentu merupakan nilai suatu trigonometri dengan sudut $(90 - x)$ yang segaris, searah rusuk segienam, dan mendatar, seperti pada gambar berikut ini:



Dengan menggunakan aturan ini maka akan didapatkan enam bentuk nilai trigonometri untuk suatu x . Bentuk nilai trigonometri tersebut adalah sebagai berikut:

- $\sin x = \cos(90 - x)$
 - $\tan x = \cot(90 - x)$
 - $\sec x = \csc(90 - x)$
 - $\cos x = \sin(90 - x)$
 - $\cot x = \tan(90 - x)$
 - $\csc x = \sec(90 - x)$
5. Suatu identitas trigonometri dapat dibentuk dari penjumlahan trigonometri yang searah dengan jarum jam atau dari pengurangan trigonometri yang berlawanan arah dengan jarum jam dari

suatu segitiga yang terbentuk dalam bidang segienam tersebut, seperti pada gambar berikut ini:



Dengan menggunakan aturan ini maka akan didapatkan enam bentuk identitas trigonometri. Identitas trigonometri tersebut adalah sebagai berikut:

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$
- $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$
- $1 - \cos^2 x = \sin^2 x$
- $\sec^2 x - 1 = \tan^2 x$
- $\csc^2 x - \cot^2 x = 1$

Dari uraian di atas, maka akan didapatkan 39 rumus-rumus dan aturan-aturan pada trigonometri yang dapat dengan mudah diingat oleh siswa dengan menggunakan SENTRIG tersebut. Diharapkan siswa bisa lebih mudah mengingat dan menerapkannya untuk menyelesaikan permasalahan yang terkait.

*) Deni Megawati, S.Si., M.Pd.
Guru Matematika SMA Al Hikmah Surabaya, Jawa Timur

GURU PEMBELAJAR



PPPPTK Matematika mengadakan outbound yg dilaksanakan di Kaliurang tepatnya di Wisma Putra Jaya dan diikuti seluruh pegawai PPPPTK Matematika. Tujuan Kegiatan adalah untuk membangun kekeluargaan dan meningkatkan kapasitas sumber daya manusia

Dra. Sri Wardhani, Penanggung Jawab Akademik Diklat Guru Pembelajar 2016 menerima dokumen modul dari Dr. Dra. Daswatia Astuty, M.Pd. sebagai simbol Diklat Guru Pembelajar 2016 siap dilaksanakan.



Direktur Jenderal Guru dan Tenaga Kependidikan (GTK), Sumarna Surapranata, Ph.D. sedang bertanya jawab dengan peserta diklat. Peserta merasa senang bisa mendapat kesempatan bertemu Bapak Sumarna Surapranata pada penutupan Kegiatan Diklat Instruktur Nasional Guru Pembelajar Jenjang SMP Gelombang 2 Tahap 2 tanggal 7 s.d. 15 Agustus 2016 di Hotel Grand City, Makassar



Menteri Pendidikan dan Kebudayaan, Prof. Muhadjir Effendy didampingi Kepala PPPPTK, Dr. Dra. Daswatia Astuty, M.Pd. foto bersama dengan peserta Diklat Instruktur Nasional Guru Pembelajar Pendidikan Dasar Region DIY.



GURU PEMBELAJAR