A

KELOMPOK KOMPETENSI

MODUL PENGEMBANGAN KEPROFESIAN BERKELANJUTAN GURU MATEMATIKA SMA

TERINTEGRASI PENGUATAN PENDIDIKAN KARAKTER

PEDAGOGIK

KARAKTERISTIK PERKEMBANGAN PESERTA DIDIK

PROFESIONAL

BILANGAN, NOTASI SIGMA, BARISAN, DAN DERET

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
DIREKTORAT JENDERAL GURU DAN TENAGA KEPENDIDIKAN
2017

Kata Sambutan

Peran guru profesional dalam proses pembelajaran sangat penting sebagai kunci keberhasilan belajar siswa. Guru profesional adalah guru yang kompeten membangun proses pembelajaran yang baik sehingga dapat menghasilkan pendidikan yang berkualitas dan berkarakter prima. Hal tersebut menjadikan guru sebagai komponen utama yang menjadi fokus perhatian pemerintah pusat maupun pemerintah daerah dalam peningkatan mutu pendidikan terutama menyangkut kompetensi guru.

Pengembangan profesionalitas guru melalui Program Pengembangan Keprofesian Berkelanjutan merupakan upaya Kementrian Pendidikan dan Kebudayaan melalui Direktorat Jenderal Guru dan Tenaga Kependikan dalam upaya peningkatan kompetensi guru. Sejalan dengan hal tersebut, pemetaan kompetensi guru telah dilakukan melalui Uji Kompetensi Guru (UKG) untuk kompetensi pedagogik dan profesional pada akhir tahun 2015. Hasil UKG menunjukkan peta profil yang menunjukan kekuatan dan kelemahan kompetensi guru dalam penguasaan pengetahuan pedagogik dan profesional. Peta kompetensi guru tersebut dikelompokkan menjadi 10 (sepuluh) kelompok kompetensi. Tindak lanjut pelaksanaan UKG diwujudkan dalam bentuk pelatihan guru paska UKG pada tahun 2016 dan akan dilanjutkan pada tahun 2017 ini dengan Program Pengembangan Keprofesian Berkelanjutan bagi Guru. Tujuannya adalah untuk meningkatkan kompetensi guru sebagai agen perubahan dan sumber belajar utama bagi peserta didik. Program Pengembangan Keprofesian Berkelanjutan bagi Guru dilaksanakan melalui pelatihan yang langsung menyentuh guru serta selaras dengan kebutuhan guru dalam meningkatkan kompetensinya.

Pusat Pengembangan dan Pemberdayaan Pendidik dan Tenaga Kependidikan (PPPPTK), Lembaga Pengembangan dan Pemberdayaan Pendidik dan Tenaga Kependidikan Kelautan Perikanan Teknologi Informasi dan Komunikasi (LP3TK KPTK) dan Lembaga Pengembangan dan Pemberdayaan Kepala Sekolah (LP2KS) merupakan Unit Pelaksanana Teknis di lingkungan Direktorat Jenderal Guru dan Tenaga Kependidikan yang bertanggung jawab dalam mengembangkan perangkat dan melaksanakan peningkatan kompetensi guru sesuai bidangnya. Adapun perangkat pembelajaran yang dikembangkan tersebut adalah modul Program Pengembangan Keprofesian Berkelanjutan bagi semua mata pelajaran dan kelompok kompetensi. Dengan modul ini diharapkan program Pengembangan Keprofesian Berkelanjutan memberikan sumbangan yang sangat besar dalam peningkatan kualitas kompetensi guru. Mari kita sukseskan Program Pengembangan Keprofesian Berkelanjutan ini untuk mewujudkan Guru Mulia Karena Karya.

Jakarta, April 2017
Direktur Jenderal Guru dan Tenaga Kependidikan,

Sumarna Surapranata, Ph.D.
NIP 195908011985031001

A

KELOMPOK KOMPETENSI

MODUL PENGEMBANGAN KEPROFESIAN BERKELANJUTAN GURU MATEMATIKA SMA

PEDAGOGIK

KARAKTERISTIK PERKEMBANGAN PESERTA DIDIK

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
DIREKTORAT JENDERAL GURU DAN TENAGA KEPENDIDIKAN
2017

MODUL PENGEMBANGAN KEPROFESIAN BERKELANJUTAN GURU MATEMATIKA SMA

TERINTEGRASI PENGUATAN PENDIDIKAN KARAKTER

KELOMPOK KOMPETENSI A

PEDAGOGIK

KARAKTERISTIK PERKEMBANGAN PESERTA DIDIK

DIREKTORAT JENDERAL GURU DAN TENAGA KEPENDIDIKAN
KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
2017

Penulis:
1. Drs. Emut, M.Si, 085326103388, emut2741@gmail.com
2. Dr. R. Rosnawati., 08164220779, rosnawati_slamet@gmail.com

Penelaah:
1. Fajar Noer Hidayat, S.Si, M.Ed
2. Angga Kristiyajati, S.Si
3. Ketut Made?

Ilustrator:
1. Cahyo sasongko
2. Febriarto Cahyo Nugroho

Kata Pengantar

Peningkatan kualitas pendidikan saat ini menjadi prioritas, baik oleh pemerintah pusat maupun daerah. Salah satu komponen yang menjadi fokus perhatian adalah peningkatan kompetensi guru.Peran guru dalam pembelajaran di kelas merupakan kunci keberhasilan untuk mendukung keberhasilan belajar siswa. Guru yang profesional dituntut mampu membangun proses pembelajaran yang baik sehingga dapat menghasilkan *output* dan *outcome* pendidikan yang berkualitas.

Dalam rangka memetakan kompetensi guru, telah dilaksanakan Uji Kompetensi Guru (UKG) Tahun 2015.UKG tersebut dilaksanakan bagi semua guru, baik yang sudah bersertifikat maupun belum bersertifikat untuk memperoleh gambaran objektif kompetensi guru, baik profesional maupun pedagogik.Hasil UKG kemudian ditindaklanjuti melalui program peningkatan kompetensi yang untuk tahun 2017 dinamakan Program Pengembangan Keprofesian Berkelanjutan bagi Guru, sehingga diharapkan kompetensi guru yang masih belum optimal dapat ditingkatkan.

PPPPTK Matematika sebagai Unit Pelaksana Teknis Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan di bawah pembinaan Direktorat Jenderal Guru dan Tenaga Kependidikan mendapat tugas untuk menyusun modul guna mendukung pelaksanaan Program Pengembangan Keprofesian Berkelanjutan bagi Guru. Modul ini diharapkan dapat menjadi sumber belajar bagi guru dalam meningkatkan kompetensinya sehingga mampu mengambil tanggung jawab profesi dengan sebaik-baiknya.

Yogyakarta, April 2017

Kepala PPPPTK Matematika,

Dr. Dra. Daswatia Astuty, M.Pd.

NIP. 196002241985032001

Daftar Isi

Daftar Gambar

Daftar Tabel

Pendahuluan

Kata hikmah

Pekerjaan yang tertinggi nilainya adalah ibadah maka jadikanlah setiap aktivitas Anda menjadi ibadah sehingga setiap unsur yang terlibat didalamnya memiliki nilai pahala disisi Allah

A. Latar Belakang

Salah satu Rencana Program Pembangunan Jangka Menengah Nasional 2015-2019, pada bidang pendidikan adalah Penguatan Pendidikan Karakter (PPK) terhadap anak-anak usia sekolah pada semua jenjang pendidikan.Program ini bertujuan untuk memperkuat nilai-nilai moral, akhlak, dan kepribadian peserta didik dengan memperkuat pendidikan karakter yang terintegrasi ke dalam mata pelajaran.Program pendidikan di sekolah dalam memperkuat karakter siswa melalui harmonisasi olah hati, olah rasa, olah pikir dan olahraga dengan dukungan pelibatan publik dan kerja sama antara sekolah, keluarga, dan masyarakat yang merupakan bagian dari Gerakan Nasional Revolusi Mental (GNRM). Implementasi PPK tersebut dapat berbasis kelas, berbasis budaya sekolah dan berbasis masyarakat (keluarga dan komunitas). Dalam rangka mendukung kebijakan gerakan PPK, modul ini mengintegrasikan lima nilai utama PPK yaitu religius, nasionalis, mandiri, gotong royong, dan integritas. Nilai religius memberikan kepahaman dan keyakinan bahwa setiap nikmat yang diterimanya, termasuk nikmat belajar, akan dimintai pertanggungjawaban. Hal itu akan menjadi penghasung untuk mengoptimalkan usaha dalam belajar sehingga meraih hasil yang terbaik. Dampaknya, akan tumbuh dan berkembang sifat optimis, semangat tinggi dan jiwa kesabaran dalam menghadapi setiap permasalahan. Dengan mengingat bahwa setiap aktivitas belajar merupakan ibadah yang dipersembahkan kepada Allah, Dzat yang Maha Agung maka semua unsur yang menjadikan sukses dalam belajar akan diperhatikan, dipenuhi dan direalisasikan dengan optimal. Dalam proses pelaksanaan aktivitas pembelajaran, ditekankan pada pengamalan akhlak yang mulia, toleransi tinggi, saling menghormati dan saling dukung sehingga menambah suasana belajar lebih menarik dan membahagiakan. Nilai nasionalis memberikan daya dukung yang kuat untuk berprestasi dan tetap memiliki jiwa, martabat dan kepribadian Indonesia.Rasa ingin menjadi pahlawan bangsa melalui bidang pendidikan memberi dorongan untuk sukses dalam belajar. Jiwa kemandirian merupakan karakter mulia dan mendidik seseorang untuk memenuhi semua kebutuhannya secara mandiri. Jiwa kemandirian memberikan dukungan besar dalam mencetak pribadi-pibadi tegar, kokoh, optimis dan merdeka dari kebergantungan orang lain. Nilai karakter gotong-royong menumbuhkan jiwa kebersamaan, kekeluargaan, kesolidan dan kepedulian kepada orang lain. Melalui karakter gotong-royong didapat hasil pekerjaan yang lebih cepat, lebih ringan dan lebih optimal.Sedangkan karakter integritas mendidik untuk berlapangdada mengakui atau menerima sesuatu yang merupakan hasil kesepakatan bersama.Nilai integritas mengajarkan untuk mensyukuri nikmat, toleran dan jiwa berkorban demi kepentingan bersama. Produknya akan bersemayam karakter unggul, antara lain : sikap jujur, jiwa berkorban, niat untuk selalu menjaga keutuhan tim dan mendahulukan kepentingan bersama. Kelima nilai-nilai tersebut terintegrasi melalui kegiatan-kegiatan pembelajaran pada modul.

Merujuk pada Peraturan Menteri Pendayagunaan Aparatur Negara dan Reformasi Birokrasi (Permenpan dan RB) Nomor 16 tahun 2009 tentang Jabatan Fungsional Guru dan Angka Kreditnya memuculkan paradigma baru profesi guru. Konsekuensinya adalah guru dituntut melakukan pengembangan keprofesian secara terus menerus (berkelanjutan) sehingga guru dapat menjalankan tugas dan fungsinya secara profesional.Masih merujuk pada Permenpan dan RB tersebut, pengembangan keprofesian yang dilakukan guru meliputi kegiatan pengembangan diri yaitu diklat fungsional dan kegiatan kolektif guru serta publikasi ilmiah dan karya inovasi. Dengan demikian guru diharapkan selalu mengembangkan diri dan selalu belajar agar dapat membelajarkan peserta didik secara baik.

Guruprofessional selalu menyiapkan rencana penyampaian bahan ajar, yang mempertimbangkan kemampuan peserta didik, dan tidak mendominasi interaksi di dalam kelas.Ia menempatkan diri sebagai teman, fasilitator dan konselor bagi siswa. Singkatnya, guru profesional memberikan peluang kepada peserta didik untuk mencoba belajar dengan kemampuan sendiri, atau dalam bekerja sama dengan temannya.

Berkaitan dengan hal ini dikembangkan modul untuk diklat Pengembangan Keprofesian Berkelanjutan dan mandiri. Modul ini adalah substansi materi yang dikemas guna membantu guru mencapai kompetensi yang telah ditetapkan, terutama kompetensi pedagogik dan kompetensi professional yang diintegrasikan dengan Penguatan Pendidikan Karakter(PPK). Modul Guru profesional pada intinya merupakan model bahan belajar (*learning material*) yang menuntut peserta pelatihan untuk belajar lebih mandiri dan aktif.

Salah satu kompetensi yang harus dikuasai guru adalah pemahaman terkait dengan karateristik perkembangan peserta didik.Oleh karena itu dalam modul ini dijabarkan materi yang berkaitan dengan karateristik perkembangan peserta didik ditinjau dari perkembangan kognitif, emosi dan sosial siswa.Dibahas pula perbedaan keragaman peserta didik yang dilatarbelakangi adanya latar belakang keluarga yang bervariasi, serta beberapa sumber variasi yang cukup berperan.

B. Tujuan

Kata hikmah

Niat menentukan arah dan tujuan pekerjaan sehingga keberadaan, kejelasan, kelurusan dan keikhlasan merupakan rute perpendek menuju sukses maka pasanglah niat yang kuat serta terimalah suksesnya.

Secara umum tujuan yang dicapai setelah peserta diklat atau pembaca mempelajari modul ini adalah memahami perkembangan karateristik peserta didik khususnya pada level SMA yang terintegrasi dengan penguatan pendidikan karakter. Secara rinci tujuan yang ingin dicapai adalah peserta diklat atau pembaca :

1. Mampu memahami macam karakteristik peserta didik dan keberagaman dari peserta didik,
2. mampu menerapkan pembelajaran yang sesuai dengan karakteristik dan keberagaman yang dimiliki peserta didik.

C. Peta Kompetensi

Kata hikmah

Setiap orang itu berkompeten dan setiap masalah dapat diselesaikan maka yakinilah Anda mampu menyelesaikan semua masalah jika Anda mau

Kompetensi yang dipelajari dalam modul ini difokuskan pada guru. Kompetensi yang dimaksud adalah sebagai berikut :

No.	Kompetensi Inti	Kompetensi Guru
1	memahami karakteristik pengertian perkembangan peserta didik, tahapan perkembangan kognitif menurut Piaget, tahapan perkembangan kognitif menurut Neo-Piaget, dan tahapan perkembangan sosial.	menerapkan karakteristik perkembangan, tahapan perkembangan kognitif menurut Piaget dan Neo-Piaget serta tahapan perkembangan sosial dalam pembelajaran pada mata pelajaran yang diampu
2	Memahami keragaman fisik individu, inteligensi individu,tipe inteligensi Sternberg,model struktur intelektual Guilford,inteligensi jamak individu, dan gaya belajar peserta didik.	menerapkankeragaman fisik individu, inteligensi individu, tipe inteligensi Sternberg, model struktur intelektual Guilford, inteligensi jamak individu, dan gaya belajar peserta didik. dalam pembelajaran pada mata pelajaran yang diampu

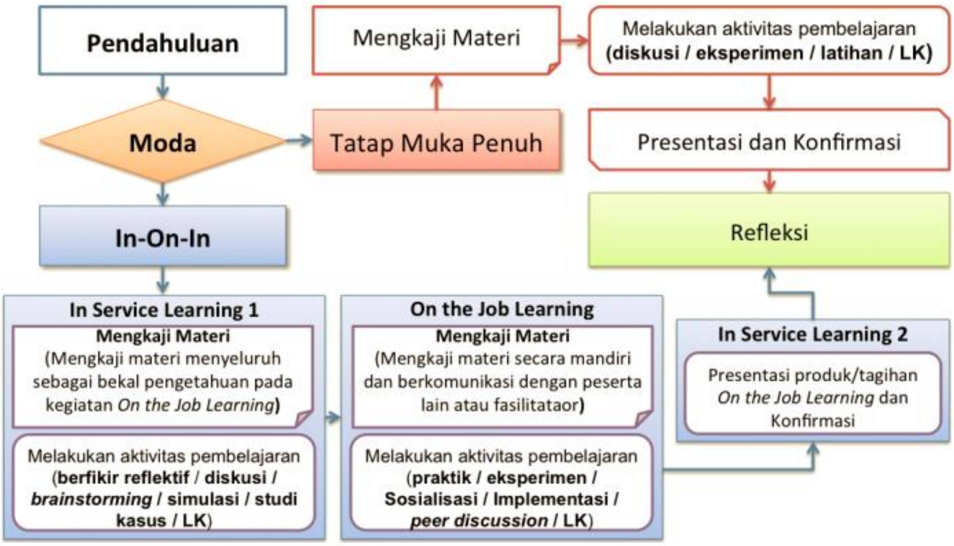
D. Ruang Lingkup

Untuk mencapai kompetensi yang telah ditetapkan, lingkup materi yang dikembangkan adalah sebagai berikut:

1. Perkembangan peserta didik dari aspek fisik, moral, spiritual, sosial, kultural, emosional, dan intelektual. Adapun teori perkembangan kognitif yang akan dibahas adalah teori tahapan perkembangan kognitif Piaget, tahapan perkembangan Bruner, tahapan perkembangan Neo-Piaget.
2. Keragaman dalam kemampuan dan kepribadian peserta didik khususnya peserta didik pada level SMA, ditinjau dari aspek fisik, inteligensi, gaya belajar peserta didik

E. Saran Cara Penggunaan Modul

Modul ini disusun untuk digunakan dalam pelatihan model tatap muka penuh maupun model tatap muka In-On-In. Materi disajikan secara berjenjang sesuai urutan kompetensi yang dibutuhkan.Diharapkan Anda mempelajari modul ini sesuai urutan.Anda dapat mengukur kemampuan penguasaan kompetensi dengan mengerjakan soal latihan yang diberikan dan kemudian mencocokkan dengan kunci jawaban yang disediakan.

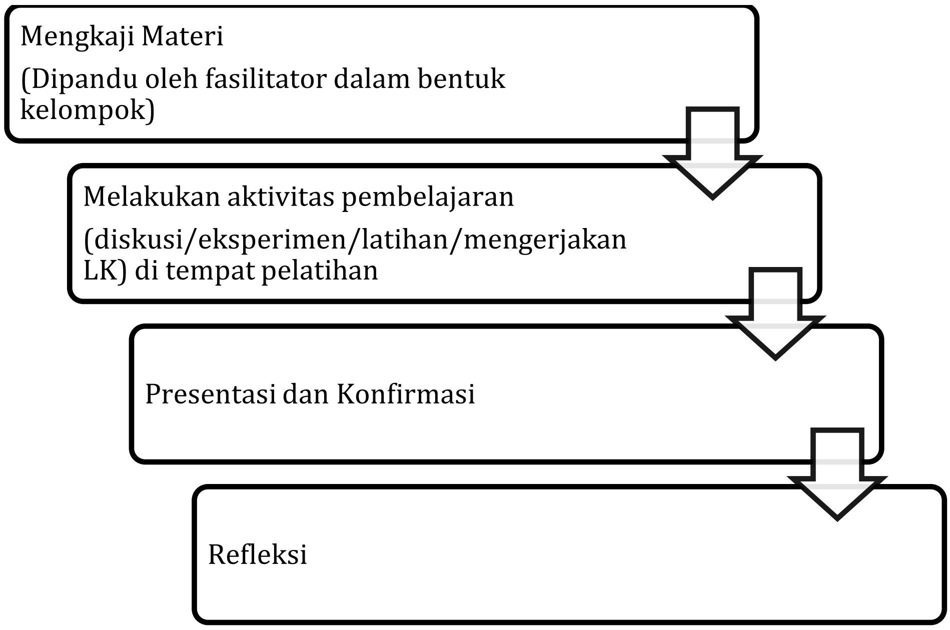


Alur Model Pembelajaran Tatap Muka

1. Deskripsi Kegiatan Diklat Tatap Muka Penuh

Kegiatan pembelajaran diklat tatap muka penuh adalah kegiatan fasilitasipeningkatan kompetensi guru melalui model tatap muka penuh yang dilaksanakanoleh unit pelaksana teknis di lingkungan ditjen. GTK maupun lembaga diklat lainnya.Kegiatan tatap muka penuh ini dilaksanakan secara terstruktur pada suatu waktuyang dipandu oleh fasilitator.

Tatap muka penuh dilaksanakan menggunakan alur pembelajaran sebagai berikut.



Rincian kegiatan pembelajaran tatap muka penuh adalah sebagai berikut.

a. Pendahuluan

Pada kegiatan pendahuluan, fasilitator memberi kesepatan peserta diklat untuk mencermati:

- Latar belakang yang memuat gambaran materi
- Tujuan kegiatan pembelajaran untuk setiap materi
- Kompetensi yang akan dicapai
- Ruang lingkup materi
- Langkah-langkah penggunaan modul.

b. Mengkaji Materi

Pada kegiatan mengkaji materi modul,fasilitator memberi kesempatan kepada guru sebagai peserta untuk mempelajari materi yang diuraikan secara singkat sesuai dengan indikator pencapaian hasil belajar. Guru sebagai peserta dapat mempelajari materi secara individual maupun berkelompok dan dapat mengkonfirmasi permasalahan kepada fasilitator.

c. Melakukan aktivitas pembelajaran

Pada bagian ini, peserta melakukan aktivitas pembelajaran sesuai dengan rambu-rambu atau instruksi yang tertera pada modul dan dipandu oleh fasilitator. Kegiatan pembelajaran pada aktivitas pembelajaran ini berbentuk interaksi langsung di kelas pelatihan sesama peserta pelatihan dan fasilitator.

Pada saat mengikuti aktivitas pembelajaran, peserta juga aktif menggali informasi dari berbagai sumber, mengumpulkan dan mengolah data sehingga peserta dapat mengambil kesimpjulan dari kegiatan pembelajaran yang berlangsung.

d. Presentasi dan Konfirmasi

Pada kegiatan ini, peserta mempresentasikan hasil kegiatan.Fasilitator melakukan konfirmasi terhadap paparan dan hasil yang telah dicapai oleh peserta.

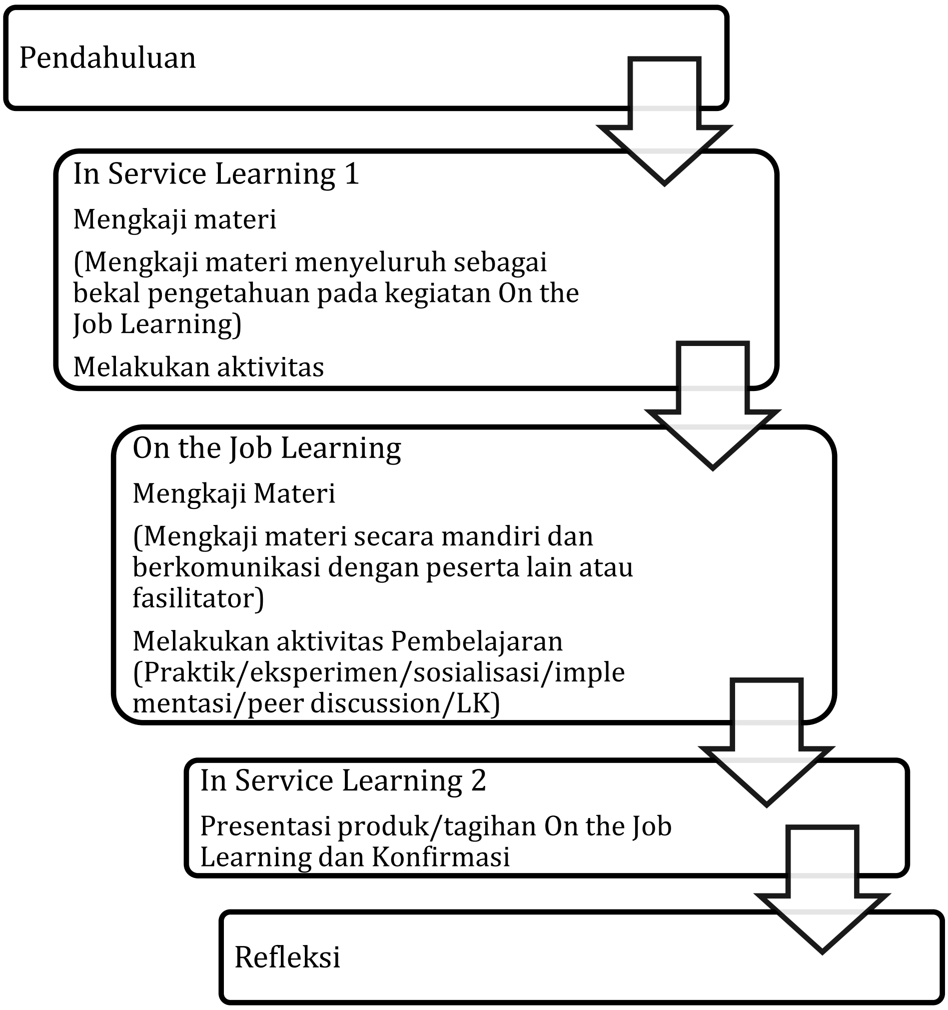
e. Refleksi

Pada bagian ini peserta dan fasilitator me-*review* atau melakukan refleksi materi berdasarkan seluruh kegiatan pembelajaran, kemudian didampingi oleh panitia menginformasikan tes akhir yang akandilakukan oleh seluruh peserta yang dinyatakan layak tes akhir.

1. Deskripsi kegiatan diklat tatap muka In-On-In

Kegiatan diklat tatap muka dengan model In-On-In adalah kegiatan fasilitasi peningkatan kompetensi guru yang menggunakan tiga kegiatan utama yaitu *In Service Learning* 1 (In-1), *On the Job Learning* (On), dan *In Service Learning* 2 (In-2).

Garis besar alur kegiatan pembelajaran tatap muka In-On-In dapat dilihat pada diagram berikut.



Penjelasan lebih lengkap tentang alur di atas adalah sebagai berikut,

a. Pendahuluan

Kegiatan pendahuluan disampaikan pada saat In-1. Fasilitator memberi kesempatan pada peserta diklat untuk mencermati:

- latar belakang yang memuat gambaran materi,
- tujuan kegiatan pembelajaran setiap materi,
- kompetensi atau indikator yang akan dicapai melalui modul,
- ruang lingkup materi kegiatan pembelajaran,
- langkah-langkah penggunaan modul.

b. In Service Learning 1 (In-1)

- Mengkaji Materi

Pada kegiatan mengkaji materi modul ini, fasilitator memberi kesempatan kepada guru sebagai peserta untuk mempelajari materi yang diuraikan secara singkat sesuai dengan indikator pencapaian hasil belajar. Guru sebagai peserta dapat mempelajari materi secara individual maupun berkelompok dan dapat mengkonfirmasi permasalahan kepada fasilitator.

- Melakukan aktivitas pembelajaran

Pada kegiatan ini peserta melakukan kegiatan pembelajaran sesuai dengan rambu-rambu atau instruksi yang tertera pada modul dan dipandu oleh fasilitator.Kegiatanpembelajaran pada aktivitas pembelajaran berbentuk berinteraksi di kelas pelatihan, baik itudengan menggunakan metode berfikir reflektif, diskusi, *brainstorming*, simulasi,maupun studi kasus yang kesemuanya dapat melalui Lembar Kerja yang telahdisusun sesuai dengan kegiatan pada In-1.

Pada aktivitas pembelajaran materi ini peserta secara aktif menggali informasi,mengumpulkan dan mempersiapkan rencana pembelajaran pada *on the job learning*.

c. On the Job Learning (On)

- Mengkaji Materi

Pada tahap ini, guru mempelajari materi yang telah diuraikan pada In-1. Guru sebagai peserta membuka dan mempelajari kembali materi sebagai bahan dalam mengerjakan tugas-tugas yang ditagihkan.

- Melakukan aktivitas Pembelajaran

Pada kegiatan ini peserta melakukan kegiatan pembelajaran di sekolah maupun di kelompok kerja berbasis pada rencana yang telah disusun pada IN1 dan sesuai dengan rambu-rambu atau instruksi yang tertera pada modul. Kegiatan pembelajaran pada aktivitas pembelajaran ini akan menggunakan pendekatan/metode praktik, eksperimen, sosialisasi, implementasi, *peer discussion* yang secara langsung dilakukan di sekolah maupun kelompok kerja melalui tagihan berupa Lembar Kerja yang telah disusun sesuai dengan kegiatan pada ON.

Selama aktivitas pembelajaran On berlangsung, peserta secara aktif menggali informasi, mengumpulkan dan mengolah data dengan melalukan aktivitas yang telah ditentukan dan menyelesaikan tagihan pada *on the job learning*.

d. In Service Learning 2 (In-2)

Pada tahap ini, peserta memaparkan produk-produk tagihan On yang akan dikonfirmasi bersama oleh teman sejawat dan fasilitator.

e. Refleksi

Peserta bersama fasilitator me-*review* atau melakukan refleksi materi berdasarkan pengalaman selama mengikuti kegiatan pembelajaran. Fasilitator didampingi panitia menginformasikan tes akhir yang akan dilakukan oleh seluruh peserta yang dinyatakan layak mengikuti tes akhir.

2. Lembar Kerja

Modul pengembangan keprofesian berkelanjutan kelompok kompetensi J terdiri dari beberapa kegiatan pembelajaran yang di dalamnya terdapat aktivitas pembelajaran sebagai sarana untuk pendalaman dan penguatan materi. Untuk itu, pada modul ini disediakan lembar kerja sebagai berikut:

Daftar Lembar Kerja Modul

No.	**Kode LK**	**Nama LK**	**Keterangan**
1.	LK 1.1.	Perkembangan Karakteristik Peserta Didik (In-1)	TM, IN-1
2.	LK 1.2.	Perkembangan Karakteristik Peserta Didik(On)	TM, ON
4.	LK 2.1.	Keragaman dalam Kemampuan dan Kepribadian Peserta Didik (In-1)	TM, IN-1
5.	LK 2.2.	Keragaman dalam Kemampuan dan	TM, ON

No.	Kode LK	Nama LK	Keterangan
		Kepribadian Peserta Didik (On)	

Keterangan:

TM : Digunakan pada Tatap Muka Penuh

IN-1 : Digunakan pada *In service Learning* 1

ON : Digunakan pada *On the Job Learning*

Kegiatan Pembelajaran 1

Perkembangan Karateristik Peserta Didik

Kata hikmah

Pekerjaan yang tertinggi nilainya adalah ibadah maka jadikanlah setiap aktivitas Anda menjadi ibadah sehingga setiap unsur yang terlibat didalamnya memiliki nilai pahala disisi Allah

A. Tujuan

Kata hikmah

Kualitas suatu pekerjaan ditentukan oleh Niat, Usaha dan Ijin Tuhan maka luruskan niat, optimalkan usaha serta penuhi perintan-Nya sehingga Dia mengidzinkanmu

Setelah mempelajari modul ini, peserta diklat Pembinaan Karier Guru atau pembaca dapat memahami perkembangan peserta didik ada level SMA sebagai salahsatu pertimbangan dalam perencanaan bahan ajar,dan pelaksanaan proses belajar mengajar serta menumbuhkan karakteristik pribadi unggul melalui penguatan nilai-nilai pendidikan karakter.Secara rinci tujuan yang ingin dicapai adalah peserta diklat atau pembacadapat :

1. memahamipengertian perkembangan peserta didik,
2. memahami tahapan perkembangan kognitif menurut Piaget,
3. menjelaskan tahapan perkembangan kognitif menurut Neo-Piaget,
4. menjelaskan tahapan perkembangan sosial.

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

Kata hikmah

Derajat seseorang ditentukan oleh kualitas kecerdasan otak, kualitas keanggunan akhlaq dan sikap kepedulian kepada orang lain maka raihlah derajat kesempurnaan sejati diri.

Setelah mempelajari modul ini, peserta diklat atau pembaca dapat mencapai target kompetensi dirinya dalam memahamimateri perkembangan karakteristik peserta didik dan mampu menerapkannya dalam pembelajaran yang diampu serta memiliki kepribadian agung. Secara rinci, pada pembelajaran yang diampu, peserta diklat atau pembaca mampu :

1. menerapkan pengertian perkembangan peserta didik,
2. menerapkan tahapan perkembangan kognitif menurut Piaget,
3. menerapkan tahapan perkembangan kognitif menurut Neo-Piaget.
4. menerapkan tahapan perkembangan sosial.

C. Uraian Materi

Kata hikmah

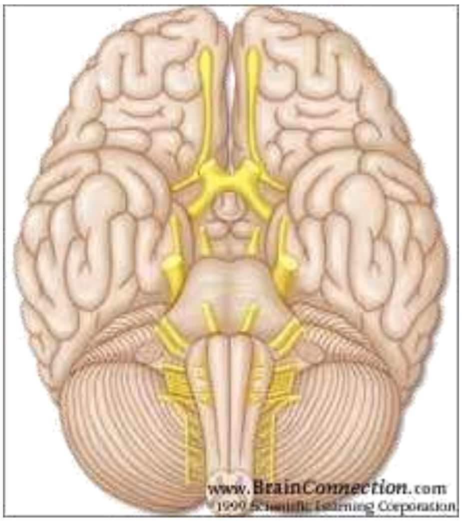
Suatu target akan terealisir jika tercapai syarat-syaratnya, yaitu kepahaman ilmu dan keyakinan kebenarannya maka sajikan permasalahmu secara singkat, padat dan menarik

1. Pengertian Perkembangan

Perkembangan pada peserta didik terjadi karena adanya serangkaian perubahan baik yang tampak kasat mata maupun yang tidak tampak.Hurlock mengemukakan bahwa perkembangan atau *development* merupakan serangkaian perubahan progresif yang terjadi sebagai akibat dari proses kematangan dan pengalaman. Ini berarti, perkembangan terdiri atas serangkaian perubahan baik fisik maupun psikis yang bersifat progresif (maju).Perubahan progresif yang berlangsung terus menerus sepanjang hayat memungkinkan manusia menyesuaikan diri dengan lingkungan di mana manusia hidup.Sikap manusia terhadap perubahan berbeda-beda tergantung beberapa faktor, diantaranya pengalaman pribadi, streotipe dan nilai-nilai budaya, perubahan peran, serta penampilan dan perilaku seseorang.

Lefrancois (1975) berpendapat bahwa konsep perkembangan mempunyai makna yang lebih luas, mencakup segi-segi kuantitatif dan kualitatif serta aspek fisik-psikis seperti terkandung dalam istilah-istilah pertumbuhan.Umumnya perubahan kuantitatif disebut juga ”pertumbuhan”. Pertumbuhan pada aspek fisik seperti penambahan tinggi, berat dan proporsi badan seseorang.Sedangkan perubahan kualitatif umumnya digunakan untuk melihat perubahan aspek psikofisik, seperti peningkatan kemampuan berpikir, berbahasa, perubahan emosi, perubahan spiritual, sikap, dan lain-lain.Faktanya pada diri individu kadangkala terjadi perubahan ke arah berlawananatau berlawanan dengan penambahan atau peningkatan, tetapi mengalami pengurangan seperti gejala lupa dan pikun.Jadi perkembangan bersifat dinamis dan tidak pernah statis.

Perubahan kualitatif dari peningkatan kemampuan berpikir dapat dilihat dari perkembangan kualitas kemampuan otak.Bila dikaji lebih jauh otak manusia terbagi menjadi dua yaitu otak kiri dan otak kanan yang sebenarnya terhubung oleh *corpus collosum*.Pengalaman individu yang memungkinkan terlatihnya otak kanan saja, tidak berarti akan secara otomatis melatih otak kiri, begitu pula sebaliknya. Saat seseorang berpikir keadaan *corpus collosum* dapat terbuka atau dapat tertutup, bila *corpus collosum* terbuka, maka olahan berpikir yang dihasilkan individu tersebut di atas olahan berpikir pada umumnya.Berikut adalah kemampuan yang ada pada otak kiri dan otak kanan.

OTAK KIRI		**OTAK KANAN**
Logis Urut Linier Konvergen Bahasa Membaca Menulis Kognisi		Intuitif Acak Divergen Ide/gagasan Gambar Seni

Gambar 1.Komponen Otak Kiri dan Otak Kanan

Terjadinya dinamika dalam perkembangan disebabkan adanya kematangan dan pengalaman yang mendorong seseorang untuk memenuhi semua kebutuhan aktualisasi/realisasi diri.Kematangan merupakan faktor internal (dari dalam) yang dibawa setiap individu sejak lahir, seperti ciri khas, sifat, potensi dan bakat.Pengalaman merupakan intervensi faktor eksternal (dari luar) terutama lingkungan sosial budaya di sekitar individu.Faktor kematangan dan pengalaman ini secara bersama-sama mempengaruhi perkembangan seseorang, sebagaimana paham teori konvergensi.

Menurut teori Konvergensi yang dikemukakan oleh Stern, perkembangan seseorang merupakan hasil proses kematangan dan belajar. Stern memadukan atau mengkonvergensikan teori Naturalisme dan Empirisme. Menurut teori Naturalisme, perkembangan seseorang terutama ditentukan oleh faktor alam (*natur*e), bakat pembawaan, keturunan atau gen seseorang, termasuk di dalamnya kematangan seseorang. Sementara itu, teori Empiris berpendapat bahwa perkembangan seseorang terutama ditentukan oleh faktor lingkungan tempat individu itu berada dan tumbuh kembang, termasuk di dalamnya lingkungan keluarga, sekolah dan belajar anak.

Kenyataannya, faktor pembawaan maupun lingkungan saling mempengaruhidalam perkembangan seseorang.Faktor bawaan dan lingkungan keduanya dapat dibedakan tetapi tidak dapat dipisahkan dalam perkembangan seseorang.Faktor lingkungan akan mempengaruhi faktor bawaan begitu pula sebaliknya serta keduanya saling berinteraksi.Seorang siswa yang mempunyai bakat musik, misalnya, perkembangan bakat atau kemampuan bermain musiknya tidak akan optimal apabila tidak mendapatkan kesempatan belajar musik. Jadi, potensi yang dimiliki siswa/peserta didik yang dibawa sejak lahir akan berkembang optimal, apabila didukung oleh lingkungannya. Dukungan itu di antaranya dengan penyediaan sarana prasarana serta kesempatan untuk belajar dan mengembangkan potensi dirinya. Begitu pula sebaliknya, seorang anak yang tampaknya tidak memiliki bakat dalam musik, apabila diberikan lingkungan yang menjadikan anak tersebut berlatih seni, akan menunjukkan kemampuan dalam bermusik.

Memperhatikan kompleksitas dari sifat perkembangan perilaku dan pribadi, para ahli telah mencoba mengembangkan model pentahapan (*stage*) dari proses perkembangan yang dihasilkan melalui *longitudinal* maupun *cross section*.

2. Perkembangan Fisik

Perkembangan fisik meliputi perubahan-perubahan dalam tubuh (pertumbuhan otak, sistem syarat, otot, dan lain-lain) dan perubahan dalam cara individu dalam menggunakan tubuhnya. Beberapa tokoh memodelkan tahap perkembangan fisik sebagai berikut.

a. Aristoteles (384-322 SM)

Tahap perkembangan individu menurut tokoh ini terdiri dari tiga tahapan berdasarkan perubahan ciri fisik tertentu.

a) masa kanak-kanak (0-7) : Ciri-ciri pergantian gigi
b) masa anak sekolah (7-14): Ciri-ciri gejala purbertas
c) masa Remaja (14-21) : Ciri-ciri primer dan sekunder

b. Hurlock (1952)

Hurlock membagi fase perkembangan individu secara lengkap sebagai berikut:

a) prenatal (conceptin-280 days)
b) infancy (0-10 to 14 days)
c) babyhood (2 weeks – 2 years)
d) childhood (2 years – adolence)
e) adolescence 13 (girls) – 21 years
14 (boys) – 21 years
f) adulthood (21– 25 years)
g) middle age (25–30 years)
h) old age (30 years–death)

Apabila dikaji menurut tahapan perkembangan fisik Hurlock, siswa SMA berada pada masa remaja. Lebih lanjut Hurlock (1992) memberikan ciri-ciri remaja, antara lain :

1) Masa remaja sebagai periode pelatihan. Tahap remaja belum dapat dikatakan sebagai orang dewasa, dan bukan masa kanak-kanak. Masa transisi ini memberi waktu padanya untuk mencoba gaya hidup yang berbeda dan menentukan pola perilaku, nilai dan sifat yang paling sesuai dengan dirinya.
2) Masa remaja sebagai periode perubahan. Perubahan yang terjadi pada tahap remaja adalah perubahan pada emosi, perubahan tubuh, minat dan peran

(menjadi dewasa yang mandiri), perubahan pada nilai-nilai yang dianut, serta keinginan akan kebebasan.

3) Masa remaja sebagai masa mencari identitas diri yang dicari remaja berupa usaha untuk menjelaskan siapa dirinya dan apa peranannya dalam masyarakat.
4) Masa remaja cenderung berperilaku yang kurang baik. Hal ini yang membuat banyak orang tua menjadi takut.
5) Masa remaja adalah masa yang tidak realistik. Remaja cenderung memandang kehidupan dari kacamata berwarna merah jambu, melihat dirinya sendiri dan orang lain sebagaimana yang diinginkan dan bukan sebagaimana adanya terlebih dalam cita-cita.
6) Remaja mengalami kebingungan atau kesulitan didalam usaha meninggalkan kebiasaan pada usia sebelumnya dan di dalam memberikan kesan bahwa mereka hampir atau sudah dewasa, yaitu dengan merokok, minum-minuman keras, menggunakan obat-obatan dan terlibat dalam perilaku seks. Mereka menganggap bahwa perilaku ini akan memberikan citra yang mereka inginkan.

Dalam kegiatan tertentu dalam proses belajar mengajar dapat dirancang kegiatan sedemikian sehingga dapat membantu percepatan pertumbuhan fisik peserta didik. Salah satu implikasi bagi pendidikan adalah perlunya memperhatikansarana dan prasarana, waktu istirahat, serta jam olah raga bagi siswa. Sedangkan dalam jam pelajaran matematika dapat dilakukan dengan memperhatikan kesesuaian sarana dan prasana di dalam kelas, baik berkaitan dengan kursi dan meja belajar serta media yang digunakan langsung dalam pembelajaran.

3) Perkembangan Kognitif

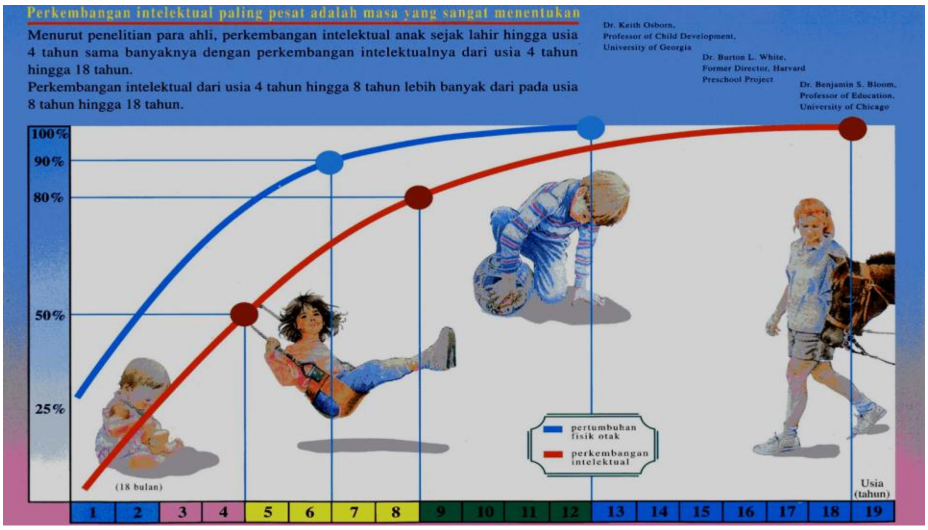
Studi yang intensif pernah dilakukan oleh Piaget (mulai tahun 1920 sampai 1964) dan rekan-rekannya, mengenai perkembangan kognitif individui. Piaget membagi tahapan perkembangan kognitif sebagai berikut:

a. *pensorimotor* (0–2). Prestasi intelektual yang dicapai dalam periode ini adalah perkembangan bahasa, hubungan antara objek, control skema, pengenalan hubungan sebab-akibat
b. *preoperational* (2–7). Dalam tahap *preoperational* anak menunjukkan penguasaan simbol yang lebih besar. Perkembangan bahasa bertambah secara dramatis dan permainan imajinatif lebih tampak. Pada tahap ini anak

masihberpikir egosentris, yaitu memandang sesuatu dari dirinya sendiri. Pada tahap ini anak masih menggunakan intuisi dan tidak dengan logika dalam menyelesaikan masalah.

c. *concrete operational* (7–12). Perilaku kognitif yang tampak pada periode ini adalah kemampuan dalam proses berpikir untuk mengoperasikan kaidah-kaidah logika meskipun masih terikat dengan objek-objek yang bersifat konkrit. Pada tahap ini 5 hukum konservasi dikuasi, yaitu konservasi banyaknya (kuantitas), konservasi materi, konservasi panjang, konservasi luas, konservasi berat, dan konservasi volum. Ciri lain dari tahap ini adalah kemampuan *reversibility*. Sebagai contoh jika anak sudah mengenal $3 \times 2 = 6$, kemudian $3 \times \ldots = 6$, dapatkah kalian menentukan bilangan pada titik-titik tersebut.

d. *Formal operational* (12–dewasa). Periode ini ditandai dengan kemampuan untuk mengoperasikan kaidah-kaidah logika formal yang tidak terikat lagi oleh objek-objek yang bersifat konkrit. Perilaku kognitif yang tampak pada periode ini adalah: kemampuan berpikir hipotesis deduktif (*hypothetical deductive thinking*); kemampuan mengembangkan suatu kemungkinan berdasarkan dua atau lebih kemungkinan yang ada (*a combinational analysis*); kemampuan mengembangkan suatu proporsi atas dasar proporsi-porporsi yang diketahui (*proportional thinking*); kemampuan menarik generalisasi dan inferensi dari berbagai kategori objek yang beragam.Perkembangan kognitif digambarkan seperti pada gambar 2 berikut.



Gambar 2.Tahapan Perkembangan Intelektual Individu

Menurut Piaget proses perkembangan fungsi-fungsi dan perilaku kognitif berlangsung mengikuti suatu sistem atau prinsip mencari keseimbangan (*seeking equilibrium*), dengan menggunakan dua cara atau teknik *assimilation* dan *accommodation*. Teknik asimilasi digunakan apabila individu dihadapkan pada hal-hal baru yang dihadapinya dapat disesuaikan dengan kerangka berpikir atau *cognitive-structure* yang dimilikinya. Sedangkan teknik akomodasi digunakan apabila individu memandang objek-objek atau masalah-masalah baru tidak dapat diselesaikan dengan kerangka berpikirnya yang ada sehingga ia harus mengubah *cognitive-structure*-nya.

Tokoh lain yang melakukan penelitian terkait perkembangan kognitif adalah Jerome Bruner (1966). Bruner membagi proses perkembangan perilaku kognitif ke dalam tiga periode yaitu:

a. *enactive stage*, merupakan suatu masa di mana individu berusaha memahami lingkungannya; tahap ini mirip dengan *sensorimotor period* dari Piaget.
b. *iconic stage*, merupakan tahapan masa yang mendekati kepada tahapan *preoperational period* dari Piaget. Kegiatan penyajian dilakukan berdasarkan pada pikiran internal di mana pengetahuan disajikan melalui serangkaian gambar-gambar atau grafik yang dilakukan anak, berhubungan dengan mental yang merupakan gambaran dari objek-objek yang dimanipulasinya.
c. *symbolic stage*, merupakan tahapan di mana individu telah mampu memiliki idea atau gagasan abstrak yang sangat dipengaruhi oleh kemampuan dalam bahasa dan logika.

Berbeda dengan pandangan Piaget bahwa seorang anak yang menunjukkan tingkat tertentu dari penalaran abstrak pada soal yang diberikan akan cenderung menunjukkan bahwa tingkat yang sama dari penalaran abstrak pada banyak masalah lain. Pandangan neo-Piaget menjelaskan bahwa anak-anak (dan orang dewasa) menunjukkan berbagai tingkat penalaran abstrak pada masalah yang berbeda (Hamilton & Ghatala, 1994: 227). Di antara teori neo-Piaget antara lain adalah Case, Fischer (1980), dan Pascual-Leone (1970, 1988), masing-masing dari teori neo-Piaget memuat premis umum teori Piaget yaitu terkait dengan tahapan perkembangan kognitif selanjutnya dikombinasikan dengan ide-ide tentang pengaruh pengalaman pada perkembangan yang lebih analitis spesifik dan lebih selaras dengan perbedaan budaya dan individu.

Case (1996: 219-223) mencoba untuk memperbaiki beberapa kekurangan dalam teori Piaget dengan memasukkan ide-ide lain, khususnya teori konstruktivis sosial Vygotsky, teori pemrosesan informasi, linguistik, dan *neuroscience*. Menurut Case ada empat tahap dari tingkatan perkembangan kognitif, yaitu :

a. *sensorimotor* (0–1,5 tahun),
b. *interrelational* (1,5–5 tahun),
c. *dimensional* (5–11 tahun), dan
d. *vectorial* (11–19 tahun).

Berdasarkan perkembangan kognitif neo-piaget dari Case, siswa SMA berada tahap vectorial. Pada tahap *vectorial* ini, kemampuan yang dimiliki anak cenderung konsep-konsep abstrak dan memiliki sifat yang mirip dengan vektor. Demikian pula dalam domain sosial siswa pada tahap ini dapat menilai kepribadian seseorang dari informasi yang diberikan dan kemudian menggunakan informasi tersebut untuk membuat prediksi tentang perilaku masa depan (Marini & Case, 1994:147-159). Menurut Case perkembangan anak-anak di tahap *vectorial* merupakan efisiensi fungsi penggunaan memori kerja yang menyediakan kemampuan yang lebih besar untuk memproses informasi yang lebih kompleks.

Teori Fischer berbeda dari teori neo-Piaget lainnya pada beberapa hal, antara lain perubahan kognitif dipengaruhi oleh faktor-faktor lingkungan dan sosial, bukan hanya individu. Untuk menjelaskan perubahan perkembangan ia menggabungkan dua teori yaitu teori perkembangan kognitif Piaget dan teori sosial dari Vygotsky, yaitu, internalisasi dan zona pengembangan proksimal (Bjorklund, 2005:107). Internalisasi mengacu pada proses yang memungkinkan anak-anak untuk merekonstruksi dan menyerap produk dari pengamatan dan interaksi mereka dengan caranya mereka sendiri. Potensi kemampuan selalu lebih besar dari kemampuan yang sebenarnya, zona pengembangan proksimal mengacu pada berbagai kemungkinan yang ada antara aktual dan potensial. Tiga tingkatan perkembangan kognitif menurut Fischer (Bjorklund, 2005:107) yaitu:

a. sensori motor (sekitar 3 – 24 bulan),
b. *representation* (sekitar 2 tahun-12 tahun),

c. abstrak (sekitar 12 tahun-26 tahun).

Perubahan progresif yang berlangsung terus menerus sepanjang hayat memungkinkan manusia menyesuaikan diri dengan lingkungan di mana manusia hidup.Sikap manusia terhadap perubahan berbeda-beda tergantung beberapa faktor, diantaranya pengalaman pribadi, streotipe dan nilai-nilai budaya, perubahan peran, serta penampilan dan perilaku seseorang.

4) **PerkembanganPerilaku Sosial**

Perkembangan sosial dapat diartikan sebagai *sequence* dari perubahan yang berkesinambungan dalam perilaku individu untuk menjadi makhluk sosial yang dewasa. Secara fitriah manusia dilahirkan sebagai makhluk sosial (*zoon politicon*). Namun untuk mewujudkan potensi tersebut ia harus berada dalam lingkungan untuk berinteraksi dengan manusia lainnya.Charlotte Buhler mengidentifikasikan perkembangan sosial ini dalam *term* kesadaran hubungan aku-engkau atau hubungan subjektif-objektif. Proses perkembangan berlangsung secara bertahap sebagai berikut:

a. masa kanak-kanak awal (1 – 3) : subjektif,
b. masa kritis I (3-4) : trotz alter (anak degil),
c. masa anak-anak akhir (4-6): subyektif menuju objektif,
d. masa anak sekolah (6-12) objektif,
e. masa kritis II (12-13): pre-puber (anak-tanggung),
f. masa remaja awal (13-16): subjektif menuju objektif,
g. masa remaja akhir (16-18): objektif.

D. Aktivitas Pembelajaran

Kata hikmah

Kekuatan tim dalam pekerjaan menjadikan beban ringan, suasana nyaman, hasil optimal maka bergotongroyonglah dalam setiap pekerjaan yang relevan sehingga hidup menjadi lebih mudah dan bermakna kebersamaan.

LK 1.1. Perkembangan Karakteristik Peserta Didik (In-1)

Kerjakanlah semua soal berikut secara serius, teliti, dan cermat serta optimalkan kekuatan kerja gotong royong sehingga kerja menjadi lebih ringan dan bermakna kebersamaan.

1. Setiap siswa memiliki karateristik yang berbeda antara satu dengan yang lain. Teliti dengan cermat, identifikasi karakteristik siswa dan klasifikasikan karakteristik sesuai dengan tingkatan kognitifnya.

Jawab :

2. Berdasarkan tahap perkembangan Piaget, siswa SMA sudah berada pada tahap operasional formal. Selidiki apa saja kemampuan matematika yang sudah dapat dikuasai oleh siswa SMA?.Jika ada salah seorang guru menyajikan matematika dengan pendekatan deduktif formal, bagaimana pendapat Anda?

Jawab :

LK 1.2. Perkembangan Karakteristik Peserta Didik (On)

Kata hikmah

Kekuatan seseorang ditentukan oleh optimasi potensi diri, dan pertolongan Tuhan maka ambil dan gunakan semua power untuk meraih sukses dalam setiap aktivitas

Kerjakan soal secara mandiri, serius, jujur, teliti dan cermat sehingga hasil yang diperoleh lebih optimal dan bermakna.

Dengan bahasa sendiri, lakukan analisis terhadap empat tahap perkembangan kognitif menurut Piaget.Kemudian, buatlah contoh implikasi pentahapan perkembangan kognitif menurut Piaget pada pembelajaran matematika?

Jawab :

E. Latihan/Kasus/Tugas

Kata hikmah

Setiap masalah pasti ada penyelesaian dan setiap usaha untuk menyelesaikan merupakan proses menuju sukses maka jangan berhenti berusaha karena sukses menunggu Anda

Berilah tanda silang (X) pada jawaban yang Anda anggap benar

1. Berikut adalah kemampuan yang ada pada belahan otak kiri, ***kecuali***...
   A. Logis
   B. Divergen
   C. Menulis
   D. Bahasa
2. Berikut adalah kemampuan yang ada pada belahan otak kanan, ***kecuali*** ...
   A. Intuitif
   B. Acak
   C. Gambar
   D. Konvergen
3. Berikut adalah tahapan perkembangan fisik beserta ciri perkembangan setiap tahapan menurut Aristoteles, ***kecuali***...
   A. Masa Dewasa: Ciri-ciri sekunder
   B. Masa Remaja : Ciri-ciri primer dan sekunder
   C. Masa anak sekolah: Gejala purbertas
   D. Masa kanak-kanak: Pergantian gigi
4. Tahap perkembangan kognitif menurut Piaget adalah ...
   A. Sensorimotor, concrete operational, preoperational, formal operational.
   B. Sensorimotor, preoperational, formal operational, vectorical.
   C. Sensorimotor, preoperational, concrete operational, formal operational.
   D. *Sensorimotor, preoperational, vectorical, formal operational.*
5. Tahap perkembangan kognitif menurut J. Bruner adalah ...
   A. Symbolic , enactive, econic
   B. Econic, enactive, symbolic
   C. Enactive, econic, symbolic

   D. *Enactive, vectorical, symbolic*

6. Tahapan perkembangan kognitif siswa SMA menurut Robi Case adalah ... .
   A. Operasional formal
   B. Symbolic
   C. Interelasional
   D. Vectorical
7. Menurut Piaget perkembangan mental anak terjadi secara ….
   A. Bertahap
   B. Berkesinambungan
   C. Bertahap dan Berkesinambungan
   D. Terstruktur dan terarah
8. Menurut tahapan kognitif Piaget, cara berpikir anak yang belum sistematis, belum konsisten, belum logis tetapi sudah mampu memahami realitas di lingkungan dengan menggunakan symbol terjadi pada tahap … .
   A. Sensorimotor
   B. Pre-operasional
   C. Concrete-operational
   D. Formal operational
9. Tiga tingkatan perkembangan kognitif menurut Fisher adalah ….
   A. Sensorimotor, Econic, Abstrak
   B. Sensorimotor, Representation, dan abstrak
   C. Econic, Representation, abstrak
   D. Representation, econik, dan abstrak
10. Tahapan perkembangan kognitif menurut Case adalah….
   A. *Dimensional*, *sensorimotor*, *interrelational,* dan *vectorial*
   B. *Sensorimotor*, *interrelational*, *dimensional*, dan *vectorial*
   C. *Dimensional*, *sensorimotor*, *vectorial,* dan *interrelational*
   D. *Sensorimotor, dimensional*, *interrelational,* dan *vectorial*

F. Rangkuman

Kata hikmah

Rangkuman adalah inti yang merupakan representasi dari materi induknya dan produk rangkuman menunjukkan kualitas kompetensi seseorang maka buatlah rangkuman yang menarik dan representatif

Perkembangan perilaku dan pribadi sangat komplek, oleh sebab itu beberapa ahli mencoba mengembangkan model pentahapan (*stage*) dari proses perkembangan yang dihasilkan melalui longitudinal maupun *cross section*.

1. Tahapan perkembangan fisik menurut Aristoteles
   a. masa kanak-kanak (0-7) : Ciri-ciri pergantian gigi
   b. masa anak sekolah (7-14): Ciri-ciri gejala purbertas
   c. masa Remaja (14-21) : Ciri-ciri primer dan sekunder
2. Tahapan perkembangan kognitif menurut Piaget
   a. *sensorimotor* (0-2).
   b. *preoperational* (2-7).
   c. *concrete operational* (7-12).
   d. *formal operational* (12-dewasa).
3. Tahapan perkembangan kognitif menurut J.Bruner adalah
   a. enactive stage,
   b. *iconic stage*,
   c. symbolic stage.
4. Tahapan perkembangan kognitif menurut Case adalah:
   a. *sensorimotor* (0–1,5 tahun),
   b. *interrelational* (1,5–5 tahun),
   c. *dimensional* (5–11 tahun), dan
   d. *vectorial* (11–19 tahun)
5. Tiga tingkatan perkembangan kognitif menurut Fisher adalah:
   a. *sensorimotor* (sekitar 3 bulan -24 bulan),
   b. *representation* (sekitar 2 tahun-12 tahun),
   c. abstrak (sekitar 12 tahun-26 tahun)

G. Umpan Balik dan Tindak Lanjut

Kata hikmah

Suatu pembelajaran sukses jika menjadikan targetmampu berubah, meningkat dan lebih baik maka perhatikan respon dan umpan baliknya

Setelah Anda mempelajari materi dalam kegiatan pembelaran 1 ini maka lakukan refleksi diri dan tindak lanjut.Refleksi yang dilakukan terhadap perubahan yang meningkat dan lebih baik dari sebelumnya.Ranah refleksi terdiri atas sikap positif dalam belajar dan sikap positif penguatan karakter sehingga mulai tumbuh kepribadian unggul.Silahkan Anda baca dan lakukan perintahnya, pada Umpan Balik dan Tindak Lanjut berikut.

Kerjakan semua soal yang terdapat pada Latihan tanpa melihat kunci jawaban.Cocokkanlah jawaban Anda dengan kunci jawaban kegiatan pembelajaran 1 yang terdapat pada bagian akhir modul ini. Hitunglah ketepatan jawaban tersebut dengan cara memberi skor masing-masing soal dengan rentangan 0–10. Kemudian gunakan rumus berikut ini untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda dalam mempelajari kegiatan pembelajaran 1 ini.

$$\text{Rumus: Tingkat Penguasaan} = \frac{\text{jumlah skor kelima jawaban}}{100} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan yang Anda capai:

90 – 100	=	Baik sekali
80 – 89	=	Baik
70 – 79	=	Cukup
< 70	=	Kurang

Jika tingkat penguasaan Anda minimal 80%, maka Anda dinyatakan berhasil dengan baik.Anda dapat melanjutkan untuk mempelajari Kegiatan Pembelajaran berikutnya.Sebaliknya, bila tingkat penguasaan Anda kurang dari 80%, silahkan pelajari kembali uraian yang terdapat dalam kegiatan pembelajaran ini, khususnya bagian yang belum Anda kuasai.

Kegiatan Pembelajaran 2

Keragaman dalam Kemampuan dan Kepribadian Peserta Didik

A. Tujuan

Setelah membaca materi dalam kegiatan pembelajaran 2 diharapkan peserta diklat Pengembangan Keprofesian Berkelanjutan atau pembaca dapat memahami keragaman dalam kemampuan dan kepribadian peserta didik khususnya peserta didik pada level SMA. Kefahaman tersebutterintegrasisecara utuh dengan penguatan pendidikan karakter. Secara rinci,peserta diklat atau pembacamemiliki kemapuan dalam :

1. menjelaskan keragaman fisik individu,
2. menjelaskan inteligensi individu,
3. menjelaskan model struktur intelektual Guilford,
4. menjelaskan inteligensi jamak individu,
5. menjelaskan gaya belajar peserta didik.

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

Setelah mempelajari materi dalam kegiatan pembelajaran 2 ini peserta diklat Pengembangan Keprofesian Berkelanjutan atau pembaca dapat memiliki kompetensi diri yang dilengkapi dengan kepribadian agung untuk menerapkannya dalam pembelajaran pada mata pelajaran yang diampu. Secara rinci, peserta diklat atau pembaca mampu menerapkan materi-materi, sebagai berikut :

1. keragaman fisik individu,
2. inteligensi individu,
3. tipe inteligensi Sternberg,
4. model struktur intelektual Guilford,
5. inteligensi jamak individu,
6. gaya belajar peserta didik.

C. Uraian Materi

Kata hikmah

Suatu target akan terealisir jika tercapai syarat-syaratnya, yaitu kefahaman ilmu dan keyakinan kebenarannya maka sajikan permasalahmu secara singkat, padat dan menarik

Peserta didik merupakan salah satu komponen utama dalam proses belajar mengajar. Peserta didik sebagai individu, masing-masing memiliki perbedaan dan keunikan individu (*individual differences*).Guru perlu mempertimbangkan perbedaan dan keunikan individu pada proses belajar mengajar. Pada sisi lain terdapat perbedaan keragaman yang melekat pada kelompok tertentu. Siswa mempunyai latar belakang keluarga yang bervariasi.Ada beberapa sumber variasi yang cukup berperan besar yaitu etnis-budaya-bahasa-agama, dan status sosial ekonomi.Kebhinekaan Indonesia tak dapat disangkal lagi.Selalu ada kemungkinan pertemuan antaretnis di ruang kelas.Etnis budaya membawa kemajemukan tata perilaku akibat pengaruh dari kebudayaan.Status sosial ekonomi orang tua ditinjau dari penghasilan, pekerjaan, dan latar belakang pendidikan. Berdasarkan hal tersebut pengelompokkan siswa dapat ditinjau dari aspek jenis kelamin, jasmaniah, status sosial ekonomi, etnis-ras, budaya, perilaku, gaya belajar, dan lain-lain.

Begitu banyak keragaman dan keunikan peserta didik, namum perfektif utama tentang keberagaman yang perlu dipertimbangkan guru kelas adalah kemampuan siswa, talenta, dan gaya belajar.

1. Intelegensi

Teori tradisional menyatakan bahwa individu memiliki kemampuan mental seperti yang diukur oleh kinerja pada tugas kognitif tertentu.Abad kedua puluh Alfred Binet di Perancis dan Lewis Terman di Amerika mengembangkan tes pertama untuk mengukur inteligensi/kecerdasan manusia sebagai kemampuan tunggal.Dari hasil kerja Binet muncul ide tentang umur mental. Seorang anak yang dapat melewati sejumlah pertanyaan tes yang sama seperti yang dilewati oleh anak-anak lain di kelompoknya akan memiliki umur mental kelompok umur itu. Berikutnya diperkenalkan konsep intelligence quotient (IQ), yaitu komputasi umur mental seseorang yang dibagi dengan umur kronologisnya dan dikalikan dengan 100.

$$\textit{Intellegence Quotient}\ (\mathrm{IQ}) = \frac{\text{Umur mental}}{\text{Umur kronologis}} \times 100$$

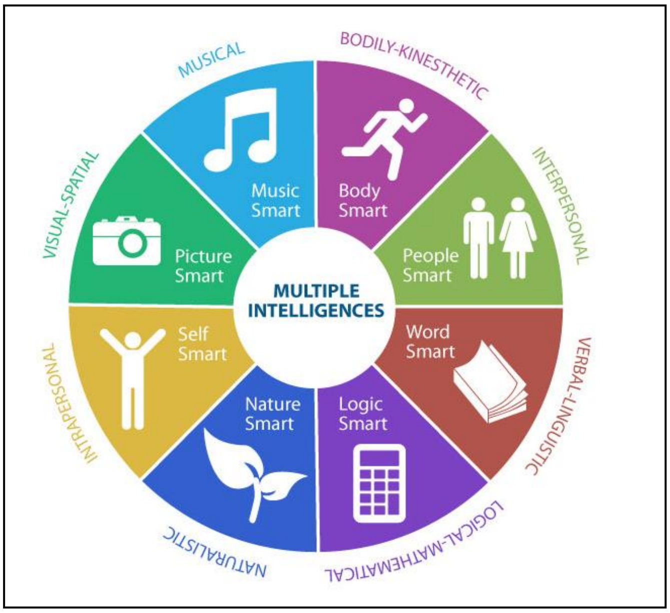
Setelah lebih dari dua dekade terakhir, beberapa psikologi kontemporer seperti Howard Gardner (1983, 1999, 2002) dan Sternberg (1985, 1999) telah menentang ide inteligensi umum atau tunggal. Sternberg berpendapat ada tiga tipe inteligensi yaitu:

a. Inteligensi analitis, melibatkan proses kognitif individu.
b. Inteligensi kreatif adalah insight individu untuk menghadapi berbagai pengalaman baru
c. Inteligensi praktis adalah kemampuan individu untuk beradaptasi dan membentuk-ulang lingkungan.

Di beberapa kasus, perilaku yang cerdas menuntut orang untuk menyeleksi lingkungan yang kondusif bagi kesuksesan individual.Ide ini membantu memberi menjelaskan mengapa seorang siswa tertentu berhasil di sekolah tertentu dan gagal di sekolah yang lain.

Guilford (dalam Sternberg, 1997) memperkenalkan model struktur intelektual yang membedakan carabekerjanya (operasi) pikiran menjadi dua tipe berpikir konvergen (*convergent thinking*) dan berpikir divergen (*divergent thinking*). Individu yang berpikir secara konvergen berarti berpikir mengkerucut, sehingga umumnya berpandangan bahwa penyelesaian diperoleh melalui cara berpikir prosedural atau struktural. Sementara itu, berpikir divergen berarti membuka pikiran untuk berbagai kemungkinan termasuk

Tokoh teoritis kontemporer paling terkenal adalah Howard Gardner dengan teori inteligensi sebagai suatu kemampuan lebih dari tunggal atau dengan kata lain inteligensi jamak. Teori Gardner tentang inteligensi jamak (*multiple intelligence*) menyebutkan adanya delapan macam inteligensi yang terpisah: *linguistic, logical-mathematical, spatial, musical, bodily-kinesthetic, interpersonal, intrapersonal, dan naturalist*.



Gambar 3.Delapan Tipe Inteligensi

Deskripsi dari masing masing kemampuan disajikan dalam tabel berikut.

Tabel1.Delapan Tipe Inteligensi Howard Gardner

Tipe	Deskripsi
Logical-mathematic	Kemampuan untuk memberi tanda perbedaan di antara pola logis dan numerik, dan untuk mengelola rantai penalaran yang panjang
Linguistic	Kepekaan terhadap bunyi, ritme, dan makna kata-kata dan berbagai fungsi bahasa yang berbeda
Musical	Kemampuan untuk menghasilkan dan mengapresiasi *pitch*, *timbre*, ritme, dan berbagai bentuk ekspresi musikal
Spatial	Kemampuan untuk mempersepsi dunia visual-spatial secara akurat dan untuk melakukan transformasi pada persepsinya, baik secara mental maupun di dunia nyata.
Bodily-kinesthetic	Kemampuan untuk mengontrol berbagai gerakan fisik dan untuk menangani berbegai benda secara terampil
Interpersonal	Kapasitas untuk melihat perbedaan dan merespon dengan tepat berbagai macam suasana-perasaan, temperamen, motivasi, dan keinginan orang lain
Intrapersonal	Pemahaman tentang keadaan emosionalnya sendiri dan pengetahuan tentang kekuatan dan kelemahan sendiri
Naturalist	Kemampuan untuk mendiskriminasikan berbagai benda hidup dan kepekaan terhadap fitur-fitur alam

Konsep kecerdasan majemuk di atas dapat digunakan oleh guru untuk memahami kecenderungan siswa dalam belajar.Selanjutnya guru dapat mengubah atau memodifikasi metode pembelajaran berdasarkan ragam kecerdasan siswa. Guru pun dapat mendorong siswa mengenali kecenderungan kecerdasannya, dan mengajari mereka untuk menggunakan gaya belajar yang sesuai.

Aktivitas yang menunjukkan kecerdasan spasial antara lain menata objek yang ada di lingkungan, menyelesaikan *jigsaw* atau *puzzle*, dan merakit mesin benda yang kompleks misalnya sepeda, robot, dan sebagainya. Aktivitas yang menggambarkan kemampuan linguistik antara lain persuasi verbal dan menulis paper dengan sangat terampil.

Aktivitas yang menunjukkan kecerdasan intrapersonal adalah memperhatikan perasaan yang bercampur aduk dalam diri seseorang dan menandai motif yang sebenarnya dari dalam diri seseorang.Aktivitas yang terkait adalah menyanyi, memainkan instrumen musik, dan menciptakan komposisi nada.Aktivitas yang terkait dengan kecerdasan naturalis adalah menandai contoh spesies tanaman atau binatang, memperhatikan hubungan antarspesies, dan proses-proses alamiah di dalam lingkungan.

2. Gaya Belajar

Gaya belajar adalah cara yang cenderung terus-menerus dipakai siswa dalam mempelajari suatu materi pelajaran. Perbedaan gaya belajar siswa dipengaruhi oleh cara berpikir yang biasanya dipakai atau sering diistilahkan sebagai gaya kognitif. Menurut Zhang dan Sternberg (dalam Seifert & Sutton, 2009) gaya kognitif adalah cara yang terus-menerus digunakan siswa dalam mempersepsi, mengingat, memecahkan masalah, dan membuat keputusan.

Witkin (dalam dalam Seifert & Sutton, 2009) merupakan tokoh yang memperkenalkan konsep gaya kognitif. Ia membagi kecenderungan berpikir menjadi dua bentuk gaya kognitif yaitu bebas dari konteks (*field independence* atau FID) dan terikat dengan konteks (*fielddependence* atau FD). Kecenderungan berpikir dengan gaya FID ditinjau dari sejauhmana seseorang berpikir karena stimulus internal. Gaya berpikir FD cenderung dipengaruhi oleh stimulus eksternal.Siswa dengan FD lebih suka belajar dalam kelompok.Sementara itu, siswa FID lebih menyukai belajar sendiri.

Gaya belajar juga dipengaruhi oleh modalitas perseptual yaitu reaksi khas individual dalam mengadopsi data secara efisien yang dipengaruhi oleh faktor biologis, dan lingkungan fisik. Ada tigagaya belajar ditinjau dari modalitas perseptual:

a. *Visual learners are learning through seeing*.
   Siswa dengan gaya ini membutuhkan melihat langsung bahasa tubuh guru, ekspresi wajah, untuk dapat memahami sepenuhnya isi pelajaran. Mereka cenderung duduk di deretan depan untuk menghindari penghalang pandangan mata (misalnya kepala teman-temannya). Mereka cenderung berpikir dalam bentuk piktorial dan mempelajari sesuatu paling efektif dari tampilan visual seperti diagram, buku yang berilustrasi, transparensi (*slides*), video, flipcharts, dan *handouts*. Selama pelajaran dilakukan diskusi kelas berlangsung, mereka lebih suka mencatat untuk menyerap informasi.

b. *Auditory learners are learning through listening*.
   Mereka paling mudah menangkap informasi melalui pembicaraan, ceramah, diskusi, mengungkapkan sesuatu, dan mendengar apa yang orang lain katakan. Siswa dengan modalitas auditori menginterpretasi (menafsirkan) arti pembicaraan dengan mendengarkan suara, nada, kecepatan, dan intonasi. Informasi tertulis hanya sedikit berpengaruh, tetapi akan sangat berpengaruh jika dibacakan atau dijelaskan. Siswa seperti ini sangat terbantu dengan metode membaca keras (*reading aloud*) dan menyetel tape recorder.Mereka senang jika berpartisipasi dalam diskusi kelompok. Mereka belajar dengan baik melalui ceramah verbal, diskusi, berbicara hal-hal melalui dan mendengarkan apa yang dikatakan orang lain. Mereka berhasil dalam ujian lisan.Bagi pelajar auditori, informasi tertulis mungkin memiliki sedikit arti sampai hal itu terdengar di telinga mereka. Pelajar auditori menafsirkan makna yang mendasari mereka bicara melalui mendengarkan nada suara, *pitch*, kecepatan dan nuansa lain.

c. *Tactile or Kinesthetic learners are learning by moving, doing, and touching*.
   Siswa dengan modalitas perasa, peraba, dan kinestetik paling efektif menyerap informasi melalui menyentuh dengan tangan, merasakan melalui indera

pengecap, mencium aroma, melakukan gerakan-gerakan, unjuk kerja, dan aktif mengeksplorasi lingkungan. Mereka kesulitan jika harus duduk berlama-lama dan mudah pecah konsentrasinya karena keinginan untuk aktif bergerak dan mengeksplorasi.Pada bagian ini, modalitasnya juga dikenal dengan sebutan kinestetik, olfaktori (penciuman), dan gustatif (perasa).

Pemrosesan informasi di otak terjadi dengan cara berbeda dalam aktivitasmerasakan, memikirkan, memecahkan masalah, dan mengingat informasi. Masing-masingindividu lebih menyukai cara tertentu, yang dipakai terus-menerus, cara mempersepsi, mengorganisir, dan memelihara informasi. Misalnya, belajar melalui workshop, praktikum, atau metode informal lainnya mungkin lebih cocok bagi orang tertentu. Kadangkala, orang merasa kurang bisa menyerap pelajaran, padahal masalahnya bukan karena kesulitan memahami pelajaran namun karena ia kurang mengenali gaya belajarnya yang paling sesuai untuk dirinya sendiri.

Selain modalitas perseptual, kepribadian seseorang juga mempengaruhi cara belajarnya. Aspek-aspek kepribadian yang perlu diperhatikan terkait dengan gaya belajar adalah bagaimana fokus atau perhatian, kondisi emosionalitas, dan nilai-nilai yang diyakini siswa. Dengan memahami ketiga aspek kepribadian ini, maka kita dapat memprediksi bagaimana reaksi dan apa yang dirasakan siswa terhadap situasi yang berbeda-beda.

Fokus atau perhatian siswa dapat dipahami sebagai minat (*interest*).Masing-masing siswa memiliki ragam minat dan derajat yang berbeda-beda dalam berbagai bidang.Ruang lingkup minat fokus atau perhatian adalah segala sesuatu yang dapat menarik minat siswa. Pada masa sekarang ini, apa saja bisa menjadi hobi (kesukaan) anak baik berupa kesenangan terhadap suatu aktivitas, benda, atau situasi. Ada siswa yang sangat tertarik dengan membaca komik, bermain *games*, berolah raga, musik, tari, modeling, film, belanja, membaca buku, otak-atik komputer, otak-atik mesin, berjualan, memasak, menjahit, desain, dan sebagainya. Seorang guru perlu memahami apa saja minat atau hobi siswa. Pemahaman ini dapat digunakan untuk menata kegiatan kelas, ekstrakurikuler, dan strategi belajar yang tepat untuk siswa.Misalnya saja pelajaran menghafal surat-surat pendek dapat dilakukan dengan strategi merekam suara atau memfilmkan penampilan setiap anak.Jadi dengan mendekatkan antara beragam minat siswa dengan materi pelajaran, maka ketertarikan terhadap aktivitas yang disukai tersebut dapat digeneralisir siswa sebagai ketertarikan pada pelajaran sekolah.

3. Emosional

Emosionalitas siswa merupakan bagian penting yang perlu dikenali guru, sebab aktivitas berpikir seseorang tidak terpisah dari emosi.Setidaknya ada dua unsur emosionalitas yang perlu diperhatikan yaitu *mood* (suasana hati) dan emosionalitas secara umum.Suasana hati adalah kondisi emosionalitas yang dapat berubah sewaktu-waktu.Suasana hati bersifat temporer atau sementara.Misalnya saat udara panas, belum sarapan, dan tugas sekolah banyak yang harus dikerjakan, maka suasana hati para siswa cenderung negatif.

Sementara emosionalitas secara umum merujuk pada emosi siswa yang diekspresikan secara lebih persisten.Ada siswa yang lebih menyimpan perasaan, tenang, hati-hati, dan pendiam (*reserved*).Ada pula yang lebih ekspresif atau spontan (*loose or movable*).Dengan kemampuan memahami minat siswa, kita bisa memancing siswa yangpendiam menjadi lebih aktif dalam aktivitas belajar.Apabila guru mengetahui minat siswa yang ekspresif, maka mereka dapat lebih berkonsentrasi belajar.Untuk itu guru perlu berlatih memperhatikan suasana hati dan kecenderungan emosionalitas siswa.

Goleman menyebutkan adanya lima wilayah kecerdasan pribadi dalam bentuk kecerdasan emosional, yaitu: (1) Kemampuan mengenali emosi diri. (2) Kemampuan mengelola emosi. (3) Kemampuan memotivasi diri. (4) Kemampuan mengenali emosi orang lain. (5) Kemampuan membina hubungan. Di sini dapat kita simpulkan betapa pentingnya kecerdasan emosional dikembangkan pada diri anak. Karena betapa banyak kita jumpai anak-anak, di mana mereka begitu cerdas di sekolah, begitu cemerlang prestasi akademiknya, namun bila tidak dapat mengelola emosinya, seperti mudah marah, mudah putus asa atau angkuh dan sombong, maka prestasi tersebut tidak akan banyak bermanfaat untuk dirinya. Ternyata kecerdasan emosional perlu lebih dihargai dan dikembangkan pada anak sejak usia dini. Karena hal inilah yang mendasari ketrampilan seseorang di tengah masyarakat kelak, sehingga akan membuat seluruh potensinya dapat berkembang secara lebih optimal.

Seto Mulyadi (2002a) menyatakan tentang Robert Coles yang menggagas tentang kecerdasan moral yang juga memegang peranan amat penting bagi kesuksesan seseorang dalam hidupnya. Hal ini ditandai dengan kemampuan seorang anak untuk bisa menghargai dirinya sendiri maupun diri orang lain, memahami perasaan terdalam orang-orang di sekelilingnya, mengikuti aturan-aturan yang berlaku, semua ini termasuk merupakan kunci keberhasilan bagi seorang anak di masa depan. Suasana damai dan penuh kasih sayang dalam keluarga, contoh-contoh nyata berupa sikap saling menghargai satu sama lain, ketekunan dan keuletan menghadapi kesulitan, sikap disiplin dan penuh semangat, tidak mudah putus asa, lebih banyak tersenyum daripada cemberut, semua ini memungkinkan anak mengembangkan kemampuan yang berhubungan dengan kecerdasan kognitif, kecerdasan emosional maupun kecerdasan moralnya. Demikianlah gambaran selintas tentang ketiga kecerdasan tersebut.

Pada akhirnya, dapatlah dinyatakan di sini bahwa setiap Guru Matematika di samping mengajar para siswanya, juga harus melatih dan mendidik. Mengajar akan berkait dengan kemampuan otak dan pengetahauan, melatih akan berkait dengan kemampuan raga dan keterampilan, sedangkan mendidik akan berkait dengan kemampuan hati atau jiwa dan nilai-nilai.

Nilai atau *value* adalah sesuatu yang dianggap penting atau berharga bagi seseorang.Dalam filsafat dikenal ada tiga jenis tolok ukur nilai yaitu logika, moral, dan estetika.Nilai logika hanya mengenal benar atau salah ditinjau dari penalaran.Nilai moral menimbang baik atau buruknya sesuatu bagi kepentingan diri dan masyarakat.Sementara estetika menekankan indah atau tidaknya sesuatu.Keyakinan terhadap suatu nilai tertentu dipengaruhi oleh adat istiadat dan religiusitas seseorang. Seseorang yang tinggal dalam komunitas yang menjunjung tinggi adat istiadat ataupun menjunjung tinggi keyakinan agama, maka akan cenderung mengadopsi nilai-nilai moral yang lebih kuat. Tindak-tanduknya cenderung merujuk pada petunjuk adat atau ajaran agama yang diyakini. Singkatnya apa yang dianggap oleh seseorang sebagai hal yang penting akan berpengaruh terhadap bagaimana merespon termasuk dalam gaya belajarnya.

Peran guru adalah mengenali apa nilai yang dipandang paling penting bagi siswa dan menggunakannya untuk memperlancar kegiatan pembelajaran. Lebih bagus lagi apabila guru mampu mengungkapkan nilai apa yang dapat diambil dari setiap pelajaran yang diberikan bagi siswa.

Untuk mengenali kepribadian siswa, guru perlu mengamati, bergaul, dan bertanya pada mereka. Catatan penting dalam aspek ini adalah guru semestinya mau menerima, mendengar, dan menghargai apa yang menjadi minat, hal yang dirasakan, dan apa yang dipandang penting oleh para siswa.

4. Anak Berbakat

Siswa-siswa yang berbakat dan bertalenta dapat memiliki banyak karateristik, terutama jika kita menerima konsep inteligensi jamak. Turnbull (2010) menyusun karateristik ini menjadi lima kategori untuk memberikan petunjuk kepada para guru mengenai apa yang harus diamati dalam mengidentifikasi siswa-siswa berbakat yang mungkin ada di kelas-kelas mereka:

a. nilai inteligensi umum yang dinyatakan dengan IQ memiliki nilai di atas rata-rata, dapat menangkap konsep kompleks dan abstrak dengan cepat. Kosa kata yang dimiliki lebih maju, bertanya banyak pertanyaan, dan mendekati masalah dengan cara-cara yang unik dan kreatif.
b. memiliki informasi dan keterampilan dalam hal akademik tertentu mendahului teman-temannya. Memperoleh pemahaman lanjutan dalam penalaran matematika, inquiri ilmiah.
c. memiliki pemikiran produktif kreatif. Kualitas ini ditunjukkan melalui ciri-ciri intuitif, berwawasan, ingin tahu, dan fleksibel.
d. menunjukkan kemampuan interpersonal dan intrapersonal melalui kemampuan memotivasi dan memimpin orang lain.
e. beberapa siswa berbakat memiliki talenta seni, visual, fisik, atau peran.

Menghadapi siswa berbakat dapat dilakukan dengan beberapa hal, misalnya jika berada pada kelas reguler, guru dapat memberikan materi pengayaan.Apabila dilakukan pada level sekolah siswa berbakat dapat dibentuk kelas akselerasi yang lebih dikenal dengan kelas CI (cerdas istimewa). Hal ini dilakukan agar siswa tidak merasa bosan karena harus mengikuti level pembelajarannya yang sama dengan teman-temannya yang berkemampuan rata-rata.

5. Gender

Kebanyakan studi tidak menemukan perbedaan besar yang melekat pada anak laki-laki dan anak perempuan dalam hal kemampuan kognitif secara umum (Halpen dan LaMay, 2000).Akan tetapi Diane Halpen (1996) meraih kesimpulan yang sedikit berbeda dan menyatakan memang ada sedikit perbedaan.Hasil penelitiannya menunjukkan bahwa perempuan menunjukkan kinerja yang lebih baik di bidang seni, bahasa, pemahaman bacaan, dan komunikasi tertulis dan lisan, sementara anak laki-laki tampak sedikit lebih unggul di bidang matematika dan penalaran matematika.

Sebagian yang lain menyatakan bahwa perbedaan *gender* dalam kaitannya dengan kognisi dan prestasi mungkin bersifat situasional. Perbedaan itu bervariasi menurut waktu dan tempat dan mungkin berinteraksi dengan ras dan kelas sosial. Ormord (2000) merangkum penelitian selama 30 tahun terakhir tentang perbedaan *gender* dan implikasinya pada pendidikan.

Tabel 2.Perbedaan *Gender* dan Implikasinya

Fitur	Perbedaan/Persamaan	Implikasi Untuk Pendidikan
Kemampuan kognitif	Anak laki-laki dan anak perempuan tampaknya memiliki kemampuan kognitif yang hampir sama. Anak perempuan sedikit lebih baik dalam tugas-tugas verbal, anak laki-laki memiliki keterampilan visual-spasial yang sedikit lebih baik. Perbedaan prestasi di subjek-subjek tertentu kecil dan semakin kecil perbedaannya pada tahun-tahun terakhir.	Mengharapkan
Aktivitas fisik dan keterampilan motorik	Sebelum pubertas anak laki-laki memiliki keunggulan seperti lebih tinggi berotot dan mereka cenderung untuk lebih mengembangkan fisik mereka jika dibandingkan dengan anak perempuan. Anak laki-laki cenderung dianggap lebih aktif dibanding anak perempuan.	Mengasumsikan bahwa kedua *gender* memiliki potensi untuk mengembangkan berbagai keterampilan fisik dan motorik.
Motivasi	Anak perempuan pada umumnya lebih peduli dengan nilai-nilainya. Mereka cenderung bekerja lebih keras, tetapi sedikit mengambil resiko	Mengharapkan semua *gender* unggul di semua mata pelajaran. Menghindari stereotip
Cita-cita	Anak perempuan cenderung untuk	Membuka kesempatan

Fitur	Perbedaan/Persamaan	Implikasi Untuk Pendidikan
Berkarier	melihat diri mereka sendiri sebagai ikatan pendidikan lebih dari pada anak laki-laki. Anak laki-laki memiliki pengharapan jangka panjang di area maskulin secara stereotip. Anak perempuan cenderung memiliki karier yang tidak akan mengganggu masa depan mereka sebagai istri dan orang tua	bagi seluruh siswa untuk menjadi contoh laki-laki dan perem-puan yang menjadi sukses. Mendorong anak laki-laki untuk bercita-cita pergi sekolah dan menun-jukkan pada anak perempuan orang-orang yang berhasil di bidang karier dan sekeluarga
Hubungan Interperso-nal	Anak laki-laki cenderung untuk memamerkan serangan fisik secara lebih, anak perempuan cenderung untuk lebih afiliatif. Anak laki-laki lebih menyukai situasi persaingan; anak perempuan lebih menyukai lingkungan yang kooperatif	Mengajarkan pada kedua *gender* cara yang lebih tidak agresif untuk berinteraksi dan menyediakan sebuah lingkungan yang kooperatif bagi semua

D. Aktivitas Pembelajaran

LK 2.1. Keragaman dalam Kemampuan dan Kepribadian Peserta Didik (In-1).

Kerjakan semua soal berikut secara serius, teliti, dan cermat serta optimalkan kekuatan kerja gotong royong sehingga kerja menjadi lebih ringan dan bermakna kebersamaan.

1. Identifikasi perbedaan dan kesamaan kebiasaan serta kemampuan yang dimiliki siswa dan siswi di kelas Anda. Bagaimana memanfaatkan hasil identifikasi tersebut untuk pembelajaran matematika?

Jawab :

1. Anda ditugaskan untuk mengajar matematika di kelas khusus olah raga. Tuliskan dugaan sementara terkait gaya belajar siswa-siswa di kelas tersebut. Buatlah rencana kegiatan pembelajaran matematika untuk kelas khusus olah raga tersebut.

Jawab :

LK 2.2. Keragaman dalam Kemampuan dan Kepribadian Peserta Didik (On)

Kerjakan soalberikut secara mandiri, serius, jujur, teliti dan cermat sehingga hasil yang diperoleh lebih optimal dan bermakna.

Perhatikan dengan teliti dan cermat. Identifikasi gaya belajar siswa, klasifikasikan aktivitas siswa yang termasuk gaya audiotory, kinestetik atau visual. Bagaimana anda menyiapkan perangkat pembelajaran untuk mengatasi keberagaman ini?

Jawab :

E. Latihan/Kasus/Tugas

Kata hikmah

Setiap orang itu berkompeten dan setiap masalah dapat diselesaikan maka yakinilah Anda mampu menyelesaikan semua masalah jika Anda mau

A. Diskusikan dalam kelompok kecil, dengan akrab, serius dan saling menghormati.

Gaya belajar siswa di suatu kelas berbeda-beda, ada pelajar dengan gaya belajar auditory, ada pelajar dengan gaya belajar kinestetik dan ada pelajar dengan gaya belajar visual.

1. Pilih satu topik tertentu, rencanakan pembelajaran matematika pada kelas yang umumnya memiliki gaya belajar auditory.
2. Pilih satu topik tertentu, rencanakan pembelajaran matematika pada kelas yang umumnya memiliki gaya belajar visual.

B. Berilah tanda silang (X) pada jawaban yang Anda anggap benar

1. *Intelligence Quotient* (IQ) adalah ... .
   A. umur mental seseorang yang dibagi dengan umur kronologisnya dan dikalikan dengan 100
   B. hasil tes kemampuan individu menggunakan TPA
   C. umur mental seorang yang dikalikan dengan umur kronolois
   D. umur mental diukur dengan tes kemampuan TPA yang dikali dengan 100
2. Tokoh pencetus gagasan inteligensi jamak adalah ... .
   A. Guilford
   B. H. Gardner
   C. J. Bruner
   D. Within
3. Menurut teori inteligensi jamak kemampuan untuk memberi tanda perbedaan di antara pola logis dan numerik, dan untuk mengelola rantai penalaran yang panjang adalah kemampuan ... .
   A. Spatial
   B. Logical- mathematic

C. *Naturalist*
D. *Interpersonal*

4. Berikut adalah salah satu gaya belajar ditinjau dari modalitas *perceptual*, kecuali ….
   A. *visual learners*
   B. *auditory learners*
   C. *musical learners*
   D. *tactile or kinesthetic*
5. Berikut adalah tipe inteligensi menurut Sternberg, *kecuali… .*
   A. Inteligensi analitis
   B. Inteligensi logis
   C. Inteligensi kreatif
   D. Inteligensi praktis
6. Menurut Sternberg kemampuan insight individu untuk menghadapi berbagai pengalaman baru, adalah … .
   A. Inteligensi analitis
   B. Inteligensi logis
   C. Inteligensi kreatif
   D. Inteligensi praktis
7. Tokoh yang memperkenalkan konsep gaya kognitif *field independence* dan *fielddependence* adalah … .
   A. Guilford
   B. Witkin
   C. Sternberg
   D. Gardner
8. Model struktur intelektual yang diajukan Gilford adalah …
   A. *Logical* dan *spatial*
   B. *convergent* dan *divergent*
   C. *interpersonal* dan *intrapersonal*
   D. *intelligence* dan *multiple intelligence*
9. Menurut teori inteligensi jamak, kepekaan terhadap bunyi, ritme, dan makna kata-kata dan berbagai fungsi bahasa yang berbeda adalah kemampuan …
   A. *Spatial*

B. Naturalis

C. Bahasa

D. Interpersonal

10. Berikut adalah ciri dari siswa berbakat, kecuali… .

A. Memiliki nilai IQ di atas rata-rata

B. Memiliki sedikit informasi dalam hal akademik, namum tetap memiliki akademik yang baik.

C. Memiliki pemikiran produktif kreatif. Kualitas ini ditunjukkan melalui ciri-ciri intuitif, berwawasan, ingin tahu, dan fleksibel.

D. Menunjukkan kemampuan interpersonal dan intrapersonal melalui kemampuan memotivasi dan memimpin orang lain.

F. Rangkuman

Kata hikmah

Rangkuman adalah inti yang merupakan representasi dari materi induknya dan produk rangkuman menunjukkan kualitas kompetensi seseorang maka buatlah rangkuman yang sederhana dan representatif

1. Setiap individu memiliki keunikan dengan latar sosial budaya yang bervariasi, yang akan membawa perbedaan keragaman yang melekat pada kelompok tertentu.
2. Teori tradisional menyatakan bahwa inteligensi/kecerdasan manusia sebagai kemampuan tunggal. Alfred Binet di Perancis dan Lewis Terman di Amerika mengembangkan tes pertama untuk mengukur inteligensi yang dikenal dengan intelligence quotient (IQ).
3. Tokoh teoritis kontemporer paling terkenal adalah Howard Gardner dengan teori inteligensi sebagai suatu kemampuan lebih dari tunggal atau dengan kata lain inteligensi jamak. Teori Gardner tentang inteligensi jamak (*multiple intelligence*) menyebutkan adanya delapan macam inteligensi yang terpisah: *linguistic, logical-mathematical, spatial, musical, bodily-kinesthetic, interpersonal, intrapersonal, dan naturalist.*

4. Gaya belajar adalah cara yang cenderung terus-menerus dipakai siswa dalam mempelajari suatu materi pelajaran.
5. Guilford memperkenalkan model struktur intelektual yang membedakan cara bekerjanya (operasi) pikiran menjadi dua tipe berpikir konvergen (*convergent thinking*) dan berpikir divergen (*divergent thinking*).
6. Witkin merupakan tokoh yang memperkenalkan konsep gaya kognitif. Ia membagi kecenderungan berpikir menjadi dua bentuk gaya kognitif yaitu bebas dari konteks (*field independence* atau FID) dan terikat dengan konteks (*fielddependence* atau FD).
7. Tigagaya belajar ditinjau dari modalitas perseptual: *visual learners are learning through seeing*; *auditory learners are learning through listening; tactile or kinesthetic learners are learning by moving, doing, and touching*.

G. Umpan Balik dan Tindak Lanjut

Setelah Anda mempelajari materi dalam kegiatan pembelaran 2 ini maka lakukan refleksi diri dan tindak lanjut.Refleksi yang dilakukan terhadap perubahan yang meningkat dan lebih baik dari sebelumnya.Ranah refleksi terdiri atas sikap positif dalam belajar dan sikap positif penguatan karakter sehingga mulai tumbuh kepribadian unggul.Silahkan Anda baca secara teliti, cermat pada Umpan Balik dan Tindak Lanjut pada Kegiatan Pembelajaran 1.

KUNCI JAWABAN

Kunci Jawaban Kegiatan Pembelajaran 1

1. B
2. D
3. A
4. C
5. C
6. D
7. C
8. B
9. B
10. B

Kunci Jawaban Kegiatan Pembelajaran 2, Latihan B.

1. A
2. B
3. B
4. C
5. B
6. C
7. B
8. B
9. C
10. B

Evaluasi

Kata hikmah

Setiap orang itu berkompeten dan setiap masalah dapat diselesaikan maka yakinilah Anda mampu menyelesaikan semua masalah jika Anda mau

Secara mandiri, telitilah setiap soal dengan cermat, yakinilah pekerjaan Anda yang paling benar dan berilah tanda silang (X) pada jawaban Anda tersebut.

1. Tahapan perkembangan kognitif siswa SMA menurut Fisher adalah ... .
   A. Sensorimotor
   B. Representation
   C. Abstrak
   D. Vectorical
2. Menurut teori inteligensi jamak kemampuan untuk memberi tanda perbedaan di antara pola logis dan numerik, dan untuk mengelola rantai penalaran yang panjang adalah kemampuan... .
   A. Spatial
   B. Logical- mathematic
   C. Naturalist
   D. Interpersonal
3. Siswa-siswi SMA BMW sering menyanyikan lagu untuk mengingat di kuadran mana fungsi $f(x) = \sin x$ bernilai positif. Gaya belajar yang digunakan oleh siswa-siswi SMA BMW adalah ... .
   A. Auditori
   B. Musikal
   C. Visual
   D. kinestetik
4. Siswa-siswi SMA Bhawara lebih mudah memahami materi penyajian data dengan menggunakan histogram atau grafik. Gaya belajar yang digunakan oleh siswa-siswi SMA Bhawara adalah ... .
   A. Kinestetik
   B. Spasial

C. Visual
D. Auditori

5. Siswa-siswi SMA Unggulan sering menggunakan percobaan yang melibatkan aktivitas fisik untuk memahami materi permutasi dan kombinasi. Gaya belajar yang digunakan siswa-siswi SMA Unggulan adalah … .
   A. Auditori
   B. Kinestetik
   C. Visual
   D. Logikal
6. Berikut adalah tahap perkembangan kognitif menurut Case … .
   A. Sensorimotor – *interrelational – dimensional - vectorial*
   B. Sensorimotor – *representation* - abstrak
   C. Sensorimotor – *preoperational – concrete operational – formal operational*
   D. Sensorimotor – *interrelational – representation* - abstrak
7. Materi polinomial dapat diberikan pada jenjang SMA karena menurut Fisher perkembangan kognitif siswa SMA sudah memasuki tahap … Menggunakan grafik
   A. Symbolic
   B. Abstrak
   C. Dimensional
   D. Interrelational
8. Berikut adalah salah satu gaya belajar ditinjau dari modalitas perceptual, ***kecuali***:
   A. *Visual learners*
   B. *Kinesthetic*
   C. *Logical-mathematical learners*
   D. *Auditory learners*
9. Siswa-siswi SMA Teladan mempunyai kecenderungan gaya belajar kinestetik dalam mempelajari suatu materi pelajaran. Untuk memahami rumus suku ke-n dari suatu barisan aritmetika, siswa-siswi SMA Teladan menggunakan cara … .
   A. Menggunakan grafik
   B. menyanyi

C. menggunakan gambar

D. melakukan percobaan

10. Materi derivatif dapat diberikan pada jenjang SMA karena menurut Piaget perkembangan kognitif siswa SMA sudah memasuki tahap …

    A. Abstrak

    B. Dimensional

    C. Symbolic

    D. Interrelational

Kunci jawaban Evaluasi:

1. C
2. B
3. A
4. C
5. B
6. A
7. B
8. C
9. D
10. B

Penutup

Modul ini dimulai dengan pembahasan mengenai karateristik perkembangan peserta didik, karena dengan mengetahui karateristik perkembangan peserta didik khususnya perkembangan kognitif peserta didik dapat mempermudah Bapak/Ibu guru mempersiapkan materi ajar matematika yang mudah dipahami oleh peserta didik.Selanjutnya dibahas pulaperbedaan keragaman peserta didik.Ada beberapa sumber variasi yang cukup berperan besar yaitu etnis-budaya-bahasa-agama, dan status sosial ekonomi.Kebhinekaan Indonesia tak dapat disangkal lagi.Selalu ada kemungkinan pertemuan antaretnis di ruang kelas.Etnis budaya membawa kemajemukan tata perilaku akibat pengaruh dari kebudayaan.Status sosial ekonomi orang tua ditinjau dari penghasilan, pekerjaan, dan latar belakang pendidikan. Berdasarkan hal tersebut pengelompokkan siswa dapat ditinjau dari aspek jenis kelamin, jasmaniah, status sosial ekonomi, etnis-ras, budaya, perilaku, gaya belajar, dan lain-lain.

Pemberian materi dalam bentuk kata bijak diharapkan dapat menambah pelajaran tentang nilai-nilai karakter kepribadian sehingga peserta atau pembaca memiliki kecerdasan tinggi dan akhlak mulia.

Pada akhirnya, mudah-mudahan modul ini dapat memberi masukan kepada peserta diklat Pengembangan Keprofesian Berkelanjutan atau pembaca untuk dapat mengembangkan kompetensinya khususnya pemahaman terkait dengan karateristik peserta didik dan keberagaman peserta didik yang terintegrasi dengan penguatan pendidikan karakter.

Daftar Pustaka

Arends, R.I. 2008. *Learning to teach*.Terjemahan. Yogyakarta: Pustaka Pelajar.

Bjorklund, D.F. 2005. *Children's Thinking*. Belmort, CA: Wadsworth Thomson Learning.

Hamilton, R. and Ghatala, E. 1997.*Learning and Instruction*. New York: McGraw-Hill, Inc

Hurlock, E. 1996.*Psikologi Perkembangan*. Edisi Kelima. (Terjemahan). Jakarta: Erlangga.

Hilgard, Ernest Ropiequet. 1975. *Theories Of Learning: The Century Psychologi Series.*Printice-Hall. Inc., and Englewood Cliffs, N.J

http://www.lifecircles-inc.com/Learningtheories/behaviorism/Skinner. html

Seto Mulyadi (2002a). Menjadikan Anak Yang Terbaik Menuju Milenium III.Makalah Disampaikan dalarn Seminar yang diselenggarakan oleh RS. Mitra Keluarga Bekasi

Glosarium

Intelligence quotient (IQ)	:	Komputasi umur mental seseorang yang dibagi dengan umur kronologisnya dan dikalikan dengan 100
Multiple intelligence	:	inteligensi/kecerdasan jamak meliputi delapan macam inteligensi yang terpisah: *lingui-tic, logical-mathematical, spatial, musical, bodily-kinesthetic, interpersonal, intrapersonal, dan naturalist*.
Gaya belajar	:	cara yang cenderung terus-menerus dipakai siswa dalam mempelajari suatu materi pelajaran.

A

KELOMPOK
KOMPETENSI

MODUL PENGEMBANGAN KEPROFESIAN BERKELANJUTAN GURU MATEMATIKA SMA

PROFESIONAL

BILANGAN, NOTASI SIGMA, BARISAN, DAN DERET

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
DIREKTORAT JENDERAL GURU DAN TENAGA KEPENDIDIKAN
2017

MODUL PENGEMBANGAN KEPROFESIAN BERKELANJUTAN GURU MATEMATIKA SMA

TERINTEGRASI PENGUATAN PENDIDIKAN KARAKTER

KELOMPOK KOMPETENSI A

PROFESIONAL

BILANGAN, NOTASI SIGMA, BARISAN, DAN DERET

DIREKTORAT JENDERAL GURU DAN TENAGA KEPENDIDIKAN
KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
2017

Penulis:
1. Emut, Drs, M.Si, 085326103388, emut2741@gmail.com
2. Wiworo, S.Si, MM., 08562875885, percussionline@yahoo.com

Penelaah:
1. Fajar Noer Hidayat, S.Si, M.Ed.
2. Angga Kristiyajati, S.Si
3. Made Ketut?

Ilustrator:
1. Cahyo Sasongko
2. Febriarto Cahyo Nugroho

Kata Pengantar

Peningkatan kualitas pendidikan saat ini menjadi prioritas, baik oleh pemerintah pusat maupun daerah. Salah satu komponen yang menjadi fokus perhatian adalah peningkatan kompetensi guru. Peran guru dalam pembelajaran di kelas merupakan kunci keberhasilan untuk mendukung keberhasilan belajar siswa. Guru yang profesional dituntut mampu membangun proses pembelajaran yang baik sehingga dapat menghasilkan *output* dan *outcome* pendidikan yang berkualitas.

Dalam rangka memetakan kompetensi guru, telah dilaksanakan Uji Kompetensi Guru (UKG) Tahun 2015. UKG tersebut dilaksanakan bagi semua guru, baik yang sudah bersertifikat maupun belum bersertifikat untuk memperoleh gambaran objektif kompetensi guru, baik profesional maupun pedagogik. Hasil UKG kemudian ditindaklanjuti melalui program peningkatan kompetensi yang untuk tahun 2017 dinamakan Program Pengembangan Keprofesian Berkelanjutan bagi Guru, sehingga diharapkan kompetensi guru yang masih belum optimal dapat ditingkatkan.

PPPPTK Matematika sebagai Unit Pelaksana Teknis Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan di bawah pembinaan Direktorat Jenderal Guru dan Tenaga Kependidikan mendapat tugas untuk menyusun modul guna mendukung pelaksanaan Program Pengembangan Keprofesian Berkelanjutan bagi Guru. Modul ini diharapkan dapat menjadi sumber belajar bagi guru dalam meningkatkan kompetensinya sehingga mampu mengambil tanggung jawab profesi dengan sebaik-baiknya.

Yogyakarta, April 2017
Kepala PPPPTK Matematika,

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
PUSAT PENGEMBANGAN DAN PEMBERDAYAAN PENDIDIK DAN TENAGA KEPENDIDIKAN MATEMATIKA

Dr. Dra. Daswatia Astuty, M.Pd.
NIP. 196002241985032001

Daftar Isi

Daftar Tabel

Pendahuluan

Kata hikmah

Pekerjaan yang tertinggi nilainya adalah ibadah maka jadikanlah setiap aktivitas Anda menjadi ibadah sehingga setiap unsur yang terlibat didalamnya memiliki nilai pahala disisi Tuhan

A. Latar Belakang

Kata hikmah

Suatu sikap yang menjaga martabat, membela dari gangguan dan mengharumkan nama Indonesia dalam segala bidang adalah sikap nasionalis maka berusahalah menjadi seorang nasionalis melalui pendidikan

Salah satu Rencana Program Pembangunan Jangka Menengah Nasional 2015-2019, pada bidang pendidikan adalah PenguatanPendidikan Karakter (PPK) terhadap anak-anak usia sekolah pada semua jenjang pendidikan. Program ini bertujuan untuk memperkuat nilai-nilai moral, akhlak, dan kepribadian peserta didik dengan memperkuat pendidikan karakter yang terintegrsi ke dalam mata pelajaran. Program pendidikan di sekolah dalam memperkuat karakter siswa melalui harmonisasi olah hati, olah rasa, olah pikir dan olahraga dengan dukungan pelibatan publik dan kerja sama antara sekolah, keluarga, dan masyarakat yang merupakan bagian dari Gerakan Nasional Revolusi Mental (GNRM). Implementasi PPK tersebut dapat berbasis kelas, berbasis budaya sekolah dan berbasis masyarakat (keluarga dan komunitas). Dalam rangka mendukung kebijakan gerakan PPK, modul ini mengintegrasikan lima nilai utama PPK yaitu religius, nasionalis, mandiri, gotong royong, dan integritas. Nilai religius memberikan kefahaman dan keyakinan bahwa setiap nikmat yang diterimanya, termasuk nikmat belajar, akan dimintai pertanggungjawaban. Hal itu akan menjadi penghasung untuk mengoptimalkan usaha dalam belajar sehingga meraih hasil yang terbaik. Dampaknya, akan tumbuh dan berkembang sifat optimis, semangat tinggi dan jiwa kesabaran dalam menghadapi setiap permasalahan. Dengan mengingat bahwa setiap aktivitas belajar merupakan ibadah yang dipersembahkan kepada TuhanYang Maha Esa maka semua unsur yang menjadikan sukses dalam belajar akan diperhatikan, dipenuhi dan direalisasikan dengan optimal. Dalam proses pelaksanaan aktivitas pembelajaran, ditekankan pada pengamalan akhlak yang mulia, toleransi tinggi, saling menghormati dan saling dukung sehingga menambah suasana belajar lebih menarik dan membahagiakan.

Nilai nasionalis memberikan daya dukung yang kuat untuk berprestasi dan tetap memiliki jiwa, martabat dan kepribadian Indonesia. Rasa ingin menjadi pahlawan bangsa melalui bidang pendidikan memberi dorongan untuk sukses dalam belajar. Jiwa kemandirian merupakan karakter mulia dan mendidik seseorang untuk memenuhi semua kebutuhannya secara mandiri. Jiwa kemandirian memberikan dukungan besar dalam mencetak pribadi-pibadi tegar, kokoh, optimis dan merdeka dari kebergantungan orang lain. Nilai karakter gotong-royong menumbuhkan jiwa kebersamaan, kekeluargaan, kesolidan dan kepedulian kepada orang lain. Melalui karakter gotong-royong didapat hasil pekerjaan yang lebih cepat, lebih ringan dan lebih optimal.

Sedangkan karakter integritas mendidik untuk berlapangdada mengakui atau menerima sesuatu yang merupakan hasil kesepakatan bersama. Nilai integritas mengajarkan untuk mensyukuri nikmat, toleran dan jiwa berkorban demi kepentingan bersama.Produknya akan bersemayam karakter unggul, antara lain : sikap jujur, jiwa berkorban, niat untuk selalu menjaga keutuhan tim dan mendahulukan kepentingan bersama.Kelima nilai-nilai tersebut terintegrasi melalui kegiatan-kegiatan pembelajaran pada modul.

B. Tujuan

Kata hikmah

Niat menentukan arah dan tujuan pekerjaan sehingga keberadaan, kejelasan, kelurusan dan keikhlasan merupakan rute perpendek menuju sukses maka pasanglah niat yang kuat serta terimalah suksesnya.

Tujuan dari penyusunan modul ini adalahmeningkatkan kompetensi guru matematika SMAatau peserta diklat Pengembangan Keprofesian Berkelanjutandalam menerapkan materi Bilangan, Barisan, Deret dan Notasi

Sigmaserta dengan mengintegrasikan penguatan pendidikan karakter. Secara rinci, tujuan penyusunan modul ini adalah:

1. peserta mampu menggunakan bilangan, hubungan di antara bilangan, berbagai sistem bilangan dan teori bilangan,
2. peserta mampu menganalisis hubungan berbagai jenis dan bentuk bilangan.
3. peserta mampumenganalisis dan menerapkan hubungan pembagi dan sisa pembagiannya,
4. peserta mampumenerapkan operasi pada bilangan dan aturannya pada berbagai konteks permasalahan,
5. peserta mampumenggunakan pendekatan dan penaksiran.
6. peserta mampu menentukan hasil taksiran dari operasi beberapa bilangan.
7. peserta mampu menganalisis dan menggunakan notasi sigma dalam menyajikan deret bilangan,
8. pesertamenggunakan pola bilangan dalam menyelesaikan permasalahan yang berkaitan dengan barisan dan deret,
9. peserta mampu menganalisis suatu barisan dan deret aritmetika,
10. peserta mampu menggunakan konsep barisan dan deret aritmetikadalam menyelesaikan permasalahan konteks dalam kehidupan sehari-hari,
11. peserta mampu menganalisis suatu barisan dan deret geometri,
12. peserta pembelajar mampu menggunakan konsep barisan dan deret geometri dalam menyelesaikan permasalahan konteks dalam kehidupan sehari-hari,
13. peserta mampu menyelesaikan permasalahan konteks yang berkaitan dengan deret dalam notasi sigma.

C. Peta Kompetensi

Kata hikmah

Kekuatan seseorang ditentukan oleh optimasi potensi diri, kontribusi tim dan pertolongan Tuhan maka ambil dan gunakan semua power untuk meraih sukses dalam setiap aktivitas

Kompetensi yang dipelajari dalam modul ini difokuskan pada guru. Kompetensi yang dimaksud adalah sebagai berikut :

No.	Kompetensi Inti	Kompetensi Guru
1	memahamikarakteristik bilangan, ketertutupan himpunan bilangan terhadap operasi-operasi terkait dan hubungan antar bilangan dalam sistem bilangan.	menganalisis dan menentukan karakteristik bilangan, ketertutupan himpunan bilangan terhadap operasi-operasi terkait danhubungan antar bilangan dalam sistem bilangan
2	memahami keterbagian suatu bilangan dan bilangan berpangkat	menentukan syarat keterbagian suatu bilangan dan hasil operasi bilangan berpangkat berdasarkan aturan-aturannya
3	memahami metode dan syarat-syarat yang diperlukan dalam pendekatan dan penaksiran suatu hasil operasi bilangan	menerapkan beberapa metode dalam menentukan hasil pendekatan atau penaksiran suatu operasi bilangan
4	memahami sifat-sifat notasi sigma, pola bilangan, barisan dan deret bilangan serta terapannya dalam permasalahan-permasalahan terkait	menerapkan konsep notasi sigma, pola bilangan, barisan dan deret bilangan untuk menyelesaikan permasalahan-permasalahan yang terkait
5	memahami karakteristik barisan aritmetika, deret aritmetika dan aplikasinya dalam permasalahan-permasalahan yang terkait	menerapkan konsep barisan dan deret aritmetika dalam menyelesaikan permasalahan-permasalahan yang terkait
6	memahami karakteristik barisan geometri, deret geometri, barisan berpangkat, barisan Fibonacci, dan aplikasinya dalam permasalahan-permasalahan yang terkait	Menerapkan konsep barisan geometri, deret geometri, barisan berpangkat, dan barisan Fibonacci untuk menyelesaikan permasalahan-permasalahan yang terkait

D. Ruang Lingkup

Pembahasan materi pada modul ini mencakup materi yang berkaitan dengan bilangan, notasi sigma, barisan dan deret serta materi penguatan pendidikan karakter. Pembahasan materi Matematika dilakukan secara rinci, terurut dan terstruktur mulai dari fakta di kehidupan sehari-hari, definisi, aturan, rumus, contoh terkait dan penerapan dalam kehidupan sehari-hari. Sedangkan materi penguatan pendidikan karakter disajikan dalam bentuk pesan moral dalam setiap pembahasan materi. Pesan tentang penguatan pendidikan karakter meliputi karakter kemandirian, karakter yang bernilai religius, jiwa kegotongroyongan, karakter semangat terintegrasi dan karakter nasionalis serta penyajiannya terintegrasi dalam setiap materi.

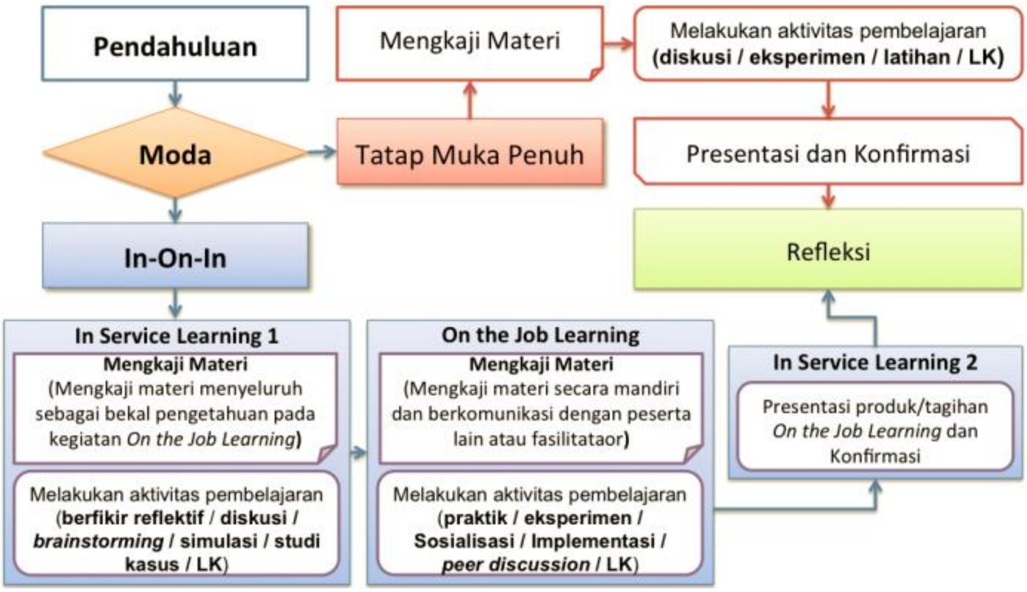
Pembahasan materi bilangan terdiri atas pengertian sistem bilangan, sifat keterbagian bilangan, aproksimasi (pendekatan) dan estimasi (penaksiran) dari suatu perhitungan, sifat bilangan berpangkat dan bentuk akar, serta operasi pada bilangan berpangkat. Disamping itu, materi tentang notasi sigma, sifat-sifat dan terapannya dalam penyajian suatu bentuk jumlahan. Selanjutnya, materi tentang karakteristik pola bilangan yang sangat berperan dalam membentuk suatu barisan dan deret bilangan. Materi barisan meliputi barisan aritmetika dan geometri, sifat-sifat dari unsur-unsur barisan, menentukan suatu barisan baru melalui penyisipan dan pengembangan konsep barisan. Pembahasan materi deret meliputi deret aritmetika dan deret geometri, hubungan antar unsur-unsur deret dan pengembangannya dalam notasi sigma khususnya, deret geometri berhingga dan deret geometri tak hingga. Pada subbab akhir, dibahas suatu barisan yang bukan barisan aritmetika maupun barisan geometri yaitu barisan berderajat dua, barisan berderajat tiga, dan barisan *Fibonacci*. Pembahasan meliputi definisi, sifat-sifat,cara menentukan rumus umum suku ke-$n$dan contoh-contoh aplikasinya.Setiap pembahasan, dimulai dengan contoh sederhana yang terkait, definisi, pengembangan teori, contoh-contoh yang mendukung dan diakhiri dengan latihan. Di samping itu, dikemukakan juga tentang hal-hal penting yang perlu mendapat penekanan bagi para peserta diklat, khususnya materi yang berkaitan dengan penguatan karakter. Diharapkan setelah mempelajari modul ini, peserta diklat Pengembangan Keprofesian Berkelanjutan atau pembaca memperoleh tambahan wawasan keilmuan matematika dan memiliki karakter kepribadian yang unggul. Implikasinya, diperoleh pribadi yang senatiasa peka, ada tanggapan, ada tindak lanjut, secara cepat dan hasilnya tepat serta berakhlak mulia.

E. Saran Penggunaan Modul

Kata hikmah

Suatu aktivitas yang dilakukan secara teratur, terurut, terukur dan terstruktur akan memberikan kemungkinan yang besar untuk meraih keberhasilan maka jadilah orang yang disiplin dalam semua hal

Modul ini disusun untuk digunakan dalam pelatihan model tatap muka penuh maupun model tatap muka In-On-In. Materi disajikan secara berjenjang sesuai urutan kompetensi yang dibutuhkan. Diharapkan Anda mempelajari modul ini sesuai urutan. Anda dapat mengukur kemampuan penguasaan kompetensi dengan mengerjakan soal latihan yang diberikan dan kemudian mencocokkan dengan kunci jawaban yang disediakan.

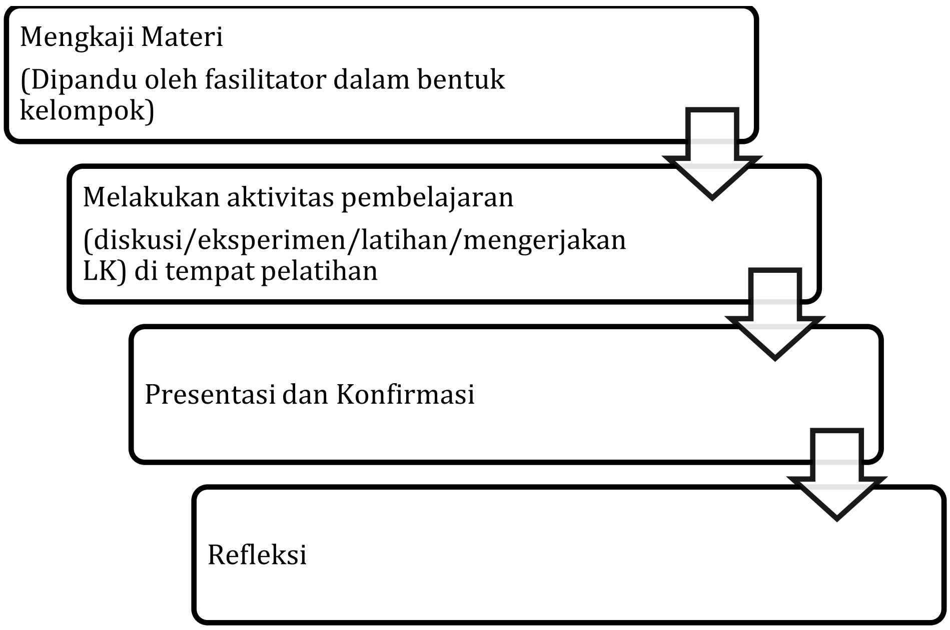


Alur Model Pembelajaran Tatap Muka

1. Deskripsi Kegiatan Diklat Tatap Muka Penuh

Kegiatan pembelajaran diklat tatap muka penuh adalah kegiatan fasilitasipeningkatan kompetensi guru melalui model tatap muka penuh yang dilaksanakanoleh unit pelaksana teknis di lingkungan ditjen. GTK maupun lembaga diklat lainnya.Kegiatan tatap muka penuh ini dilaksanakan secara terstruktur pada suatu waktuyang dipandu oleh fasilitator.

Tatap muka penuh dilaksanakan menggunakan alur pembelajaran sebagai berikut.



Rincian kegiatan pembelajaran tatap muka penuh adalah sebagai berikut.

a. Pendahuluan

Pada kegiatan pendahuluan, fasilitator memberi kesepatan peserta diklat untuk mencermati:

- Latar belakang yang memuat gambaran materi
- Tujuan kegiatan pembelajaran untuk setiap materi
- Kompetensi yang akan dicapai
- Ruang lingkup materi
- Langkah-langkah penggunaan modul.

b. Mengkaji Materi

Pada kegiatan mengkaji materi modul,fasilitator memberi kesempatan kepada guru sebagai peserta untuk mempelajari materi yang diuraikan secara singkat sesuai dengan indikator pencapaian hasil belajar. Guru sebagai peserta dapat mempelajari materi secara individual maupun berkelompok dan dapat mengkonfirmasi permasalahan kepada fasilitator.

c. Melakukan aktivitas pembelajaran

Pada bagian ini, peserta melakukan aktivitas pembelajaran sesuai dengan rambu-rambu atau instruksi yang tertera pada modul dan dipandu oleh fasilitator. Kegiatan pembelajaran pada aktivitas pembelajaran ini berbentuk interaksi langsung di kelas pelatihan sesama peserta pelatihan dan fasilitator.

Pada saat mengikuti aktivitas pembelajaran, peserta juga aktif menggali informasi dari berbagai sumber, mengumpulkan dan mengolah data sehingga peserta dapat mengambil kesimpjulan dari kegiatan pembelajaran yang berlangsung.

d. Presentasi dan Konfirmasi

Pada kegiatan ini, peserta mempresentasikan hasil kegiatan. Fasilitator melakukan konfirmasi terhadap paparan dan hasil yang telah dicapai oleh peserta.

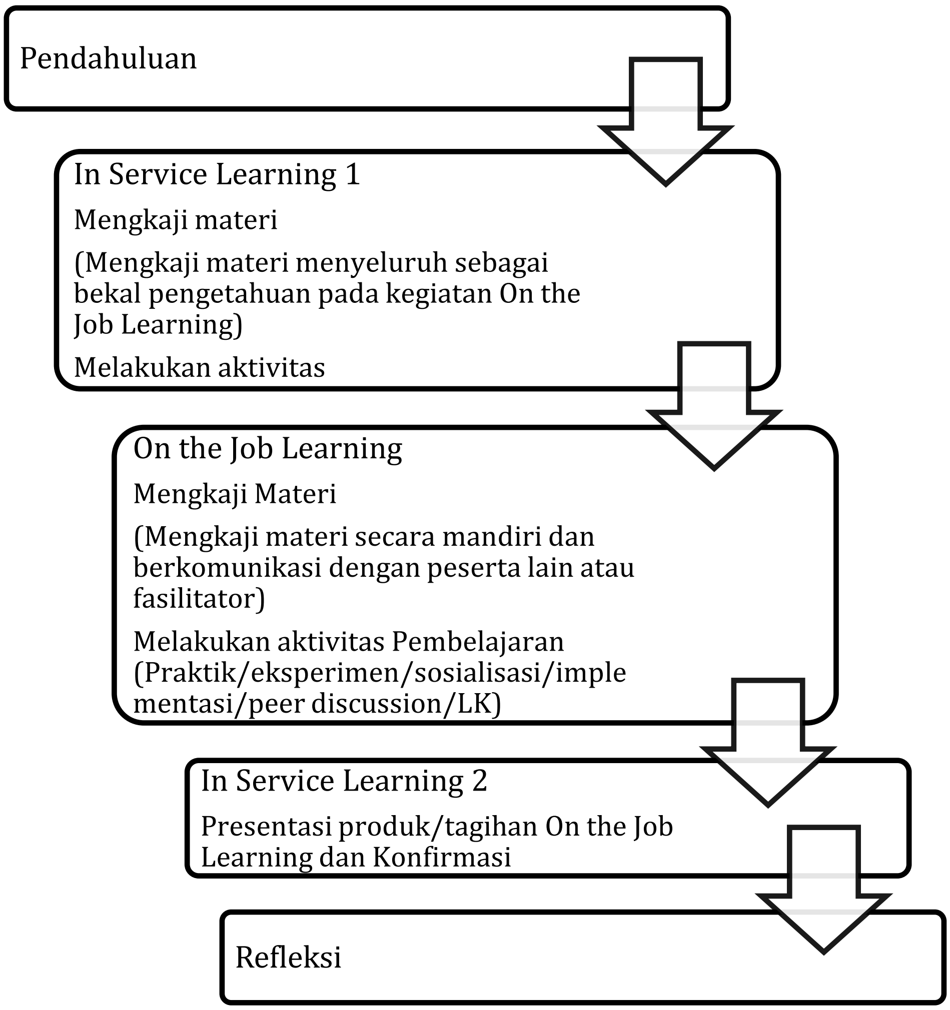
e. Refleksi

Pada bagian ini peserta dan fasilitator me-*review* atau melakukan refleksi materi berdasarkan seluruh kegiatan pembelajaran, kemudian didampingi oleh panitia menginformasikan tes akhir yang akan dilakukan oleh seluruh peserta yang dinyatakan layak tes akhir.

1. Deskripsi kegiatan diklat tatap muka In-On-In

Kegiatan diklat tatap muka dengan model In-On-In adalah kegiatan fasilitasi peningkatan kompetensi guru yang menggunakan tiga kegiatan utama yaitu *In Service Learning* 1 (In-1), *On the Job Learning* (On), dan *In Service Learning* 2 (In-2).

Garis besar alur kegiatan pembelajaran tatap muka In-On-In dapat dilihat pada diagram berikut.



Penjelasan lebih lengkap tentang alur di atas adalah sebagai berikut,

a. Pendahuluan

Kegiatan pendahuluan disampaikan pada saat In-1. Fasilitator memberi kesempatan pada peserta diklat untuk mencermati:

- latar belakang yang memuat gambaran materi,
- tujuan kegiatan pembelajaran setiap materi,
- kompetensi atau indikator yang akan dicapai melalui modul,
- ruang lingkup materi kegiatan pembelajaran,
- langkah-langkah penggunaan modul.

b. In Service Learning 1 (In-1)

- Mengkaji Materi

Pada kegiatan mengkaji materi modul ini, fasilitator memberi kesempatan kepada guru sebagai peserta untuk mempelajari materi yang diuraikan secara singkat sesuai dengan indikator pencapaian hasil belajar. Guru sebagai peserta dapat mempelajari materi secara individual maupun berkelompok dan dapat mengkonfirmasi permasalahan kepada fasilitator.

- Melakukan aktivitas pembelajaran

Pada kegiatan ini peserta melakukan kegiatan pembelajaran sesuai dengan rambu-rambu atau instruksi yang tertera pada modul dan dipandu oleh fasilitator. Kegiatanpembelajaran pada aktivitas pembelajaran berbentuk berinteraksi di kelas pelatihan, baik itudengan menggunakan metode berfikir reflektif, diskusi, *brainstorming*, simulasi,maupun studi kasus yang kesemuanya dapat melalui Lembar Kerja yang telahdisusun sesuai dengan kegiatan pada In-1.

Pada aktivitas pembelajaran materi ini peserta secara aktif menggali informasi,mengumpulkan dan mempersiapkan rencana pembelajaran pada *on the job learning*.

c. On the Job Learning (On)

- Mengkaji Materi

Pada tahap ini, guru mempelajari materi yang telah diuraikan pada In-1. Guru sebagai peserta membuka dan mempelajari kembali materi sebagai bahan dalam mengerjakan tugas-tugas yang ditagihkan.

- Melakukan aktivitas Pembelajaran

Pada kegiatan ini peserta melakukan kegiatan pembelajaran di sekolah maupun di kelompok kerja berbasis pada rencana yang telah disusun pada IN1 dan sesuai dengan rambu-rambu atau instruksi yang tertera pada modul. Kegiatan pembelajaran pada aktivitas pembelajaran ini akan menggunakan pendekatan/metode praktik, eksperimen, sosialisasi, implementasi, *peer discussion* yang secara langsung dilakukan di sekolah maupun kelompok kerja melalui tagihan berupa Lembar Kerja yang telah disusun sesuai dengan kegiatan pada ON.

Selama aktivitas pembelajaran On berlangsung, peserta secara aktif menggali informasi, mengumpulkan dan mengolah data dengan melalukan aktivitas yang telah ditentukan dan menyelesaikan tagihan pada *on the job learning*.

d. In Service Learning 2 (In-2)

Pada tahap ini, peserta memaparkan produk-produk tagihan On yang akan dikonfirmasi bersama oleh teman sejawat dan fasilitator.

e. Refleksi

Peserta bersama fasilitator me-*review* atau melakukan refleksi materi berdasarkan pengalaman selama mengikuti kegiatan pembelajaran. Fasilitator didampingi panitia menginformasikan tes akhir yang akan dilakukan oleh seluruh peserta yang dinyatakan layak mengikuti tes akhir.

2. Lembar Kerja

Modul pengembangan keprofesian berkelanjutan kelompok kompetensi J terdiri dari beberapa kegiatan pembelajaran yang di dalamnya terdapat aktivitas pembelajaran sebagai sarana untuk pendalaman dan penguatan materi. Untuk itu, pada modul ini disediakan lembar kerja sebagai berikut:

Daftar Lembar Kerja Modul

No.	Kode LK	Nama LK	Keterangan
1	LK 1.1.	Sistem Bilangan (In-1)	TM, IN-1
2	LK 1.2.	Sistem Bilangan (On)	TM, ON
3	LK 1.3.	Soal HOTS tentang Sistem Bilangan (On)	TM, ON
4	LK 2.1.	Keterbagian Suatu Bilangan dan Bilangan Berpangkat (In-1)	TM, IN-1
5	LK 2.2.	Keterbagian Suatu Bilangan dan Bilangan Berpangkat(On)	TM, ON
6	LK 2.3.	Soal HOTS tentang Keterbagian Suatu Bilangan dan Bilangan Berpangkat (On)	TM, ON
7	LK 3.1.	Pendekatan dan Penaksiran (In-1)	TM, IN-1
8	LK 3.2.	Pendekatan dan Penaksiran(On)	TM, ON
9	LK 3.3.	Soal HOTS tentang Pendekatan dan Penaksiran (ON)	TM, ON
10	LK 4.1.	Notasi Sigma dan Pola Bilangan (In-1)	TM, IN-1
11	LK 4.2.	Notasi Sigma dan Pola Bilangan(On)	TM, ON
12	LK 4.3.	Soal HOTS tentang Notasi Sigma dan	TM, ON

No.	Kode LK	Nama LK	Keterangan
		Pola Bilangan (ON)	
13	LK 5.1.	Barisan dan Deret Aritmetika (In-1)	TM, IN-1
14	LK 5.2.	Barisan dan Deret Aritmetika(On)	TM, ON
15	LK 5.3.	Soal HOTS tentang Barisan dan Deret Aritmetika	TM, ON
16	LK 6.1.	Barisan, Deret Geometri dan Barisan Selain Barisan Aritmetika maupun Barisan Geometri (In-1)	TM, IN-1
17	LK 6.2.	Barisan, Deret Geometri dan Barisan Selain Barisan Aritmetika maupun Barisan Geometri (On)	TM, ON
18	LK 6.3.	Soal HOTS tentang Barisan, Deret Geometri dan Barisan Selain Barisan Aritmetika maupun Barisan Geometri(On)	TM, ON

Keterangan:

TM : Digunakan pada Tatap Muka Penuh

IN-1 : Digunakan pada *In service Learning* 1

ON : Digunakan pada *On the Job Learning*

Kegiatan Pembelajaran 1

Sistem Bilangan

Kata hikmah

Hikmah dapat diambil dari apapun, manapun, kapanpun dan kondisi bagaimanapun, termasuk pada pengerjaan yang salah dari seseorang maka AMBIL dan HARGAILAH pekerjaan orang lain

A. Tujuan

Kata hikmah

Kualitas suatu pekerjaan ditentukan oleh Niat, Usaha dan IjinTuhan maka luruskan niat, optimalkan usaha serta penuhi perintah-Nya sehingga Dia mengijinkanmu

Setelah mempelajari modul ini, peserta diklat Pengembangan Keprofesian Berkelanjutan atau pembaca dapat memahami karakteristik bilangan dan hubungan di antara bilangan pada berbagai sistem bilangan dan teori bilangan serta menumbuhkan karakteristik pribadi unggul melalui penguatan nilai-nilai pendidikan karakter.

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

Kata hikmah

Setiap orang itu berkompeten dan setiap masalah dapat diselesaikan maka yakinilah bahwa Anda mampu menyelesaikan semua masalah jika Anda mau

Setelah mempelajari modul ini, peserta diklat atau pembaca dapat mencapai target kompetensi dirinya dalam penerapan materi Sistem Bilangan yang terintegrasi dengan penguatan karakter. Secara rinci, peserta diklat atau pembaca mampu :

1. menentukankarakteristik suatu jenis bilangan,

2. menggunakan hubungan berbagai jenis bilangan dalam menyelesaikan soal-soal dan permasalahan konteks sehari-hari.

C. Uraian Materi

Kata hikmah

Suatu target akan terealisir jika tercapai syarat-syaratnya, yaitu kepahaman ilmu dan keyakinan kebenarannya maka sajikan permasalahmu secara singkat, padat dan menarik

Sistem Bilangan

1. Bilangan Asli

Himpunan bilangan yang paling awal digunakan manusia adalah himpunan bilangan yang digunakan untuk mencacah (*to count*) banyak objek. Misal untuk mencacah banyak ternak, banyak rumah, dan sebagainya. Himpunan bilangan ini disebut himpunan bilangan asli (*natural numbers*). Notasi atau lambang untuk himpunan bilangan asli adalah $\mathbb{N}$ (internasional) atau A (Indonesia). Pada modul ini akan digunakan notasi $\mathbb{N}$ sehingga ditulis

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, \dots\}$$

a. Sifat tertutup

Jika dua bilangan sebarang diambil dari suatu himpunan bilangan H dan hasil penjumlahan tersebut adalah bilangan dalam H maka himpunan bilangan H tertutup terhadap operasi penjumlahan(*closure property*).

Sifat tertutup operasi penjumlahan pada $\mathbb{N}$

Misalkan $\mathbb{N}$ adalah himpunan bilangan asli, a dan b adalah sebarang bilangan asli maka berlaku $a + b$ merupakan bilangan asli. Fakta ini dapat dikatakan bahwa $\mathbb{N}$ tertutup terhadap operasi penjumlahan (*closed for addition*).

Contoh:

Selidikilah, apakah himpunan $K = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ tertutup terhadap operasi penjumlahan dan berikan alasannya?

Solusi:

Himpunan K tidak tertutup terhadap operasi penjumlahan karena terdapat bilangan 5, 7 ∈ K dan $5 + 7 = 12$, dengan $12 \notin K$.

b. Definisi perkalian

Perkalian (*multiplication*) dinyatakan sebagai penjumlahan berulang. Perkalian dinyatakan sebagai berikut:

$$a \times b = \underbrace{b + b + b + \cdots b}_{a \text{ suku}}$$

Sifat tertutup operasi perkalian pada ℕ

Misalkan ℕ adalah himpunan bilangan asli, a dan b adalah sebarang bilangan asli maka $a \times b$ juga merupakan bilangan asli. Fakta ini dapat dikatakan bahwa ℕ tertutup terhadap operasi perkalian (*closed for multiplication*).

Contoh:

Diberikan himpunan B = {1, 2} dan untuk setiap a, b dalam B, didefinisikan a×a=a, b×b=b, a×b = ab dan b×a = ba.

Himpunan B tertutup terhadap operasi perkalian karena seluruh hasil perkalian yang mungkin terjadi berada di dalam B, yaitu

$1 \times 1 = 1, \quad 1 \times 2 = 2, \quad 2 \times 1 = 2, \quad 2 \times 2 = 2.$

c. Sifat komutatif dan asosiatif

Untuk sebarang bilangan asli a, b, dan c berlaku

a) Sifat komutatif
   - Pada penjumlahan: $a + b = b + a$
   - Pada perkalian: $ab = ba$

b) Sifat asosiatif
   - Pada penjumlahan: $(a + b) + c = a + (b + c)$

- Pada perkalian: $(ab)c = a(bc)$

Sifat komutatif dapat kita gunakan untuk menyusun urutan bilangan yang akan dioperasikan. Sedangkan sifat asosiatif dapat kita gunakan untuk mengelompokkan bilangan-bilangan yang akan dioperasikan.

d. Sifat distributif

Misalkan a, b, dan c adalah sebarang bilangan asli, maka berlaku

$$a(b + c) = ab + ac.$$

Pada himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$ berlaku sifat distributif penjumlahan terhadap perkalian.Bukti sebagai latihan.

e. Definisi pengurangan

Operasi pengurangan didefinisikan dalam bentuk penjumlahan sebagai berikut:

$$a - b = x \leftrightarrow \ a = b + x$$

Berdasarkan definisi pengurangan, selidikilah apakah sifat komutatif juga berlaku untuk operasi pengurangan dan pembagian dua bilangan asli. Jelaskan jawaban Anda !.

Himpunan $\mathbb{N}$ tidak tertutup terhadap operasi pengurangan, cukup ditunjukkan satu contoh penyangkal, sebagai berikut.

Dipilih 2, 3 $\in \mathbb{N}$ dan didapat $2 - 3 = x \notin \mathbb{N}$, karena menurut definisi pengurangan, $2 = 3 + x$ dan tidak terdapat $x \in \mathbb{N}$ sehingga $2 = 3 + x$. Jadi, himpunan $\mathbb{N}$ tidak tertutup terhadap operasi pengurangan.

Coba Anda jelaskan logika pembuktian tersebut!

2. Bilangan Bulat

Mula-mula orang hanya memerlukan himpunan bilangan asli untuk perhitungan sehari-hari, misalnya seorang peternak mencacah banyak hewan ternak yang dimilikinya. Pada suatu saat, sang peternak tersebut mendapat musibah karena semua hewan ternaknya mati terserang wabah penyakit. Misalkan semula peternak tersebut mempunyai 100 ekor ternak. Karena mati semua maka hewan ternaknya habis tidak tersisa. Dalam kasus peternak tersebut, operasi hitung yang terjadi adalah $100 - 100$. Untuk semesta himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$, kita tidak dapat menemukan suatu bilangan yang memenuhi hasil operasi $100 - 100$. Oleh karena itu perlu dilakukan perluasan dengan menambah satu bilangan baru, yaitu 0 yang merupakan hasil operasi$100 - 100$. Himpunan bilangan asli yang sudah diperluas dengan menambah bilangan 0 tersebut dinamakan himpunan bilangan cacah (*whole numbers*), dinotasikan dengan $\mathbb{W}$. Dengan demikian $\mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots\}$.

Himpunan bilangan cacah diperluas lagi dengan menambahkan lawan dari setiap bilangan asli. Sebagai contoh, lawan dari bilangan 3, yang dinotasikan dengan -3, adalah suatu bilangan yang jika ditambahkan dengan 3 akan memberikan hasil 0. Jika lawan dari semua bilangan asli tersebut ditambahkan ke dalam himpunan bilangan cacah $\mathbb{W}$, maka akan diperoleh himpunan bilangan baru yang dinamakan himpunan bilangan bulat (*integers*), dan dinotasikan dengan $\mathbb{Z}$ (berasal dari bahasa Jerman "*Zahlen*"). Dengan demikian $\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$. Himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ dapat diklasifikasikan ke dalam tiga kelompok, yaitu:

1) himpunan bilangan bulat positif: $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$
2) himpunan bilangan nol: $\{0\}$
3) himpunan bilangan bulat negatif: $\{\dots, -4, -3, -2, -1\}$.

a. Pembagian bilangan bulat

Pembagian didefinisikan sebagai lawan dari operasi perkalian.

Jika a dan b masing-masing adalah bilangan bulat, dengan $b \neq 0$, maka pembagian $a \div b$, dinyatakan sebagai$\frac{a}{b}$, dan didefinisikan sebagai

$$\frac{a}{b} = z \text{ berarti } a = bz$$

Karena pembagian didefinisikan dalam bentuk perkalian, aturan-aturan pembagian bilangan bulat identik dengan aturan-aturan perkalian bilangan bulat. Hal yang perlu diperhatikan adalah pada pembagian $a \div b$, syarat$b \neq 0$ harus dipenuhi karena pembagian dengan 0 tidak didefinisikan.

Perhatikan dua situasi berikut.

a) Pembagian bilangan bukan 0 dengan 0.

$$a \div 0 \leftrightarrow \frac{a}{0} = x$$

Sebelum Anda melanjutkan membaca, coba Anda berikan penjelasan tentang apa artinya $\frac{a}{0}$ dan apakah terdapat suatu bilangan x yang menyebabkan $a \div 0$ menjadi bermakna?

Menurut definisi pembagian, bilangan x seharusnya adalah bilangan yang menyebabkan $a = 0 \times x$. Akan tetapi $0 \times x = 0$ untuk setiap x. Karena diketahui $a \neq 0$, maka situasi tersebut menjadi tidak mungkin. Dengan demikian $a \div 0$ tidak ada atau tidak didefinisikan.

b) Pembagian 0 dengan 0.

$$0 \div 0 \; atau \; \frac{0}{0} = x$$

Berdasarkan kasus $\frac{a}{0}, a \neq 0$, jelaskan makna $\frac{0}{0}$ dan apakah terdapat suatu bilangan x yang menyebabkan $0 \div 0$ menjadi bermakna?

Menurut definisi pembagian, jelas bahwa setiap nilai x dapat memenuhi karena $0 \times x = 0$ untuk setiap x. Akan tetapi hal ini akan mengakibatkan terjadi keabsurdan. Perhatikan contoh berikut:

Jika $\frac{0}{0} = 2$ maka $0 \times 2 = 0$ dan jika $\frac{0}{0} = 5$ maka $0 \times 5 = 0$.

Karena perkalian 0 masing-masing dengan 2 dan 5 menghasilkan bilangan yang sama, yaitu 0, maka dapat kita simpulkan bahwa $2 = 5$. Hal ini jelas salah sehingga $0 \div 0$ dinyatakan sebagai tidak tentu (*indeterminate*).

Himpunan $\mathbb{Z}$ tidak tertutup terhadap operasi pembagian. Untuk membuktikan, pilih $4, 5 \in \mathbb{Z}$ dan $4 \div 5 = \frac{4}{5}$, dengan $\frac{4}{5} \notin \mathbb{Z}$.

b. Sifat tertutup bilangan bulat

a) tertutup terhadap operasi penjumlahan, yaitu untuk semua $a, b \in \mathbb{Z}$, maka $(a + b) \in \mathbb{Z}$.

b) tertutup terhadap operasi perkalian, yaitu untuk semua$a, b \in \mathbb{Z}$, maka $(a \times b) \in \mathbb{Z}$.

c. Sifat asosiatif bilangan bulat

a) asosiatif terhadap operasi penjumlahan, yaitu untuk semua$a, b, c \in \mathbb{Z}$ berlaku

$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

b) asosiatif terhadap operasi perkalian, yaitu untuk semua$a, b, c \in \mathbb{Z}$ berlaku

$$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c.$$

d. Sifat komutatif bilangan bulat

a) asosiatif terhadap operasi penjumlahan, yaitu untuk $a, b \in \mathbb{Z}$ berlaku

$$a + b = b + a.$$

b) asosiatif terhadap operasi penjumlahan, yaitu untuk $a, b, c \in \mathbb{Z}$ berlaku

$$a \times b = b \times a.$$

e. Sifat distributif bilangan bulat

Untuk $a, b, c \in \mathbb{Z}$ berlaku$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$.

f. <u>Elemen identitas</u>

a) Terhadap operasi penjumlahan, yaitu terdapat dengan tunggal elemen $0 \in \mathbb{Z}$ sedemikian hingga untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$ berlaku $a + 0 = 0 + a = a$.

b) Terhadap operasi perkalian, yaitu terdapat dengan tunggal elemen $1 \in \mathbb{Z}$ sedemikian hingga untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$ berlaku $a \times 1 = 1 \times a = a$.

g. Invers penjumlahan

Untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$ terdapat dengan tunggal elemen $(-a) \in \mathbb{Z}$ sedemikian hingga $a + (-a) = (-a) + a = 0$, dengan 0 merupakan identitas penjumlahan.

h. Aturan kanselasi bilangan bulat

a) Terhadap operasi penjumlahan, yaitu untuk semua$a, x, y \in \mathbb{Z}$, apabila $a + x = a + y$ maka $x = y$.

Bukti:

Akan dibuktikan bahwa $a + x = a + y$ maka $x = y$.

$$\begin{array}{rcll} a + x & = & a + y & \text{hipotesis} \\ -a + (a + x) & = & -a + (a + y) & \text{kedua ruas ditambah } -a \\ (-a + a) + x & = & (-a + a) + y & \text{mengapa?} \\ 0 + x & = & 0 + y & \text{mengapa?} \\ x & = & y & \text{mengapa?} \end{array}$$

b) Terhadap operasi perkalian, yaitu untuk $a, x, y \in \mathbb{Z}$, jika $a \neq 0$ dan $a \times x = a \times y$ maka $x = y$

Coba Anda buktikan aturan kanselasi perkalian dengan kontraposisi dari implikasinya dan Anda bandingkan kedua cara bukti tersebut !

3. Bilangan Rasional

Kebutuhan manusia yang semakin berkembang, khususnya terkait dengan keakuratan dalam perhitungan dan pengukuran menyebabkan perlunya perluasan sistem himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$. Untuk keperluan ini, dibentuk sistem bilangan baru yang disebut himpunan bilangan rasional.

Himpunan bilangan rasional, dinotasikan dengan $\mathbb{Q}$, adalah himpunan semua bilangan dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dengan a dan b adalah bilangan bulat dan $b \neq 0$. Perhatikan bahwa bilangan rasional berbentuk pecahan. Pada aritmetika jika suatu bilangan dituliskan dalam bentuk $\frac{a}{b}$ berarti $a \div b$, dengan a dinamakan pembilang (*numerator*) dan b dinamakan penyebut (*denominator*). Apabila a dan b keduanya bilangan bulat, maka $\frac{a}{b}$ dinamakan sebagai:

1) pecahan biasa (*proper fraction*) jika $a < b$
2) pecahan tak biasa (*improper fraction*) jika $a > b$
3) bilangan cacah (*whole numbers*) jika b membagi habis a

Untuk setiap bilangan rasional $\frac{a}{b}$ yang tidak sama dengan 0, terdapat suatu invers perkalian $\frac{b}{a}$ sedemikian hingga $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$. Perhatikan bahwa $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{ab}{ab}$. Bentuk $\frac{b}{a}$ sering dinamakan sebagai kebalikan (*reciprocal*) dari $\frac{a}{b}$.

a. Sifat dasar pecahan

Sifat dasar pecahan (*fundamental property of fractions*) yaitu jika $\frac{a}{b}$ adalah sebarang bilangan rasional dan x adalah sebarang bilangan bulat yang tidak sama dengan 0, maka berlaku

$$\frac{a \times x}{b \times x} = \frac{x \times a}{x \times b} = \frac{a}{b}$$

Langkah-langkah untuk menyederhanakan suatu pecahan, sebagai berikut :

a) tentukan faktor persekutuan terbesar dari pembilang dan penyebut,
b) gunakan sifat dasar pecahan untuk menyederhanakan pecahan tersebut.

Contoh:

Dengan teliti dan cermat, sederhanakan pecahan berikut:

a. $\frac{24}{30}$ b. $\frac{300}{144}$

Solusi:

a. Langkah pertama tentukan faktor persekutuan terbesar dari pembilang dan penyebut.

$$\begin{aligned} 24 &= 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^0 \\ 30 &= 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \\ \text{FPB}(24, 30) &= 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^0 = 6 \end{aligned}$$

Selanjutnya gunakan sifat dasar pecahan untuk menyederhanakan pecahan.

$\frac{24}{30} = \frac{6 \cdot 2^2}{6 \cdot 5} = \frac{2^2}{5} = \frac{4}{5}$.

b. Dengan cara pada a., Anda selesaikan soal b dengan cepat dan tepat.

Perhatikan bahwa pecahan $\frac{4}{5}$sudah dalam bentuk paling sederhana karena FPB dari pembilang dan penyebut adalah 1.

b. **Operasi hitung bilangan rasional**

Jika $\frac{a}{b}$ dan $\frac{c}{d}$ adalah bilangan-bilangan rasional, maka berlaku :

a) terhadap operasi penjumlahan berlaku $\frac{a}{b}+\frac{c}{d} = \frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd} = \frac{ad+bc}{bd}$

b) terhadap operasi pengurangan berlaku $\frac{a}{b}-\frac{c}{d} = \frac{ad}{bd}-\frac{bc}{bd} = \frac{ad-bc}{bd}$

c) terhadap operasi perkalian berlaku $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

d) terhadap operasi pembagian berlaku $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$, dengan $\frac{c}{d} \neq 0$

Himpunan bilangan rasional $\mathbb{Q}$ bersifat tertutup terhadap operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian (dengan bilangan bulat bukan 0).

Contoh

Buktikan bahwa himpunan bilangan rasional $\mathbb{Q}$ tertutup terhadap operasi penjumlahan

Bukti

Akan ditunjukkan bahwa $\mathbb{Q}$bersifat tertutup terhadap operasi penjumlahan. Misalkan $\frac{x}{y}$ dan $\frac{w}{z}$ adalah sebarang dua bilangan rasional maka $x, y, w, z\ bilangan\ real, y \neq 0, z \neq 0$. Menurut definisi penjumlahan,

$$\frac{x}{y}+\frac{w}{z} = \frac{xz+wy}{yz}$$

Karena $x, y, w, z\ bilangan\ realy \neq 0, z \neq 0\ maka\ yz \neq 0$ sehingga $\frac{xz+wy}{yz}$ bilangan rasional.

c. **Sifat tertutup bilangan rasional**

a) terhadap operasi penjumlahan yaitu untuk $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$, maka berlaku $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \in \mathbb{Q}$.

b) terhadap operasi penjumlahan yaitu untuk $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$, maka $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d} \in \mathbb{Q}$.

d. **Sifat asosiatif**

a) terhadap operasi penjumlahan yaitu untuk $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \in \mathbb{Q}$, maka berlaku $\frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f}$.

b) terhadap operasi penjumlahan yaitu untuk $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \in \mathbb{Q}$, maka berlaku $\frac{a}{b} \times \left(\frac{c}{d} \times \frac{e}{f}\right) = \left(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}\right) \times \frac{e}{f}$.

e. **Sifat komutatif**

a) terhadap operasi penjumlahan yaitu untuk setiap $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \in \mathbb{Q}$, maka berlaku $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$.

b) terhadap operasi penjumlahan yaitu untuk setiap $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \in \mathbb{Q}$, maka berlaku $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \times \frac{a}{b}$.

f. **Sifat distributif**

Untuk setiap $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \in \mathbb{Q}$, maka berlaku $\frac{a}{b} \times \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \times \frac{e}{f}$.

g. **Elemen identitas**

a) terhadap operasi penjumlahan,yaitu terdapat dengan tunggal elemen $\frac{0}{1} \in \mathbb{Q}$ sedemikian hingga untuk setiap $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ berlaku $\frac{a}{b} + \frac{0}{1} = \frac{0}{1} + \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$.

b) terhadap operasi penjumlahan, yaituterdapat dengan tunggal elemen $\frac{1}{1} \in \mathbb{Q}$ sedemikian hingga untuk setiap $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ berlaku $\frac{a}{b} \times \frac{1}{1} = \frac{1}{1} \times \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$.

h. **Invers**

a) terhadap operasi penjumlahan, yaituuntuk setiap $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ terdapat dengan tunggal elemen $\left(-\frac{a}{b}\right) \in \mathbb{Q}$ sedemikian hingga $\frac{a}{b} + \left(-\frac{a}{b}\right) = \left(-\frac{a}{b}\right) + \frac{a}{b} = \frac{0}{1}$, dengan $\frac{0}{1}$ merupakan identitas penjumlahan.

b) terhadap operasi penjumlahan, yaitu untuk setiap $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, dengan $\frac{a}{b} \neq \frac{0}{1}$, terdapat dengan tunggal elemen $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a} \in \mathbb{Q}$ sedemikian hingga $\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} \cdot \frac{a}{b} = \frac{1}{1}$, dengan $\frac{1}{1}$ merupakan identitas perkalian.

4. Bilangan Irrasional

Yoga mempunyai sebidang kebun berbentuk persegi dengan luas 1600 m². Dia merencanakan untuk membuat pagar di sekeliling kebun tersebut. Berapa panjang pagar yang diperlukan oleh Yoga? Supaya dapat membantu Yoga, terlebih dahulu harus diketahui panjang sisi kebun agar dapat menghitung keliling kebun tersebut. Misal panjang sisi kebun adalah p meter. Berarti Yoga harus menyusun persamaan$p \times p = 1600$. Dalam hal ini$p = 40$ karena $40 \times 40 = 1600$ atau$40^2 = 1600$. Dengan demikian Yoga harus membangun pagar sepanjang$4 \times 40 = 160$ meter. Proses menentukan nilai $p = 40$ ini disebut proses melakukan penarikan akar kuadrat atau akar pangkat dua dari 1600 dan ditulis sebagai$\sqrt{1600} = 40$. Bentuk$\sqrt{1600}$ dibaca "*akar kuadrat dari* 1600" atau "*akar pangkat dua dari* 1600".

Penting untuk dicermati bahwa walaupun$(-40) \times (-40) = 1600$, akan tetapi dalam situasi ini panjang sisi tidak mungkin negatif sehingga kita hanya menggunakan nilai $p = 40$.

Secara umum, jika a tidak negatif $(a \geq 0)$ maka$\sqrt{a}$ adalah suatu bilangan tidak negatif yang hasil kuadratnya sama dengan a.

Akar kuadrat dari suatu bilangan nonnegatif n adalah suatu bilangan yang jika dikuadratkan hasilnya adalah n. Secara notasi, akar kuadrat positif dari n, dinyatakan dengan $\sqrt{n}$, didefinisikan sebagai suatu bilangan sedemikian hingga $\sqrt{n}\sqrt{n} = n$.

Secara umum dapat disiimpulkan:

- Jika$a \geq 0$, maka$\sqrt[n]{a} = b$ jika dan hanya jika $b^n = a$ dan $b \geq 0$.
- Jika $a < 0$ dan n bilangan ganjil, maka $\sqrt[n]{a} = b$ jika dan hanya jika $b^n = a$.

Anda coba untuk mencari penyelesaian$p^2 = 2$?. Karena tidak dapat ditemukan bilangan rasional p sedemikian hingga $p^2 = 2$, maka $\sqrt{2}$ disebut bilangan irrasional. Himpunan bilangan irrasional adalah himpunan bilangan yang representasi desimalnya tidak berhenti (*nonterminating*) atau tidak berulang (*nonrepeating*). Beberapa contoh bilangan irrasional selain $\sqrt{2}$ misalnya $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{10}$. Contoh bilangan irrasional yang lain adalah bilangan π yang merupakan rasio keliling lingkaran terhadap diameternya dan bilangan e yang merupakan bilangan yang digunakan sebagai bilangan dasar dalam pertumbuhan dan peluruhan. Nilai π sebesar 3,141592654 dan e adalah adalah 2,718281828 yang diperoleh dengan menggunakan kalkulator hanya berupa nilai pendekatan, bukan nilai eksak.

contoh

Buktikan bahwa $\sqrt{2}$ merupakan bilangan irrasional.

Bukti:

Dibuktikan dengan metode kontradiksi.

Andaikan $\sqrt{2}$ bukan bilangan irrasional. Artinya $\sqrt{2}$ merupakan bilangan rasional. Karena $\sqrt{2}$ bilangan rasional maka bentuk $\sqrt{2}$ dapat dinyatakan sebagai

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$$

dengan m dan n merupakan bilangan bulat dan faktor persekutuan terbesar dari m dan n adalah 1. Selanjutnya kedua ruas dikuadratkan, diperoleh

$$\begin{aligned} 2 &= \frac{m^2}{n^2} \\ m^2 &= 2n^2 \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa bentuk $m^2 = 2n^2$ menyebabkan m^2 merupakan bilangan genap, menurut definisi bilangan genap. Akibatnya m juga merupakan bilangan genap.

Karena m bilangan genap maka $m = 2k$ untuk suatu bilangan bulat k. Kemudian substitusikan persamaan $m = 2k$ ke persamaan $m^2 = 2n^2$, diperoleh $(2k)^2 = 2n^2$ atau $4k^2 = 2n^2$. Kedua ruas persamaan dibagi dengan 2, diperoleh $n^2 = 2k^2$.
Hal ini berakibat n^2 merupakan bilangan genap dan n juga bilangan genap. Padahal jelas bahwa m merupakan bilangan genap. Sebagai akibatnya, baik m dan n mempunyai faktor persekutuan terbesar 2. Hal ini bertentangan dengan pengadaian bahwa m dan n mempunyai faktor persekutuan 1. Terjadi kontradiksi. Pengandaian salah, sehingga terbukti bahwa $\sqrt{2}$ merupakan bilangan irrrasional.

a. Operasi dengan bentuk akar

Beberapa syarat yang perlu dipenuhi adalah menyederhanakan suatu bentuk akar yang merupakan bilangan irasional.

Suatu bentuk akar dapat disederhanakan (*simplified*) jika:

- Bilangan di bawah tanda akar (*radicand*) tidak mempunyai faktor dengan pangkat lebih besar dari 1
- Bilangan di bawah tanda akar tidak dituliskan dalam bentuk pecahan atau menggunakan pangkat negatif
- Tidak ada notasi akar pada penyebut dari pecahan

b. Aturan bentuk akar

Misal a dan b adalah bilangan-bilangan positif, maka

a. $\sqrt{0} = 0$

b. $\sqrt{a^2} = a$

c. $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

d. $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

5. Bilangan Real

Himpunan bilangan real merupakan gabungan dari himpunan bilangan rasional dan himpunan bilangan irrasional dan dinotasikan dengan $\mathbb{R}$.

a. Representasi desimal

Perhatikan representasi desimal dari sebuah bilangan real. Jika bilangan tersebut adalah bilangan rasional, maka representasi desimalnya adalah berhenti (*terminating*) atau berulang (*repeating*).

Contoh:

Dengan menggunakan kalkulator, tentukan jenis representasi desimal dari bilangan-bilangan rasional berikut.

a. $\frac{1}{4}$

b. $\frac{2}{3}$

c. $\frac{1}{6}$

d. $\frac{5}{11}$

Solusi:

1. $\frac{1}{4} = 0{,}25$ merupakan desimal berhenti (*terminating decimal*)
2. $\frac{2}{3} = 0{,}666$ merupakan desimal berulang (*repeating decimal*),
3. $\frac{1}{6} = 0{,}166\ldots$ merupakan desimal berulang (*repeating decimal*)
4. $\frac{1}{7} \approx 0{,}143$ tampilan layar kalkulator menunjukkan 0,1428571429

Bandingkan hasil perhitungan menggunakan kalkulator dengan menggunakan pembagian bersusun.

Apabila suatu desimal berulang, kita menggunakan tanda bar "‾" untuk menunjukkan banyak angka perulangannya. Sebagai contoh:

- Perulangan satu angka $\frac{2}{3} = 0,\overline{6}$
- Perulangan dua angka $\frac{5}{11} = 0,\overline{45}$; ; $\frac{1}{6} = 0,\overline{16}$

Bilangan real yang merupakan bilangan irrasional mempunyai representasi desimal yang tidak berhenti (*nonterminating*) atau tidak berulang (*nonrepeating*).

Sebagai contoh:

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &= 1{,}414213\ldots \\ \pi &= 3{,}141592\ldots \\ e &= 2{,}71828\ldots \end{aligned}$$

Pada bilangan-bilangan tersebut tidak terdapat pola perulangan sehingga merupakan bilangan irrasional.

Beberapa cara untuk mengklasifikasikan bilangan real, sebagai berikut :

1) Bilangan positif, bilangan negatif, atau nol
2) Bilangan rasional atau bilangan irrasional
   - Jika representasi desimalnya berhenti, maka merupakan bilangan rasional
   - Jika representasi desimalnya berulang, maka merupakan bilangan rasional
   - Jika bilangan tersebut tidak mempunyai representasi desimal yang berhenti atau berulang, maka merupakan bilangan irrasional

b. Sifat-sifat himpunan bilangan Real

Misalkan $a, b, c \in \mathbb{R}$ maka berlaku

	Penjumlahan	Perkalian
Tertutup	$(a+b) \in \mathbb{R}$	$ab \in \mathbb{R}$
Asosiatif	$(a+b)+c = a+(b+c)$	$(ab)c = a(bc)$
Komutatif	$a+b = b+a$	$ab = ba$
Distributif perkalian terhadap penjumlahan	$a(b+c) = ab+ac$	

c. Elemen identitas

a) terhadap operasi penjumlahan yaitu terdapat $0 \in \mathbb{R}$ sehingga untuk setiap $a \in \mathbb{R}$ berlaku $0 + a = a + 0 = a$.

Bilangan 0 tersebut dinamakan elemen identitas pada penjumlahan (*identity for addition*).

b) Terhadap operasi penjumlahan yaitu terdapat bilangan $1 \in \mathbb{R}$ sehingga untuk setiap $a \in \mathbb{R}$ berlaku

$$1 \times a = a \times 1 = a.$$

Bilangan 1 tersebut dinamakan elemen identitas pada perkalian (*identity for multiplication*).

d. Sifat invers

a) terhadap operasi penjumlahan yaitu untuk setiap bilangan $a \in \mathbb{R}$, terdapat dengan tunggal bilangan $(-a) \in \mathbb{R}$, dinamakan lawan atau invers penjumlahan (*additive inverse*) dari a, sehingga

$$a + (-a) = (-a) + a = 0$$

b) terhadap operasi perkalian yaitu untuk setiap bilangan $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$, terdapat dengan tunggal bilangan $a^{-} = \left(\frac{1}{a}\right) \in \mathbb{R}$, dinamakan lawan atau invers perkalian (*multiplication inverse*) dari a, sehingga$a \times a^{-1} = a^{-1} \times a = 1$.

Perhatikan contoh berikut.

$$5 \times \ldots \quad = \quad \ldots \times 5 \quad = \quad 1$$

Akan dicari bilangan yang jika dikalikan dengan 5 hasilnya 1.

$$5 \times \frac{1}{5} \quad = \quad \frac{1}{5} \times 5 \quad = \quad 1$$

Karena$\frac{1}{5} \in \mathbb{R}$, maka $\frac{1}{5}$ merupakan invers dari 5 pada perkalian.

6. Contoh Pembuktian Terkait Sistem Bilangan

Pada bagian ini akan diberikan beberapa uraian contoh pembuktian terkait sistem bilangan.

a. Buktikan bahwa hasil penjumlahan dua bilangan bulat genap merupakan bilangan bulat genap.

Bukti:

Dibuktikan dengan metode pembuktian langsung.

Misalkan m dan n merupakan sebarang bilangan bulat genap. Akan dibuktikan bahwa $m+n$ merupakan bilangan bulat genap. Menurut definisi bilangan genap, $m = 2r$ dan $n = 2s$ untuk r dan s sebarang anggota bilangan bulat.

Maka

$$\begin{aligned} m+n &= 2r+2s \\ &= 2(r+s) \end{aligned}$$

Misalkan $t = r + s$. Perhatikan bahwa t jelas merupakan bilangan bulat karena t adalah hasil penjumlahan bilangan-bilangan bulat. Sehingga bentuk $m + n$ dapat dituliskan sebagai $m + n = 2t$, dengan t merupakan bilangan bulat. Karena $m + n = 2t$, maka sesuai dengan definisi bilangan genap hasil penjumlahan $m + n$ juga bilangan genap. Dengan demikian terbukti bahwa hasil penjumlahan dua bilangan bulat genap merupakan bilangan bulat genap.

b. Buktikan bahwa hasil perkalian dua bilangan bulat ganjil juga merupakan bilangan bulat ganjil.

Coba Anda buktikan, sebagai acuan bahwa m suatu bilangan ganjil jika $m = 2n + 1$, untuk suatu n bilangan bulat.

c. Buktikan bahwa hasil penjumlahan bilangan rasional dan bilangan irrasional merupakan bilangan irrasional.

Bukti:

Dibuktikan dengan metode kontradiksi.

Andaikan hasil penjumlahan bilangan rasional dan bilangan irrasional bukan merupakan bilangan irrasional. Dengan kata lain, hasil penjumlahannya merupakan bilangan rasional.

Misalkan terdapat bilangan rasional r dan bilangan irrasional s sedemikian hingga $r + s$ merupakan bilangan rasional. Menurut definisi bilangan rasional, $r = \frac{a}{b}$ dan $\frac{c}{d}$, untuk suatu bilangan bulat a, b, c, dan d, dengan $b \neq 0$ dan $d \neq 0$. Menggunakan substitusi diperoleh

$\frac{a}{b} + s = \frac{c}{d}$ sehingga $\begin{aligned} s &= \frac{c}{d} - \frac{a}{b} \\ &= \frac{bc-ad}{bd} \end{aligned}$

Perhatikan bahwa bentuk $bc - ad$ dan bd, keduanya merupakan bilangan bulat. Mengapa, jelaskan pendapat Anda.

Akibatnya s merupakan hasil pembagian dua bilangan bulat, $bc - ad$ dan bd, dengan $bd \neq 0$. Sehingga menurut definisi bilangan rasional, s merupakan bilangan rasional. Hal ini menyebabkan kontradiksi dengan pemisalan awal bahwa s merupakan bilangan irrasional. Pengandaian salah. Dengan demikian terbukti bahwa hasil penjumlahan bilangan rasional dan bilangan irrasional merupakan bilangan irrasional.

D. Aktivitas Belajar

Kata hikmah

Kekuatan seseorang ditentukan oleh optimasi potensi diri, kontribusi tim dan pertolongan Tuhan maka ambil dan gunakan semua power untuk meraih sukses dalam setiap aktivitas

LK 1.1. Sistem Bilangan (In-1)

Kerjankanlah setiap soal secara serius, teliti, dan cermat serta optimalkan kekuatan kerja gotong royong sehingga kerja menjadi lebih ringan dan bermakna kebersamaan.

1. Suatu bilangan dilambangkan dengan a sedangkan lawannya dilambangkan dengan b. Jika $a < b$, manakah di antara a dan b yang merupakan bilangan positif dan manakah di antara a dan b yang merupakan bilangan negatif !

2. Pak Aan tahu bahwa jumlah dari dua bilangan rasional selalu merupakan bilangan rasional. Selanjutnya dia menyimpulkan bahwa jumlah dari dua bilangan irrasional juga selalu merupakan bilangan irrasional. Berikan beberapa contoh yang menunjukkan bahwa kesimpulan Pak Aan salah.

3. Bu Ira berpendapat bahwa $\sqrt{\frac{18}{50}}$ adalah bilangan irrasional karena merupakan rasio dari $\sqrt{18}$ yang merupakan bilangan irrasional dan $\sqrt{50}$ yang juga merupakan bilangan irrasional. Apakah pendapat Bu Ira dapat dibenarkan? Berikan alasannya.
4. Apakah 0 merupakan bilangan rasional? Dapatkah Anda menuliskannya dalam bentuk $\frac{p}{q}$, dengan p dan q adalah bilangan bulat dan $q \neq 0$? Jelaskan alasannya.
5. Berdasarkan karakteristiknya, periksalah pernyataan berikut, apakah bernilai benar atau salah serta berilah alasan Anda dengan singkat.
   a. Setiap bilangan rasional merupakan bilangan cacah.
   b. Setiap bilangan cacah merupakan bilangan rasional.

LK 1.2. Sistem Bilangan (On)

Kerjakansemua soal secara mandiri, serius, jujur, teliti dan cermat sehingga hasil yang diperoleh lebih optimal dan bermakna.

1. Tunjukkan bahwa himpunan bilangan rasional $\mathbb{Q}$ bersifat tertutup terhadap operasi pengurangan.
2. Tunjukkan bahwa himpunan bilangan rasional $\mathbb{Q}$ bersifat tertutup terhadap operasi pembagian dengan bilangan bulat bukan 0.
3. Jelaskan apakah himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ bersifat tertutup terhadap operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian (dengan bilangan bulat bukan 0).
4. Diberikan himpunan $\{1, 2, 3, 4\}$ dan operasi $\star$ yang didefinisikan sebagai $a \star b = 2a$. Buatlah sebuah tabel operasi * yang menunjukkan seluruh hasil yang mungkin dari operasi bilangan-bilangan pada himpunan tersebut.

LK 1.3. Soal HOTS tentang Sistem Bilangan (On)

Bersama kelompok, Anda diharapkan saling berdiskusi dan bekerja sama mempelajari teknik penyusunan soal *high order thinking skills* (HOTS). Materi HOTS dapat dipelajari pada modul PKG KK-I, Pedagogik, halaman 38-42. Dengan kreativitas Anda, susunlah 2 soal HOTS terkait dengan Sistem

Bilangan. Isikan pada kartu soal berikut. Soal yang Anda susun dapat berupa pilihan ganda atau uraian yang disertai dengan kunci jawaban atau pedoman pensekoran. Diutamakan merucuk pada kisi-kisi UN matematika SMA tahun 2017.

KARTU SOAL	
Jenjang	: Sekolah Menengah Atas
Mata Pelajaran	: Matematika
Kelas	: ...
Kompetensi Dasar	: ...
Indikator	: ...
Level	: Pengetahuan dan Pemahaman/Aplikasi/Penalaran*
Materi	: ...
Bentuk Soal	: Pilihan Ganda
BAGIAN SOAL DI SINI	
Kunci Jawaban	: ...

E. Latihan/Kasus/Tugas

Kata hikmah

Setiap orang itu berkompeten dan setiap masalah dapat diselesaikan maka yakinilah Anda mampu menyelesaikan semua masalah jika Anda mau

Kerjakan semua soal dengan teliti dan cermat serta mandiri sehingga memberi pengalaman dalam menyelesaikan masalah yang terkait.

1. Berdasarkan karakteristik bilangan rasional, periksalah dan pilihlah
   a. Enam bilangan rasional di antara 3 dan 4.
   b. Lima bilangan rasional di antara $\frac{3}{5}$ dan $\frac{4}{5}$.
2. Lakukan analisis, apakah bilangan 3,142678 merupakan bilangan rasional. Jika ya buktikan argumen Anda dan jika tidak, berikan alasannya.

3. Klasifikasikan bilangan-bilangan berikut yang dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{p}{q}$ dengan p dan q merupakan bilangan bulat dan $q \neq 0$.
   a. $0,\overline{3}$
   b. $1,\overline{27}$
   c. $0,2\overline{35}$
4. Dengan memeriksa secara teliti dan cermat, pilihlah sebuah bilangan irrasional di antara $\frac{1}{7}$ dan $\frac{2}{7}$.
5. Buktikan bahwa $\sqrt{3}$adalah bilangan irrasional.

F. Rangkuman

Kata hikmah

Rangkuman adalah inti yang merupakan representasi dari materi induknya dan produk rangkuman menunjukkan kualitas kompetensi seseorang maka buatlah rangkuman yang representatif

1. Himpunan bilangan asli (*counting numbers* atau *natural numbers*) digunakan untuk mencacah atau membilang banyak objek. Notasi atau lambang untuk himpunan bilangan asli menurut standar internasional adalah $\mathbb{N}$ atau untuk notasi umum di Indonesia adalah A. Dengan demikian $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$
2. Himpunan bilangan asli yang diperluas dengan menambah bilangan 0 dinamakan himpunan bilangan cacah (*whole numbers*), dinotasikan dengan $\mathbb{W}$. Dengan demikian $\mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \ldots\}$.
3. Jika lawan dari semua bilangan asli ditambahkan ke dalam himpunan bilangan cacah $\mathbb{W}$, maka akan diperoleh himpunan bilangan bulat (*integers*), dan dinotasikan dengan $\mathbb{Z}$ (berasal dari bahasa Jerman "*Zahlen*"). Dengan demikian $\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$.
4. Bilangan rasional adalah bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk perbandingan dua bilangan bulat $\frac{a}{b}$, dengan bilangan bulat a disebut sebagai pembilang dan bilangan bulat $b \neq 0$ disebut sebagai penyebut.

5. Himpunan bilangan irrasional adalah himpunan bilangan yang representasi desimalnya tidak berhenti (*nonterminating*) atau tidak berulang (*nonrepeating*).
6. Himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ merupakan gabungan himpunan bilangan rasional $\mathbb{Q}$ dan himpunan bilangan irrasional.

G. Umpan Balik dan Tindak Lanjut

Kata hikmah

Suatu pembelajaran sukses jika menjadikan targetmampu berubah, meningkat dan lebih baik maka perhatikan respon dan umpan baliknya

Evaluasi Diri

Setelah Anda mempelajari materi dalam kegiatan belajar ini maka lakukan beberapa hal berikut :

1. Tuliskan manfaat yang Anda dapatkan dalam mempelajari materi atau permasalahan konteks yang berkaitan dengan topik di atas
2. Tuliskan beberapa materi yang tidak mudah (sulit) untuk difahami
3. Tuliskan beberapa materi yang menantang untuk dipelajari sehingga memotivasi Anda untuk lebih giat dan serius belajar materi tersebut
4. Tuliskan beberapa materi lain yang dapat ditambahkan sehingga dapat melengkapi materi yang disajikan
5. Lakukan evaluasi diri secara jujur dari dengan mengerjakan lima soal pada Latihan. Pada masing-masing soal, pengerjaan yang benar mendapatkan skor maksimal 20. Jadi skor total 100. Capaian kompetensi (CK) dirumuskan sebagai

$$\text{CK} = \frac{\text{Skor yang diperoleh}}{100} \times 100\%$$

Setelah mengerjakan semua soal evaluasi cocokkan jawaban Anda dengan jawaban evaluasi pada lampiran untuk mengukur capaian kompetensi (CK).

Jika Anda mendapat kesulitan untuk memahami suatu materi pada kegiatan belajar ini maka berusahalah untuk menyelesaikan dan jangan berputus asa. Suatu proses penyelesaian masalah, baik sukses atau tidak akan menjadi pengalaman yang berharga. Berusahalah dengan gigih, fokus, sabar, dan optimis agar mendapat hasil yang optimal serta memberikan spirit untuk tetap mencoba dan mencoba lagi sampai berhasil. Salahsatu cara untuk menyelesaikan soal atau masalah melalui diskusi dengan teman atau bertanya kepada pembimbing atau mencari sumber lain (internet) yang dapat membantu Anda.

Tindak Lanjut

Seperti telah dijelaskan pada bagian sebelumnya bahwa evaluasi yang dilakukan oleh diri sendiri secara jujur adalah kunci keberhasilan mengukur capaian kompetensi (CK). Berkaitan dengan itu, pertimbangkan hal berikut.

Perolehan CK (dalam %)	Deskripsi dan tindak lanjut
$91 \leq \text{CK} \leq 100$	Sangat Baik, berarti Anda benar-benar memahami pengertian bilangan. Selanjutnya kembangkan pengetahuan dan tuangkan dalam pembelajaran.
$76 \leq \text{CK} < 91$	Baik, berarti Anda cukup memahami pengertian bilangan walaupun ada beberapa bagian yang perlu dipelajari lagi. Selanjutnya pelajari lagi beberapa bagian yang dirasakan belum begitu dipahami.
$50 \leq \text{CK} < 76$	Cukup, berarti Anda belum cukup memahami pengertian bilangan. Oleh karena itu Anda perlu mempelajari lagi bagian yang belum dikuasai dan menambah referensi dari sumber lain.
$\text{CK} < 50$	Kurang, berarti Anda belum dapat memahami pengertian bilangan. Oleh karena itu Anda perlu mempelajari lagi dari awal dan menambah referensi dari sumber lain.

Kegiatan Pembelajaran 2

Keterbagian Suatu Bilangan dan Bilangan Berpangkat

> **Kata hikmah**
>
> Setiap masalah pasti ada penyelesaian dan setiap usaha untuk menyelesaikan merupakan proses menuju sukses maka jangan berhenti berusaha karena sukses menunggu Anda

A. Tujuan

Setelah mempelajari modul ini, diharapkan peserta diklat atau pembaca dapat memahami keterbagian suatu bilangan, bilangan berpangkat, dan nilai-nilai penguatan karakter yang dapat diterapkan dalam mata pelajaran yang diampu.

> **Kata hikmah**
>
> Suatu pekerjaan akan menjadi berat dan menakutkan jika hanya difikirkan serta menjadi ringan dan mengembirakan jika dikerjakan maka bekerjalah dengan tetap berfikir

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

Setelah mempelajari modul ini, diharapkan peserta diklat atau pembaca dapat mencapai target kompetensi dirinya dalam menerapkan materi keterbagian suatu bilangan dan bilangan berpangkat yang terintegrasi dengan penguatan karakter. Secara rinci, peserta diklat Pengembangan Keprofesian Berkelanjutan atau pembaca mampu :

1. menerapkan hubungan pembagi dan sisa pembagiannya
2. menerapkan sifat-sifat suatu operasi bilangan pada berbagai soal dan konteks permasalahan

Kata hikmah

Niat menentukan arah dan tujuan pekerjaan sehingga keberadaan, kejelasan, kelurusan dan keikhlasan merupakan rute perpendek menuju sukses maka pasanglah niat yang kuat serta terimalah suksesnya.

C. Uraian Materi

Keterbagian Suatu Bilangan dan Bilangan Berpangkat

1. Pembagi dan Kelipatan

Kelipatan dari suatu bilangan bulat adalah hasil perkalian bilangan bulat tersebut dengan sebarang bilangan bulat. Untuk sebarang bilangan bulat m dan n, hasil perkalian kedua bilangan bulat tersebut, yaitu mn, sekaligus merupakan kelipatan m dan kelipatan n.

Secara umum jika m habis dibagi n, dengan $n \neq 0$, maka kita mempunyai persamaan $\frac{m}{n} = k$ dengan k adalah suatu bilangan bulat dan $n \neq 0$. Jika kita kalikan kedua ruas persamaan tersebut dengan n maka akan kita dapatkan $m = kn$, yang jelas menunjukkan bahwa m adalah kelipatan dari n.

Jika $n \neq 0$, maka pernyataan "m habis dibagi n" artinya akan tepat sama dengan pernyataan "m adalah kelipatan n".

Jika suatu bilangan bulat n habis dibagi oleh bilangan bulat yang lain d, maka kita katakan bahwa d adalah pembagi n. Istilah pembagi sama artinya dengan istilah faktor.

Jika hasil bagi $\frac{n}{d}$ juga merupakan bilangan bulat dan $d \neq 0$, maka pernyataan-pernyataan berikut mempunyai arti yang sama:

a. n adalah kelipatan d, n habis dibagi d, d adalah pembagi n, atau d membagi habis n
   Pernyataan-pernyataan tersebut sering dilambangkan dalam simbol atau notasi matematika $d|n$. Jika d tidak membagi habis n maka dilambangkan $d \nmid n$.

b. Untuk suatu bilangan bulat n kita tahu bahwa $n = n \cdot 1$. Hal ini berarti bahwa sebarang bilangan bulat yang tidak sama dengan 0 adalah pembagi dari dirinya sendiri.
c. Pembagi sejati dari suatu bilangan bulat n adalah pembagi positif dari n yang bukan n itu sendiri.

Pernyataan-pernyataan berikut mempunyai arti yang sama:

a. Jika a adalah pembagi b dan b adalah pembagi c, maka a adalah pembagi c.
b. Jika$b$ habis dibagi a dan c habis dibagi b, maka c habis dibagi a.
c. Jika b adalah kelipatan a dan c adalah kelipatan b, maka c adalah kelipatan a.

2. Bilangan Prima dan Komposit

Setiap bilangan asli yang lebih besar dari 1mempunyai paling sedikit dua buah pembagi atau faktor, yaitu 1 dan bilangan itu sendiri.

a. Bilangan prima adalah bilangan asli yang lebih besar dari 1 dan hanya tepat mempunyai dua buah pembagi yaitu 1 dan bilangan itu sendiri.
b. Bilangan komposit adalah bilangan asli lebih besar dari 1 yang bukan bilangan prima.
c. Bilangan 1 hanya mempunyai sebuah pembagi, yaitu 1 itu sendiri, sehingga 1 bukan bilangan prima dan bukan bilangan komposit. Ini adalah alasan mengapa 1 merupakan bilangan khusus.
d. Tidak ada bilangan asli yang sekaligus merupakan bilangan prima dan bilangan komposit.
e. Satu-satunya bilangan prima yang genap adalah 2.
f. Jika n adalah bilangan asli lebih dari 1 yang tidak mempunyai pembagi bukan merupakan bilangan prima kurang dari atau sama dengan $\sqrt{n}$, maka n merupakan bilangan prima.

Contoh bilangan prima 2, 3, 5, 7,29.

Cobalah Anda membuat rumus eksplisitnyadan apa kesimpulannya !.

3. FPB dan KPK

Pembagi setiap bilangan dari suatu kelompok bilangan bulat dinamakan sebagai pembagi persekutuan dari bilangan-bilangan bulat tersebut.

Dari pembagi persekutuan-pembagi persekutuan pada suatu kelompok bilangan bulat, pembagi persekutuan yang paling besar disebut Pembagi Persekutuan Terbesaratau Faktor Persekutuan Terbesar dan disingkat FPB.

Notasi untuk FPB dari bilangan bulat m dan n adalah FPB(m, n).

Jika satu-satunya pembagi persekutuan dari dua bilangan bulat adalah 1, maka kita katakan bahwa dua bilangan bulat tersebut saling prima relatif. Dengan kata lain, dua bilangan bulat m dan n saling prima relatif jika FPB$(m, n) = 1$. Pasangan bilangan bulat yang saling prima relatif sering disebut koprima.

Apa prediksi Anda tentang manfaat dan peran bilangan saling prima relative terhadap pengembangan teori bilangan !.

Kelipatan setiap bilangan dari suatu kelompok bilangan bulat dinamakan sebagaikelipatan persekutuan dari bilangan-bilangan bulat tersebut.

Dari kelipatan persekutuan-kelipatan persekutuan pada suatu kelompok bilangan bulat, kelipatan persekutuan yang paling kecil disebut Kelipatan Persekutuan Terkecildan disingkat KPK.

Notasi untuk KPK dari bilangan bulat m dan n adalah KPK$[m, n]$.

Algoritma Pembagian menyebutkan bahwa untuk sebarang bilangan bulat a dan sebarang bilangan asli b, terdapat tepat satu pasang bilangan bulat q dan r sedemikian hingga

$$\boldsymbol{a = qb + r}$$

dengan $0 \leq r < b$.

Pada Algoritma Pembagian, a disebut yang dibagi, b disebut pembagi, q disebut hasil bagi dan r disebut sisa bagi.

Pernyataan-pernyataan berikut mempunyai arti yang sama:

a. Jumlah dan selisih dari sebarang dua kelipatan n juga merupakan kelipatan n.

b. Jika $n|a$ dan $n|b$ maka $n|(a+b)$ dan $n|(a-b)$.

c. Jika n adalah pembagi persekutuan dari dua bilangan bulat, maka n sekaligus juga pembagi dari jumlah dan selisih dari dua bilangan bulat tersebut.

Untuk sebarang bilangan asli m dan n, dengan $m > n$, maka

$$\text{FPB}(m, n) = \text{FPB}(m - n, n).$$

Algoritma Euclid mengaplikasikan fakta tersebut berulang kali, menghasilkan FPB dari satu pasang bilangan asli. Algoritma Euclid yang Diperluas mempercepat proses pencarian FPB dengan menggunakan sisa bagi r ketika m dibagi n.

$$\text{FPB}(m, n) = \text{FPB}(m - n, n) = \text{FPB}(m - 2n, n) = \cdots = \text{FPB}(r, n)$$

Contoh

FPB(25,15)=FPB(25-15,15)=FPB(10,15)=FPB(15-10,10)=F(5,10)=FPB(5,5)=5.

4. Sifat Keterbagian Bilangan Bulat

Apabila kita membagi 42 dengan 6, maka tidak akan menghasilkan sisa bagi karena $42 \div 6 = 7$. Kita katakan bahwa 42 habis dibagi 6 atau 6 adalah faktor atau pembagi dari 42. Karena 42 juga habis dibagi 7, kita dapat mengatakan bahwa 7 juga merupakan faktor dari 42. Secara umum, jika a habis dibagi b, maka b adalah faktor dari a, atau dengan kata lain, faktor-faktor dari suatu bilangan membagi habis bilangan tersebut tanpa bersisa.

Karena 14 habis dibagi 2, yaitu $14 \div 2 = 7$, maka dikatakan bahwa14 merupakan kelipatan 2. Secara umum, jika a habis dibagi b, maka a adalah kelipatan dari b.

Beberapa sifat keterbagian suatu bilangan:

a. Suatu bilangan asli habis dibagi 2 jika angka satuan dari bilangan tersebut adalah 0, 2, 4, 6, dan 8.

b. Suatu bilangan asli habis dibagi 3 jika jumlah angka-angka pada bilangan tersebut habis dibagi 3.

c. Suatu bilangan asli habis dibagi 4 jika dua angka terakhirnya adalah 0 atau habis dibagi 4.

d. Suatu bilangan asli habis dibagi 5 jika angka terakhirnya adalah 0 atau 5.

e. Suatu bilangan asli habis dibagi 6 jika bilangan tersebut habis dibagi 2 dan 3.

f. Suatu bilangan asli habis dibagi 8 jika tiga angka terakhirnya habis dibagi 8.

g. Suatu bilangan asli habis dibagi 9 jika jumlah angka-angka pada bilangan tersebut habis dibagi 9.

h. Suatu bilangan asli habis dibagi 10 jika angka terakhirnya adalah 0.

i. Suatu bilangan asli habis dibagi 11 jika selisih jumlah angka pada posisi genap dengan jumlah angka pada posisi ganjil adalah 0 atau kelipatan 11.

Contoh :

Jika suatu bilangan terdiri atas 3 angka maka jumlah angka-angkanya habis dibagi3.

Bukti :

Akan ditunjukkan pembuktian sifat keterbagian oleh 3 untuk kasus khusus bilangan tiga angka (ini sebagai jembatan sebelum pembuktian yang lebih umum untuk bilangan n angka).

Misalkan suatu bilangan tiga angka dengan angka-angka a, b, dan $c$sehingga dapat dinyatakan dalam bentuk $100a + 10b + c$. Karena $100a + 10b + c = 99a + 9b + a + b + c$, maka berakibat $100a + 10b + c$ habis dibagi 3 jika dan hanya jika $a + b + c$ habis dibagi 3. Terbukti bahwa suatu bilangan tiga angka habis dibagi 3jika jumlah angka-angka pada bilangan tersebut habis dibagi 3.

Berikutnya akan dibuktikan hal yang lebih umum sifat keterbagian oleh 3 untuk bilangan n angka.

Suatu bilangan n angka dengan angka-angka $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ dapat dinyatakan dalam bentuk $N = 10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \cdots + 10a_1 + a_0$. Karena bentuk $10^n - 1$ habis dibagi 3 untuk setiap nilai n (Perhatikan bentuk $9, 99, 999, 9999, 99999$ dan seterusnya), kita dapat menuliskan dalam bentuk $N = (10^n - 1)a_n + (10^{n-1} - 1)a_{n-1} + \cdots + (10 - 1)a_1 + a_0 + a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1$. Sehingga N habis dibagi 3 jika dan hanya jika bentuk $a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0$ habis dibagi 3.

Dengan demikian terbukti bahwa suatu bilangan habis dibagi 3jika jumlah angka-angka pada bilangan tersebut habis dibagi 3.

Dengan memahami bukti ini dan mencirikan karakterisnya serta kreatifitas, buktikan sifat-sifat yang lain!.

5. Bilangan Berpangkat Positif

Secara umum, jika a adalah bilangan real dan n bilangan bulat positif, maka dapat dituliskan

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ faktor}}$$

Pada bentuk di atas a disebut bilangan pokok/basis, sedangkan n disebut pangkat/eksponen.

Contoh:

Hitunglah dan tentukan karakteristik perpangkatan berikut

a. $(-5)^3$ b. $(7)^5$ c. $(5z)^2$

Penyelesaian:

a. $$\begin{aligned}(-5)^3 &= (-5) \times (-5) \times (-5) \\ &= -125\end{aligned}$$

b. $$\begin{aligned}(7)^3 &= (7) \times (7) \times (7) \times (7) \times (7) \\ &= 16807\end{aligned}$$

Jika a^n suatu bilangan a dipangkatkan n ganjil maka tanda a^n adalah sama dengan tanda a.

c. $$\begin{aligned}(5z)^2 &= (5z) \times (5z) \\ &= 25z^2\end{aligned}$$

Jika a^n suatu bilangan a dipangkatkan n genap maka tanda a^nadalah positif.

6. Bilangan Berpangkat Nol dan Bilangan Berpangkat Negatif

Perhatikan pola bilangan berpangkat-bilangan berpangkat berikut ini:

$$\begin{aligned}3^2 &= 9 \\ 3^1 &= 3\end{aligned}$$

Perhatikan bagian ruas kanan dari pola di atas. Bilangan-bilangan yang menjadi hasil perpangkatan tersebut diperoleh dengan membagi 3 dari bilangan di atasnya. Karena 3 dibagi 3 hasilnya adalah 1, maka kita peroleh$3^0 = 1$. Apabila pola diteruskan, kita akan memperoleh bentuk:

$$3^{-1} = \frac{1}{3}$$
$$3^{-2} = \frac{1}{3^2}$$

Secara umum dari pola perpangkatan tersebut kita memperoleh pengertian bilangan berpangkat nol dan bilangan berpangkat negatif:

$$a^0 = 1, \text{ dengan } a \neq 0$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \text{ dengan } n \text{ bilangan bulat positif dan } a \neq 0$$

Contoh:

Hitunglah.

a. 5^0

b. $(-3)^{-2}$

Penyelesaian:

a. $5^0 = 1$

b. $(-3)^{-2} = \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{(-3).(-3)} = \frac{1}{9}$

Berdasarkan soal a., identifikasi semua karakteristik yang dimiliki perpangkatan 0 dan negatif.

7. Operasi pada Bilangan Berpangkat

Pada bagian ini akan dibicarakan beberapa aturan pada bilangan berpangkat yang terdiri atas lima aturan. Secara rinci disajikan sebagai berikut :

a. Aturan Pertama Bilangan Berpangkat

Pandang bentuk$3^4 \times 3^5$.

Sesuai dengan sifat bilangan berpangkat, $3^4 = \underbrace{3 \times 3 \times 3 \times 3}_{4\text{ faktor}}$ dan$3^5 = \underbrace{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}_{5\text{ faktor}}$. Sehingga bentuk $3^4 \times 3^5$ dapat dituliskan sebagai

$$\begin{aligned} 3^4 \times 3^5 &= \underbrace{(3 \times 3 \times 3 \times 3)}_{4\text{ faktor}} \times \underbrace{(3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3)}_{5\text{ faktor}} \\ &= \underbrace{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}_{9\text{ faktor}} \\ &= 3^9 \end{aligned}$$

Perhatikan pada bagian pangkat/eksponennya, jelas bahwa$4 + 5 = 9$ sehingga dapat dituliskan $3^4 \times 3^5 = 3^{4+5} = 3^9$.

Secara umum, aturan pertama bilangan berpangkat dapat dituliskan sebagai berikut:

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

dengan m dan n adalah bilangan bulat positif, $a \neq 0$ dan m, n positif.

Bukti :

Sesuai dengan sifat bilangan berpangkat, $a^m = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{m\text{ faktor}}$ dan$a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n\text{ faktor}}$. Sehingga bentuk $a^m \times a^n$ dapat dituliskan sebagai

$$\begin{aligned} a^m \times a^n &= \underbrace{(a \times a \ \times \ldots \times a)}_{m\text{faktor}} \times \underbrace{(a \times a \times \ldots \times a)}_{n\text{ faktor}} \\ &= \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{m+n\ \text{ faktor}} \\ &= a^{m+n} \end{aligned}$$

Jadi, terbuktilah bahwa $a^m \times a^n = a^{m+n}$.

Contoh :

Susun soal berikut dalam bentuk bilangan berpangkat secara mandiri, cermat dan tepat.

a. $5^3 \times 5^7$

b. $6^2 \times 6^3 \times 6^5$

Penyelesaian:

a. $5^3 \times 5^7 = 5^{3+7}$
$= 5^{10}$

b. $6^2 \times 6^3 \times 6^5 = (6^2 \times 6^3) \times 6^5 = 6^{2+3} \times 6^5 = 6^5 \times 6^5$
$= 6^{5+5} = 6^{10}$

Contoh :

Diberikan bilangan berpangkat berbentuk $3p \times 6p^2$. Secara mandiri, susun menjadi bentuk yang paling sederhana

Penyelesaian:

a. $3p \times 6p^2 = 3 \times p \times 6 \times p^2$
$= 3 \times 6 \times p^{1+2}$
$= 18p^3$

b. **Aturan Kedua Bilangan Berpangkat**

Secara umum, Aturan Kedua Bilangan Berpangkat dapat dituliskan sebagai berikut: untuk m dan n adalah bilangan bulat positif, $m > n$, $a \neq 0$.

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

Tanpa melihat bukti awal, buktikan dengan kreasi sendiri.

Contoh :

Sederhanakan $4^8 \div 4^3$ dan tuliskan hasilnya dalam bentuk bilangan berpangkat.

Penyelesaian

$$4^8 \div 4^3 = 4^{8-3}$$
$$= 4^5$$

Contoh :

Diberikan bilangan pangkat yang berbentuk dibawah ini. Bekerjalah secara mandiri, untuk menyusun soal menjadi bilangan bentuk berpangkat yang paling sederhana :

a. $\frac{p^5 \times p^6}{p^7}$

b. $9a^7 \div 3a^3 \times 6a^2$

Penyelesaian:

a. $\frac{p^5 x\, p^6}{p^7} \quad = \quad \frac{(p^{5+6})}{p^7} = \frac{p^{11}}{p^7} = p^{11-7} = p^4$

b. $9a^7 \div 3a^3 \times 6a^2 = 3a^{7-3} \times 6a^2 = 3a^4 \times 6a^2 = 18a^{4+2} = 18a^6$

c. **Aturan Ketiga Bilangan Berpangkat**

Secara umum, Aturan Ketiga Bilangan Berpangkat dapat dituliskan sebagai berikut : untuk m adalah bilangan bulat positif, $a \neq 0, b \neq 0$.

$$(ab)^m = a^m b^m$$

Tanpa melihat bukti awal, buktikan dengan kreasi sendiri.

Contoh:

Sederhanakan dengan kreatif, soal-soal berikut ini.

a. $(2 \times 4)^3$

b. $(2a)^3 \times (3a)^2$

Penyelesaian:

a. $(2 \times 4)^3 \quad = \quad 2^3 \times 4^3 = 2^3 \times 4^3 = 512$

b. $(2a)^3 \times (3a)^2 \quad = \quad 2^3 \times a^3 \times 3^2 \times a^2 = 8 \times a^3 \times 9 \times a^2 = 72a^5$

d. **Aturan Keempat Bilangan Berpangkat**

Secara umum, Aturan Keempat Bilangan Berpangkat dapat dituliskan sebagai berikut: untuk m adalah bilangan bulat positif, $a \neq 0, b \neq 0$ berlaku

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

Tanpa melihat bukti awal, buktikan dengan kreasi sendiri.

Contoh:

Berdasarkan aturan, susun menjadi bilangan yang bentuk bilangan berpangkat yang paling sederhana, secara mandiri, cermat dan tepat.

a. $\left(\frac{x}{y}\right)^3 \times x^4$

b. $\left(\frac{a}{2}\right)^4 \times 8a^2$

Penyelesaian:

a. $\left(\frac{x}{y}\right)^3 \times x^4 \quad = \quad \frac{x^3}{y^3} \times x^4 = \frac{x^3 \times x^4}{y^3} = \frac{x^7}{y^3}$

b. $\left(\frac{a}{2}\right)^4 \times 8a^2 \quad = \quad \frac{a^4}{2^4} \times 8a^2 = \frac{a^4 \times 8a^2}{16} = \frac{8}{16} \times a^4 \times a^2 = \frac{1}{2}a^6$

e. **Aturan Kelima Bilangan Berpangkat**

Secara umum, aturan kelima bilangan berpangkat dapat dituliskan sebagai berikut:

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

dengan m dan n adalah bilangan bulat positif,$a \neq 0$.

Tanpa melihat bukti awal, buktikan dengan kreasi sendiri.

Contoh :

Hitunglah dan sederhanakan secara mandiri sampai terbentuk paling sederhana

a. $(3^{-4})^2 \times (3^4)^3$

b. $\frac{\left(7^{-2} \times 7^6\right)^2}{(7^2)^3}$

Penyelesaian:

a. $(3^{-4})^2 \times (3^4)^3 \quad = \quad 3^{-4\times 2} \times 3^{4\times 3} = 3^{-8} \times 3^{12} = 81$

b. $\frac{\left(7^{-2} \times 7^6\right)^2}{(7^2)^3} \quad = \quad \frac{\left(7^{-2}\right)^2 \times \left(7^6\right)^2}{(7^2)^3} = \frac{7^{-2\times 2} \times 7^{6\times 2}}{7^{2\times 3}} = \frac{7^{-4} \times 7^{12}}{7^6} = 7^{-4+12-6} = 49$

8. Bilangan Berpangkat Pecahan

Secara umum, untuk a bilangan real, m dan n adalah bilangan bulat positif serta FPB$(m, n) = 1$ diperoleh

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Jika n bilangan genap, maka disyaratkan bahwa $a \geq 0$.

Dengan memahami aturan bilangan berpangkat, buktikan aturan 8 dengan menggunakan kreasi sendiri.

Catatan:

i. Seluruh aturan bilangan berpangkat bilangan bulat juga berlaku untuk bilangan berpangkat pecahan.
ii. Setiap ekspresi yang melibatkan tanda akar $\sqrt[n]{}$, dengan n adalah bilangan bulat positif disebut bentuk akar.

Contoh :

Dengan teliti dan kreatif, tuliskan penulisan bilangan berikut dalam bentuk akar dan hitunglah hasilnya.

a. $4^{\frac{1}{2}}$

b. $27^{-\frac{1}{3}}$

c. $8^{\frac{2}{3}}$

Penyelesaian:

a. $4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$

b. $27^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{27}} = \frac{1}{3^{\frac{3}{3}}} = \frac{1}{3}$

c. $8^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = 2^2 = 4$

Contoh :

Tuliskan bilangan di bawah ini ke dalam bentuk bilangan berpangkat pecahan.

a. $\sqrt[5]{a^3}$

b. $\frac{1}{\sqrt[n]{x^m}}$

Penyelesaian:

a. $\sqrt[5]{a^3} = (a^3)^{\frac{1}{5}} = a^{\frac{3}{5}}$

b. $\frac{1}{\sqrt[n]{x^m}} = \frac{1}{(x^m)^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{x^{\frac{m}{n}}} = x^{-\frac{m}{n}}$

D. Aktivitas Pembelajaran

Kata hikmah

Suatu keberanian untuk mencoba adalah modal awal kesuksesan dan kesabaran untuk mencoba lagi merupakan modal utama kesuksesan maka berusahalah untuk mencoba dan mencoba lagi dalam meraih kesuksesan

LK 2.1. Keterbagian Suatu Bilangan dan Bilangan Berpangkat (In-1)

Pilihlah setiap nomor pada soal-soal berikut maksimal dua item soal dan kerjankanlah secara serius, teliti, dan cermat serta optimalkan kekuatan kerja gotong royong sehingga kerja menjadi lebih ringan dan bermakna kebersamaan.

1. Selidikilah dengan cermat dan tuliskan kesimpulan yang Anda peroleh.
   a. Apakah setiap kelipatan 10 juga merupakan kelipatan 5?
   b. Bagaimana alasan Anda untuk menjelaskan bahwa suatu bilangan merupakan kelipatan 5?
   c. Bagaimana alasan Anda untuk menjelaskan bahwa suatu bilangan merupakan kelipatan 2?
2. Selidikilah dengan seksama dan tuliskan kesimpulan yang Anda peroleh.
   a. Manakah di antara bilangan-bilangan berikut yang habis dibagi 4
      12 312 512 2512 4312
   b. Apakah setiap kelipatan 100 juga merupakan kelipatan 4?
   c. Gunakan jawaban Anda pada bagian (b) untuk menjelaskan mengapa 5687623688 habis dibagi 4.

d. Gunakan jawaban Anda pada bagian (b) untuk menjelaskan mengapa 4650310 tidak habis dibagi 4.

3. Secara umum, apa kesimpulan Anda tentang keterbagian suatu bilangan?
4. Lakukan analisis secara teliti dan cermat dan tulis apa kesimpulan Anda?

   a. Tentukan bilangan kuadrat positif terkecil yang habis dibagi empat bilangan prima terkecil.

   b. Bagaimana jawaban pertanyaan (a) akan berubah seandainya kata "positif" dihilangkan?

5. Lakukan analisis secara teliti, fokus dan berikan kesimpulannya?

   a. Tentukan kelipatan positif terkecil dari 18 dan 24

   b. Tentukan tiga kelipatan persekutuan positif terkecil dari 18 dan 24.

   c. Tentukan kelipatan perkutuan terkecil dari 18 dan 24.

   d. Bagaimana hubungan antara kelipatan persekutuan yang Anda peroleh pada pertanyaan (c) dengan kelipatan persekutuan terkecil yang Anda peroleh pada pertanyaan (d)?

6. Melalui aturan tentang akar dari suatu bilangan, identifikasi karakteristik dan Jelaskan perbedaan antara $-\sqrt{9}$ dan $\sqrt{-9}$.

7. Bu Bilkis menyederhanakan bentuk $\sqrt{192}$ dengan menuliskan

$$\sqrt{192} = \sqrt{16 \times 12} = 4\sqrt{12}$$

   a. Selidiki dan Jelaskan mengapa $4\sqrt{12}$ bukan bentuk paling sederhana dari $\sqrt{192}$.

   b. Tunjukkan cara menyederhanakan bentuk $\sqrt{192}$ dengan mulai dari $4\sqrt{12}$.

8. Pak Wahyu berpendapat bahwa $(2)^3(5)^2 = (10)^5$. Dengan bahasa yang santun, komunikasikan dan bandingkan hasil yang Anda peroleh, jelaskan kelebihan atau kesalahannya.
9. Pak Faiz berpendapat bahwa $(2)^3(5)^3 = (10)^3$. Lakukan analisis dan membuat kesimpulan dengan cermat dan benar serta berikan argument yang kritis, kreatif dan santun !

10. Bu Futik berpendapat bahwa $a^0 + a^0 = 2a^0 = 2$. Selidikilah, apakah pendapat Bu Futik dapat dibenarkan? Jelaskan alasannya.

LK 2.2. Keterbagian Suatu Bilangan dan Bilangan Berpangkat (On)

Kerjakan semua soal berikut secara mandiri, serius, jujur, teliti dan cermat sehingga hasil yang diperoleh lebih optimal dan bermakna.

1. Soal-soal yang belum diselesaikan di In-1
2. Gunakan sifat eksponen untuk menmbuktikan bahwa untuk $a > 0$, maka $\left(\sqrt[n]{a}\right)^0 = 1$.
3. Gunakan sifat eksponen untuk menunjukkan bahwa untuk $a > 0$, maka $\sqrt{\sqrt{a}} = \sqrt[4]{a}$.
4. Pak Yafi berpendapat bahwa untuk setiap $x \neq 0$, bentuk x^{-2} adalah bilangan positif kurang dari 1. Lakukan analisis dan buatlah kesimpulan serta komunikasikan ke Pak Yafi dengan santun
5. Untuk nilai $x < 0$ apakah berlaku $\sqrt{x^2} = -x$? Buktikan bahwa statemen diatas salah dan penejelasahi
6. Pak Dito mengatakan bahwa jika a adalah bilangan bulat genap dan $x \geq 0$ maka $\sqrt{x^a} = x^{\frac{a}{2}}$. Apakah pendapat Pak Dito dapat dibenarkan? Jelaskan alasannya.
7. Pak Sonny menyederhanakan bentuk $\frac{7}{2\sqrt{7}}$ dengan menuliskan 7 sebagai $\sqrt{49}$, selanjutnya membagi pembilang dan penyebut dengan $\sqrt{7}$.
   a. Tunjukkan bahwa cara yang dilakukan Pak Sonny dapat dibenarkan.
   b. Selidikilah, apakah $\frac{7}{2\sqrt{5}}$ disederhanakan menggunakan cara yang sama? Jelaskan alasannya.
8. Untuk merasionalkan penyebut dari $\frac{4}{2+\sqrt{8}}$, Bu Afiffah mengalikan dengan $\frac{2-\sqrt{8}}{2-\sqrt{8}}$ sedangkan Bu Marisha mengalikan dengan $\frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$. Jelaskan bahwa cara yang dilakukan Bu Afiffah dan Bu Marisha semuanya dapat dibenarkan.

LK 2.3. Soal HOTS tentang Keterbagian Suatu Bilangan dan Bilangan Berpangkat (On).

Bersama kelompok, Anda diharapkan saling berdiskusi dan bekerja sama mempelajari teknik penyusunan soal *high order thinking skills* (HOTS). Dengan kreativitas Anda, susunlah 2 soal HOTS terkait dengan Keterbagian Suatu Bilangan dan Bilangan Berpangkat. Isikan pada kartu soal berikut. Soal yang Anda susun dapat berupa pilihan ganda atau uraian yang disertai dengan kunci jawaban atau pedoman pensekoran. Diutamakan merucuk pada kisi-kisi UN matematika SMA tahun 2017.

KARTU SOAL	
Jenjang	: Sekolah Menengah Atas
Mata Pelajaran	: Matematika
Kelas	: ...
Kompetensi Dasar	: ...
Indikator	: ...
Level	: Pengetahuan dan Pemahaman/Aplikasi/Penalaran*
Materi	: ...
Bentuk Soal	: Pilihan Ganda
BAGIAN SOAL DI SINI	
Kunci Jawaban	: ...

E. Latihan/Kasus/Tugas

Kata hikmah

Kualitas suatu kebahagian ditentukan oleh kesuksesan menyelesaikan masalah dengan kemampuan diri tanpa berbuat curang maka berbahagialah Anda yang berlaku jujur dalam setiap bekerja

1. Lakukan analisis kasus berikut dan tentukan hasilnya.

   Yoga mempunyai 24 bola merah dan 36 bola hijau yang dimasukkan ke dalam beberapa kotak. Masing-masing kotak memuat bola sama banyak.

Terdapat paling sedikit dua bola pada masing-masing kotak. Jika seluruh bola pada sebarang kotak mempunyai warna yang sama, berapa banyaknya bola yang mungkin pada masing-masing kotak?.

2. Dengan memeriksa karakteristiknya, tentukan bilangan bulat terbesar yang kurang dari 40 yang mempunyai sisa 2 jika dibagi oleh 7.
3. Dengan memeriksa karakteristiknya, tentukan bilangan tiga angka terbesar yang mempunyai sisa 4 jika dibagi oleh 11.
4. Dengan memeriksa karakteristiknya, tentukan berapa banyak bilangan bulat antara 0 dan 100 yang bersisa 1 jika dibagi oleh 6?
5. Dengan memeriksa karakteristiknya, tentukan berapa banyak bilangan bulat antara 200 dan 300 yang bersisa 5 jika dibagi oleh 8?
6. Perhatikan dengan teliti dan cermat bentuk bilangan berpangkat berikut :
   a. Tentukan bentuk paling sederhana dari $\left(\frac{-2a^7b^{-8}}{3a^{-3}b^5}\right)^3$,
   b. Bentuk pangkat positif paling sederhana dari $\frac{\left(-5x^5y^{-3}\right)^{-2}}{\frac{1}{\left(4x^{-7}y^5\right)^3}}$.

F. Rangkuman

1. Suatu bilangan bulat m habis dibagi oleh suatu bilangan bulat n, dengan$n \neq 0$, jika hasil bagi $\frac{m}{n}$ juga merupakan bilangan bulat. Jika hasil bagi $\frac{m}{n}$ bukan merupakan bilangan bulat maka m tidak habis dibagi n.
2. Bilangan prima adalah bilangan asli yang lebih besar dari 1 dan hanya tepat mempunyai dua buah pembagi/faktor, yaitu 1 dan bilangan itu sendiri.
3. Bilangan komposit adalah bilangan asli lebih besar dari 1 yang bukan bilangan prima.
4. Pembagi setiap bilangan bulat dalam suatu kelompok adalah pembagi persekutuan dari bilangan-bilangan bulat tersebut.

   Dari pembagi persekutuan-pembagi persekutuan pada suatu kelompok bilangan bulat, pembagi persekutuan yang paling besar disebut Pembagi Persekutuan Terbesaratau Faktor Persekutuan Terbesar dan disingkat FPB.

5. Jika satu-satunya pembagi persekutuan dari dua bilangan bulat adalah 1, maka dua bilangan bulat tersebut saling prima relatif. Dengan kata lain, dua

bilangan bulat m dan n saling prima relatif jika FPB$(m, n) = 1$. Pasangan bilangan bulat yang saling prima relatif sering disebut koprima.

Kelipatan setiap bilangan bulat dalam suatu kelompok adalah kelipatan persekutuan dari bilangan-bilangan bulat tersebut.

Dari kelipatan persekutuan-kelipatan persekutuan pada suatu kelompok bilangan bulat, kelipatan persekutuan yang paling kecil disebut Kelipatan Persekutuan Terkecildan disingkat KPK.

6. Algoritma Pembagian menyebutkan bahwa untuk sebarang bilangan bulat a dan sebarang bilangan asli b, terdapat tepat satu pasang bilangan bulat q dan r sedemikian hingga$a = qb + r$ dengan $0 \leq r < b$.

   Pada Algoritma Pembagian, a disebut yang dibagi, b disebut pembagi, q disebut hasil bagi dan r disebut sisa bagi.

7. Jika a adalah bilangan real dan n bilangan bulat positif, maka dapat disimpulkan

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ faktor}}$$

Pada bentuk di atas a disebut bilangan pokok/basis, sedangkan n disebut pangkat/eksponen. Maka didapat aturan bilangan berpangkat sebagai berikut

Aturan	Rumus	Keterangan
Pertama	$a^m \times a^n = a^{m+n}$	m dan n adalah bilangan bulat positif, $a \neq 0$.
Kedua	$a^m \div a^n = a^{m-n}$	m dan n adalah bilangan bulat positif, $m > n$, $a \neq 0$.
Ketiga	$(ab)^m = a^m b^m$	m adalah bilangan bulat positif, $a \neq 0, b \neq 0$
Keempat	$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$	m adalah bilangan bulat positif, $a \neq 0, b \neq 0$
Kelima	$(a^m)^n = a^{mn}$	m dan n adalah bilangan bulat positif,$a \neq 0$

a. Untuk $a \neq 0$ maka diperoleh bilangan berpangkat nolyaitu $a^0 = 1$.

b. Untuk bilangan berpangkat negatif, dapat ditulis $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$dengan n bilangan bulat positif dan $a \neq 0$.

c. Untuk bilangan berpangkat pecahan, dapat ditulis $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$, dengan n bilangan bulat positif dan a sebarang bilangan real. Jika n merupakan bilangan genap dan a bilangan negatif, maka bentuk $a^{\frac{1}{n}}$ dan $\sqrt[n]{a}$ bukan merupakan bilangan real.

Secara umum, untuk bilangan berpangkat pecahan dapat dituliskan

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

dengan m dan n adalah bilangan bulat positif dan $\text{FPB}(m, n) = 1$. Jika n bilangan genap, maka disyaratkan bahwa $a \geq 0$.

G. Umpan Balik dan Tindak Lanjut

Setelah Anda mempelajari materi dalam kegiatan pembelajaran 2 ini maka lakukan refleksi diri dan tindak lanjut. Refleksi yang dilakukan terhadap perubahan yang meningkat dan lebih baik dari sebelunya. Ranah refleksi terdiri atas sikap positif dalam belajar dan sikap positif penguatan karakter. Muncul dan tumbuh kesadaran, rasa butuh, serta niat untuk selalu belajar. Belajar bukan merupakan keterpaksaan tetapi suatu kewajiban dan bahkan menjadi suatu kebutuhan untuk meningkatkan kualitas hidup. Disamping itu, kualitas kecerdasan, keseriusan diikuti dengan akhlak yang baik sehingga menjadi pribadi yang unggul. Untuk menambah kemantapan, silahkan Anda baca dengan seksama dan lakukanlah semua perintahnya, pada umpan balik dan tindak lanjut kegiatan pembelajaran 1.

Kegiatan Pembelajaran 3

Pendekatan dan Penaksiran

Kata hikmah

Jika sudah selesai kamu melakukan suatu pekerjaan maka mulailah pekerjaan yang berikutnya sehingga akhir pekerjaan semakin dekat

A. Tujuan

Setelah mempelajari modul ini, diharapkan peserta diklat Pengembangan Keprofesian Berkelanjutan atau pembaca dapat memahami karakteristik pendekatan, penaksiran suatu operasi bilangan, dan nilai-nilai penguatan karakter yang dapat diterapkan dalam mata pelajaran yang diampu.

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

Setelah mempelajari modul ini, diharapkan peserta diklat Pengembangan Keprofesian Berkelanjutanatau pembaca dapat mencapai target kompetensi dirinya dalam menerapkan materi Pendekatan dan Penaksiran yang terintegrasi dengan penguatan karakter. Secara rinci, peserta diklat atau pembaca mampu :

1. menerapkan nilai pendekatan dan penaksiran dari suatu operasi bilangan
2. menerapkan suatu interpretasi hasil pendekatan dan penaksiran dari operasi bilangan

C. Uraian Materi

Pendekatan dan Penaksiran

Kata hikmah

Kewajiban manusia hanya pada dimensi usaha bukan keberhasilan sehingga setiap usaha sekecil apapun ada nilainya maka berusahalah semaksimal kamu jika diberi tugas

1. Pembulatan

Secara umum, langkah-langkah untuk melakukan pembulatan terhadap suatu bilangan desimal sampai n tempat desimal adalah sebagai berikut:

a. perhatikan bilangan desimal yang akan dibulatkan.

b. jika bilangan tersebut akan dibulatkan sampai n tempat desimal, maka cek angka yang berada tepat pada posisi ke-$(n+1)$ di sebelah kanan tanda koma.

c. apabila nilainya kurang dari 5 maka bulatkan ke bawah.

d. Apabila nilainya lebih dari atau sama dengan 5 maka bulatkan ke atas.

Contoh:

1. Bulatkan 4,1363 sampai:

   a. 2 tempat desimal.

   b. 3 tempat desimal.

   Penyelesaian:

   a. 4,1363 akan dibulatkan sampai 2 tempat desimal, sehingga dilakukan pengecekan angka yang berada pada posisi ketiga di sebelah kanan tanda koma, yaitu 6. Karena nilainya lebih dari 5 $(\mathbf{5} < \mathbf{6})$, maka lakukan pembulatan ke atas menjadi 4,14 dan dituliskan$\mathbf{4,1363 = 4,14}$.

   b. 4,136 akan dibulatkan sampai 3 tempat desimal, sehingga dilakukan pengecekan pada angka yang berada pada posisi keempat di sebelah kanan koma, yaitu 3. Karena $3 < 5$ maka pembulatan ke bawah menjadi 4,136 dan ditulis $4{,}1363 = 4{,}136$.

2. Periksalah berdasarkan karakteristiknya dan bulatkan bilangan-bilangan berikut sampai puluhan terdekat:

   a. 137

   b. 65

Penyelesaian:

a. Karena 137 lebih dekat ke 140 daripada ke 130, maka 137 dibulatkan ke atas sampai puluhan terdekat menjadi 140. Kita menuliskan $137 \approx 140$.

b. Karena 65 tepat di pertengahan antara 60 dan 70, maka 65 dibulatkan ke atas sampai puluhan terdekat menjadi 70. Kita menuliskan $65 \approx 70$.

Kata hikmah

Setiap pekerjaan adalah penting dan bermakna sehingga apapun pekerjaan harus diselesaikan dengan optimal maka jadikan keberhasilan pada setiap pekerjaan menambah spirit dan kebahagiaan hidup

2. Angka Penting

Angka penting menunjuk ke angka-angka pada suatu bilangan, tidak termasuk angka 0 yang posisinya di sebelah kiri dari seluruh angka lain yang bukan 0. Angka penting digunakan untuk melambangkan derajat keakuratan. Semakin banyak angka penting yang dimiliki oleh suatu bilangan, semakin besar derajat keakuratan dari bilangan tersebut.

Pandang beberapa bilangan berikut: 84,015; 0,0063; 0,05600. Pada bilangan 84,015 terdapat 5 angka penting. Pada bilangan 0,0063 hanya terdapat 2 angka penting. Adapun pada bilangan 0,05600 terdapat 4 angka penting, karena dua angka 0 terakhir digunakan untuk menunjukkan keakuratan dari bilangan tersebut.

Terdapat beberapa aturan untuk menentukan banyak angka penting suatu bilangan, yaitu :

a. Semua angka bukan 0 merupakan angka penting. Sebagai contoh,214 mempunyai 3 angka penting.

b. Angka 0 yang terdapat di antara angka bukan 0 merupakan angka penting. Sebagai contoh, 603 mempunyai 3 angka penting.

c. Pada bilangan desimal, semua angka 0 sebelum angka bukan 0 yang pertama bukan merupakan angka penting. Sebagai contoh, 0,006 hanya mempunyai 1 angka penting.

d. Apabila suatu bilangan cacah sudah dibulatkan, angka 0 yang terletak di sebelah kanan dari angka bukan 0 terakhir bisa merupakan angka penting ataupun bukan merupakan angka penting, tergantung dari bilangan itu dibulatkan sampai ke berapa. Sebagai contoh, apabila dibulatkan sampai ribuan terdekat, 23000 mempunyai 2 angka penting (tiga angka 0 terakhir bukan merupakan angka penting). Apabila dibulatkan sampai ratusan terdekat, 23000 mempunyai 3 angka penting (dua angka 0 terakhir bukan merupakan angka penting). Apabila dibulatkan sampai puluhan terdekat, 23000 mempunyai 4 angka penting (angka 0 terakhir bukan merupakan angka penting).

Untuk melakukan pembulatan dari suatu bilangan sehingga mempunyai n angka penting yang ditentukan, dapat dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut:

a. Perhatikan nilai dari angka yang berada pada posisi ke-n, dimulai dari kiri ke kanan dari angka pertama yang bukan 0. Selanjutnya cek nilai angka pada posisi ke-$(n + 1)$ yang tepat berada di sebelah kanan angka ke-n.

b. Apabila angka ke-$(n + 1)$ nilainya kurang dari 5, hapuskan angka ke-$(n + 1)$ dan seluruh angka di sebelah kanannya. Sebagai contoh, $2{,}04045 = 2{,}040$ (4 angka penting), $0{,}400127 = 0{,}400$ (3 angka penting).

c. Apabila angka ke-$(n + 1)$ nilainya lebih dari atau sama dengan 5, tambahkan 1 ke nilai angka ke-n dan hapuskan angka ke-$(n + 1)$ dan seluruh angka di sebelah kanannya.

Contoh:

1. Dengan meneliti secara cermat, tentukan banyaknya angka penting dari bilangan-bilangan berikut:

   a. 0,0401 d. 0,10005

   b. 3,1208 e. 3,56780

   c. 0,0005 f. 73000 (sampai ribuan terdekat)

Penyelesaian:

a. 3 angka penting
b. 5 angka penting
c. 1 angka penting
d. 5 angka penting.
e. 6 angka penting.
f. 2 angka penting.

2. Dengan memeriksa karakteristiknya, prediksikan bilangan-bilangan berikut dalam bentuk yang mempunyai banyak angka penting, seperti ditunjukkan:

   a. 0,003468; supaya mempunyai 3 angka penting.
   b. 0,07614; supaya mempunyai 2 angka penting.
   c. 14,408; supaya mempunyai 5 angka penting.
   d. 28,7026; supaya mempunyai 4 angka penting.

   Penyelesaian:

   a. Untuk menyatakan dalam bentuk yang mempunyai 3 angka penting, kita cek angka keempat dari kiri yang bukan 0. Ternyata angkanya adalah 8. Karena nilainya lebih dari 5, kita tambahkan 1 ke angka ketiga dari kiri yang bukan 0. Sehingga $0{,}003468 = 0{,}00347$ (sampai 3 angka penting).
   b. $0{,}07614 = 0{,}076$ (sampai 2 angka penting).
   c. $14{,}4089 = 14{,}409$ (sampai 5 angka penting).
   d. $28{,}7026 = 28{,}70$ (sampai 4 angka penting).

Kata hikmah

Dimensi manusia hanya pada usaha, bukan pada menetapkan keberhasilan tetapi dengan mengoptimalkan niat dan usaha maka kita dapat berharap (estimasi) lebih dalam menetapkan kesuksesan

3. Estimasi (Penaksiran)

Dalam kehidupan sehari-hari, kita sering menggunakan estimasi (penaksiran) apabila untuk memperoleh jawaban akhir yang pasti diperkirakan tidak memungkinkan ataupun tidak diperlukan. Estimasi sering menggunakan pembulatan, baik pembulatan ke bawah, pembulatan ke atas, ataupun pembulatan sampai n tempat desimal.

Secara umum, langkah-langkah untuk melakukan penaksiran adalah sebagai berikut:

a. Selalu cari bilangan-bilangan yang nantinya akan memudahkan dalam melakukan perhitungan, misalnya satuan, puluhan, ratusan, atau ribuan. Sebagai contoh, $45{,}4 \times 95{,}72 \approx 45 \times 100$.

b. Selalu ingat bilangan desimal sederhana yang ekuivalen dengan bilangan pecahan, misalnya $0{,}25 = \frac{1}{4}$, $0{,}5 = \frac{1}{2}$, $0{,}125 = \frac{1}{8}$.

c. Dalam melakukan perhitungan, supaya hasil estimasinya mendekati jawaban sebenarnya, satu faktor dibulatkan ke atas dan satu faktor lain dibulatkan ke bawah. Contoh, $3578 \times 4127 \approx 3600(\uparrow) \times 4000(\downarrow)$.

d. Untuk ekspresi berupa pecahan, bulatkan sampai ke bilangan yang mudah untuk dilakukan pembagian. Sebagai contoh, $\frac{18{,}52 \times 4{,}31}{1{,}79} \approx \frac{20 \times 4}{2}$.

Contoh:

1. Dengan memeriksa karakteritiknya secara cermat, taksirlah hasil perhitungan berikut:

   a. $59{,}67 - 24{,}265 + 11{,}32$

   b. $58{,}75 \times 47{,}5 \div 44{,}65$

   Penyelesaian:

   a. Kita bulatkan 59,67 ke 60, kemudian 24,265 ke 20, dan 11,32 ke 10. Sehingga $59{,}67 - 24{,}265 + 11{,}32 \approx 60 - 20 + 10 = 50$.

   b. Kita bulatkan 58,75 ke 60, kemudian 47,5 ke 50, dan 44,65 ke 40. Sehingga $58{,}75 \times 47{,}5 \div 44{,}65 \approx 60 \times 50 \div 40 = 75$.

2. Teliti dengan cermat dan kemudian taksirlah hasil perhitungan berikut:

   a. $26{,}5 + 19{,}85 - 8{,}21$

   b. $7{,}56 \times 4{,}105$

c. $5015 \div 198$

Penyelesaian:

a. $26{,}5 + 19{,}85 - 8{,}21 \approx 27 + 20 - 8 = 39$

b. $7{,}56 \times 4{,}105 \approx 8 \times 4 = 32$

c. $5015 \div 198 \approx 5000 \div 200 = 25.$

3. Teliti dengan cermat dan taksirlah hasil perhitungan berikut sampai 1 angka penting:

a. $\sqrt{39{,}7}$

b. $\frac{1}{39{,}7}$

Penyelesaian:

c. $\sqrt{39{,}7} \approx \sqrt{36}$
$= 6$ (sampai 1 angka penting)

Keterangan:

- 39,7 dibulatkan menjadi 36 (bilangan kuadrat terdekat)

d. $\frac{1}{39{,}7} \approx \frac{1}{40} = 0{,}025$
$\approx 0{,}03$ (sampai 1 angka penting)

D. Aktivitas Pembelajaran

Kata hikmah

Hikmah dapat diambil dari kondisi apapun, termasuk pada pengerjaan soal yang tidak benar maka hargailah hasil pekerjaan Anda dan teman Anda

LK 3.1. Pendekatan dan Penaksiran (In-1)

Kerjankanlah setiap soal berikut secara serius, teliti, dan cermat serta optimalkan kekuatan kerja gotong royong sehingga kerja menjadi lebih ringan dan bermakna kebersamaan.

1. Amati dengan teliti, cermat, dan kemudian taksirlah nilai dari $\frac{4{,}19 \times 0{,}0309}{0{,}0222}$.

2. Selidiki dengan teliti, cermat dan kemudian taksirlah nilai dari $\frac{52,41\times 0,044}{0,00118}$.

3. Periksalah dengan teliti, cermat dan kemudian taksirlah nilai dari $\sqrt{990}$.

4. Periksalah dengan teliti, cermat dan kemudian taksirlah nilai dari $\sqrt{\frac{8,05\times 24,78}{1,984}}$.

5. Amati dengan teliti, cermat dan taksirlah nilai dari $\frac{7,94}{2,01}$ sampai 1 angka penting.

6. Periksalah dengan teliti, cermat dan taksirlah nilai dari $\frac{21,83\times 0,498}{220,1}$ sampai 1 angka penting.

LK 3.2. Pendekatan dan Penaksiran (On)

Kerjakan semua soal berikut secara mandiri, serius, jujur, teliti dan cermat sehingga hasil yang diperoleh lebih optimal dan bermakna.

1. Berdasarkan karakteristiknya, periksalah dengan teliti, cermat dan taksirlah nilai dari $\sqrt{136,05-(2,985+7,001)^2}$ sampai 1 angka penting.
2. Pak Hafiz berpendapat bahwa 3,14 merupakan pendekatan yang lebih baik untuk nilai π daripada $\frac{22}{7}$. Periksalah dengan teliti, cermat danbandingkan hasil Anda dan pendapat Pak Hafis, berikan penjelasan denga jelas.
3. Diberikan pernyataan $12,5 = 12,50$. Bandingkan antara pengukuran panjang 12,50 meter dan pengukuran 12,5 meter. Berilah argumen Anda terhadap hasil pengukuran tersebut.

LK 3.3. Soal HOTS tentang Pendekatan dan Penaksiran (On)

Bersama kelompok, Anda diharapkan saling berdiskusi dan bekerja sama mempelajari teknik penyusunan soal *high order thinking skills* (HOTS). Dengan kreativitas Anda, susunlah 2 soal HOTS terkait dengan Pendekatan dan Penaksiran. Isikan pada kartu soal berikut. Soal yang Anda susun dapat berupa pilihan ganda atau uraian yang disertai dengan kunci jawaban atau pedoman pensekoran. Diutamakan merucuk pada kisi-kisi UN matematika SMA tahun 2017.

KARTU SOAL	
Jenjang	: Sekolah Menengah Atas
Mata Pelajaran	: Matematika
Kelas	: ...
Kompetensi Dasar	: ...
Indikator	: ...
Level	: Pengetahuan dan Pemahaman/Aplikasi/Penalaran*
Materi	: ...
Bentuk Soal	: Pilihan Ganda
BAGIAN SOAL DI SINI	
Kunci Jawaban	: ...

E. Latihan/Kasus/Tugas

Kata hikmah

Kekuatan tim dalam pekerjaan menjadikan beban ringan, suasana nyaman, hasil optimal maka bergotongroyonglah dalam setiap pekerjaan yang relevan sehingga hidup menjadi lebih mudah dan bermakna kebersamaan

Kerjakanlah dengan serius, cermat dan pantang menyerah serta diskusikan dengan sesama teman sehingga Anda mendapat teknik menyelesaiakan yang variatif.

1. Berdasarkan karakteristiknya, periksalah dengan teliti, cermat dan tentukan hasil pembulatan bilangan 0,1235 sampai:
   a. Sepersepuluhan terdekat.
   b. Seperseratusan terdekat.
   c. Seperseribuan terdekat.
2. Berdasarkan karakteristiknya, periksalah dengan teliti, cermat dan taksirlah hasil perhitungan berikut sampai 1 angka penting:
   a. $\frac{65{,}8 \times 24{,}1}{32{,}3}$.

b. $\frac{65{,}8\times\sqrt{24{,}1}}{3{,}23^2}$.

3. Berdasarkan karakteristiknya, periksalah dengan teliti, cermat dan taksirlah hasil perhitungan berikut sampai 1 angka penting:
   a. $\frac{97{,}85\times\sqrt{63{,}8}}{24{,}79}$
   b. $\frac{4870\times1227+968\times4870}{1936\times0{,}49}$
4. Teliti dengan cermat soal berikut :
   a. tentukan hasil penaksiran $\frac{\sqrt{120{,}21}\times114{,}96}{\sqrt{34{,}95}}$sampai 2 angka penting,
   b. tentukan hasil penaksiran $\frac{650\times786+8870\times778}{2{,}7\times2236+1237}$sampai 1 angka penting.
5. Sebuah akuarium mini berbentuk balok berukuran panjang 21,35 cm, lebar 17,4 cm, dan tinggi 9,86 cm. akuarium tersebut diisi penuh dengan air. Tentukan volume air yang diperlukan untuk memenuhi akuarium mini tersebut. Dengan teliti dan cermat, tentukan jawabannya dalam bentuk yang memuat 3 angka penting.
6. Keliling suatu lingkaran dinyatakan dalam rumus $K = 2\pi r$, adapun luas lingkaran tersebut dinyatakan dalam rumus $L = \pi r^2$, dengan r menyatakan jari-jari lingkaran. Dengan teliti dan cermat, tentukan:
   a. Keliling lingkaran yang mempunyai panjang jari-jari 997 cm (nyatakan jawabannya dalam bilangan bulat terdekat).
   b. Luas lingkaran yang mempunyai panjang jari-jari 11,09 cm (gunakan pendekatan nilai $\pi = 3{,}1416$ dan nyatakan jawabannya dalam bilangan bulat terdekat).

F. Rangkuman

1. Langkah-langkah untuk melakukan pembulatan terhadap suatu bilangan desimal sampai n tempat desimal adalah sebagai berikut:
   a. perhatikan bilangan desimal yang akan dibulatkan.
   b. jika bilangan tersebut akan dibulatkan sampai n tempat desimal, maka cek angka yang berada tepat pada posisi ke-$(n + 1)$ di sebelah kanan tanda koma.
   c. apabila nilainya kurang dari 5 maka bulatkan ke bawah.

   d. apabila nilainya lebih dari atau sama dengan 5 maka bulatkan ke atas.

2. Angka penting menunjuk ke angka-angka pada suatu bilangan, tidak termasuk angka 0 yang posisinya di sebelah kiri dari seluruh angka lain yang bukan 0. Angka penting digunakan untuk melambangkan derajat keakuratan. Semakin banyak angka penting yang dimiliki oleh suatu bilangan, semakin besar derajat keakuratan dari bilangan tersebut.
3. Beberapa aturan untuk menentukan banyak angka penting:
   a. semua angka bukan 0 merupakan angka penting.
   b. angka 0 yang terdapat di antara angka bukan 0 merupakan angka penting.
   c. pada bilangan desimal, semua angka 0 sebelum angka bukan 0 yang pertama bukan merupakan angka penting.
   d. apabila suatu bilangan cacah sudah dibulatkan, angka 0 yang terletak di sebelah kanan dari angka bukan 0 terakhir bisa merupakan angka penting ataupun bukan merupakan angka penting, tergantung dari bilangan itu dibulatkan sampai ke berapa.
4. Untuk melakukan pembulatan dari suatu bilangan sehingga mempunyai n angka penting yang ditentukan, kita mengikuti aturan berikut:
   a. perhatikan nilai dari angka yang berada pada posisi ke-n, dimulai dari kiri ke kanan dari angka pertama yang bukan 0. Selanjutnya cek nilai angka pada posisi ke-$(n+1)$ yang tepat berada di sebelah kanan angka ke-n.
   b. apabila angka ke-$(n+1)$ nilainya kurang dari 5, hapuskan angka ke-$(n+1)$ dan seluruh angka di sebelah kanannya.
   c. apabila angka ke-$(n+1)$ nilainya lebih dari atau sama dengan 5, tambahkan 1 ke nilai angka ke-n dan hapuskan angka ke-$(n+1)$ dan seluruh angka di sebelah kanannya.

G. Umpan Balik dan Tindak Lanjut

Setelah Anda mempelajari materi dalam kegiatan pembelajaran 3 ini, maka lakukan refleksi diri dan tindak lanjut.Refleksi yang dilakukan terhadap perubahan yang meningkat dan lebih baik dari sebelunya. Ranah refleksi terdiri atas sikap positif dalam belajar dan sikap positif penguatan karakter sehingga mulai tumbuh kepribadian unggul. Untuk memantapkan, silahkan Anda baca dan lakukan perintahnya, pada umpan balik dan tindak lanjut pada kegiatan pembelajaran 1.

Kegiatan Pembelajaran 4

Notasi Sigma dan Pola Bilangan

Kata hikmah

Suatu sikap yang menjaga martabat, membela dari gangguan dan mengharumkan nama Indonesia dalam segala bidang adalah sikap nasionalis maka berusahalah menjadi seorang nasionalis melalui pendidikan

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari modul ini, diharapkan peserta diklat Pengembangan Keprofesian Berkelanjutanatau pembaca dapat menerapkan materi notasi sigma, pola bilangan, dan nilai-nilai penguatan karakter pada mata pelajaran yang diampu.

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

Setelah mempelajari modul ini, diharapkan peserta diklat Pengembangan Keprofesian Berkelanjutanatau pembaca dapat mencapai target kompetensi dirinya dalam menerapkan materi notasi sigma dan pola bilangan yang terintegrasi dengan penguatan karakter. Secara rinci, peserta diklat atau pembaca mampu :

1. menerapkan notasi sigma,
2. membentuk pola bilangan,
2. membentuk suatu barisan dengan diketahui sifat-sifatnya,
3. membentuk suatu deret dengan diketahui sifat-sifatnya,
4. menerapkan konsep barisan dan deret dalam menyelesaikan permasalahan konteks sehari-hari yang terkait.

Kata hikmah

Derajat seseorang ditentukan oleh kualitas kecerdasan otak, kualitas keanggunan akhlaq dan sikap kepedulian kepada orang lain maka raihlah derajat kesempurnaan sejati diri.

C. Uraian Materi

Notasi Sigma dan Pola Bilangan

1. Notasi Sigma

Sigma adalah suatu huruf kapital Yunani yang berarti penjumlahan (*sum*) dan dinotasikan dengan $\sum$. Notasi sigma pertama kali diperkenalkan oleh seorang matematikawan yaitu Leonhard Euler pada tahun 1755. Penulisan dengan notasi sigma $\sum_{i=1}^{i=n} u_i$ mewakili penjumlahan suku penjumlahan indeks $i(u_i)$ dari suku penjumlahan pertama ($i = 1$) sampai dengan suku penjumlahan ke-n ($i = n$).

Uraian singkat diatas menjadi modal untuk mempelajari definisi notasi sigma, berikut.

Definisi

Suatu deret $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_k + \ldots + u_n$ dapat ditulis dengan menggunakan **notasi sigma**sebagai

$$\sum_{i=1}^{i=n} \boldsymbol{u_i}$$

.

Pada penulisan dengan notasi$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{u_i}$ dibaca sebagai penjumlahan suku-suku u_i, untuk i = 1 hingga i = n, dengan i = 1 disebut batas bawah penjumlahan dan $i = n$ disebut batas atas penjumlahan. Bilangan-bilangan asli dari 1 sampai dengan n disebut wilayah penjumlahan.

Sedangkan, suku penjumlahan yang ke-i atau u_i, disebut sebagai variabel berindeks dan huruf i bertindak sebagai indeks atau penunjuk penjumlahan.

Contoh :

a. Tuliskan dalam notasi sigma deret 100 bilangan asli yang berbentuk $1 + 5 + 9 + \cdots + 397$.

   Deret tersebut dapat disajikan dalam notasi sigma, dengan suku ke-i adalah $u_i = (4i - 3)$ dan i dari 1 sampai dengan $n = 100$, yaitu $\sum_{i=1}^{n} u_i$= $\sum_{i=1}^{100}(4i - 3)$.

b. Tuliskan dalam notasi sigma deret n bilangan asli ganjil kuadrat yang pertama $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n - 1)^2$

Deret tersebut dapat ditulis dalam notasi sigma dengan suku ke-i adalah $u_i = (2i-1)^2$ dan i dari 1 sampai n, yaitu $\sum_{i=1}^{n} u_i = \sum_{i=1}^{n} \quad (2i-1)^2$

Contoh :

Tulislah deret-deret berikut ini dengan menggunakan notasi sigma.

a. $5 + 15 + 45 + \cdots + 5 \times 3^{n-1}$

b. $2 + \frac{4}{3} + \frac{6}{5} + \frac{8}{7} + \frac{10}{9}$

Jawab :

a. Deret $5 + 15 + 45 + \ldots + 5 \times 3^{n-1}$; dapat ditulis dengan sigma dengan suku ke-i adalah $u_i = 5 \times 3^{i-1}$ dan i dari 1 sampai n.

Jadi, $5 + 15 + 45 + \ldots + 5 \times 3^{n-1} = \sum_{i=1}^{n} 5 \times 3^{i-1}$

b. Deret $2 + \frac{4}{3} + \frac{6}{5} + \frac{8}{7} + \frac{10}{9} = \frac{2}{1} + \frac{4}{3} + \frac{6}{5} + \frac{8}{7} + \frac{10}{9}$ dapat ditulis dengan notasi sigma dengan suku ke-i adalah $u_i = \frac{2i}{2i-1}$ dan i dari 1 sampai 5.

Jadi, Deret $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \frac{7}{8} + \frac{9}{10} = \sum_{i=1}^{5} \frac{2i}{2i-1}$

2. Sifat-sifat Notasi Sigma

Untuk menghitung deret yang dinotasikan dengan notasi sigma dapat disederhanakan prosesnya dengan menggunakan sifat-sifat notasi sigma. Beberapa sifat notasi sigma, tersaji dalam sifat-sifat notasi sigma, berikut ini.

Kata hikmah

Orang cerdas adalah orang yang memiliki sikap sensitif, responsif, akomudatif, akseleratif dan akuratif terhadap setiap permasalah maka berbahagialah menjadi orang cerdas dan berbudi luhur

a. Sifat-sifat Notasi Sigma

Misalkan $\sum_{i=1}^{n} u_i$ suatu penyajian notasi sigma dan a, b suatu konstanta real, maka berlaku

a) $\sum_{i=1}^{n} u_i = \sum_{j=1}^{n} u_j$

b) $\sum_{i=1}^{n} a = n\, a$

c) $\sum_{i=1}^{n}(au_i + bv_i) = a\sum_{i=1}^{n} u_i + b\sum_{i=1}^{n} v_i$

d) $\sum_{i=1}^{n}(au_i - bv_i) = a\sum_{i=1}^{n} u_i - b\sum_{i=1}^{n} v_i$

e) $\sum_{i=1}^{n}(au_i + bv_i)^2 = a^2\sum_{i=1}^{n} u_i^2 + 2ab\sum_{i=1}^{n} u_i v_i + b^2\sum_{i=1}^{n} v_i^2$

f) $\sum_{i=1}^{n}(au_i - bv_i)^2 = a^2\sum_{i=1}^{n} u_i^2 - 2ab\sum_{i=1}^{n} u_i v_i + b^2\sum_{i=1}^{n} v_i^2$

Untuk memahami sifat-sifat tersebut, akan dibuktikan beberapa sifat, yaitu sifat b), c) dan sifat e), sedangkan sifat yang lain, sebagai latihan.

Bukti

b) $\sum_{i=1}^{n} a = a + a + a + \dots + a = n\,a$

c) $\sum_{i=1}^{n}(au_i + bv_i) = a\sum_{i=1}^{n} u_i + b\sum_{i=1}^{n} v_i$

$\sum_{i=1}^{n}(au_i + bv_i) = \sum_{i=1}^{n} au_i + \sum_{i=1}^{n} b\,v_i$

$= a\sum_{i=1}^{n} u_i + b\sum_{i=1}^{n} v_i$

Jadi, $\sum_{i=1}^{n}(au_i + bv_i) = a\sum_{i=1}^{n} u_i + b\sum_{i=1}^{n} v_i$

e) $\sum_{i=1}^{n}(au_i + bv_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}\{(au_i)^2 + 2\,(au_i)(bv_i) + (bv_i)^2\}$

$= \sum_{i=1}^{n}\{a^2 {u_i}^2 + 2ab\; u_i\, v_i + b^2 {v_i}^2\}$

$= a^2\sum_{i=1}^{n} {u_i}^2 + 2ab\sum_{i=1}^{n} u_i v_i + b^2\sum_{i=1}^{n} {v_i}^2$

Jadi, terbukti bahwa

$\sum_{i=1}^{n}(au_i + bv_i)^2 = a^2\sum_{i=1}^{n} {u_i}^2 + 2ab\sum_{i=1}^{n} u_i v_i + b^2\sum_{i=1}^{n} {v_i}^2$

Contoh :

Berdasarkan sifat-sifat notasi sigma, tentukan nilai dari notasi-notasi sigma berikut

a. $\sum_{\mathrm{i}=1}^{5}(4\mathrm{i} - 1)$

b. $\sum_{\mathrm{i}=1}^{5}(2\mathrm{i} + 3)^2$

Jawab

a. $\sum_{i=1}^{5}(4i - 1) = 4\sum_{i=1}^{5} i - \sum_{i=1}^{5} 1$

$= 4\,(1 + 2 + 3 + 4 + 5) - 5\,.\,1 = 60 + 5 = 65$

Jadi, $\sum_{i=1}^{5}(4i - 1) = 65$.

b. Bedasarkan sifat notasi sigma, didapat

$\sum_{i=1}^{n}(au_i + bv_i)^2 = a^2 \sum_{i=1}^{n} u_i^2 + 2ab \sum_{i=1}^{n} u_i . v_i + b^2 \sum_{i=1}^{n} v_i^2$

dengan n=5, a = 2, b = 3, u_i = i dan v_i=1 sehingga

$\sum_{i=1}^{5}(2i + 3)^2 = 2^2 \sum_{i=1}^{5} i^2 + 2\ 2(3) \sum_{i=1}^{5} i + (3)^2 \sum_{i=1}^{5} 1^2$

$= 4\ (1^2+2^2+3^2+4^2+5^2) + 12\ (15) + 9 . 1$
$= 4\ \ 55 + 90 + 9 = 319$

Jadi, nilai dari $\sum_{i=1}^{5}(2i + 3)$ = 319.

Contoh :

Diberikan jumlahan n bilangan berikut, tuliskan dalam notasi sigma dan hitunglah jumlahan dari jumlahan tersebut :

a. 5 + 8 + 11 + … + (3n+2)
b. 3 + 6 + 12 + … + 1536.

Jawab :

a. Jumlahan$n$ bilangan asli pertama, 5 + 8 + 11 + … + (3n+2) dapat ditulis dengan notasi sigma dengan suku ke-i adalah $u_i = i$, dari i=1 sampai i=n, yaitu $\sum_{i=1}^{n}(3i + 2)$

sehingga dapat ditulis 5 + 8 + 11 + … + (3n+2) = $\sum_{i=1}^{n}(3i + 2)$.

Jumlahan5 + 8 + 11 + … + (3n+2), dengan suku pertama $u_1 = a$ = 5, b=3 dan u_n = n sehingga didapat jumlah n suku-suku pertamanya adalah

$$S_n = \frac{1}{2}n\ (\ a + u_n\ ) = \frac{1}{2}n\ (5 + (3n+2)) = \frac{1}{2}n\ (3n+7).$$

Jadi, dapat ditulis dalam notasi sigma

$$\sum_{i=1}^{n}(3i + 2) = \frac{1}{2}n\ (3n+7).$$

b. Jumlahan 3 + 6 + 12 + … + 1536 dapat ditulis dengan notasi sigma dengan suku ke-i adalah $u_i = 3\ \ 2^{i-1}$, dari i =1 sampai i=10 (Anda cek), yaitu $\sum_{i=1}^{n} 3\ \ 2^{n-1}$.

Jadi, dapat ditulis

3 + 6 + 12 + … + 1536 = $\sum_{i=1}^{n} 3 \times 2^{n-1}$.

Jumlahan 3 + 6 + 12 + … + 1536, dengan suku pertama u_1= a = 3, r=2 dan u_n = 3 2^{n-1} sehingga didapat jumlah n suku-suku pertamanya adalah

$$S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1} = \frac{3(2^n-1)}{r-1}$$

Jadi, dapat ditulis dalam notasi sigma

$$3 + 6 + 12 + \ldots + 1536 = S_{10} = \frac{3(2^{10}-1)}{2-1} = 3{,}069.$$

Contoh :

Dengan teliti, cermat dan kreatif, tentukan nilai $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)}$.

Jawab

Berdasarkan sifat-sifat notasi sigma, didapat

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{n}{n+1}$$

Jadi, $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$.

3. Pola Bilangan

Dalam mempelajari bilangan, ditemukan beberapa kumpulan bilangan yang memiliki ciri atau pola tertentu. Pola pada bilangan ini berupa aturan atau rumus yang digunakan dalam menentukan urutan atau letak suatu bilangan dari sekumpulan bilangan yang telah ditentukan.

Definisi

Pola bilangan adalah suatu **aturan tertentu** yang diberlakukan pada kumpulan bilangan

Suatu pola bilangan yang diberlakukan pada himpunan bilangan akan menghasilkan susunan bilangan yang berpola dalam himpunan tersebut.

Contoh:

Misalkan himpunan S, dengan S = { 5, 9, 17, 13, 21 }. Diberikan pola bilangan pada S, sebagai berikut bilangan pertama adalah 5 dan bilangan berikutnya adalah empat lebih besar dari bilangan sebelumnya. Dengan menerapkan pola tersebut didapat susunan bilangan berpola dari S yaitu 5, 9, 13, 17, 21.

Kata hikmah

Suatu keberanian untuk mencoba adalah modal awal kesuksesan dan kesabaran untuk mencoba lagi merupakan modal utama kesuksesan maka berusahalah untuk mencoba dan mencoba lagi dalam meraih kesuksesan

Contoh:

Dalam memberi nomor rumah di suatu jalan, ditentukan aturan yaitu, rumah yang terletak di sebelah kanan dari arah pintu gerbang harus memiliki nomor genap dan rumah yang berada di sebelah kiri harus bernomor ganjil. Aturan penomoran rumah tersebut membentuk susunan bilangan yang berpola, yaitu pola bilangan genap 2, 4, 6, ..., $2n$ dan pola bilangan ganjil 1, 3, 5, ..., $(2n - 1)$, dengan n bilangan asli. Pengaturan ini memberikan kemudahan dalam mencari suatu rumah, cukup dengan melihat genap atau ganjil nomor rumah yang dicari.

Untuk memudahkan dalam mengingat, jika memungkinkan suatu pola bilangan dalam himpunan bilangan diberi nama dan namanya disesuaikan dengan bilangan-bilangan penyusunnya.

Contoh :

a. 1, 2, 3, ..., n, dinamakan pola n bilangan asli pertama

b. 2, 4, 6, ..., $2n$ disebut pola n bilangan asli genap pertama.

Suatu pola dapat diperoleh dari pola bilangan yang telah ada sehingga didapat pola bilangan yang baru. Misalnya, pola bilangan asli genap pertama 2, 4, 6, ..., 2n, dengan menerapkan aturan pada pola yang baru yaitu bilangan pertama adalah 2, dan bilangan ke-n berikutnya adalah jumlahan n bilangan sebelumnya, untuk n=2, 3,... Aturan ini akan menghasilkan pola bilangan 2, 6, 12, ..., $n(n+1)$ dan dinamakan pola n bilangan persegi panjang pertama.

Perlu diketahui bahwa tidak setiap pola bilangan dapat ditentukan rumus eksplisitnya. Sebagai contoh bilangan prima yaitu 2, 3, 5, 7, 11, 13, … yang tidak memiliki rumus eksplisitnya.

Coba Anda bentuk dari pola bilangan 1, 3, …, ($2n$-1) menjadi 1, 4, 9, …, n^2, yang disebut pola n bilangan persegi pertama.

4. Barisan Bilangan (sekuens)

Setiap pola yang diterapkan pada suatu himpunan bilangan akan membentuk suatu susunan bilangan yang memiliki pola. Barisan bilangan adalah suatu susunan bilangan yang memiliki pola tertentu. Pola yang dimaksud, ditentukan dari hasil membandingkan dua bilangan yang berurutan pada susunan bilangan tersebut dan hasilnya adalah konstan.

Definisi

Barisan bilangan *adalah suatu susunan bilangan yang hasil perbandingan dua suku bilangan yang berurutan adalah konstan*

Terdapat dua jenis pola bilangan yang didapat dari hasil selisih atau hasil pembagian dari bilangan ke-n oleh bilangan ke-(n − 1), untuk n bilangan asli. Jika suatu susunan bilangan yang selisih dua bilangan yang berurutan adalah konstan disebut barisan aritmetika. Sedangkan, jika pembagian dua bilangan yang berurutan adalah konstan maka susunan bilangan tersebut disebut barisan geometri. Seperti halnya pola bilangan, suatu barisan bilangan juga dapat diberi **nama** sesuai dengan karakter pola bilangan yang membentuk barisan itu.

Beberapa contoh barisan bilangan dan namanya, sebagai berikut :

Tabel 1. Barisan bilangan

No.	Barisan Bilangan	Nama
1	1, 2, 3, 4, 5, …	Barisan bilangan Asli
2	1, 3, 5, 7, 9, …	Barisan bilangan Asli Ganjil
3	1, 4, 9, 16, 25, …	Barisan bilangan Persegi
4	1, 3, 6, 10, 15, …	Barisan bilangan Segitiga
5	2, 6, 12, 20, 30, …	Barisan bilangan Persegi Panjang

Berdasarkan tabel 1, didapat barisan 1, 2 adalah barisan aritmetika dan barisan 3 adalah barisan geometri. Sedangkan barisan 4, 5, 6 adalah barisan selain keduanya dan dibahas pada akhir modul ini.

Pada penulisan suatu barisan, setiap bilangan yang membentuk barisan bilangan disebut **suku barisan** dan dinotasikan dengan$\boldsymbol{u_i}$, dengan i adalah indeks ke-i. Setiap dua suku barisan dipisahkan dengan notasi "**,**" (koma). Indeks n pada $u_n$menunjukkan banyaknya suku dari barisan, sedangkan notasiu_n disebut suku umum barisan yang merupakan fungsi dengan daerah asalnya himpunan bilangan asli. Untuk n bilangan asli hingga maka barisan bilangannya disebut barisan bilangan hingga.

Secara umum, suatu barisan bilangan dapat disajikan dalam bentuk $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$

dengan u_1 adalah suku ke-1, u_2 adalah suku ke-2, dan u_n adalah suku ke-n.

Contoh :

Tentukan rumus umum suku ke-n bagi barisan-barisan berikut ini, jikadiketahui sebagai berikut:

a. 4, 6, 8, 10, …

b. 3, -3, 3, -3, …

c. 2, 4, 8,16, …

Jawab:

a. Barisan 4,6,8,10, …; barisan dengan suku pertama u_1 = 4 dan selisih suku yang berurutan bernilai konstan sama dengan 2.

   Jadi, $u_n = 2n + 2$

b. Barisan 2,4,8,16, …; dapat ditulis sebagai $(2)^1, (2)^2, (2)^3, (2)^4,. . .$; barisan dengan suku-sukunya sama dengan 2 dipangkatkan bilangan asli.

   Jadi $u_n= 2^n$

c. Barisan 3,–3, 3,–3,…; barisan dengan suku pertama u_1 = 3 dan perbandingan dua suku berurutan bernilai konstan sama dengan –1.

   Jadi $u_n = -3(-1)^n$

Contoh :

Diberikan barisan bilangan yang rumus umum suku ke-n adalah $u_n = 7n - 4$. Tentukan suku pertama dan suku ke-10

Jawab

Berdasarkan definisi, diketahui bahwa suku ke-n adalah u_n=7n– 4. Sehingga didapat suku pertama adalah u_1= 7 . 1 – 4 = 3 dan suku ke-10 adalah u_{10} = 7 . 10 – 3 = 67. Jadi, suku pertama dan suku ke-10 masing-masing adalah u_1 = 3 dan u_{10} = 67.

5. Deret Bilangan (*series*)

Dalam suatu barisan bilangan yang berhingga dapat ditentukan nilai dari jumlahan semua suku-suku barisannya. Deret adalah nilai dari hasil jumlahan beruntun suku-suku suatu barisan berhingga sehingga setiap barisan selalu dapat dibentuk deretnya.

Definisi

Misalkan u_1, u_2, u_3, ... , u_n merupakan suku-suku suatu barisan. Jumlah beruntun dari suku-suku barisan itu dinamakan sebagai **deret** dan dituliskan sebagai

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$$

Secara notasi sigma, suatu deret $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$ dapat dituliskan sebagai

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = \sum_{i=1}^{i=n} u_i$$

Jika n merupakan bilangan asli berhingga maka deret itu dinamakan sebagai deret berhingga dan sedangkan jika n mendekati tak hingga maka disebut deret tak hingga.

Berdasarkan barisan pembentuknya, terdapat dua jenis deret yaitu Deret Aritmetika dan Deret Geometri. Deret Aritmetika dibentuk dari barisan aritmetika, sedangkan deret geometri dibentuk dari barisan geometri.

Contoh:

Susunlah deret dan hitunglah nilai jumlahnya dari deret-deret berikut ini.

a. Deret 10 bilangan asli ganjil yang pertama

b. Deret 10 bilangan asli pangkat dari dua yang pertama

Penyelesaian :

a. Diketahui deret 10 bilangan asli ganjil yang pertama.
   Berdasarkan soal, diketahui bahwa $n = 10$ sehingga dapat ditentukan bilangan ganjil ke-10 adalah $2n–1 = 19$ Dengan demikian, deret 25 bilangan asli ganjil pertama dapat ditulis
   $1 + 3 + 7 + \ldots + 49 = \sum_{i=1}^{i=10}(2i - 1) = 25^2 = 625$.
   (ingat, bahwa deret n bilangan asli ganjil pertama didapat dari barisan bilangan persegi)

b. Deret 10 bilangan asli pangkat dari 2 yang pertama dapat ditulis
   $2 + 4 + 8 + \ldots + 2^{10} = \sum_{i=1}^{i=10} 2^i$ dan $\sum_{i=1}^{i=10} 2^i = 2046$.

D. Aktifitas Pembelajaran

LK 4.1. Notasi Sigma dan Pola Bilangan (In-1)

Pilihlah setiap nomor maksimal dua soal dan kerjankanlah secara serius, teliti, dan cermat serta optimalkan kekuatan kerja gotong royong sehingga kerja menjadi lebih ringan dan bermakna kebersamaan.

1. Diberikandua barisan, sebagai berikut :
   a. $4, 7, 10, 13, \ldots, (3n + 1)$
   b. $1, 4, 16, 64, \ldots, (4n - 1)$

Berdasarkan karakteristiknya, selidikilah barisan di atas, kemudian tulis deretnya dalam bentuk notasi sigma dan tentukan hasil jumlahan tersebut.

3. Diberikandua notasi sigma, sebagai berikut :
   a. $\sum_{i=1}^{n}(6i - 1)$
   b. $\sum_{i=1}^{n} i(2i + 4)^2$

Dengan menggunakan sifat-sifat dalam notasi sigma, tentukan bentuk paling sederhana dalam notasi sigma.

4. Diberikan susunan bilangan
   a. 2, 4, 6, 8, 10, 12
   b. 10, 5, 0, –5, –10, –15
   c. 1, 4, 7, 10, 13, 17
   d. –3, 3, 6, 9, 12, 15, 18

Tentukan pola pada susunan bilangan di atas dan buatlah dua buah susunan bilangan yang berpola.

5. Diberikan himpunan A = { 2, 8, 5, 17, 11, 20, 14 }, B = { 1, 5, 17, 13, 9, 24, 20}, C = {8, 4, 12, -8, –4, 0 }

   Buatlah suatu pola pada A, B dan C sehingga terbentuk susunan pola bilangan.

6. Misalkan diberikan susunan bilangan,sebagai berikut :

   a. 2, 6, 10, 14, 18, 22

   b. 81, 27, 9, 3, 1, $\frac{1}{3}$

   c. 13, 8, 3, –2, –7, –12

   d. 5, –10, 20, 40, –80

   Teliti dengan cermat, tentukan susunan bilangan yang merupakan barisan dan tentukan unsur-unsur barisannya.

LK 4.2. Notasi Sigma dan Pola Bilangan (On)

Kerjakan semua soal berikut secara mandiri, serius, jujur, teliti dan cermat sehingga hasil yang diperoleh lebih optimal dan bermakna.

1. Soal-soal yang belum diselesaikan pada In
2. Diberikan barisan bilangan, sebagai berikut :

   a. 2, 7, 12, 17, 22, 27

   b. 32, 16, 8, 4, 2, 1, ½

   c. 3, 11, 18, 25, 32, 39

   d. 5, –5, 5, –5, 5, –5, 5

   Teliti dengan cermat, selidikilah dan tentukan deret yang dapat dibentuk dari barisan bilangan di atas

3. Ibu Yuni adalah seorang ibu, sekaligus kepala rumah tangga dan dikaruniai 4 anak yang masih sekolah. Dalam merealisaikanamanat yang diembannya, dia berusaha sekuat tenaga untuk mendidik dan memenuhi kebutuhan keluarganya termasuk beaya sekolahnya. Dalam hal uang saku sekolah, ibu Yuni memberi kepada anak yang terbesar Rp. 20.000, uang saku anak kedua 0,5 kali uang saku anak pertama, uang saku anak yang lain adalah 0,5 kali uang saku kakaknya.

   a. Modelkan masalah ini dalam barisan bilangan,
   b. Tentukan total uang yang harus disiapkan Ibu Yuniuntuk memberi uang saku kepada anaknya dengan deret bilangan.

LK 4.3. Soal HOTS tentang Keterbagian Suatu Bilangan dan Bilangan Berpangkat (On).

Bersama kelompok, Anda diharapkan saling berdiskusi dan bekerja sama mempelajari teknik penyusunan soal *high order thinking skills* (HOTS). Dengan kreativitas Anda, susunlah 2 soal HOTS terkait dengan Notasi Sigma dan Pola Bilangan. Isikan pada kartu soal berikut. Soal yang Anda susun dapat berupa pilihan ganda atau uraian yang disertai dengan kunci jawaban atau pedoman pensekoran. Diutamakan merucuk pada kisi-kisi UN matematika SMA tahun 2017.

KARTU SOAL	
Jenjang	: Sekolah Menengah Atas
Mata Pelajaran	: Matematika
Kelas	: ...
Kompetensi Dasar	: ...
Indikator	: ...
Level	: Pengetahuan dan Pemahaman/Aplikasi/Penalaran*
Materi	: ...
Bentuk Soal	: Pilihan Ganda
BAGIAN SOAL DI SINI	
Kunci Jawaban	: ...

E. Latihan/Kasus/Tugas

Kata hikmah

Kewajiban manusia hanya pada dimensi usaha bukan keberhasilan sehingga setiap usaha sekecil apapun ada nilainya maka berusahalah semaksimal kamu jika diberi tugas

Kerjakanlah dengan serius, teliti, cermat dan pantang menyerah serta berdisksilah dengan sesame teman untuk mendapatkan hasil yang optimal dan memperkaya cara menyelesaikannya.

1. Teliti dengan cermat dan tentukan hasil $\sum_{i=1}^{20} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)}$.
2. Pada H = {5, 2, 7, 4, 9, 6 } diterapkan pola, jika anggota H ganjil dikurangi 2 dan jika genap ditambah 2. Selidikilah H berdasarkan karakteristiknya dan tentukan himpunan berpola apakah susunan bilangan yang terbentuk.
3. Suatu barisan yang terdiri 5 bilangan dan hasil bagi dua unsur yang berurutan adalah tetap. Jika unsur ke-1 adalah 3 dan unsur ke-3 adalah 27 maka tentukan barisan tersebut.
4. Barisan terdiri atas enam bilangan dan selisih dua suku yang berurutan adalah tetap. Jika jumlahan suku ke-2 dan suku ke-4 adalah 16 serta jumlahan suku ke-3 dan suku ke-6 adalah 25. Secara mandiri, tentukan barisan tersebut.
5. Panjang sisi-panjang sisi suatu segitiga siku-siku (dalam satuan cm) membentuk barisan yang selisih dua suku yang berurutannya adalah konstan. Misalkan barisan itu dibentuk deret yang memiliki nilai keliling 60 cm. Hitung panjang sisi-panjang sisi dari segitiga tersebut.
6. Bentuk dalam notasi sigma dan tentukan nilai dari

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \cdots + \frac{1}{2016 \times 2017}$$

F. Rangkuman

1. Notasi Sigma ($\sum_{i=1}^{n} u_i$) adalah suatu notasi yang mewakili suatu penjumlahan berurutan dari i=1 ke i=n. Notasi sigma mampu memberikan kemudahan dan kesederhanaan.
2. Sifat-sifat notasi sigma merupakan penuruan sifat dasar yang sangat membantu dalam bekerja dengan notasi sigma.
3. Misalkan $\sum_{i=1}^{n} u_i$ suatu notasi sigma dan a, b suatu konstanta real, maka berlaku
   - $\sum_{i=1}^{n} a = n\, a$
   - $\sum_{i=1}^{n} (au_i \mp bv_i) = a\sum_{i=1}^{n} u_i + b\sum_{i=1}^{n} v_i$

- $\sum_{i=1}^{n}(au_i \mp bv_i)^2 = a^2 \sum_{i=1}^{n} u_i^2 + 2ab \sum_{i=1}^{n} u_i v_i + b^2 \sum_{i=1}^{n} v_i^2$

4. Pola bilangan adalah suatu aturan tertentu yang diberlakukan pada kumpulan bilangan
5. Suatu pola yang diberlakukan pada kumpulan bilangan akan menghasilkan suatu susunan bilangan berpola
6. **Barisan** adalah suatu susunan bilangan yang memiliki pola
7. Barisan memiliki ciri khusus yang diperoleh dari hasil perbandingan dua suku yang berturutan
8. Barisan mempunyai **selisih** atau **perbandingan** terhadap dua suku yang berturutan adalah tetap.
9. Misalkan $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$ merupakan suku-suku suatu barisan. Jumlah beruntun dari suku-suku barisan itu dinamakan sebagai **deret**

G. Umpan Balik dan Tindak Lanjut

Setelah Anda mempelajari materi dalam kegiatan pembelajaran 4 ini maka lakukan refleksi diri dan tindak lanjut. Refleksi yang dilakukan terhadap perubahan yang meningkat dan lebih baik dari sebelunya. Ranah refleksi terdiri atas sikap positif dalam belajar dan sikap positif penguatan karakter sehingga mulai tumbuh kepribadian unggul. Untuk memantapkan, silahkan Anda baca dan lakukan perintahnya, pada Umpan Balik dan Tindak Lanjut pada Kegiatan Pembelajaran 1.

Kegiatan Pembelajaran 5

Barisan dan Deret Aritmetika

Kata hikmah

Derajat seseorang ditentukan oleh kualitas kecerdasan otak, kualitas keanggunan akhlaq dan sikap kepedulian kepada orang lain maka raihlah derajat kesempurnaan itu dengan memenuhi barisan syarat tersebut

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari modul ini, diharapkan peserta diklat Pengembangan Keprofesian Berkelanjutan atau pembaca dapat menerapkan materi barisan dan deret aritmetikayang terintegrasi dengan penguatan karakter. Kemampuan yang dilengkapi dengan kepribadian yang unggul tersebut adalah :

1. mampu memahami karakteristik suatu barisan aritmetika dan unsur-unsurnya,
2. mampu memahami karakteristik suatu deret aritmetika dan unsur-unsurnya,
3. memahami soal-soal teoritis dan permasalahan konteks yang berkaitan dengan konsep barisan atau deret aritmetika.

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

Kata hikmah

Suatu sikap yang menjaga martabat, membela dari gangguan dan mengharumkan nama Indonesia dalam segala bidang adalah sikap nasionalis maka berusahalah menjadi seorang nasionalis melalui pendidikan

Setelah mempelajari modul ini, diharapkan peserta diklat Pengembangan Keprofesian Berkelanjutan atau pembaca dapat mencapai target kompetensi dirinya dalam menerapkan materi barisan dan deret aritmetika yang terintegrasi dengan penguatan karakter. Secara rinci, peserta diklat atau pembaca mampu :

1. menjelaskan definisi barisan aritmetika, suku pertama u_1, beda b dan suku ke-n, u_n dari barisan aritmetika,
2. menentukan rumus umum suku ke-n, u_n dari barisan aritmetika,
3. menentukan suku tengah u_t pada barisan aritmetika, jika banyaknya unsur adalah ganjil,
4. menemukan rumus umum beda b' dari barisan aritmetika baru yang dibentuk melalui penyisipan k bilangan pada dua suku berturutan dari suatu barisan aritmetika,
5. membentuk suatu deret aritmetika,
6. menentukan rumus umum jumlahan S_n suatu deret aritmetika,
7. menerapkan konsep barisan dan deret aritmetika dalam menyelesaikan soal-soal teoritis dan permasalahan konteks yang terkait.

C. Uraian Materi

Barisan dan Deret Aritmetika

1. Barisan Aritmetika

Untuk mengawali pembahasan, coba Anda amati barisan bilangan berikut.

a. 2, 5, 8, 11, 14 b. 16, 11, 6, 1, −4

Setiap barisan di atas memiliki karakter/ciri tertentu yaitu selisih setiap suku yang berurutan pada barisan soal a. adalah 3, sedangkan untuk soal b. adalah−5. Besarnya(nilai) selisih dua suku yang berurutan disebut beda dan dinotasikan dengan huruf ***b***. Barisan bilangan yang selisih dua suku yang berurutannya adalah b disebut Barisan Aritmetika.

Definisi

Suatu barisan $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$ disebut barisan aritmetika jika untuk sebarang nilai n berlaku hubungan

$$u_n - u_{n-1} = b, n \geq 2$$

dengan b adalah suatu tetapan (konstanta).

Mudahdifahamibahwa barisan bilangan asli, barisan bilangan asli ganjil,barisanbilangan asli genap pertama semuanya merupakan barisanaritmetika.

a. Rumus Umum Suku Ke-*n* pada Barisan Aritmetika

Ciri khusus suatu barisan aritmetika adalah selisih dua suku berurutannya adalah tetap (konstan). Akibatnya, jika diketahui salah satu suku dan nilai bedanya maka suku yang lain dalam barisan aritmetika dapat ditentukan, termasuk rumus umum suku ke-n.

Untuk menentukan rumus umum suku ke-n, dapat ditentukan sebagai berikut. Misalkan diberikan suatu barisan aritmetika dengan suku pertama a dan beda b, maka didapat tabel

Tabel 2. Barisan Aritmetika

Suku ke-i	Notasi	nilainya	Pola
pertama	u_1	a	$a + (1\text{-}1)\ b$
kedua	u_2	$a + b$	$b + (2\text{-}1)\ b$
ketiga	u_3	$a + 2k$	$a + (3\text{-}1)b$
...	...	...	...
ke-n	u_n	$a + (n\text{-}1)\ b$	$a + (n\text{-}1)\ b$

Dengan memperhatikan pola dari suku-suku barisan maka didapat rumus suku umum ke-n yaitu $u_n = a + (n - 1)\ b$. Secara lengkap disajikan rumus umum suku ke-n, sebagai berikut :

Definisi

Misalkan suatu barisan aritmatika dengan suku pertama a dan beda b. Rumus umum suku ke-$n$dari barisan aritmatika itu ditentukan oleh

$$u_n = a + (n - 1)b$$

b. Sifat-sifat suku ke-*n* pada barisan aritmetika

Suku umum ke-n untuk barisan aritmetika, yaitu $u_n$memiliki beberapa sifat yang terkait dengan $n$dan beda b. Sifat-sifat tersebut, antara lain :

1) Untuk setiap n ∈ bilangan asli berlaku $u_n - u_{n-1} = b$ (b beda).

   Secara umum, berlaku jika p, q bilangan asli dan $p > q$ maka diperoleh

$$u_p - q = (p - q)\, b$$

2) Untuk setiap p, q bilangan asli dan $p > q$ maka berlaku $u_p = \frac{1}{2}\,(u_{p\text{-}q} + u_{p+q})$

   Bukti

   Untuk setiap bilangan asli p, q dan p>$q$maka didapat

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(u_{p-q} + u_{p+q}\right) &= \frac{1}{2}\Big(a + \big((p-q-1)\big)b + a + (p+q-1)b\Big)\\ &= \frac{1}{2}(2a + (2p-2)b) = \frac{1}{2}(2a + 2(p-1)b\\ &= (a + (p-1)b) = u_p\end{aligned}$$

   Jadi, terbukti bahwa $u_p = \frac{1}{2}\,(u_{p-q} + u_{p+q})$, untuk setiap p, q bilangan asli dan $p > q$

Contoh:

Misalkan A adalah barisan bilangan asli kurang dari 51. Tentukan banyaknya bilangan asli yang memenuhi kriteria berikut :

a. bilangan asli yang habis dibagi 5
b. bilangan asli yang habis dibagi 6
c. bilangan asli yang habis dibagi 5 dan tidak habis dibagi 6.

Penyelesaian :

a. Himpunan bilangan asli A yang habis dibagi 5 adalah $A = \{ 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50 \}$ sehingga banyaknya anggota B adalah 10.Berdasarkan barisan aritmetika B, didapat a=5, b=5 dan suku terakhir adalah 50 sehingga berlaku $u_n = a + (n-1)\, b \Leftrightarrow 50 = 5 + (n-1)\, 5 \Leftrightarrow 50 = 5 + 5n - 5 \Leftrightarrow 50 = 5n \Leftrightarrow n = 10$. Artinya, banyaknya suku barisan aritmetika adalah 10.
b. Himpunan bilangan asli A yang habis dibagi 6 adalah C ={ 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48 } sehingga banyaknya anggota C adalah 8.
c. Himpunan bilangan asli yang habis dibagi 5 dan tidak habis dibagi 6 adalah D = B\C = { 5, 10, 15, 20, 25, 35, 40, 45, 50 } sehingga banyaknya anggota D adalah 9.

Contoh :

Misalkan diketahui suku ke-10 dan suku ke-25 suatu barisan aritmetika berturut-turut adalah 74 dan 179.

a. Tentukan suku pertama dan beda barisan itu.
b. Tentukan suku keberapa, jika diketahui bernilai 249.

Penyelesaian :

a. Misalkan suku umum ke-n dirumuskan dengan $u_n = a + (n-1)b$ maka didapat suku ke-10 adalah $u_{10} = 74 \Rightarrow a + 9b = 74$ (*)
   Suku ke-25 adalah $u_{25} = 168 \Rightarrow a + 24b = 179$ (**)
   Dari hasil (*) dan (**), didapat a = 7 dan b = 11
   Jadi, suku pertama $a = 11$ dan beda $b = 7$.

b. Berdasarkan hasil a, didapat $a = 11$ dan $b = 7$ sehingga rumus umum suku ke-n adalah $u_n = a + (n-1)b = 11 + 7(n-1)$.

   Karena u_n = 238 maka berlaku $11 + 7(n-1) = 249$
   $\leftrightarrow 7(n-1) = 249 - 11 \leftrightarrow 7n = 238 + 7 = 245 \leftrightarrow n = 35$
   Jadi, suku barisan yang bernilai 249 adalah suku ke-35.

Contoh :

Misalkan seutas tali dipotong menjadi 50 potong yang berbeda dan membentuk barisan aritmatika. Jika panjang tali potongan yang ke-10 dan panjang tali potongan ke-25 berturut turut adalah 74 cm dan 179 cm.

a. Tentukan panjang tali potongan pertama dan selisih setiap dua potongan tali yang berurutan.
b. Tentukan potongan tali ke berapa, jika diketahui panjang tali tersebut 249 cm.

Penyelesaian :

a. Berdasarkan soal, diketahui bahwa permasalahan tersebut merupakan masalah barisan aritmatika, dengan panjang potongan tali pertama adalah a dan selisih panjang dua tali yang berturutan adalah beda b.
   Misalkan rumum umum suku ke-n dituliskan $u_n = a + (n-1)b$ maka didapat suku ke-10 adalah$u_{10} = 74 \Rightarrow a + 9b = 74$ (*)

Suku ke-25 adalah $u_{25} = 168 \Rightarrow a + 24b = 179$ (**)

Dari hasil (*) dan (**), didapat $a = 11$ dan $b = 7$

Jadi, panjang tali pertama adalah a = 11 cm dan beda b = 7 cm.

b. Berdasarkan hasil a, didapat suku pertama a = 11 cm dan b = 7 cm sehingga suku ke-n adalah $u_n = a + (n - 1)b = 11 + 7(n-1)$.

Karena u_n = 249 maka berlaku $11 + 7(n-1) = 249$

$$\leftrightarrow 7(n-1) = 249 - 11 \leftrightarrow 7n = 238 + 7 = 245$$

$$\leftrightarrow n = 35.$$

Jadi, potongan tali yang memiliki panjang 249 cm adalah potongan tali ke-35.

Contoh:

Misalkan suatu angkat besi daerah A memiliki lima anggota, dengan umur yang membentuk barisan aritmetika. Umur anggota tim yang keempat adalah 22 tahun dan umur anggota yang kedua adalah 18 tahun. Tentukan umur masing-masing anggota tim daerah A tersebut.

Penyelesaian :

Untuk menyelesaikan masalah ini, pergunakan sifat dari suku umum u_n. Ingat, bahwa $u_p - u_q = (p-q)\,b$ dan $u_p = \frac{1}{2}(u_{p-1} + u_{p+1})$.

Misalkan barisan aritmetika dari umur anggota timtersebut adalah $x-2b, x-b, x, x+b, x+2b$. (mengapa barisan aritmetikanya dimisalkan begitu?).

Karena anggota tim kelima berumur 24 tahun dan anggota tim ketiga berumur 20 tahun maka berlaku

$$x = \frac{1}{2}\,(x - b + x + b) = \frac{1}{2}(22 + 18) = \frac{1}{2} \times 40 = 20.$$

Di sisi lain, didapat $u_4 - u_2 = 2\,b \leftrightarrow 22 - 18 = 2b \leftrightarrow b = 2$.

Dengan demikian, diperoleh suku pertama $u_1 = x - 2b = 20 - 2 \times 2 = 16$, suku kedua $u_2 = 18$, dan suku keempat $u_4 = 22$, $u_5 = x + 2b = 20 + 4 = 24$ serta barisan aritmetika yang berbentuk adalah 16, 18, 20, 22, 24.

c. Suku Tengah pada Barisan Aritmetika

Suku-suku dalam barisan aritmetika adalah terpola sehingga dapat ditentukan suku tengahnya. Suku tengah suatu barisan aritmetika dapat ditentukan, jika banyaknya suku dalam barisan tersebut adalah ganjil.

Coba, Anda perhatikan dua barisan aritmetika berikut, kesimpulan apa yang Anda peroleh?

a. barisan aritmetika 4, 7, 10, 13, 16 maka suku tengahnya 10.

b. barisan aritmetika 5, 8, 11, 14 maka tidak memiliki suku tengah.

Barisan pada a mempunyai suku tengah karena banyak suku-sukunya adalah ganjil, sedangkan pada barisan b tidak memiliki suku tengah karena banyaknya suku-suku adalah genap.

Untuk barisan aritmetika dengan banyaknya suku adalah ganjil, maka suku tengahnya dapat ditentukan, sebagaimana rumus di bawah ini.

Definisi

Misalkan suatu barisan aritmatika dengan banyak suku ganjil $(2k - 1)$, dengan k bilangan asli lebih dari dua. Suku tengah barisan aritmatika itu adalah suku ke-k atau u_n dan rumus suku tengah u_k ditentukan oleh hubungan:

$$u_k = \frac{1}{2}(u_1 + u_{2k-1})$$

Contoh:

Suatu barisan aritmetika, diketahui suku pertama adalah 5, bedanya 3 dan suku terakhir adalah 107. Secara teliti, tentukan beda b dan suku tengahnya.

Penyelesaian :

Berdasarkan soal, didapat suku pertama $a = 5$, beda b=3 dan suku terakhir u_n=107 sehingga berlaku

$$u_n = a + (n-1)b \leftrightarrow 107 = 5 + (n-1)3$$

$$\leftrightarrow 107 = 5 + 3n - 3 \leftrightarrow 105 = 3n \leftrightarrow n = 35.$$

Karena n=35 (ganjil) maka diperoleh suku tengah,

$$u_k = \frac{1}{2}\,(u_1 + u_{35}) = \frac{1}{2}\,(5 + 107) = \frac{1}{2}\;112 = 56.$$

Karena $(2k - 1) = 35$ maka didapat $k = 18$ sehingga suku tengahnya adalah $u_{18} = 56.$

(Anda juga bisa menentukan nilai k dahulu baru suku tengahnya).

Contoh:

Suatu barisan aritmetika, memiliki suku tengah adalah 57, suku terakhirnya adalah 112, dan suku ke-20 sama dengan 97.

a. Tentukan suku pertama dan beda barisan aritmetika itu.
b. Tentukan banyak suku pada barisan aritmetika itu.

Jawab

a. Berdasarkan soal, diketahui suku tengah $u_k = 57$, suku terakhir $u_{2k-1} = 112$. Dengan memakai rumus suku tengah $u_k = \frac{1}{2}(u_1 + u_{2k-1})$, diperoleh:

$57 = \frac{1}{2}(u_1 + 112) \leftrightarrow 114 = u_1 + 112 \leftrightarrow u_1 = a = 2.$

Suku ke-20 adalah 97, sehingga

$u_{20} = a + 19b = 97 \leftrightarrow 2 + 19b = 97 \leftrightarrow 19b = 97 - 2 = 95 \leftrightarrow b = 5$

Jadi, suku pertama $a = 2$ dan beda $b = 5$.

b. Karena suku terakhirnya adalah 112, maka berlaku

$$\begin{aligned} & u_{2k-1} &&= a + (2k - 2)b \\ \leftrightarrow\; & 112 &&= 2 + (2k - 2)5 \\ \leftrightarrow\; & 112 &&= 2 + 10k - 10 \end{aligned}$$

$\leftrightarrow 10k = 120.$

$\leftrightarrow k = 12.$

Jadi, banyaknya suku adalah (2k-1) = 2 .12 – 1 = 23.

Contoh:

Dalam rangka mewujudkan jiwa nasionalisnya, seorang guru berusaha untuk menjadi guru teladan. Seorang guru yang mengabdikan dirinya di dunia pendidikan.

Dia dalam mengajar menerapkan strategi hadiah (*rewards*) dan didikan/hukuman (*punishment*). Suatu saat, dia memilih lima siswa yang berprestasi dalam kelas. Kelima siswa adalah $juara\,5$, $juara\,4$, ..., $juara\,1$. Sebagai wujud rasa banggadanbahagia, guru memberikan hadiah dan banyaknya hadiahnya membentuk barisan aritmetika. Hadiah diujudkan dalam bentuk kupon, semakin tinggi prestasinya semakin banyak kupon yang didapat. Jika anak yang $juara\,3$ memperoleh 19 kupon dan $juara\,2$ memperoleh 22 kupon. Berapa banyak kupon yang diterima anak $juara\,1$.

Penyelesaian :

Misalkan barisan kelima siswa adalah $a - 2b, a - b, a, a + b, a + 2b$. (kenapa?),

Jika anak $juara$ 3 mendapat 19 kupon maka berlaku

$$u_3 = a = 19, \text{sehingga } a = 19.$$

Untuk $juara$ 2 mendapat 22, sehingga berlaku

$$u_2 = a - b \leftrightarrow 22 = 19 + b \leftrightarrow b = 3.$$

Berdasarkan hasil $a = 19$ dan $b = 3$, didapat suku-suku barisannya, yaitu

$$u_5 = a - 2b = 19 - 2.3 = 13,$$
$$u_4 = a - b = 19 - 3 = 16,$$
$$u_3 = a = 19,$$
$$u_3 = a + b = 19 + 3 = 22$$
$$u_1 = a + 2b = 19 + 2 \times 3 = 25.$$

Jadi, didapat barisan aritmetikanya yaitu 13, 16, 19, 22, 25 dengan beda $b = 3$.

d. Sisipan pada Barisan Aritmetika

Misalkan di antara dua bilangan real x dan y (dengan $x \neq y$) akan disisipkan sebanyak k buah bilangan, yaitu $x_1, x_2, \dots, x_k$, dengan k bilangan asli.. Bilangan-bilangan $x, x_1, x_2, \dots, x_k, y$ membentuk suatu barisan aritmatika. Misalkan suku pertama x bedanya b maka dapat ditulis

$$x, x_1 = x + b, x_2 = x + 2b, \dots, x_k = x + kb, y(*)$$

Karena (*) membentuk barisan aritmetika, maka selisih dua suku yang berurutan adalah b. Dengan menggunakan dua buah suku yang terakhir diperoleh hubungan:

$$
\begin{aligned}
& y-(x+kb) &&= b \\
\leftrightarrow\quad & kb+b &&= y-x \\
\leftrightarrow\quad & b(k+1) &&= y-x \\
\leftrightarrow\quad & b &&= \frac{y-x}{k+1}
\end{aligned}
$$

Hasil terakhir, merupakan rumus beda b untuk barisan baru.

Definisi

Diantara dua bilangan x dan y disisipkan sebanyak k buah bilangan sehingga bilangan-bilangan semula dengan bilangan-bilangan yang disisipkan membentuk barisan aritmatika. Nilai beda barisan aritmatika yang terbentuk, dinotasikan dengan b dapat ditentukan dengan menggunakan hubungan

$$\mathrm{b} = \frac{y-x}{k+1}$$

x dan $y \in$ bilangan real $(x \neq y)$ dan $k \in$ bilangan asli.

.

Secara umum, sisipan pada barisan aritmetika dapat dijelaskan sebagai sebagai berikut :

Misalkan suatu barisan aritmetika dengan banyak unsur n, suku pertama a, beda b sehingga dapat divisualkan

$$u_1, u_2, u_3, \dots, u_n.$$

Jika setiap dua unsur yang berturutan masing-masing disisipkan k bilangan (k bilangan asli) sehingga barisan aritmetika yang lama dan bilangan-bilangan disisipkan membentuk barisan aritmetika yang baru, dengan suku pertama a', beda b' dan banyak unsur n', maka, diperoleh hubungan, sebagai berikut :

a) suku pertama $a' = a$,

b) beda $b' = \frac{b}{k+1}$

c) banyak unsur $n' = n + (n-1)k$.

Dengan menggunakan definisi suku pertama a, beda b dan banyak unsur n maka buktikan bahwa suku pertama baru $n' = n + (n-1)$, $b' = \frac{b}{k+1}$ dan a' = a.

Contoh:

Di antara bilangan 3 dan 33 disisipkan 5 buah bilangan, sehingga bilangan-bilangan semula dengan bilangan-bilangan yang disisipkan membentuk barisan aritmetika. Secara teliti dan cermat, tentukan beda dari barisan aritmetika yang terbentuk.

Penyelesaian :

Dari soal, dapat ditetapkan bahwa $x = 3, y = 33$ dan $k = 5$. Denganmenggunakan rumus didapat:

$$b = \frac{y - x}{k + 1} = \frac{33 - 3}{5 + 1} = \frac{30}{6} = 5$$

Jadi, beda barisan aritmetika yang terbentuk adalah $b = 5$ dan barisan aritmetiknya adalah 3, 8, 13, 18,23, 28, 33 … .

4. Deret Aritmetika

Kata hikmah

Sifat malas, pesimis, rendah diri, kurang mampu, putus asa, minder adalah karakter kekurangan diri maka hilangkanlah sehingga kamu menjadi orang sukses

Telah diketahui bahwa deret adalah jumlahan beruntun suku-suku suatu barisan. Jika suku-suku yang dijumlahkan itu adalah suku-suku barisan aritmetika, maka deret yang terbentuk disebut adalah deret aritmetika. Dengan demikian, setiap barisan aritmetika dapat dibentuk deret aritmetika.

Definisi

Jika $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$ merupakan suku-suku barisan aritmetika, maka $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$ dinamakan sebagai deret aritmetika.

Jika banyak suku n suatu deret adalah besar maka untuk menentukan nilai deretnya dibutuhkan rumus. Sedangkan untuk n kecil maka nilai suatu deret dapat dihitung langsung.

Perhatikan ilustrasi berikut !

Misalkan akan ditentukan nilai deret aritmetika 10 bilangan asli pertama secara langsung. Misalkan x adalah nilai deret, sehingga

$x = 1 + 2 + 3 + \dots + 10$ dan menjumlahkan dengan x lagi, tetapi penulisannya dibalik. Anda perhatikan tabel di bawah.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
x	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	+
$2x$	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	

Jika dijumlahkan setiap sukunya maka didapat hasilnya 11 sehingga terdapat 10 suku yang bernilai 11. Dari sisi kiri diperoleh $2x$ sehingga didapat hubungan

$$2x = 10 \times 11 \leftrightarrow x = ½\, 10 \times 11 = 55.$$

Akan ditentukan rumus umum jumlah n suku pertama suatu deret, sebagai berikut. Karena suatu deret merupakan penjumlahan suku-suku, maka jumlah dari suku-suku deret mempunyai nilai tertentu. Jumlah n suku pertama deret aritmetika dilambangkan dengan S_n, dan S_n ditentukan oleh:

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$$

Substitusikan $u_1 = a, u_2 = a + b, u_3 = a + 2b, \dots, u_{n-2} = u_{n-2b}$, dan $u_{n-1} = u_n - b$; akan diperoleh

$$S_n = a + (a + b) + (a + 2b) + \dots + (u_n - 2b) + (u_n - b) + u_n \text{...... [*]}$$

Jika urutan suku-suku penjumlahan pada persamaan [*] dibalik diperoleh:

$$S_n = u_n + (u_n - b) + (u_n - 2b) + \dots + (a + 2b) + (a + b) + a \quad \text{....... [**]}$$

Jumlahkan masing-masing ruas pada persamaan [*] dengan persamaan [**] sehingga diperoleh:

S_n	a	a+b	a+2b	a+3b	...	u_n-2b	u_n-b	u_n	
S_n	u_n	u_n-b	u_n-2b	u_n-3b	...	a+2b	a+b	a	+
$2S_n$	a+u_n	a+u_n	a+u_n	a+u_n	...	a+u_n	a+u_n	a+u_n	

$$2S_n = \underbrace{(a + u_n) + (a + u_n) + (a + u_n) + \dots + (a + u_n)}_{} + (a + u_n)$$

penjumlahan n suku dengan masing-masing sukunya adalah $(a + u_n)$

$\leftrightarrow 2S_n = (a + u_n) \leftrightarrow S_n = \frac{1}{2}n(a + u_n)$.

Berdasarkan hasil perhitungan tersebut, S_n dirumuskan sebagai berikut

Rumus

Jika suatu deret aritmatika
$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$ maka Jumlah n suku pertama adalah

$$S_n = \frac{1}{2}n(a + u_n).$$

dengan n = banyak suku, a = suku pertama, dan u_n = suku ke-n

Sifat-sifat S_n pada Deret Aritmatika

Beberapa sifat dasar dari Jumlah n suku pertama deret aritmetika adalah sebagai berikut..

1) untuk tiap $n \in$ bilangan asli berlaku hubungan $S_n - S_{n-1} = u_n$ (suku ke-n).

   Secara umum, berlaku jika untuk p, q bilangan asli dan $p > q$ maka berlaku

$$S_p - S_q = u_{q+1} + u_{q+2} + \cdots + u_p.$$

2) jika u_t adalah suku tengah dari barisan aritmetika yang mempunyai banyak unsur ganjil maka jumlah n bilangan pertama pada deret aritmetika adalah $S_n = n\, u_t$.

Contoh:

Teliti dengan seksama dan tentukan jumlah deret aritmetika dari barisan aritmetika $6,\ 9, 12, \ldots\ 123$.

Jawab:

Untuk menghitung jumlah deret pada soal di atas, perlu ditentukan terlebih dulu banyak suku atau n melalui hubungan $u_n = a + (n - 1)b$.

Karena barisan aritmetika $6,\ 9, 12, \ldots\ 123$ maka dapat dibentuk deret aritmetika, yaitu

$6 + 9 + 12 + \ldots + 123$, sehingga didapat $a = 6, b = 3$, dan $u_n = 123$sehingga$123 = 6 + (n - 1)3 \leftrightarrow 13 = 3n + 3 \leftrightarrow 3n = 120 \leftrightarrow$ $n = 40$.

$S_{40} = \frac{40}{2}\,(a + u_{40}) = 20\,(6 + 123) = 2580$.

Jadi, jumlah deret aritmetika $6 + 9 + 12 + \ldots + 123$ adalah $S_{40} = 2580$.

Contoh:

Dengan meneliti karakteristik deret aritmetika, tentukan n, jika diketahui $\frac{(2+4+6+\cdots+2n)}{(1+3+5+\cdots+(2n-1))} = \frac{116}{115}$

Penyelesaian :

Ingat, rumus pada deret aritmatika bahwa

$$2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n\,.(n+1)\; dan\; 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2.$$

$$\frac{2+4+6+\cdots+2n}{1+3+5+\cdots+(2n-1)} = \frac{116}{115} \leftrightarrow \frac{n(n+1)}{n^2} = \frac{116}{115}$$

$$\leftrightarrow 115\,(n^2 + n) = 116\,n^2 \leftrightarrow 115\,n^2 + 115\,n = 116\,n^2$$

$$\leftrightarrow n^2 - 115\,n = 0 \leftrightarrow n(n-115)n = 0 \leftrightarrow n = 0 \text{ atau } n = 115.$$

Jadi, diperoleh $n = 115$.

Contoh :

Ilham adalah seorang mahasiswa yang shaleh, cerdas, rajin, suka menabung dan berakhlaq baik. Pada bulan Januari 2017, Ilham menabung sebesar Rp 500.000,00. Pada bulan-bulan berikutnya, Ilham menabung sebesar Rp 750.000,00; Rp 1.000.000,00; Rp 1.250.000,00; demikian seterusnya sampai bulan Desember 2017. Ilham berniat, setiap tahun dia berinfaq dan dipotongkan ke tabungan sebesar 2,5% dari tabungannya. Berapa jumlah seluruh tabungan Ilham sampai dengan akhir tahun 2016 itu?

Penyelesaian :

Uang yang ditabung Ilham pada bulan Januari, Febuari, Maret, April, sampai dengan bulan Desember 2017 dapat disajikan dalam tabel berikut.

Bulan	Januari	Febuari	Maret	April	...	Desember
Tabungan	500.000	750.000	1000.000	1250.000	...	......
infak						

Berdasarkan tabel diatas, jumlah tabungan Ilham sampai dengan akhir tahun 2017 dapat ditulis $500.000 + 750.000 + 1.000.000 + 1.250.000 + \cdots + u_{12}$. (*)

Penyajian (*) adalah model matematika yang berbentuk deret aritmatika, dengan suku pertama $a = 500.000$ dan beda $b = 250.000$.

Suku kedua belas ditentukan melalui hubungan:

$$u_{12} = a + 11b = 500.000 + 11(250.000) = 3.250.000$$

Jumlah dua belas suku pertama deret aritmatika itu ditentukan dengan hubungan

$$S_{12} = \frac{12}{2}(a + u_{12}) = 6(500.000 + 3.250.000) = 22.500.000$$

Besarnya infaq yang harus dikeluarkan adalah$0{,}025 \times 22.500.000 = 562.500$,. sehingga jumlah tabungan Ilham adalah (Rp. 22.500.000 – Rp. 562.500) adalah Rp. 21.938.000,.

Jadi, jumlah tabungan Ilham sampai akhir tahun 2017 adalah $Rp.$ 21.938.000,.

Contoh :

Diberikan $n$suku barisan bilangan $2, 5, \ldots, (3n + 1)$.

a. Secara cermat, tentukan jumlahan n suku-suku dari barisan tersebut

b. Buktikan bahwa $2 + 5 + 8 + \ldots + (3n - 1) = \frac{1}{2}n(3n + 1)$dengan menggunakan metode induksi matematika.

Penyelesaian :

a. Karena barisan bilangan $2, 5, 8, \ldots, (3n - 1)$ adalah barisan aritmatika, dengan $a = 2$ dan $b = 3$ maka $2 + 5 + 8 + \ldots + (3n - 1)$ membentuk deret aritmatika sehingga didapat jumlahan n suku pertamanya adalah S_n, dengan

$$S_n = \frac{1}{2}n(a + u_n) = \frac{1}{2}n(2a + (n-1)b) = \frac{1}{2}n(2 \times 2 + (n-1)3) = \frac{1}{2}n(3n + 1)$$

b. Untuk membuktikan dengan metode induksi matematika,

Akan dibuktikan

$2 + 5 + 8 + \ldots + (3n - 1) = ½\, n\ (3n + 1)$, untuk setiap n bilangan asli

- Langkah 1, akan dibuktikan berlaku untuk $n = 1$.

Untuk $n = 1$ didapat hasil sebelah kiri adalah 2 dan sebelah kanan $\frac{1}{2} \times 1 \times (3.1 + 1) = 2$ sehingga $2 = 2$. Jadi, rumus berlaku untuk $n = 1$.

- Langkah 2, yaitu jika berlaku untuk n=k maka berlaku untuk $n = k + 1$.

Karena berlaku untuk $n = k$ maka didapat

$$2 + 5 + 8 + \ldots + (3k - 1) = \frac{1}{2}\ k\ (3k + 1) \text{ ....(*).}$$

Untuk n=k+1, maka

$$\begin{aligned}
&2 + 5 + 8 + \ldots + (3k - 1) + (3(k + 1) - 1) \\
&= \{2 + 5 + 8 + \ldots + (3k - 1)\} + (3(k + 1) - 1) \\
&= \frac{1}{2}\ k(3k + 1) + (3k + 2) = \frac{1}{2}(3k2 + k + 6k + 4) \\
&= \frac{1}{2}\ (3k2 + 7k + 4) \\
&= \frac{1}{2}(k + 1)(3k + 4) = \frac{1}{2}(k + 1)(3(k + 1) + 1), \\
&\quad berlaku\ untuk\ n = k + 1.
\end{aligned}$$

Jadi terbukti, jika rumus berlaku untuk $n = k$ maka rumus berlaku untuk $n = k + 1$.

Berdasarkan hasil langkah 1 dan langkah 2, maka menurut metode induksi matematika, $2 + 5 + 8 + \ldots + (3n - 1) = ½\, n(3n + 1)$, untuk setiap n bilangan asli.

D. Aktifitas Pembelajaran

Kata hikmah

Suatu keberanian untuk mencoba adalah modal awal kesuksesan dan kesabaran untuk mencoba lagi merupakan modal utama kesuksesan maka berusahalah untuk mencoba dan mencoba lagi dalam meraih kesuksesan

LK 5.1. Barisan dan Deret Aritmetika (In-1)

Kerjankanlah semua soal berikut secara serius, teliti, dan cermat serta optimalkan kekuatan kerja gotong royong sehingga kerja menjadi lebih ringan dan bermakna kebersamaan.

1. Diberikan barisan-barisan bilangan, sebagai berikut :

   a. $3, 7, 11, 15, 19, \dots$ c. $-9, -6, -3, 0, 3, \dots$

   b. $5, 10, 15, -10, -5, \dots$ d. -7, -2, 3, 7, 11, …

   Selidikilah susunan bilangan yang membentuk barisan aritmetika dan tentukan beda b dan rumus umum suku ke-n.

2. Buktikan, jika p, q asli, $p > q$ maka $u_p = \frac{1}{2}(u_{p+q} + u_{p-q})$ dan $u_p - u_q = (p - q)\, b$.Tentukan $u_7 - u_2$ dan $u_9$barisan aritmetika berikut :

   a. 5, 11, 17, 23, 29, … b. -4, -1, 2, 5, 8, …

3. Tulis cara menentukan suku tengah dari barisan aritmetika yang mempunyai banyak suku adalah ganjil. Mulai dari 3 suku, 5 suku, 7 suku dan secara umum $(2k - 1)$ suku. Buktikan bahwa suku tengah adalah ½ dari jumlahan suku pertama dan suku terakhir.

4. Suatu barisan aritmetika, diketahui jumlahan suku ke-3 dan suku ke-7 adalah 42, sedangkan jumlahan suku ke-5 dan suku ke-10 adalah 62.

   a. Tentukan suku pertama a, beda b dan rumus suku ke-n.

   b. Jika diketahui banyaknya suku adalah 11 maka tentukan suku ke-11 dan suku tengahnya.

5. Misalkan antara bilangan 2 dan 14 disisipkan 3 bilangan sehingga bilangan awal dan bilangan yang disisipkan membentuk barisan aritmetika. Buktikan bahwa barisan aritmetika yang terbentuk adalah 2, 5, 8, 11, 14, dengan beda $b = 3$.

   a. jika 2 diganti x, 14 diganti y dan banyak bilangan yang disisipkan adalah k maka buktikan bahwa $b = \frac{(y-x)}{k+1}$

   b. misalkan suatu barisan aritmetika dengan banyak unsur n, suku pertama a, beda b sehingga dapat divisualkan$u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$.Jika setiap dua unsur yang berturutan masing-masing disisipkan k bilangan sehingga barisan aritmetika yang lama dan bilangan-bilangan disisipkan membentuk barisan aritmetika yang baru, dengan suku pertama a', beda b' dan banyak unsur n', maka, Buktikan hubungan berikut :

   - suku pertama $a' = a$,
   - beda $b' = \frac{b}{k+1}$
   - banyak unsur $n' = n + (n-1)k$

LK 5.2. Barisan dan Deret Aritmetika (On)

Kerjakan semua soal berikut secara mandiri, serius, jujur, teliti dan cermat sehingga hasil yang diperoleh lebih optimal dan bermakna.

1. Tulis dan jelaskan pengertian deret aritmetika, cara membentuk deret aritmetika, jumlah n suku pertama dan sifat-sifat $S_n$serta berikan dua contoh deret aritmetika.

2. Diberikan suatu deret yang memiliki rumus sebagai berikut :

   a. $3 + 7 + 11 + 15 + \dots + (4n-1) = n(2n+1)$

   b. $-7 - 2 + 3 + 8 + \dots + (5n-12) = \frac{1}{2} n (5n-19)$

   Buktikan rumus untuk jumlah n suku pertama dari deret di atas dengan rumus S_n dan menggunakan Induksi Matematika.

3. Berikanlan dua contoh konteks yang berkaitan barisan atau deret aritmetika dan selesaikanlah.

LK 5.3. Barisan dan Deret Aritmetika (On)

Bersama kelompok, Anda diharapkan saling berdiskusi dan bekerja sama mempelajari teknik penyusunan soal *high order thinking skills* (HOTS). Dengan kreativitas Anda, susunlah 2 soal HOTS terkait dengan Barisan dan Deret Aritmetika. Isikan pada kartu soal berikut. Soal yang Anda susun dapat berupa pilihan ganda atau uraian yang disertai dengan kunci jawaban atau pedoman pensekoran. Diutamakan merucuk pada kisi-kisi UN matematika SMA tahun 2017.

KARTU SOAL	
Jenjang	: Sekolah Menengah Atas
Mata Pelajaran	: Matematika
Kelas	: ...
Kompetensi Dasar	: ...
Indikator	: ...
Level	: Pengetahuan dan Pemahaman/Aplikasi/Penalaran*
Materi	: ...
Bentuk Soal	: Pilihan Ganda
BAGIAN SOAL DI SINI	
Kunci Jawaban	: ...

E. Latihan/Kasus/Tugas

Kata hikmah

Setiap orang memiliki karakter yang khusus dan bersifat pribadi maka hormatilah orang lain dan jangan memaksakan kehendak

1. Diberikan suatu barisan aritmetika 17, 23, 29, …
   a. Tentukan rumus umum suku ke-n
   b. Jika $u_m = 611$ maka tentukan m
2. Suatu barisan aritmetika yang banyaknya suku ganjil adalah $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_{n.}$Jumlah suku ke-2 dan suku ke-6 adalah 30 dan jumlah suku ke-

3 dan suku ke-7 adalah 38. Tentukan suku pertama a, suku terakhir dan suku tengahnya.

3. Suatu barisan aritmetika terdiri 4 suku dengan suku pertama $a = 5$ dan beda $b = 16$. Jika setiap dua unsur yang berturutan disisipkan masing-masing 3 bilangan sehingga bilangan pada barisan aritmetika dan bilangan yang disisipkan membentuk barisan aritmetika yang baru. Tentukan barisan aritmetika yang terbentuk.
4. Andi akan membuat 5 segitiga siku-siku yang berukuran beda dengan menggunakan kawat berkualitas baik. Keliling kelima segitiga siku-siku tersebut membentuk barisan aritmetika dengan beda $b = 12$. Jika panjang sisi siku-siku dari segitiga siku-siku yang terbesar adalah 15 cm dan 20 cm. Tentukan panjang kawat yang dibutuhkan untuk membuat segitiga tersebut.
5. Dalam melakukan survey dan pemetaan, seorang petugas survei harus memberi tanda di kota-kota pada kilometer(km) ke-1, ke-6, km-11, …dan seterusnya dengan pola yang sama. Jika petugas survei tersebut sudah melakukan penandaan sebanyak 25 kali maka tentukan jarak yang sudah ditempuh petugas survey tersebut.

F. Rangkuman

Setelah pembahasan materi barisan dan deret aritmetika, dapat disimpulkan sebagai berikut :

1. **Barisan Aritmetika** adalah suatu **barisan** yang selisih dua suku yang berturutan adalah tetap
2. Penulisan unsur dalam barisan aritmetika dinotasikan dengan a=suku ke-1 adalah $\mathbf{u_1}$, selisih tetap disebut beda, yaitu b dan rumus umum suku ke-n adalah $u_{n,}$ dengan $u_n = a + (n-1)b$**.**
3. Sifat-sifat dasar rumus suku ke-n adalah $u_n - u_{n-1} = b$ dan $u_n = \frac{1}{2}\,(u_{n-1} + u_{n+1})$.

4. Secara umum, jika p, q asli, $p > q$ maka $u_p = \frac{1}{2}(u_{p+q} + u_{p-q})$ dan$u_p - u_q = (p-q)\, b$
5. Barisan Aritmetika memiliki suku tengah jika banyaknya suku adalah **ganjil.**
6. Suku tengah, u_k adalah setengah dari jumlahan suku pertama dan suku terakhir, dinotasikan denganu_k = ½ $(u_1 + u_{2k-1})$.
7. Pembentukan barisan baru dapat dilakukan dengan proses penyisipan pada dua bilangan x, y. Hubungan antara banyaknya bilangan yang disisipkan k, beda b barisan yang terbentuk adalah

$$b = \frac{y-x}{k+1}$$

8. Misalkan suatu barisan aritmetika dengan banyak unsur n, suku pertama a, beda b sehingga dapat divisualkan$u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$. Jika setiap dua unsur yang berturutan masing-masing disisipkan k bilangan sehingga barisan aritmetika yang lama dan bilangan-bilangan disisipkan membentuk barisan aritmetika yang baru, dengan suku pertama a', beda b' dan banyak unsur n', maka, diperoleh hubungan, sebagai berikut :
   1) suku pertama $a' = a$,
   2) beda $b' = \frac{b}{k+1}$
   3) banyak unsur $n' = n + (n-1)k$

9. Jika $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$ merupakan suku-suku barisan aritmatika maka $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$ dinamakan deret aritmatika.

G. Umpan Balik dan Tindak Lanjut

Setelah Anda mempelajari materi dalam kegiatan belajar 5 ini maka lakukan refleksi diri dan tindak lanjut. Refleksi yang dilakukan terhadap perubahan yang meningkat dan lebih baik dari sebelunya. Ranah refleksi terdiri atas sikap positif dalam belajar dan sikap positif penguatan karakter sehingga mulai tumbuh kepribadian unggul. Silahkan Anda baca dan lakukan perintahnya, pada Umpan Balik dan Tindak Lanjut pada Kegiatan Pembelajaran 1.

Kegiatan Pembelajaran 6

Barisan, Deret Geometri dan Barisan Selain Barisan Aritmetika maupun Barisan Geometri

Kata hikmah

Kualitas suatu kebahagiaan ditentukan oleh kesuksesan menyelesaikan masalah dengan kemampuan pribadi maka jadikan jiwa mandiri sebagai senjata andalan dalam menyelesaikan masalah.

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari modul ini, diharapkan peserta diklatPengembangan Keprofesian Berkelanjutan atau pembaca dapat memahami barisan, deret geometri dan beberapa barisan atau deret lainnya yang terintegrasi dengan penguatan karakter. Kemampuan yang dilengkapi dengan kepribadian unggul tersebut adalah :

1. mampu memahami karakteristik suatu barisan geometri,
2. mampu memahami pembentukan suatu deret geometri,
3. mampu memahami karakteristik suatu deret geometri tak hingga,
4. mampu memahami jumlahan suatu deret geometri tak hingga,
5. mampu mmahami karakteristik suatu barisan selain barisan aritmetika maupun barisan geometri,
6. mampu memahami soal-soal teoritis dan permasalahan konteks yang berkaitan dengan konsep barisan atau deret geometri.

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

Setelah mempelajari modul ini, diharapkan peserta diklat atau pembaca dapat mencapai target kompetensi dirinya dalam menerapkan materi barisan, deret geometri dan beberapa barisan atau deret lainnya yang terintegrasi dengan penguatan karakter. Secara rinci, peserta diklat atau pembaca mampu :

1. menjelaskan karakteristik suatu barisan geometri,
2. menentukan rumus umum suku ke-n, $u_n$pada barisan geometri,
3. menentukan rumus umum suku tengah $u_k$jika diberikan barisan geometri yang memiliki banyak suku-sukunya ganjil,

4. menemukan rumus umum rasio r' dari barisan geometri baru yang dibentuk melalui penyisipan k bilangan pada dua suku berturutan dari suatu barisan geometri,
5. membentuk suatu deret geometri jika diketahui unsur-unsur barisan geometri,
6. menentukan nilai limit jumlah suatu deret geometri tak hingga yang konvergen,
7. menjelaskan definisi suatu barisan berderajat dua dan barisan berderajat tiga,
8. menentukan rumus umum suku ke-n dari barisan berderajat dua, barisan berderajat tiga dan barisan yang berlandaskan geometri,
9. menerapkan konsep barisan dan deret geometri, barisan *Fibonacci* dalam menyelesaikan soal-soal dan permasalahan konteks yang terkait.

C. Uraian Materi

Barisan, Deret Geometri dan Barisan Selain Barisan Aritmetika maupun Barisan Geometri

Kata hikmah

Qualitas seseorang ditentukan oleh kompetensi otak(olah fikir), akhlaq(olah laku) dan prestasi diri(olah diri) maka hiduplah dengan prestasi dan bergaulah dengan pribadi unggul

1. Barisan Geometri

Sebagai ilustrasi awal, untuk memahami ciri pada barisan geometri, perhatikan barisan-barisan bilangan berikut ini.

a. $1, 2, 4, \ldots, 64$ b. $27, 9, 3, 1, \ldots, \frac{1}{27}$

Pada barisan a, terlihat bahwa $\frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{8}{4} = \cdots = \frac{64}{32} = 2$, sedangkan barisan b, diperoleh juga $\frac{9}{27} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} = \cdots = \frac{\frac{1}{27}}{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$. Setiap barisan bilangan tersebut di atas, memiliki ciri tertentu, yaitu perbandingan dua suku yang berurutan mempunyai nilai yang tetap, yaitu masing-masing adalah 2 dan $\frac{1}{3}$.

Di dunia bisnis, khususnya bagian pemasaran, berkembang pesat sistem *multi level marketing* (MLM). Sistem kerjanya mudah dan terkesan ringan tapi keuntungan yang dijanjikan besar. Salahsatu contohnya, setiap orang hanya memasarkan kepada dua orang bawahannya (*downlines*) sehingga satu orang menawarkan kepada dua orang, kemudian dua orang menawarkan kepada empat orang dan seterusnya. Sistem MLM tersebut akan menghasilkan barisan bilangan $1, 2, 4, \dots, 2^n$.

Selanjutnya, suatu barisan bilangan yang perbandingan dua suku berurutan adalah tetap dinamakan barisan geometri**.** Sedangkan perbandingan dua suku yang berurutan disebut rasio dan dinotasikan huruf$r$.

Definisi

Suatu barisan $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$disebut barisan geometri, jika untuk sebarang nilai n bilangan asli berlaku hubungan:

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = r$$

dengan r (rasio) adalah suatu tetapan (konstanta).

Contoh:

Tentukan rasio r dari barisan geometri berikut

a. $2, 6, 18, \dots , 2.3n$

b. 1, ½, ¼, …, $\frac{1}{2^n}$

Penyelesaian :

a. Barisan $2, 6, 18, \dots , 2 \times 3^n$ adalah barisan geometri dengan rasio $r = \frac{6}{2} = 3$.

b. Barisan$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{2^n}$adalah barisan geometri dengan rasio $r = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$.

a. Rumus Suku Umum Ke-n pada Barisan Geometri

Misalkan suatu barisan geometri dengan suku pertama a dan rasio adalah r, maka suku-suku barisan dapat ditulis $a, ar, ar^2, ar^3, \dots, ar^{n-1}$.

Berdasarkan pola dari suku-suku barisan geometri di atas, maka rumus suku ke-n dapat didefinisikan, sebagai berikut.

Rumus

Misalkan suatu barisan geometri dengan suku pertama a dan rasio r. Rumus suku umum ke-n dari barisan geometri itu ditentukan oleh

$$u_n = ar^{n-1}$$

b. Sifat-sifat Suku ke-*n* pada Barisan Geometri

Berdasarkan rumus suku ke-n suatu barisan geometri, diperoleh sifat-sifat, sebagai berikut

1. Rumus umum suku ke-n adalah $u_n = ar^{n-1}$merupakan fungsi eksponen dari n yang tidak mengandung suku konstanta
2. Untuk setiap n bilangan asli berlaku $\frac{u_n}{u_{n-1}} = r$(rasio)

   Secara umum, jika p, q bilangan asli, p > q berlaku

$$\frac{u_p}{u_q} = \frac{ar^{p-1}}{ar^{q-1}} = r^{(p-1)-(q-1)} = r^{p-q}$$

3. Untuk setiap p, q bilangan asli, p>q berlaku

$$u^2{}_p = u_{p+q} \cdot u_{p-q}$$

   Bukti :

   $u_{p+q} \times u_{p-q}$ = a r^{p+q-1} . a $r^{p-q-1} = a^2 r^{2p-2} = (ar^{p-1})^2 = {u_p}^2$

   Akibatnya, berlaku

   ${u_2}^2 = u_3 \times u_1, {u_3}^2 = u_4 \times u_2 = u_5 \times u_1$ dan seterusnya.

Contoh:

Tentukan suku pertama a, rasio r, dan suku ke-10 pada barisan-barisan geometri berikut ini.

a. $3, 9, 27, 81, \ldots$ b. $8, -4, 2, -1, \ldots$

Penyelesaian :

a. Diketahui barisan geometri $3, 9, 27, 81, \ldots$,

   Dari soal, diperoleh suku pertama $a = 3$, rasio $r = \frac{9}{3} = 3$; suku kesepuluh $u_4 = ar^9 = 3 \times 3^9 = 59049$

b. Diketahui barisan geometri $8, -4, 2, -1, \ldots$

   Menurut soal, didapat suku pertama $a = 8$, rasio $r = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$; suku kesepuluh $u_{10} = ar^9 = 8 \times (-\frac{1}{2})^9 = -\frac{1}{64}$

Contoh:

Misalkan terdapat 3 bilangan membentuk barisan geometri dengan suku pertama adalah 3 dan hasil kali ketiga sukunya adalah 81. Tentukan rasio dan barisan geometrinya.

Penyelesaian :

Misalkan barisan geometrinya adalah ar^{-1}, a, ar. Karena diketahui suku pertama $u_1 = ar^{-1} = 3$sehingga $3r = a$. Dari sisi lain, hasilkali ketiga suku 81 sehingga $ar^{-1} \times a \times ar = 81 \leftrightarrow a = 3$.

Suku ketiga $u_1 = ar^{-1} = 3 \leftrightarrow 3 \times r^{-1} = 3 \leftrightarrow r = 1$.

Jadi, diperoleh suku pertama adalah 1, suku kedua adalah 3 dan suku ketiga adalah 81, dengan rasio $r = 1$.

Contoh:

Diketahui suku ke-3 suatu barisan geometri sama dengan 45, sedangkan suku ke-5 sama dengan 405. Tentukan rasio r yang positif dan suku ke-10 dari barisan geometri itu.

Penyelesaian :

Berdasarkan soal, diketahui bahwa suku ketiga $u_3 = 45$, suku kedua $u_5 = 405$

Rasio dapat ditentukan dengan menghitung $\frac{u_5}{u_3} = \frac{405}{45} = 9$ dan $\frac{u_5}{u_3} = \frac{ar^4}{ar^2} = r^2$. Dengan demikian, didapat $r^2 = 9$ sehingga rasio yang positif adalah $r = 3$. Dengan mensubstitusikan $r = 3$ pada $u_3$diperoleh

$$u_3 = ar^2 \leftrightarrow 45 = a \times 3^2 = 9a \leftrightarrow a = 5.$$

Suku umum ke-n ditentukan dengan rumus

$$u_n = ar^{n-1} \leftrightarrow u_n = 5 \times 3^{n-1}$$

Suku ke-10, adalah $u_{10} = 5 \times 3^9 = 5 \times 19683 = 98415$.

Contoh:

Berdasarkan hasil penelitian, tahun 2010-2015, angka atau tingkat pertumbuhan penduduk di suatu daerah pemukiman baru mencapai 10% per tahun dan tingkat pertumbuhan penduduk ini tetap. Jika jumlah penduduk awal tahun 2010 adalah 1.000.000 jiwa tentukan jumlah penduduk pada awal tahun 2016.

Jawab:

Misalkan jumlah penduduk awal tahun 2010 adalah $A_1 = 1.000.000$ jiwa dan jumlah penduduk pada awal tahun ke-n adalah A_n. Dengan tingkat pertumbuhan $10\% = \frac{10}{100} = 0{,}1$ maka

d) Jumlah penduduk pada awal tahun 2011 (tahun ke-2) adalah A_2:

$A_2 = A_1 + 0{,}1A_1 = A_1(1 + 0{,}1) = (1{,}1)A_1$

e) Jumlah penduduk pada tahun 2012 (tahun ke-3) adalah A_3:

$A_3 = A_2 + 0{,}1A_2 = A_2(1 + 0{,}1) = (1{,}1)A_2 = (1{,}1)^2A_1$

Secara sama, didapat $A_5 = (1{,}1)^4A_1$ dan diperoleh suatu barisan geometri, 1.000.000, (1.1)(1.000.000), $(1{,}1)^2$(1.000.000), ..., $(1{,}1)^{n-1}$ (1.000.000), dengan $a = A_1$, $r = 1{,}1$ dan suku ke-n adalah u_n. Jumlah penduduk pada tahun 2016 adalah suku ke-5, yaitu $u_5 = ar^4 = 1.000.000 \times (1{,}1)^4 = 1.464.100$ jiwa.

c. Suku Tengah pada Barisan Geometri

Secara umum, misalkan barisan geometri $u_1, u_2, u_3, \dots, u_k \dots u_{2k-1}$sehingga banyak suku adalah $2k - 1$ (ganjil) dan suku tengahnya adalah u_1.

Suku tengah $u_k = ar^{k-1} = \sqrt{a^2 \times r^{2(k-1)}} = \sqrt{a \times ar^{(2k-2)}} = \sqrt{a \times ar^{(2k-1)-1}} = \sqrt{u_1 \times u_{(2k-1)}}$

Jadi, suku tengahnya adalah

$$u_k = \sqrt{\boldsymbol{u_1 \times u_{2k-1}}}$$

Berdasarkan penemuan fakta di atas, suku tengah dari suatu barisan geometri , dinotasikan u_k dapat ditentukan sebagai berikut :

Rumus

Suatu barisan geometri dengan banyak suku adalah ganjil $(2k - 1)$, dengan k anggota bilangan asli lebih dari dua. Suku tengah barisan geometri yang dinotasikan u_k adalah suku ke-k dan rumusnya ditentukan oleh hubungan

$$u_k = \sqrt{u_1 \times u_{2k-1}}$$

Contoh:

Diberikan barisan geometri $\frac{1}{8}, . \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \ldots, 128$. Jika diketahui banyaknya suku pada barisan geometri ini adalah ganjil maka tentukan

a. suku tengahnyau_k dan k

b. banyaknya suku barisan geometri tersebut

Penyelesaian :

a. Barisan geometri $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \ldots, 128$ Suku pertama $a = u_k = \frac{1}{8}$, rasio $r = 2$ dan suku terakhir$u_{2k-1} = 128$.

Dengan menggunakan rumus suku tengah $u_k = \sqrt{u_1 \times u_{2k-1}}$, diperoleh

$u_k = \sqrt{\frac{1}{8} \times 128} = \sqrt{16} = 4$. Menurut hasil a), diperoleh $u_k = a\, r^{k-1} = \frac{1}{8} 2^{k-1} = 4 \leftrightarrow 2^{k-1} = 8 . 4 = 32 = 2^5 \leftrightarrow k = 5+1 = 6$

Jadi didapat $k = 6$.

b. Banyaknya suku barisan ini adalah $(2k - 1) = (2 \times 6 - 1) = 12 - 1 = 11$.

d. Sisipan pada Barisan Geometri

Misalkan suatu barisan geometri dengan banyak unsur n, suku pertama a, rasio r sehingga dapat divisualkan

$$u_3, \ldots, u_n$$

Jika setiap dua unsur yang berturutan masing-masing disisipkan k bilangan sehingga barisan geometri yang lama dan bilangan-bilangan disisipkan membentuk barisan geometri yang baru,

$$a = u_1 \underbrace{x_1 \ \ldots \ x_k}_{k} u_2 \underbrace{x_1 \ \ldots \ x_k}_{k} u_3 \ldots u_{n-2} \underbrace{x_1 \ \ldots \ x_k}_{k} u_{n-1} \underbrace{x_1 \ \ldots \ x_k}_{k} u_n$$

dengan suku pertama a', rasio r', dan banyak unsur n' maka diperoleh hubungan, sebagai berikut :

a. suku pertama $a' = a$,

b. rasio $\boldsymbol{r}' = \sqrt[k+1]{\boldsymbol{r}}$

c. banyak unsur $n' = n + (n-1)k$

Contoh :

Dua bilangan 3 dan y disisipi lima bilangan sehingga membentuk barisan geometri dan suku tengahnya adalah $u_4 = 24$.

a. Tentukan rasio r dari barisan yang terbentuk.

b. Tentukan bilangan y dan suku keberapa?

Penyelesaian :

a. Misalkan barisan geometri adalah $3, x_1, x_2, \dots, x_5, y$ dengan y suku terakhir barisan dan $k = 5$. Karena diketahui $u_4 = 24$ dan $u_1 = 3$ sehingga

$$\frac{u_4}{u_1} = r^3 \leftrightarrow \frac{24}{3} = 8, \text{ didapat } r = 2.$$

b. Karena disisipkan 5 bilangan, menurut rumus, diperoleh rasio r, yaitu

$$r = \sqrt[k+1]{\frac{y}{3}} = \sqrt[6]{\frac{y}{3}} \leftrightarrow 2^6 = \frac{y}{3} \leftrightarrow y = 192.$$

Karena suku tengahnya $u_4 = 24$ maka didapat $k = 4$ sehingga $(2k-1) = 2 \times 4 - 1 = 7$.

2. Deret Geometri

Sebagaimana, pendefinisian deret aritmetika, bahwa deret geometri dibentuk dari barisan geometri. Artinya, suatu barisan geometri dapat dibentuk deret geometrinya. Definisi Deret Geometri, divisualkan sebagai berikut

Definisi

Jika $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$ merupakan suku-suku barisan geometri maka $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$ dinamakan deret geometri

Misalkan jumlah n suku pertama dari deret geometri dilambangkan dengan S_n maka didapat$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n \leftrightarrow S_n = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1}$ (*)

Kalikan kedua ruas pada persamaan (*) dengan r, diperoleh

$$r\,S_n = r\,(a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1}) \qquad (**)$$

Kurangkanlah masing-masing ruas pada (*) dan (**) sehingga didapat

$$S_n - rS_n = a - ar^n \leftrightarrow (1 - r^n)S_n = a(1 - r^n)$$

$$\leftrightarrow S_n = \frac{a\,(1 - r^n)}{(1-r)}.$$

Dengan cara yang sama,$rS_n - S_n$didapat $S_n = \frac{a\,(r^n-1)}{(r-1)}$.

Definisi

Jumlah n suku pertama suatu deret geometri $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$ditentukan dengan

$$S_n = \frac{a\,(1 - r^n)}{(1-r)},$$

atau

$$S_n = \frac{a\,(r^n-1)}{(r-1)},$$

untuk $r \neq 1$, dengan n, a, r masing-masing adalah banyaknya data, suku pertama dan rasio

a. Sifat-sifat S_n pada Deret Geometri

Jumlah n suku pertama deret geometri yang dinotasikan S_n, mempunyai sifat-sifat khusus, yaitu :

1) $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ atau $S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$ merupakan **fungsi eksponen** dari n yang memuat suku tetapan $\frac{a}{1-r}$ atau $\frac{a}{r-1}$

2) untuk tiap n bilangan asli, berlaku hubungan$S_n - S_{n-1} = u_n$.

Contoh:

Diberikan suatu deret geometri $6 + 2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \cdots$. Tentukan jumlah dari delapan suku pertama deret geometri tersebut.

Penyelesaian :

Berdasarkan soal, didapat suku pertama a = 6, rasio r = $\frac{u_2}{u_1} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ sehingga jumlah n suku pertama $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{6(1-(\frac{1}{3})^n)}{1-\frac{1}{3}} = \frac{6(1-(\frac{1}{3})^n)}{\frac{2}{3}} = 9\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right), \quad r \neq 1.$

Jumlah delapan suku pertama adalah S_8, dengan

$$S_8 = \frac{6\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^8\right]}{1-\frac{1}{3}} = 8{,}99 \text{ (sampai 2 angka desimal)}$$

(Coba Anda kerjakan dengan rumus $S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$ dan bandingkan hasilnya)

Contoh:

Sepotong kawat mempunyai panjang 124 cm. Kawat ini dipotong menjadi 5 bagian sehingga panjang potongan-potongannya membentuk barisan geometri dengan panjang potongan kawat yang paling pendek sama dengan 4cm.Tentukan panjang masing-masing potongan kawat yang didapat.

Penyelesaian :

Misalkan panjang potongan-potongan kawat berturut-turut adalah $u_1, u_2, u_3, u_4,$ $dan\ u_5$ membentuk barisan geometri dengan suku pertama $a = 4\ cm$ dan rasio r.

Jumlah suku-suku barisan geometri itu membentuk deret geometri dengan jumlah sama dengan panjang kawat.

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = \text{ panjang kawat } \leftrightarrow \frac{a(1-r^5)}{(1-r)} = 124$$

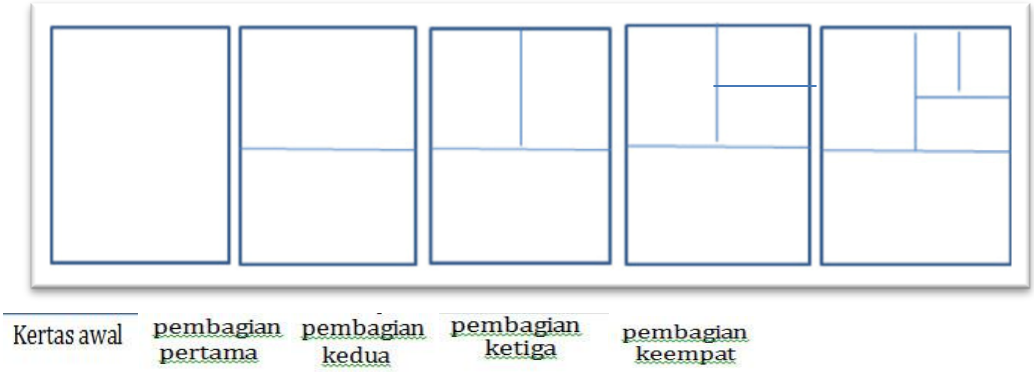
$$\leftrightarrow \frac{4(1-r^5)}{(1-r)} = 124 \leftrightarrow \ 1 - r^5 = 31(1-r) \leftrightarrow r^5 - 31r + 30 = 0$$

Solusi persamaan ini adalah $r = 2$, maka suku ke-5 adalah $u_2 = ar^1 = 4.(2)^1 = 8$. Dengan cara yang sama didapat u_3 = 16, u_4= 32 dan u_5 = 64

Jadi, barisan geometri yang didapat adalah 4, 8, 16, 32, 64.

b. Deret Geometri Tak Hingga

Sebelum masuk materi secara konseptual, pengertian tentang deret geometri tak hingga, lebih baik diilustrasikan pada contoh konteks. Perhatikan ilustrasi berikut. Misalkan satu lembar kertas berbentuk persegi. Kemudian kertas tersebut dibagi menjadi dua, kemudian salah satu bagian, dibagi menjadi dua bagian, dan seterusnya. Sebagai visualisasi proses pembagian kertas, sebagai berikut :



Proses pembagian tersebut dapat diulangi terus menerus sampai tak hingga kali. Pada pembagian pertama didapat ½ bagian, pembagian kedua $\frac{1}{4}$ bagian, yang ketiga $\frac{1}{8}$bagian, dan seterusnya. Hasil dari pembagian ini, diperoleh hubungan

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = 1.$$

Peragaan yang sederhana ini, sebenarnya menjelaskan pengertian jumlah deret geometri tak hingga.

Secara teoritis, dijelaskan sebagai berikut.

Berdasarkan definisi, deret geometri dapat ditulis

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}.$$

Sedangkan, jumlah n suku pertama dari deret geometri itu ditentukan oleh

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)}, \text{ untuk } r < 1$$

Sekarang, jika banyaknya suku-suku penjumlahan deret geometri mendekati tak hingga, maka deret geometri semacam ini dinamakan deret geometri tak hingga.

Selanjutnya, penulisan suatu deret geometri tak hingga adalah

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_4 + u_{n+} + \cdots = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$$

Jumlah dari deret geometri tak hingga dinotasikan dengan S dan ditulis

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n$$

Maknanya, S diperoleh dari S_n dengan proses limit, untuk n mendekati tak hingga. Selanjutnya, nilai $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ ditentukan dengan menggunakan teorema limit sebagai berikut

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^n)}{(1-r)}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{(1-r)} - \lim_{n\to\infty} \frac{a\,r^n}{(1-r)}$$

$$= \frac{a}{(1-r)} - \frac{a}{(1-r)} \lim_{n\to\infty} r^n$$

Berdasarkan persamaan terakhir, diketahui bahwa $\lim_{n\to\infty} S_n$ ditentukan oleh ada atau tidaknya $\lim_{n\to\infty} r^n$.

Selanjutnya, ada dua kemungkinan nilai $\lim_{n\to\infty} r^n$, yaitu

i. jika $|\, r\,| < 1$ atau $-1 < r < 1$ maka $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$. Akibatnya, diperoleh

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{(1-r)} - \frac{a}{(1-r)}\, 0 \leftrightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{(1-r)}$$

Deret geometri tak hingga semacam ini dikatakan mempunyai limit jumlah atau konvergen. Limit jumlah ini dilambangkan dengan S, sehingga diperoleh

$$\boldsymbol{S = \frac{a}{(1-r)}}.$$

ii. untuk $|\, r\,| \geq 1$ atau $-1 \leq r$ atau $r \geq 1$ dapat ditunjukkan bahwa $\lim_{n\to\infty} r^n = \pm\infty$sehingga diperoleh $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{(1-r)} - \frac{a}{(1-r)} = \pm\infty$

$$\leftrightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \pm\infty$$

Deret geometri tak hingga semacam ini dikatakan tidak mempunyai limit jumlah atau divergen.

Definisi

Deret geometri tak hingga $u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$ dikatakan

1) **mempunyai limit jumlah** atau konvergen jika dan hanya jika $|\boldsymbol{r}| < 1$ dan limit jumlah ditentukan oleh $\boldsymbol{S} = \frac{\boldsymbol{a}}{(\boldsymbol{1-r})}$
2) **tidak mempunyai limit jumlah** atau divergen jika dan hanya jika $|\boldsymbol{r}| \geq \boldsymbol{1}$.

Contoh:

Hitunglah limit jumlah pada deret geometri tak hingga 4 – 2 + 1 – ½ + … .

Penyelesaian :

Menurut soal, didapat deret geometri tak hingga dengan $a = 4, r = -$ ½($|r| < 1$) sehingga deret konvergen dan memiliki limit jumlah. Dengan menggunakan rumus jumlah deret tak hingga diperoleh

$$S = \frac{a}{(1-r)} = \frac{4}{(1+\frac{1}{2})} = 4 \times \frac{2}{3} = 2\,\frac{2}{3}.$$

Contoh :

Diberikan deret geometri tak hingga $2 + 3 + \frac{9}{2} + \frac{27}{4} + \cdots$ Selidikilah apakah memiliki limit jumlah dan beri alasannya.

Penyelesaian :

Berdasarkan, didapat deret geometri tak hingga dengan $a = 2$, $r = \frac{3}{2} =$ 1½ sehingga $|r| \geq 1$. Karena $|r| \geq 1$ maka $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ sehingga tidak memiliki limit jumlah.

Contoh:

Jumlah suatu deret geometri tak hingga adalah $(4 + 2\sqrt{2})$ sedangkan rasionya adalah$\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Secara teliti dan cermat, tentukan suku pertama deret tersebut.

Penyelesaian :

Diketahui bahwa limit jumlah $S = (4 + 2\sqrt{2})$ dan $r =$ ½ $\sqrt{2}$, $|r| < 1$ sehingga menurut rumus limit jumlah diperoleh

$$S = \frac{a}{(1-r)} \leftrightarrow 4 + 2\sqrt{2} = \frac{a}{(1-\frac{1}{2}\sqrt{2})}$$

$$\leftrightarrow a = (4 + 2\sqrt{2})\,(1- ½\,\sqrt{2}) = 4 - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 2$$

$$\leftrightarrow a = 2.$$

Jadi, suku pertama dari deret geometri tak hingga adalah 2.

Contoh:

Sebuah bola dijatuhkan ke lantai dari suatu tempat yang tingginya 5 m. setiap kali bola itu memantul akan mencapai $\frac{2}{3}$yang dicapai sebelumnya.Hitunglah panjang lintasan yang dilalui bola itu sampai berhenti

Penyelesaian :

Panjang lintasan yang dilalui bola sampai berhenti adalah

$$5 + \frac{2}{3} \times 5 + \frac{2}{3} \times 5 + (\frac{2}{3})^2 \times 5 + (\frac{2}{3})^2 \times 5 + (\frac{2}{3})^3 \times 5 + (\frac{2}{3})^3 \times 5 + \cdots$$

$$\leftrightarrow 5\,(1 + 2\,(\tfrac{2}{3} + (\tfrac{2}{3})2 + (\tfrac{2}{3})3 + \ldots)) \leftrightarrow 5(1 + 2 \quad (**)$$

Bentuk pada (**) adalah deret geometri tak hingga dengan$a = \frac{2}{3}$, $r = \frac{2}{3}$ sehingga

$S = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} = 2$. Panjang lintasan bola sampai berhenti = $5(1 + 2\,.\,2) = 25$.

3. Barisan Selain Barisan Aritmetika dan Geometri

Banyak diantara siswa bahkan sebagian guru matematika yang menganggap bahwa barisan itu hanya barisan aritmetika dan geometri. Kalau siswa mungkin wajar karena materi barisan yang dibahas hanya barisan aritmatika dan geometri. Tetapi kalau guru, sebenarnya kurang layak. Untuk menambah wawasan tentang barisan, berikut akan dibahas beberapa barisan yang bukan barisan aritmetika dan bukan barisan geometri.

Pada barisan aritmetika selisih setiap dua suku yang berturutan adalah tetap, sedangkan pada barisan geometri perbandingan dua suku yang berturutan juga tetap. Artinya, pada pengurangan pertama, untuk barisan aritmetika dan pembagian pertama pada barisan geometri, sudah nampak jelas hasilnya. Tetapi berbeda pada barisan ini, setelah proses pengurangan yang pertama, belum menghasilkan konstanta yang tetap, tetapi setelah pengurangan kedua, atau ketiga, dan seterusnya baru muncul konstanta yang tetap.

Sebagai contoh, barisan $4, 7, 12, 19, 28, 39, \ldots$ Bisa dilihat selisih dua suku yang berurutan masing-masing adalah $3, 5, 7, 9, 11, \ldots$ dan bukan konstanta tetap tetapi sudah membentuk pola bilangan. Kalau dilanjutkan , didapat selisih setiap dua unsur berurutan adalah tetap, yaitu 2. Permasalahan yang muncul, sampai berapa tingkat, proses yang menghasilkan selisih yang tetap.

a. Barisan Bertingkat dengan Landasan Barisan Aritmetika

Salah ciri khusus barisan aritmetika terletak pada selisih dua suku yang berurutan. Pada barisan aritmetika, hasil pengurangan dua suku yang berurutan pada tahap pertama sudah diperoleh konstanta tetap.

Pada barisan berikut, pengurangan dua suku yang berurutan belum tetap. Sifat ini digunakan untuk membentuk barisan baru. Caranya adalah menentukan selisih dari setiap dua suku yang berturutan, kemudian hasilnya dibentuk barisan. Apabila pada pengurangan pertama belum terbentuk keteraturan (pola) maka dilakukan proses yang sama pada barisan yang didapat. Langkah ini dilanjutkan sampai diperoleh selisih dua suku yang berturutan adalah tetap.

Barisan baru ini bergantung pada berapa tingkat (tahap, derajat) proses pengurangannya yang menghasil selisih tetap sehingga namanya dikaitkan dengan tahap (derajat)nya.

Definisi

- Suatu barisan $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$ dinamakan **Barisan berderajat satu** jika selisih tetap yang diperoleh dalam satu tingkat pengurangan (barisan aritmetika).
- Suatu barisan $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$ dinamakan **Barisan berderajat dua** jika selisih tetap yang diperoleh dalam dua tingkat pengurangan.
- Suatu barisan $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$dinamakan **Barisan berderajat tiga** jika selisih tetap yang diperoleh dalam tiga tingkat pengurangan.

Bentuk umum dari barisan-barisan ini merupakan fungsi dalam variabel n, dengan bilangan asli dan a, b, c, d bilangan real, yaitu

1) $f(n) = a\,n + b$, (barisan berderajat pertama, aritmetika),
2) $f(n) = a\,n^2 + b\,n + c$, (barisan berderajat kedua),
3) $f(n) = a\,n^3 + b\,n^2 + c\,n + d$, (barisan berderajat ketiga,

   dan seterusnya.

Untuk lebih memantapkan tentang barisan berderajat ini, disajikan beberapa contoh.

1. Barisan 2, 5, 8, 11, ...

   Terlihat bahwa barisan tersebut adalah barisan aritmetika, sehingga jika dibentuk barisan selisihnya diperoleh selisihnya tetap.

   2 5 8 11

   3 3 3 Selisih tetap

   Selisih tetap yaitu 3 diperoleh pada pengurangan pertama sehingga barisan 2, 5, 8, 11, ... disebut barisan berderajat satu. Dengan demikian, barisan aritmetika juga bisa disebut barisan berderajat satu.

2. Barisan 5, 8, 13, 20, 29, ...

   Pada proses pengurangan pertama, terlihat bahwa barisan selisihnya tidak tetap sehingga barisan ini bukan barisan aritmetika. Proses pengurangan dilanjutkan ke tingkat dua dan diperoleh selisihnya tetap.

   5 8 13 20 29 ...

   3 5 7 9

   2 2 2 Selisih tetap=2

   Selisih tetap yaitu 2 diperoleh pada pengurangan kedua sehingga barisan 5, 8, 13, 20, 29, ... disebut barisan berderajat dua

3. Barisan 2, 5, 18, 45, 90, ...

   Barisan ini bukan merupakan barisan aritmetika, hal tersebut dapat dibuktikan pada tingkat pengurang pertama belum diperoleh selisih tetap. Apakah barisan berderajat dua.

Untuk membuktikan hal itu, proses pengurangan dilanjutkan sehingga didapat selisish yang tetap.

2 5 18 45 90 ...

3 13 27 45

10 14 18

6 6 Selisih tetap=6

Selisih tetap yaitu 6 diperoleh pada pengurangan ketiga sehingga barisan 2, 5, 18, 45, 90 ... disebut barisan berderajat tiga

Target utama dalam pembahasan barisan adalah menentukan rumus umum suku ke-n. yaitu u_n dari barisan berderajat 2 atau lebih.

1) Barisan kuadrat (berderajat dua)

Bentuk umum $\boldsymbol{u_n = a\,n^2 + b\,n + c}$,

Proses :

Untuk menentukan suku ke-k, yaitu substitusikan $n = k, k = 1,2,3,4 , \ldots$ sehingga didapat barisan sebagai berikut

u_1=a+b+c, u_2=4a +2b +c, u_3=9a + 3b+c, u_4=16a+4b+c.

(i) a+b+c 4a+2b+c 9a+3b+c 16a+4b+ ...

(ii) 3a+b 5a+b 7a+b

(iii) $2a$ $2a$

Untuk menentukan rumus umum suku ke-n dari barisan bilangan 2,5, 8, 13, 20, 29, ... dilakukan proses pengurangan berikut

(i) 5 8 13 20 29 ...

(ii) 3 5 7

(iii) 2 2

Dengan mengamati kedua proses pengurangan (iii), selisih tetapnya didapat $2a = 2$ sehingga $a = 1$.

Substitusikan $a = 1$ pada u_1 (ii) diperoleh

$$3 = u_1 = 3a + b = 3 + b \text{ sehingga } b = 0.$$

Substitusi $a = 1, b = 0$ padau_1 (i), didapat

$$5 = a + b + c \Leftrightarrow c = 5 - b - a = 5 - 1 - 0 = 4.$$

Jadi, didapat rumus umum suku ke-n adalah $u_1 = 1 \times n^2 + 0 \times n + 4 = n^2 + 4$.

2) Barisan berderajat tiga

Bentuk umum suku ke-n adalah $u_n = a\,n^3 + b\,n^2 + c\,n + d$, dengan a, b, c, d bilangan real.

Proses :

Untuk menentukan suku ke-k, yaitu substitusikan $n = k, k = 1,2,3,4$ sehingga didapat barisan sebagai berikut :

(i) a+b+c+d 8a+4b+2c+d 27a+9b+3c+d 64a+16b+4c+d

(ii) 7a+3b+c 19a+5b+c 37a+7b+c

(iii) 12a+2b 18a+2b

(iv) 6a 6a

Untuk menentukan rumus umum suku ke-n, u_n dari barisan bilangan 2, 5, 18, 45, 90, ... dilakukan dengan membuat proses pengurangan, berikut

(i) 2 5 18 45 90

(ii) 3 13 27 45

(iii) 10 14 18

(iv) 4 4

Dengan mengamati kedua proses pengurangan, dari (iv) didapat $6a = 4$ sehngga sehingga $a = \frac{4}{6}$.

Substitusikan a=$\frac{4}{6}$ pada u_1 (iii) berlaku

$$10 = 12a + 2b \text{ sehingga} b = 1.$$

Substitusi $a = \frac{4}{6}$ dan$b = 1$ pada u_1(ii), didapat

$$1 = 7a + 3b + c, \text{sehingga } c = -\frac{14}{3}.$$

Substitusi $a = \frac{4}{6}$, $b = 1, c = -\frac{14}{3}$pada u_1(i), didapat $d = 5$.

Jadi, didapat rumus umum suku ke-n adalah

$$U_n = \frac{4}{3}n^3 + n^2 - \frac{14}{3}n + 5 = \frac{1}{3}(4n^3 + 3n^2 - 14n + 15).$$

b. Barisan Bertingkat dengan Landasan Barisan Geometri

Pada barisan yang dibentuk dari barisan geometri relatif panjang prosesnya. Artinya, pada beberapa tingkat proses pengurangan belum diperoleh bentuk dengan selisih tetap, tetapi pada tingkat pengurangan tertentu selanjutnya, baru terbentuk selisih tetap. Memang, kita disuruh lebih sabar dalam menemukan barisan yang satu ini.

Sebagai contoh dalam pembahasan ini, diberikan suatu barisan yang akan dicari barisan baru yang diperoleh dengan melakukan pengurangan beberapa kali.

Diberikan barisan 1, 2, 5, 12, 27, 58, 121, ...

1	2	5	12	27	58	121
1	3	7	15	31	63	
2	4	8	16	32		
2	4	8	16			
2	4	8				

Berdasarkan pengamatan pada proses pengurangan bahwa barisan ini mulai nampak berpola (keteraturan) pada tingkat dua. Pada hasil pengurangan tingkat dua, terbentuk 2, 4, 8, 16 dan dikenal suatu barisan yang memuat unsur 2^n dan ditambah suatu konstanta.

Maka barisan yang memiliki sifat seperti ini, secara umum dirumuskan dengan

$$u_n = 2^n + k\,n, \text{ untuk } n \text{ bilangan asli.}$$

Untuk menentukan k, disubstitusikan n=1, diperoleh

$$u_1 = 2^1 + k \times 1 \leftrightarrow 1 = 2 + k \leftrightarrow k = -1.$$

Jadi, rumus suku ke-n adalah $u_n = 2^n - 1$.

Contoh :

Tentukan rumus suku ke-n dari barisan berikut 5, 10, 17, 28, 47, 82, 149

Jawab

5 10 17 28 47 82 149

5 7 11 19 35 67

2 4 8 16 32

2 4 8 16

2 4 8

Sebagaimana contoh 1, diperoleh keteraturan dan memuat unsur 2^n sehingga rumus umumnya adalah $u_n = 2^n + kn$. Untuk menentukan nilai k, substitusikan untuk $n = 1$, didapat $5 = u_1 = 2^1 + k \times 1 \leftrightarrow 5 = 2 + k \leftrightarrow k = 3$.

Jadi, rumus umum suku ke-n, $u_n = 2^n + 3n$.

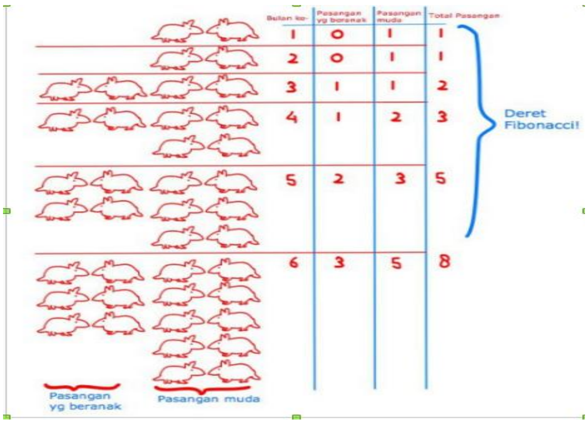
c. Barisan Fibonacci

Bilangan Fibonacci ditemukan oleh seorang matematikawan berkebangsaan Italia yang bernama Leonardo da Pisa atau Leonardo Pisano (1175-1250). Leonardo memiliki peran dalam mengenalkan sistem penulisan dan perhitungan bilangan Arab ke dunia Eropa.Ayahnya bernama William dan dikenal sebagai Bonacci). Leonardo disebut sebagai *Fibonacci* (dari kata *filius Bonacci*, anak dari Bonacci) sehingga beliau mendapat julukan *Fibonacci.*

Pada 1202, diusia 27 tahun, ia menuliskan apa yang telah dipelajari dalam bukunya yang berjudul *Liber Abaci*(buku perhitungan). Buku ini menunjukkan kepraktisan sistem bilangan Arab dengan cara menerapkannya ke dalam pembukuan dagang, konversi berbagai ukuran dan berat, perhitungan bunga, pertukaran uang dan berbagai aplikasi lainnya. Buku ini disambut baik oleh kaum terpelajar Eropa, dan menghasilkan dampak yang penting kepada pemikiran Eropa. Meskipun penggunaannya baru tersebar luas setelah ditemukannya percetakan sekitar tiga abad berikutnya.

Pada salahsatu bab, dalam Buku *Liber Abaci*, beliau menulis suatu permasalahan yang mampu mengusik akal sehat matematikawan, yaitu tentang masalah kelinci beranak-pinak. Pertanyaan sederhana tetapi menarik dan diperlukan kejelian dalam menjawabnya. Inilah masalah yang terdapat dalam buku tersebut :

"Berapa banyak pasangan kelinci yang beranak pinak selama satu tahun jika diawali dari sepasang kelinci (jantan dan betina) dan kelinci tersebut tumbuh jadi dewasa bisa kawin setelah mereka berumur satu bulan, sehingga setiap bulan kedua, masing-masing kelinci betina selalu melahirkan sepasang kelinci baru ?"



Dari gambaran diatas, dapat diketahui bahwa :

- Jumlah kelinci pada bulan ke-1 : 1 pasang (namakan A),
- Jumlah kelinci pada bulan ke-2 : 1 pasang (A),
- Jumlah kelinci pada bulan ke-3 : 2 pasang (A dan B; B adalah anak dari A),
- Jumlah kelinci pada bulan ke-4 : 3 pasang (A, B dan C; C adalah anak dari A),
- Jumlah kelinci pada bulan ke-5 : 5 pasang (A, B, C, D dan E; D adalah anak dari A, sedangkan E adalah anak dari B),
- ... .

Sehingga Fibonacci menggambarkan jumlah kelinci dalam setahun melalui barisan bilangan

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144.$$

Atau disajikan dalam bentuk notasi barisan bilangan, dengan

$$u_1,\ u_2,\ u_3\ , \dots , u_{12}\ .$$

Dengan demikian, jika ingin mencari banyak pasangan kelinci yang beranak-pinak dalam setahun maka permasalahan yang dimaksud adalah mencari suku ke-12, yaituu_{12}pada barisan bilangan tersebut.

Definisi

Barisan bilangan Fibonacci adalah barisan yang didefinisikan secara rekursif sebagai berikut :

$$u_n = \begin{cases} 1 & , \quad n = 1, 2 \\ u_{n-1} + u_{n-2} & , \quad n > 2, \end{cases}$$

dengan n bilangan asli.

Contoh :

Diberikan suatu barisan Fibonacci$u_1,\ u_2,\ u_3\ , \dots , u_{12}$. Jika setiap bilangan dalam barisan tersebut dikuadratkan maka buktikan bahwa $\sum_{i=1}^{n} (u_i)^2 = (u_n \times u_{n+1})$.

Bukti :

Misalkan barisan Fibonacci disajikan dalam table sebagai berikut :

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	
1	1	2	3	5	8	13	21	…
1	1	4	9	25	64	169	441	

Perhatikan tabel hasil pengkuadratan bilangan fibonacci diatas, didapat suatu pola, sebagai berikut :

$$1 = 1 \times 1 = u_1 \times u_2$$

$$1 + 1 = 1 \times 2 = u_2 \times u_3$$

$$1 + 1 + 4 = 2 \times 3 = u_3 \times u_4$$

$$1 + 1 + 4 + 9 = 15 = u_4 \times u_5$$

…

Dengan demikian, dapat ditulis

$$\sum_{i=1}^{n} (u_i)^2 = (u_n \times u_{n+1}).$$

Contoh :

Suatu permainan mengisi ember dilakukan dengan aturan sebagai berikut:

a. Mengisi dengan botol 1 liter atau 2 liter,

b. Tidak diperbolehkan mengisi dengan dua botol atau lebih secara bersamaan.

Dengan demikian untuk mengisi 1 liter air ke ember ada 1 cara, 2 liter air ada 2 cara, 3 liter air ada 3 cara. Selidiki dengan teliti dan cermat sehingga terbentuk pola suatu barisan dan banyak cara untuk mengisikan 11 liter air ke dalam ember adalah … .
Bandingkan dengan barisan *Fibonaccy* !

D. Aktifitas Pembelajaran

LK 6.1. Barisan, Deret Geometrid dan Barisan Selain Barisan Aritmetika maupun Barisan Geometri (In-1)

Kerjankanlah setiap soal berikut secara serius, teliti, dan cermat serta optimalkan kekuatan kerja gotong royong sehingga kerja menjadi lebih ringan dan bermakna kebersamaan.

1. Diberikan barisan-barisan bilangan, sebagai berikut :

   a. 5, 10, 20, 40, 80, … b. 81, 27, 9, 3, 1, …

   Selidikilah apakah barisan di atas membentuk barisan geometri!. Jika ya, tentukan suku pertama a, rasio r dan rumus umum untuk suku ke-n.

2. Tulis hubungan antara tiga suku berurutan, suku ke-n dan rasio r serta buktikan bahwa :

   a. $\frac{u_n}{u_{n-1}} = r$dan $u_2 = \sqrt{u_1 u_3}$

   b. jika p, q asli, $p > q$ maka $u_p = \sqrt{u_{p+q} u_{p-q}}$ dan $\frac{u_p}{u_q} = r^{p-q}$.

3. Tulis cara menentukan suku tengah dari barisan geometri yang mempunyai banyak suku adalah ganjil. Mulai dari 3 suku, 5 suku, 7 suku dan secara umum $(2k-1)$ suku. Buktikan bahwa suku tengah adalah akar dari hasilkali suku pertama dan suku terakhir.

4. Suatu barisan geometri, diketahui hasilkali suku ke-2 dan suku ke-4 adalah 81, sedangkan hasilkali suku ke-3 dan suku ke-5 adalah 729.

   a. Tentukan suku pertama a, rasio dan rumus suku ke-n,

b. Jika diketahui banyaknya suku adalah 7 maka tentukan suku ke-7 dan suku tengahnya.

5. Misalkan suatu barisan geometri dengan banyaknya suku adalah 9, suku tengahnya adalah 1, hasilkali suku ke-2 dan suku ke-4 adalah 5^{-4}. Tentukan suku pertama a, rasio r dan suku ke-n.

6. Misalkan antara bilangan 2 dan 32 disisipkan 3 bilangan sehingga bilangan awal dan bilangan yang disisipkan membentuk barisan geometri. Buktikan bahwa barisan aritmetika yang terbentuk adalah 2, 4, 8, 16, 32, dengan rasio r = 2.

   a. jika 2 diganti x, 32 diganti y dan banyak bilangan yang disisipkan adalah k maka buktikan bahwa rasio $r' = \sqrt[k+1]{\frac{y}{x}}$,

   b. misalkan suatu barisan geometri dengan banyak unsur n, suku pertama a, rasio r sehingga dapat divisualkan$u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$Jika setiap dua unsur yang berturutan masing-masing disisipkan k bilangan sehingga barisan geometri yang lama dan bilangan-bilangan disisipkan membentuk barisan geometri yang baru, dengan suku pertama a', rasio r' dan banyak unsur$n$', maka selidiki hubungan antara suku pertama a' dengan a, rasio r dengan r dan banyak unsur n' dengan n.

7. Tulis syarat suatu deret geometri tak hingga yang memiliki limit jumlah dan buatlah dua contoh konteks yang berkaitan dengan deret geometri tak hingga

8. Tulis dan jelaskan pengertian barisan berderajat satu, barisan berderajat dua, barisan berderajat tiga, notasi dari unsur-unsur dan suku-sukunya serta berikan masing-masing satu contoh.

9. Diberikan tiga barisan, sebagai berikut :

   a. 2, 6, 12, 20,30,42,56,
   b. 1, 4, 9, 16, 25,36. 49, 64.

   Selidikilah setiap barisan merupakan barisan berderajat dua, jelaskan dengan proses pengurangan dan tentukan rumus umum untuk suku ke-n

10. Diberikan tiga barisan bilangan, sebagai berikut :

    a. 20, 15, 10, 5, 0, -5, -10
    b. 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20

Selidikilah setiap barisan merupakan barisan berderajat tiga dan jelaskan dengan proses pengurangan.

LK 6.2. Barisan, Deret Geometrid dan Barisan Selain Barisan Aritmetika maupun Barisan Geometri (On)

Kerjakan semua soal berikut secara mandiri, serius, jujur, teliti dan cermat sehingga hasil yang diperoleh lebih optimal dan bermakna.

1. Diberikan tiga barisan bilangan, sebagai berikut :

   a. 7, 9, 15, 21, 37, 69, 133, …
   b. 7, 10, 17, 28, 47, 82, 149, …
   c. 9, 18, 28, 44, 67, 106, 177, ...

   Selidikilah setiap barisan merupakan barisan bertingkat dengan landasan (asal) dari barisan geometri, jelaskan dengan proses pengurangan dan tentukan rumus umum untuk suku ke-n.
2. Diberikan suatu permainan dengan aturan mainnya, sebagai berikut:
   a. melangkah per anak tangga atau melompati satu anak tangga,
   b. tidak diperbolehkan melompati dua anak tangga atau lebih sekaligus.

   Untuk melalui satu anak tangga hanya dapat dilakukan dengan satu cara, untuk melalui dua anak tangga dapat dilakukan dengan dua cara, dan untuk melalui tiga anak tangga dapat dilakukan dengan tiga cara, dan seterusnya.

   Selidikilah banyaknya cara untuk melalui anak tangga ke-11 dan seterusnya. Teliti hasil barisan yang didapat dan bandingkan dengan karakteristik barisan *Fibonnacy*.
3. Berikanlan dua contoh konteks yang berkaitan barisan atau deret geometri dan modelkanlah, kemudian tentukan penyelesaiannya.

LK 6.3. Soal HOTS tentang Barisan, Deret Geometrid dan Barisan Selain Barisan Aritmetika maupun Barisan Geometri (On)

Bersama kelompok, Anda diharapkan saling berdiskusi dan bekerja sama mempelajari teknik penyusunan soal *high order thinking skills* (HOTS). Dengan kreativitas Anda, susunlah 2 soal HOTS terkait dengan Barisan, Deret Geometrid dan Barisan Selain Barisan Aritmetika maupun Barisan Geometri.

Isikan pada kartu soal berikut. Soal yang Anda susun dapat berupa pilihan ganda atau uraian yang disertai dengan kunci jawaban atau pedoman pensekoran. Diutamakan merucuk pada kisi-kisi UN matematika SMA tahun 2017.

KARTU SOAL	
Jenjang	: Sekolah Menengah Atas
Mata Pelajaran	: Matematika
Kelas	: ...
Kompetensi Dasar	: ...
Indikator	: ...
Level	: Pengetahuan dan Pemahaman/Aplikasi/Penalaran*
Materi	: ...
Bentuk Soal	: Pilihan Ganda
BAGIAN SOAL DI SINI	
Kunci Jawaban	: ...

E. Latihan/Kasus/Tugas

Kerjakanlah semua soal dengan serius, teliti, cermat, dan pantang menyerah. Berdiskusilah dengan sesama teman, dengan akhlak yang mulia sehingga Anda mendapat penyelesaian yang lebih akurat serta memperoleh teknik menyelesaikan soal yang bervariasi.

1. Diberikan suatu barisan yang bukan barisan aritmetika dan bukan barisan geometri8, 18, 30, 44, 60, 78, ...

   Dengan teliti dan cermat, tentukan rumus umum suku ke-n yang dimiliki barisan tersebut.

2. Diberikan suatu deret geometri, sebagai berikut $2\sqrt{3} + 6 + 6\sqrt{3} + 18 + \ldots$

   a. tentukan rumus umum jumlahan ke-n,

   b. tentukan 10 jumlahan yang pertama.

3. Pada suatu barisan geometri, selisih suku kelima dan suku ketiga adalah 504, sedangkan selisih suku keempat dan suku kedua adalah 168.
   a. tentukan rasio dan suku pertama,
   b. tulislah lima suku pertamanya.
4. Suatu perusahaan swasta yang memiliki semangat nasionalis tinggi dan bergerak dibidang kebutuhan pokok manusia. Perusahan tersebut memperhatikan kesejahteraan karyawannya sehingga system penggajian terbuka.Perusahan memberikan gaji terhadap karyawan yang bekerja secara lepas dan maksimal 20 hari dalam satu bulan. Perusahaan menerapkan lima hari kerja dan ada uang kompensasi ekstra bagi yang lebur kerja (sabtu, minggu). Sistem pemberian gaji setiap bulan, kerja hari pertama dibayar Rp. 10.000,00, hari kedua digaji (1,35) kali gaji hari pertama, hari berikut dibayar (1,35) kali gaji hari sebelumnya.Jika Anda karyawan perusahaan tersebut dan bekerja penuh 20 hari, berapakah gaji yang Anda terima dalam satu bulan.
5. Dalam rangka menyemarakkan HUT RI ke-71, para pemuda bergotongroyong untuk membuat panggung pertunjukkan. Dibutuhkan berbagai bentuk kerangka bidang datar untuk menghias panggung, salahsatunya kerangka segitiga siku-siku dalam berbagai ukuran. Akan dibuat 10 kerangka segitiga siku-siku yang terbuat dari kawat dan berbeda ukuran. Kerangka segitiga terkecil berukuran sisi alas 3 cm, tinggi 4 cm dan sisi miring 5 cm. Untuk ukuran keliling segitiga kedua adalah 1,5 kali keliling segitiga pertama(terkecil) dan ukuran keliling segitiga berikutnya adalah 1,5 kali ukuran keliling segitiga sebelumnya. Tentukan ukuran kawat yang harus disediakan untuk membuat 10 segitiga tersebut.
6. Setiap bilangan asli dapat dinyatakan sebagai hasil penjumlahan dari bilangan 1 dan 2. Dengan demikian bilangan 1 dapat dinyatakan dengan 1 cara, bilangan 2 dengan 2 cara, dan bilangan 3 dengan 3 cara. Tentukan banyak cara untuk menyatakan bilangan 10?
7. Perhatikan dengan seksama gambar Segitiga Sierpinski berikut ini.

Apabilapola tersebut dilanjutkan, tentukan banyaknya segitiga hitam/gelap pada gambar ke-$(n+1)$.

8. Seutas tali dipotong menjadi 6 bagian sehingga panjang potongan-potongan tali tersebut membentuk barisan geometri. Jika panjang tali ke-4 adalah 24cm dan potongan tali terpanjang 96 cm, maka tentukan panjang tali semula.

F. Rangkuman

Setelah pembahasan materi barisan dan deret geometri serta beberapa barisan dan deret selainnya, dapat disimpulkan sebagai berikut :

1. **Barisan Geometri** adalah barisan yang **perbandingan** dua suku yang berturutan adalah **tetap**
2. Unsur-unsur yang terkait dalam barisan geometri dinotasikan, u_1 : suku pertama(a),$\boldsymbol{r}$ **:** rasio, u_n : rumus umum suku ke-n dengan $u_n = a\,r^{n-1}$.
3. **Suku tengah**, u_k adalah akar dari hasilkali suku pertama dan suku terakhir, dinotasikan dengan$u_k = \sqrt{u_1 . u_{2k-1}}$.
4. Pembentukan barisan baru dapat dilakukan dengan proses penyisipan pada dua bilangan x, y. Hubungan antara banyaknya bilangan yang disisipkan k, beda b barisan yang terbentuk adalah $r = \sqrt[k+1]{\frac{y}{x}}$.
5. Misalkan suatu barisan geometri dengan banyak unsur n, suku pertama a, rasio r sehingga dapat divisualkan

   $u_1, u_2, u_{3, \ldots,} u_n$
6. Jika setiap dua unsur yang berturutan masing-masing disisipkan k bilangan sehingga barisan aritmetika yang lama dan bilangan-bilangan disisipkan membentuk barisan aritmetika yang baru, dengan suku pertama a', beda b' dan banyak unsur n', maka, Buktikan hubungan berikut
   a. suku pertama $a' = a$,
   b. rasio $r' = \sqrt[k+1]{r}$,
   c. banyak unsur $n' = n + (n-1)k$.

7. **Deret Geometri** adalah jumlahan beruntun suku-suku dalam barisan geometri .

8. Pada deret geometri menghasilkan suatu nilai riil sehingga untuk n berhingga selalu menghasilkan nilai jumlahan.

9. Deret Geometri Tak Hingga merupakan perluasan deret geometri, sehingga untuk n mendekati tak hingga, kemungkinan limit jumlahannya adalah

   a) memiliki nilai limit jumlahan S, yaitu $S = \frac{a}{1-r}$ jika $|r| < 1$ (konvergen),

   b) tidak memiliki limit jumlahan, yaitu $S \rightarrow \sim$, jika $|r| \geq 1$ (divergen).

G. Umpan Balik dan Tindak Lanjut

Setelah Anda mempelajari materi dalam kegiatan belajar 6 ini maka lakukan refleksi diri dan tindak lanjut. Ranah refleksi terdiri atas sikap positif dalam belajar dan sikap positif penguatan karakter sehingga mulai tumbuh kepribadian unggul. Silahkan Anda baca dan lakukan perintahnya, pada Umpan Balik dan Tindak Lanjut pada Kegiatan Pembelajaran 1.

Kunci Jawaban

A. Kegiatan Pembelajaran 1 : Sistem Bilangan

1. Terdapat berbagai kemungkinan jawaban.
2. Nyatakan 3,142678dalam bentuk$\frac{a}{b}$.
3. Misalkan bilangan $0{,}3333\ldots$ dinyatakan dalam x. Sehingga $x = 0{,}3333\ldots$. Selanjutnya kalikan kedua ruas dengan 10 (karena perulangannya setiap 1 angka), diperoleh $10x = 3{,}3333\ldots$.
   Kurangkan persamaan $x = 0{,}3333\ldots$ dari $10x = 3{,}3333\ldots$, diperoleh $9x = 3$. Sehingga $= \frac{1}{3}$. Dengan demikian $0{,}3333\ldots$ dapat dituliskan sebagai $\frac{1}{3}$.
4. Untuk menentukan sebuah bilangan irrasional di antara $\frac{1}{7}$ dan $\frac{2}{7}$, kita harus mencari sebuah bilangan yang mempunyai representasi desimal yang tidak berhenti (*nonterminating*) dan tidak berulang (*nonrepeating*). Terdapat tak berhingga bilangan yang memenuhi. Salah satu contoh adalah $0{,}150150015000150000\ldots$
5. Gunakan pembuktian dengan kontradiksi. Nyatakan $\sqrt{3}$ dalam bentuk $\frac{a}{b}$.Lihat pada uraian materi tentang pembuktian untuk $\sqrt{2}$.

B. Kegiatan Pembelajaran 2 : Keterbagian Suatu Bilangan dan Bilangan Berpangkat

1. Karena banyaknya bola pada masing-masing kotak adalah sama, maka banyak bola harus merupakan pembagi dari 24 dan 36. Tujuan kita adalah menentukan pembagi (positif) persekutuan dari 24 dan 36 yang lebih besar dari 1. Selanjutnya kita daftar masing-masing pembagi (positif) dari 24 dan 36.

   Pembagi (positif) dari 24 : $1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$.
   Pembagi (positif) dari 36 : $1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36$.
   Karena paling sedikit terdapat 2 bola pada masing-masing kotak, maka banyaknya bola yang mungkin pada masing-masing kotak adalah $2, 3, 4, 6$, dan 12.

2. Bilangan-bilangan bulat positif kurang dari 40 yang mempunyai sisa 2 jika dibagi oleh 7 adalah

$$\begin{aligned} 0 \cdot 7 + 2 &= 0 + 2 = 2 \\ 1 \cdot 7 + 2 &= 7 + 2 = 9 \\ 2 \cdot 7 + 2 &= 14 + 2 = 16 \\ 3 \cdot 7 + 2 &= 21 + 2 = 23 \\ 4 \cdot 7 + 2 &= 28 + 2 = 30 \\ 5 \cdot 7 + 2 &= 35 + 2 = 37 \\ 6 \cdot 7 + 2 &= 42 + 2 = 44 \end{aligned}$$

Dengan demikian bilangan bulat positif terbesar kurang dari 40 yang mempunyai sisa 2 jika dibagi oleh 7 adalah 37.

3. Kita akan mencari suatu bilangan bulat yang mempunyai sisa 4 jika dibagi oleh 11. Misalkan bilangan tersebut adalah n, menurut Algoritma Pembagian, n dapat dinyatakan dalam bentuk $n = 11q + 4$, untuk suatu bilangan bulat q. Semakin besar nilai q akan menyebabkan semakin besar nilai n. Hal ini berarti kita dapat mencari nilai terbesar dari n dengan terlebih dahulu mencari nilai terbesar dari q. Karena n merupakan bilangan tiga angka maka $n < 1000$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} 11q + 4 &< 1000 \\ \leftrightarrow 11q &< 996 \\ \leftrightarrow \quad q &< 90\frac{6}{11}. \end{aligned}$$

Karena q harus merupakan bilangan bulat, nilai terbesar dari q yang mungkin adalah 90. Dari nilai q tersebut, kita dapat menentukan nilai terbesar yang mungkin dari n, yang merupakan bilangan tiga angka terbesar yang mempunyai sisa 4 jika dibagi oleh 11, yaitu :

$$\begin{aligned} n &= 11q + 4 \\ &= 11 \cdot 90 + 4 \\ &= 994 \end{aligned}$$

Dengan demikian bilangan tiga angka terbesar yang mempunyai sisa 4 jika dibagi oleh 11 adalah 994.

4. Kita harus mencari bilangan bulat yang dapat dinyatakan dalam bentuk $6q + 1$ untuk suatu bilangan cacah q. Selanjutnya kita tentukan nilai q sedemikian hingga

$$0 \leq 6q + 1 \leq 100$$

Terdapat dua pertidaksamaan yang harus dicari penyelesaiannya, yaitu

$$\begin{array}{lccccccccc} (1) & 0 & \leq & 6q+1 & \Rightarrow & -1 & \leq & 6q & \Rightarrow & -\frac{1}{6} \leq q \\ (2) & 6q+1 & \leq & 100 & \Rightarrow & 6q & \leq & 99 & \Rightarrow & q \leq 16\frac{1}{2} \end{array}$$

Karena q harus merupakan bilangan bulat, kedua pertidaksamaan tersebut menyatakan bahwa $0 \leq q \leq 16$. Terdapat 17 bilangan bulat dari 0 sampai dengan 16 yang menyatakan nilai q. Dengan demikian terdapat 17 bilangan bulat dari 0 sampai dengan 100 yang mempunyai sisa 1 jika dibagi oleh 6, yaitu

$$\begin{array}{rcrcr} 0 \cdot 6 + 1 & = & 0 + 1 & = & 1 \\ 1 \cdot 6 + 1 & = & 6 + 1 & = & 7 \\ 2 \cdot 6 + 1 & = & 12 + 1 & = & 13 \\ & \vdots & & \vdots & \\ 16 \cdot 6 + 1 & = & 96 + 1 & = & 97 \end{array}$$

5. Kita harus mencacah banyaknya bilangan bulat dalam bentuk $8q + 5$ yang terletak antara 200 dan 300, yaitu

$$\begin{array}{rcrcr} 200 & \leq & 8q+5 & \leq & 300 \\ 195 & \leq & 8q & \leq & 295 \\ 24\frac{3}{8} & \leq & q & \leq & 36\frac{7}{8} \end{array}$$

Sehingga $24 < q \leq 36$. Masing-masing ke-12 nilai yang mungkin dari q menyatakan satu dari 12 bilangan bulat dalam bentuk $8q + 5$ antara 200 dan 300 yang mempunyai sisa 5 jika dibagi oleh 8. Dengan demikian terdapat 12 bilangan bulat antara 200 dan 300 yang mempunyai sisa 5 jika dibagi oleh 8.

6. Dengan menggunakan aturan bilangan berpangkat, diperoleh :

a. $\frac{-8\,a^{30}}{27\,b^{39}}$

b. $\frac{-4^3 a y^{21}}{5^2 x^{31}}$

C. Kegiatan Pembelajaran 3 : Pendekatan dan Penaksiran

1. Penyelesaian
   a. 0,1235 akan dibulatkan sampai sepersepuluhan terdekat, artinya sama saja dengan membulatkan sampai 1 tempat desimal. Kita cek angka yang berada pada posisi kedua di sebelah kanan tanda koma, yaitu 2. Karena nilainya kurang dari 5 ($2 < 5$), maka lakukan pembulatan ke bawah menjadi 0,1. Kita menuliskan $0{,}1235 = 0{,}1$ (sampai sepersepuluhan terdekat).

   b. Ditulis 0,1235 = 0,12 (sampai seperseratusan terdekat).

   c. Ditulis $0{,}1235 = 0{,}124$ (sampai seperseribuan terdekat).
2. Penyelesaian

   a. $\frac{65{,}8 \times 24{,}1}{32{,}3} \approx \frac{66 \times 22}{33} = 44$
   ≈ 50 (sampai 1 angka penting)

   Keterangan:

   - 33 digunakan untuk menggantikan 32, karena 33 dan 66 mempunyai faktor persekutuan 33 (memudahkan perhitungan).
   - 22 digunakan untuk menggantikan 24, karena 22 dan 33 mempunyai faktor persekutuan 11 (memudahkan perhitungan).

   b. $\frac{65{,}8 \times \sqrt{24{,}1}}{3{,}23^2} \approx \frac{65 \times \sqrt{25}}{3^2} = \frac{65 \times 5}{9}$
   $\approx \frac{65 \times 5}{10} = 32{,}5$
   ≈ 30 (sampai 1 angka penting)

   Keterangan:

   - 3,23 dibulatkan menjadi 3 (1 angka penting) untuk memudahkan
   - 24,1 dibulatkan menjadi 25 (bilangan kuadrat terdekat).
   - 9 dibulatkan menjadi 10 (puluhan terdekat).

3. Penyelesaian

   a. $\frac{97{,}85 \times \sqrt{63{,}8}}{24{,}79} \approx \frac{100 \times \sqrt{64}}{25} = 4 \times 8 = 32$
   ≈ 30

b. $\frac{4870\times1227+968\times4870}{1936\times0,49} \approx \frac{5000\times1000+1000\times5000}{2000\times0,5} = \frac{2000\times5000}{2000\times0,5}$
≈ 10000

4. Dengan menggunakan pendekatan dan penaksiran, diperoleh :
   a. 210
   b. 1000
5. Penyelesaian

   Volume akuarium mini tersebut adalah

$$\begin{aligned} V &= 21,35 \times 17,4 \times 9,86 \\ &= 3662,8914 \\ &\approx 3660 \text{ (sampai 3 angka penting)} \end{aligned}$$

   Sehingga volume akuarium adalah 3660 cm³.

6. Penyelesaian
   a. Perkiraan keliling lingkaran

$$\begin{aligned} K &= 2 \times 3,1416 \times 997 \\ &= 6264,35 \text{ cm} \\ &\approx 63 \text{ m (sampai bilangan bulat terdekat)} \end{aligned}$$

   b. Perkiraan luas lingkaran

$$\begin{aligned} L &= 3,1416 \times 11,09^2 \\ &= 386,38 \text{ m}^2 \\ &\approx 386 \text{ m}^2 \text{ (sampai bilangan bulat terdekat)} \end{aligned}$$

D. Kegiatan Pembelajaran 4 : Notasi Sigma dan Pola Bilangan

a. Hitunglah $\sum_{i=1}^{20} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)}$

   Jawab

   Menurut sifat-sifat notasi sigma, diketahui bahwa $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \sum_{i=1}^{n} (\frac{1}{(2i-1)} - \frac{1}{(2i+1)})$ = ½ $(\frac{1}{1} - \frac{1}{3})$ + $(\frac{1}{3} - \frac{1}{(5)})$+ $(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}) + (\frac{1}{7} - \frac{1}{9}) + (\frac{1}{9} - \frac{1}{11})$ =$(1 - \frac{1}{2n+1})$= $\frac{2n+1-1}{2n+1}$= $\frac{2n}{2n+1}$

   Jadi, $\sum_{i=1}^{20} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)}$ = $\frac{2.20}{2.20+1}$ $=$ $\frac{40}{41}$.

b. Berdasar pola didapat barisan bilangan $3, 4, 5, 6, 7, 8$ sehingga didapat jumlah barisan bilangan yang terbentuk adalah

$3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = \frac{1}{2} . 8 . 9 - 3 = 34$ (ingat, deret 8 bilangan asli pertama)

c. Berdasarkan soal, didapat $u_1 = 3, u_3 = 27$ sehingga $u_2 = \frac{1}{2}(u_1 + u_3) = \frac{1}{2}(3 + 27) = 15$ dan $b = \frac{1}{2}(u_3 - u_1) = \frac{1}{2}(27 - 3) = 12$. Jadi, barisan aritmetika yang dimaksud adalah 3, 15, 27, 39, 51.

d. Berdasarkan soal, diketahui $u_2 + u_4 = 16 \leftrightarrow 2a + 4b = 16$ ...(*) dan

$u_3 + u_6 = 25 \Leftrightarrow 2a + 7b = 25 \ldots (**)$

Berdasarkan hasil (*) dan (**) didapat SPLDV

$2a + 4b = 16$

$2a + 7b = 25,$

dan diperoleh $b = 3$, dan $a = 2$.

Jadi, barisan yang didapat adalah 2, 5, 8, 11, 14, 17

e. Misalkan sisi-sisi yang membentuk barisan adalah $a - b, a, a + b$ sehingga diperoleh deret $(a - b) + a + (a + b) = 60 \leftrightarrow 3a = 60 \leftrightarrow a = 20$.

Karena segitiga siku-siku, maka berlaku $(a - b)^2 + a^2 = (a + b)^2$ sehingga didapat

$a^2 - 4ab = 0 \leftrightarrow a(a - 4b) = 0 \leftrightarrow a = 4b \leftrightarrow b = \frac{1}{4} a = 5$. Sisi yang lain, didapat $a - b = 20 - 5 = 15$ dan $a + b = 25$.

Jadi, panjang sisi-sisinya masing-masing adalah 15 cm, 20 cm dan 25 cm.

f. Dengan membentuk pola dalam notasi sigma, diperoleh hasil

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \cdots + \frac{1}{2016 \times 2017} = \frac{2016}{2017}$$

E. Kegiatan Pembelajaran 5 : Barisan dan Deret Aritmetika

1. Penyelesaian :

b. Barisan $10, 17, 24, \ldots$ adalah barisan aritmetika dengan suku pertama $a = 10$, beda $b = 7$ sehingga didapat rumus suku umum u_n, dengan $u_n = a + (n-1)b = 10 + (n-1)\,7 = 7n + 3$. Untuk $n = 10$, didapat $u_{10} = 7\,.\,10 + 3 = 73$.

Sehingga jumlah deret 10 suku pertama adalah $S_{10} = \frac{1}{2}$. 10. (a + u_{10}) = 5 (10+ 73) = 5 . 83 = 415.

c. Karena $10 + 17 + \ldots + u_n$ = 1680 maka berlaku S_n = 1680 sehingga

$$\frac{n}{2}(2a + (n-1)b) = 1680 \leftrightarrow \frac{n}{2}(20 + (n-1)7) = 1680$$

$\leftrightarrow n$ (13 + 7n) = 3360 $\leftrightarrow 7n^2$ + 13n – 3360 = 0

$\leftrightarrow (n-21)(7n+160)$ = 0. Jadi, banyaknya suku adalah $n = 21$.

1. Penyelesaian :

Jumlah suku ke-2 dan suku ke-6 adalah 30 maka didapat hubungan

$u_2 + u_6$ = 30 $\leftrightarrow$ 2a + 6b = 30, …(*)

Jumlah suku ke-3 dan suku ke-7 adalah 38 maka didapat hubungan

$u_3 + u_7$ = 28 $\leftrightarrow$ 2a + 8b = 28, … (**).

Berdasarkan hasil (*) dan (**), didapat a = 3 dan b=4 sehingga didapat suku terakhir u_7 = a + 36b = 3 + 6 . 4 = 27.

Suku tengah, adalah $u_t = \frac{1}{2}$ (a + u_7) = $\frac{1}{2}$ (3 + 37) = 15.

Jadi, didapat a=3, suku terakhir u_7 = 27 dan suku tengah u_t= 15.

2. Penyelesaian :

Barisan aritmetika dengan $n = 4$ unsur, $a = 5$ dan beda $b = 16$ sehingga didapat barisannya adalah $a = 5, u_2 = a + b = 21, u_3 = 37, u_4 = 53$. Setiap dua unsur yang berturutan disisipkan 3 bilangan sehingga k=3 dan membentuk barisan aritmetika baru, dengan a'= a = 5, n' = n + (n-1) k = 4 + 3 . 3 = 13 dan

$b' = \frac{b}{(k+1)} = \frac{16}{(3+1)} = 4$. Jadi barisan aritmetika yang terbentuk adalah 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37, 41, 45, 49, 53.

3. Penyelesaian :

Misalkan K_1 : keliling segitiga siku-siku ke-1, K_2 : keliling segitiga siku-siku ke-2, ..., K_5 : keliling segitiga siku-siku ke-5.

Berdasarkan soal, diketahui panjang sisi siku-siku dari K_5 adalah 15 cm dan 20 cm sehingga didapat panjang sisi miringnya adalah 25 cm sehingga $K_5 = 60$ cm. Karena K_1, K_2, K_3, K_4, K_5 membentuk barisan aritmetika dengan beda $b = 12$ maka didapat K_4=$K_5 - 12 = 60 - 12 = 48$. Dengan cara yang sama, didapat $K_3 = 36, K_2 = 24$, dan $K_1 = 12$, sehingga diperolah barisan aritmetika $12, 24, 36, 48, 60$ dan $S_5 = \frac{5}{2}(2 \times 12 + (5-1)12 = \frac{5}{2}(24 + 48) = 160$. Panjang kawat yang dibutuhkan adalah 160 cm.

4. Penyelesaian :

   Misalkan u_1 adalah jarak yang ditempuh tim survey pada kilometer pertama, u_2 adalah jarak yang ditempuh tim survey pada kilometer kedua, u_3 adalah jarak yang ditempuh tim survey pada kilometer kesebelas, ... Barisan $u_1 = 1, u_2 = 6, u_3 = 11, \ldots$ membentuk barisan aritmetika dengan $a = 1$ dan $b = 5$. Maka, jarak yang ditempuh tim survey ketika memberi tanda ke-25 adalah $u_{25} = a + 24\,b = 1 + 24\ \times 5 = 1 + 120 = 121$ km.

5. Dengan menggunakan rumus $S_{10} = 201$.

F. Kegiatan Pembelajaran 6: Barisan, Deret Geometri dan Barisan Selain Barisan Aritmetika maupun Bukan Barisan Gometri

1. Penyelesaian :

Untuk menentukan rumus umum suku ke-n, dilakukan proses berikut

Proses 1:

(i) 8 18 30 44 60 78

(ii) 10 12 14 16 18

(iii) 2 2 2 2

Proses 2.

u_1=a+b+c, u_2=4a +2b +c, u_3=9a + 3b+c, u_4=16a+4b+c,

(i) a+b+c 4a+2b+c 9a+3b+c 16a+4b+ …

(ii) 3a+b 5a+b 7a+b

(iii) 2a 2a

Menurut hasil proses 1 dan proses 2, didapat kesamaan $2a = 2$ sehingga $a = 1$.

Substitusikan $a = 1$ pada u_1 (ii) diperoleh

10 = $\mathbf{u_1}$ = 3a + b = 3 + b sehingga b = 7.

Substitusi a=1, b=7 pada u_1 (i), didapat

8 = a + b+ c ↔ c = 8 – b – a = 8 – 1 - 7 = 0.

Jadi, didapat rumus umum suku ke-n adalah $u_n = 1\,n^2 + 7\,n + 0 = n^2 + 7n$.

2. Penyelesaian :

- Dari soal didapat deret geometri, dengan $a = 2\sqrt{3}$, rasio$r = \sqrt{3}$ dan rumus umum jumlahan ke-n adalah S_n, dengan $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r-1} = \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}^n - 1)}{\sqrt{3}-1} = \sqrt{3}(\sqrt{3}^n - 1)$.

- S_{10} adalah 10 jumlahan yang pertama dengan

  $S_{10} = \sqrt{3}(\sqrt{3}^n - 1) = 42\sqrt{3}$.

3. Penyelesaian :

c. Misal $u_{1,}\ u_2, \ldots, u_n$suatu barisan geometri dengan suku pertama a, rasio r dan u_n rumus suku ke-n

- $u_5 - u_3 = 504 \leftrightarrow a\,r^4 \ - \ a\,r^2 \ = \ a\,r^2\,(r^2 - 1) \ = \ 504$
- $u_4 - u_2$ =168$\leftrightarrow a\,r^3 \ - \ a\,r \ = \ a\,r\,(r^2 - 1) \ = \ 168.$

Maka didapat

$$\frac{u_5 - u_3}{u_4 - u_2} = \frac{504}{168} \leftrightarrow \frac{ar^4 - ar^2}{ar^3 - ar^1} = \frac{504}{168} \leftrightarrow \frac{ar^2(r^2-1)}{ar \ \ (r^2-1)} = \frac{504}{168}$$

$r = \frac{504}{168}$ =3. Jadi, dapat rasio $r = 3$.

Substitusikan $r = 3$, didapat $a = 3\,(32 - 1) \ = \ 168$ sehingga didapat $a = 7$.

d. Lima suku pertama adalah 7, 14, 21, 28 35.

4. Penyelesaian :

Misalkan gaji hari ke-i adalah u_i maka didapat

u_2 = (1.35) u_1, u_3 = (1.35) u_2, ... maka terbentuk deret geometri

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$$

dengan $a \ = \ 10.000{,}00, r \ = \ (1.35)$ dan jumlah n pertama adalah S_n, dengan $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r-1}$.

Gaji yang diterima di akhir bulan adalah S_{20}, sehingga

$$S_{20} = \frac{10.000((1.35)^{20}-1)}{1.35-1} = 10.000\ (1151{,}6884) = 11.516.884.$$

Jadi gaji yang diterima adalah Rp. 11.516.884,00.

5. Penyelesaian :

Karena segitiga siku-siku yang terkecil mempunyai sisi alas adalah 3 cm, tinggi sama dengan 4 cm dan sisi miringnya 5 cm maka kelilingnya 3 cm +4 cm +5 cm = 12 cm.

Dimisalkan :

K_1 : keliling kerangka segitiga pertama, K_2 : keliling kerangka segitiga kedua, …, K_3 : keliling kerangka segitiga ketiga, …, K_n adalah keliling segitiga ke-n. maka didapat,

$K_1 = 12$, $K_2 = 1,5\ K_1$, $K_3 = 1,5\ K_2$, … didapat deret geometri $K_1 + K_2 + K_3 + \ldots + K_n$, dengan $a=K_1$, rasio $r=1,5$ dan jumlah n suku pertama adalah $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r-1} = \frac{12\ (1,5^n - 1)}{1,5-1} = 24(1,5^n - 1)$.

Untuk jumlah 10 segitiga pertama, adalah

$S_{10} = 24\ (1,5^{10} - 1) = 24\ .\ 57,665 = 1383,9$ cm.

Jadi, panjang kawat yang dibutuhkan untuk membuat 10 segitiga siku-siku adalah 1383,9 cm.

6. Dengan menggunakan sifat barisan Fibonacci, diperoleh banyaknya cara untuk menulis bilangan 10 adalah 89.
7. Dengan membentuk pola, didapat barisan geometri dengan $a = 1, r = 3$ sehingga suku ke-$(n + 1)$ adalah $u_{n+1} = 3^n$.
8. Dengan menggunakan rumus di deret geometri, panjang tali semula adalah jumlah 6 suku pertama, yaitu $S_6 = 189$ cm.

Evaluasi

Soal Evaluasi

1. Ditentukan aturan permainan untuk melalui tangga sebagai berikut:
   a. Melangkah per anak tangga atau melompati satu anak tangga
   b. Tidak diperbolehkan melompati dua anak tangga atau lebih sekaligus

   Untuk melalui satu anak tangga hanya dapat dilakukan dengan satu cara, untuk melalui dua anak tangga dapat dilakukan dengan dua cara, dan untuk melalui tiga anak tangga dapat dilakukan dengan tiga cara, demikian seterusnya. Banyak cara untuk melalui delapan anak tangga adalah … .

   A. 21
   B. 34
   C. 55
   D. 89

2. Pernyataan berikut yang salah terkait dengan bilangan adalah … .
   A. Bilangan $(\pi + \frac{3}{7})$ merupakan bilangan irrasional
   B. Jumlah dua bilangan rasional pasti menghasilkan bilangan rasional
   C. Pengurangan bilangan irrasional dengan bilangan rasional selalu menghasilkan bilangan rasional
   D. Himpunan bilangan real tertutup terhadap pembagian dengan pembagi tidak nol

3. Suatu toko mengadakan promosi untuk suatu produk dengan program “BELI 4 GRATIS 1” dan berlaku untuk kelipatannya. Jika harga satu produk tersebut Rp25.000, maka banyak barang yang diperoleh seseorang dengan membelanjakan uangnya sebesar Rp1.700.000 untuk pembelian barang tersebut adalah … .
   A. 63
   B. 84
   C. 85
   D. 101

4. Bentuk paling sederhana dari $\left(\sqrt[3]{\frac{8}{25}}\right)^4$adalah ...

   A. $\frac{16}{125}\sqrt[5]{5}$

   B. $\frac{8}{25}\sqrt[3]{5}$

   C. $\frac{16}{125}\sqrt[3]{5}$

   D. $\frac{8}{125}\sqrt[5]{5}$

5. Pernyataan berikut yang benar terkait dengan bilangan adalah … .

   A. Bilangan $(e + 2)$ merupakan bilangan rasional

   B. Selisih dua bilangan rasional belum tentu menghasilkan bilangan rasional

   C. Selisih dua bilangan irrasional belum tentu menghasilkan bilangan irrasional

   D. Himpunan bilangan bulat positif tertutup terhadap operasi pengurangan

6. Diberikan suatu barisan berderajat dua, sebagai berikut

   9, 15, 25, 39, 57, 79, … .Bentuk umum suku ke-n dari barisan tersebut adalah …

   A. $u_n = 2\,n^2 + n + 7$

   B. $u_n = 2\,n^2 + 7$

   C. $u_n = \ n^2 + 7+$

   D. $u_n = \ n^2 + n + 3$

7. Yafi membeli 1 baju, 2 kaos, dan 3 celana. Harga setiap baju, kaos, dan celana berturut-turut adalah Rp59.575,00; Rp45.750,00; dan Rp26.250,00. Perkiraan uang yang harus disiapkan Yafi untuk pembelian barang-barang tersebut adalah … .

   A. Rp165.000,00

   B. Rp170.000,00

   C. Rp230.000,00

   D. Rp235.000,00

8. Suatu barisan aritmetika terdiri 3 suku dengan suku pertama $u_1 = 35$ dan suku ketiga adalah -7. Jika setiap dua unsur yang berurutan disisipkan masing-masing 2 bilangan sehingga bilangan pada barisan aritmetika dan bilangan yang

disisipkan membentuk barisan aritmetika yang baru. Pasangan suku pertama, beda dan suku tengah dari barisan aritmetika yang baru adalah … .

A. $a' = 35, b^{'} = -7,\ u_t = 14$

B. $a' = 35, b^{'} = -5,\ u_t = 25$

C. $a' = 35, b^{'} = -9,\ u_t = 17$

D. $a' = 35, b^{'} = -11,\ u_t = 13$

9. Himpunan W adalah himpunan bilangan cacah. Pernyataan di bawah ini, yang benar adalah …
   A. Himpunan W mempunyai elemen invers terhadap operasi penjumlahan
   B. Himpunan W tidak mempunyai elemen invers terhadap operasi penjumlahan
   C. Himpunan W tidak tertutup terhadap operasi penjumlahan dan perkalian
   D. Himpunan W tidak mempunyai elemen satuan terhadap operasi perkalian

10. Suatu permainan mengisi ember dilakukan dengan aturan sebagai berikut:
    c. Mengisi dengan botol 1 liter atau 2 liter
    d. Tidak diperbolehkan mengisi dengan dua botol atau lebih secara bersamaan

    Dengan demikian untuk mengisi 1 liter air ke ember ada 1 cara, 2 liter air ada 2 cara, 3 liter air ada 3 cara, demikian seterusnya. Banyak cara untuk mengisikan 10 liter air ke dalam ember adalah … .
    A. 21
    B. 34
    C. 55
    D. 89

11. Misalkan A adalah himpunan bilangan asli ganjil. Pernyataan berikut yang benar adalah …
    A. Himpunan A tertutup terhadap penjumlahan
    B. Himpunan Misalkan A adalah himpunan bilangan asli ganjil. Pernyataan di bawah yang salah adalahA tidak tertutup terhadap operasi perkalian
    C. Himpunan A tidak mempunyai elemen invers terhadap operasi penjumlahan bilangan

D. Himpunan A tidak memilikielemen satuan terhadap operasi perkalian

12. Suatu barisan geometri memiliki suku pertamanya adalah positif. Hasilkali suku kelima dengan suku kedua dari barisan tersebut adalah $-\frac{1}{8}$, sedangkan hasil bagi suku ke-11 dengan ke-6 adalah $-\frac{1}{32}$. Limit jumlah dari deret tak hingga tersebut adalah ...

$A. -\frac{3}{4}$

$B. \frac{4}{3}$

$C. -\frac{4}{3}$

$D. \frac{5}{3}$

13. Suatu barisan aritmetika, diketahui jumlah suku ke-2 dan suku ke-5 adalah 50 dan selisih suku ke-8 dan suku ke-4 adalah 28. Jumlah dari deret 20 suku pertama adalah … .
    A. 1562
    B. 1520
    C. 1453
    D. 1480

14. Suatu barisan geometri dengan hasilkali suku ke-3 dan suku ke-6 adalah 3200, sedangkan hasil bagi suku ke-7 dan suku ke-4 adalah 8. Jumlah deret geometri dari 10 suku pertama adalah … .
    A. 5115
    B. 5221
    C. 5225
    D. 5615

15. Suatu bola terletak pada ketinggian 5 m diatas lantai. Bola dilepas dan akan memantul setinggi $\frac{3}{7}$ tinggi sebelumnya. Panjang lintasan yang dibentuk bola hingga berhenti adalah … .

A. 12,5 m

B. 15 m

C. 15,5 m

D. 20,5 m

Kunci jawaban evaluasi

1. B
2. C
3. C
4. C
5. C
6. B
7. C
8. A
9. B
10. D
11. C
12. B
13. D
14. A
15. A

Penutup

Pembahasan dalam modul ini dimulai tentang bilangan yang berkaitan dengan sistem bilangan, karakteristik terhadap estimasi serta penafsiran suatu hasil operasi bilangan. Selanjutnya, dibahas juga mengenai pola bilangan, barisan dan deret bilangan. Dengan menentukan pola pada suatu himpunan diperoleh susunan berpola yang berbentuk barisan baik barisan aritmetika dan barisan geometri. Penguasaan terhadap barisan diterapkan pada pembentukan deret sehingga dapat menentukan nilai jumlahnya. Khususnya untuk deret geometri, dibahas untuk deret geometri tak hingga yang konvergen. Di samping itu, dibicarakan juga barisan dan deret selain keduanya, yaitu barisan berpangkat dua, berpangkat tiga dan diakhiri dengan barisan *Fibonacci*.

Pembahasan materi pada modul ini, dimulai dari kasus faktual yang sederhana, konsep, contoh-contoh, pengembangan konsep dan diakhiri soal-soal. Pemberian contoh dan soal yang meliputi permasalahan teoritis serta konteks dalam kehidupan sehari-hari. Selain itu, disajikan beberapa nasehat dalam bentuk kata hikmah yang diharapkan memberikan tambahan pengayaan yang berkaitan dengan nilai-nilai karakter kepribadian unggul. Materi matematika membentuk kecerdasan dalam berolah fikir, sedangkan nasihat dalam kata hikmah menambah keanggunan kepribadian sehingga menjadi seorang guru yang berprestasi dalam kariernya serta berakhlak mulia. Namun tentu masih banyak kekurangan yang ada dalam modul ini, oleh karena itu peserta diklat atau pembaca dapat melengkapi dan memperdalam materi ini dengan mengkaji sumber pustaka yang terdapat dalam daftar pustaka berikut.

Pada akhirnya, mudah-mudahan modul ini dapat memberi masukan dan membantu kepada peserta diklat Pengembangan Keprofesian Berkelanjutan atau pembaca untuk dapat mengembangkan kompetensi serta membangun pengetahuannya.

Daftar Pustaka

Chong, Lai Chee, Low Wai Cheng, Leong May Kuen, 2008, *Mathematics Matters* (*Normal*/*Academic*), Singapore: EPB Pan Pacific.

Crawford, Mathew, 2006,*The Art of Problem Solving: Introduction to Number Theory*, Alpine, CA: AoPS Inc.

Depdiknas. 2006. *Peraturan Menteri Pendidikan Nasional Nmor 22 Tahun 2006 Tentang Standar Isi Untuk Satuan Pendidikan Dasar dan Menengah*. Jakarta: Depdiknas.

Engel, A. 1999. *Problem Solving Strategies*. New York: Spinger.

Epp, Susanna S., 2011, *Discrete Mathematics with Applications*, Boston, MA: Brooks/Cole Cengage Learning.

Ferland, Kevin, 2009, *Discrete Mathematics: An Introduction to Proofs and Combinatorics*, Boston, MA: Houghton Mifflin Company.

French, Doug dan Charlie Stripp, 2001, *'Are You Sure?': Learning about Proof*, Leicester, UK: The Mathematical Association.

Gantert, Ann Xavier, 2007, *Integrated Algebra 1*, New York, N. Y.: AMSCO School Publications, Inc.

Gantert, Ann Xavier, 2009, *Algebra 2 and Trigonometry*, New York, N. Y.: AMSCO School Publications, Inc.

Gellert, W., S. Gottwald, M. Hellwich, et al., 1989, *The VNR Concise Encyclopedia of Mathematics*, New York, N.Y.: Van Nostrand Reinhold.

Huo, Fan Liang, Cheang Wai Kwong, Dong Feng Ming, dkk, 2007, *New Express Mathematics*, Singapore: Panpac Education Pte. Ltd.

Johnson, David B. dan Thomas A. Mowry, 2012, *Mathematics, A Practical Odyssey*, Belmont, CA: Brooks/Cole Cengage Learning.

Kime, Linda Almgren, Judith Clark dan Beverly K. Michael, 2011, *Explorations in College Algebra*, Hoboken, NJ: John Wiley and Sons, Inc.

Kordemsky, Boris A., 1972, *The Moscow Puzzles: 359 Mathematical Recreations*, New York, N.Y.: Charles Scribner's Sons.

Larson, Ron, dan David C. Falvo, 2011, *Algebra and Trigonometry*, Belmont, CA: Brooks/Cole, Cengage Learning.

Meng, Sin Kwai, 2004, *Exploring Mathematics* (*Special*/*Express*), Singapore: SNP Panpac Pte. Ltd.

Patrick, David, 2006, *The Art of Problem Solving: Introduction to Counting and Probability*, Alpine, CA: AoPS Inc.

Peterson, John A. dan Joseph Hashisaki, 1963, *Theory of Arithmetic*, New York: John Wiley and Sons, Inc.

Puji Iryanti. 2005. *Notasi Sigma, Barisan dan Deret Bilangan*. Yogyakarta: PPPG Yogyakarta.

Purcell, Edwin I. 2001. *Calculus with Analytic Geometry Geometry*, Seventh Edition, Prince Hall International Inc., Englewood Cliffts, 2001.

Seng, Teh Keng, Loh Cheng Yee, 2010, *New Syllabus Mathematics 6th Edition*, Singapore: Shinglee Publishers Pte. Ltd.

Seng, Teh Keng, Looi Chin Keong, 2003, *New Syllabus Mathematics 5th Edition*, Singapore: Shinglee Publishers Pte. Ltd.

Smith, Karl J., 2012, *The Nature of Mathematics*, Belmont, CA: Brooks/Cole Cengage Learning.

Stewart, James, Lothar Redlin, dan Saleem Watson, 2012, *Algebra and Trigonometry*, Belmont, CA: Brooks/Cole, Cengage Learning.

Wirodikromo, Sartono. 1999. *Matematika untuk SMU, jilid 2*. Jakarta: Erlangga.

Wiworo, 2013, *Teknik Dasar Mencacah untuk Memahami Materi Kombinatorika dalam Olimpiade Matematika*, *paper* dalam *proceeding* Seminar Nasional Pendidikan Matematika I 2013, Yogyakarta: PPPPTK Matematika.

Wiworo, 2014, *Cara Menentukan Banyak Faktor Bilangan Bulat Positif*, *paper* dalam *proceeding* Seminar Nasional Pendidikan Matematika II 2014, Yogyakarta: PPPPTK Matematika.

Wono Setya Budhi, 2004, *Matematika untuk SMP*, Jakarta: Penerbit Erlangga.

Wuan, Lee Yee, Leong May Kuen, Low Wai Cheng, 2004, *Exploring Mathematics* (*Normal*/*Academic*), Singapore: SNP Panpac Pte. Ltd.

Young, Cynthia Y., 2013, *Algebra and Trigonometry*, Hoboken, NJ: John Wiley and Sons, Inc.

Glosarium

1. **Pola bilangan** adalah suatu **aturan tertentu** yang diberlakukan pada kumpulan bilangan
2. **Barisan** adalah suatu susunan bilangan yang memiliki pola tertentu, yaitu **selisih** atau **perbandingan** terhadap dua suku yang berturutan adalah tetap
3. **Deret** bilangan adalah jumlah beruntun dari suku-suku suatu barisan
4. **Barisan Aritmetika** adalah suatu barisanyang selisih dua suku yang berturutan adalah tetap
5. **Suku pertama** adalah suku ke-1 dari suatu barisan, notasi $u_1 = a$, **beda** suatu barisan aritmetika adalah selisih dua suku yang berturutan, notasi $b = u_n - u_{n-1}$ dan $\mathbf{u_n}$adalah rumus umum untuk suku ke-n barisan aritmetika
6. **Suku tengah**, u_k suatu barisan aritmetika yang banyaknya suku ganjil adalah setengah dari jumlahan suku pertama dan suku terakhir, dinotasikan dengan $u_k = ½ (u_1+u_{2k-1})$
7. **Deret Aritmetika** adalah jumlahan beruntun suku-suku suatu barisan aritmetika
8. **Notasi $\mathbf{S_n}$**adalah jumlah n suku dari deret aritmetika dan dirumuskan

$$S_n = \frac{1}{2} n\ (2a + (n-1)b)$$

9. **Barisan Geometri** adalah suatu barisanyang perbandingan dua suku yang berturutan adalah tetap
10. **Rasio** suatu barisan geometri, **r** adalahhasil perbandingan dua suku yang berturutan dari barisan geometri dan dirumuskan $r = \frac{u_n}{u_{n-1}}$
11. **Suku tengah** suatu barisan geometri, $\mathbf{u_k}$ adalah akar dari hasilkali suku pertama dan suku terakhir barisan geometri
12. **Deret Geometri** adalah jumlahan beruntun suku-suku dalam barisan geometri
13. **Notasi $\mathbf{S_n}$**adalah jumlah n suku dari deret geometri dan dirumuskan

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \text{ dan } S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}, \text{ untuk } r \neq 1.$$

14. **Limit jumlah S**, dengan $S = \frac{a}{1-r}$ adalah nilai limit dari deret geometri tak hingga yang konvergen
15. **Barisan Berderajat Satu** adalah suatu barisan yang diperoleh dengan proses pengurangan terhadap suku-suku yang berturutan dan didapat selisih tetap pada pengurangan tingkat(tahap) satu. Rumus umum suku ke-n berbentuk u_n = a n + b, dengan a dan b adalah konstanta real.
16. **Barisan Berderajat Dua** adalah suatu barisan yang diperoleh dengan proses pengurangan terhadap suku-suku yang berturutan dan didapat selisih tetap pada pengurangan tingkat(tahap) kedua. Rumus umum suku ke-n berbentuk u_n = a n^2 + bn + c, dengan a, b, c adalah konstanta real
17. **Barisan Berderajat Tiga** adalah suatu barisan yang diperoleh dengan proses pengurangan terhadap suku-suku yang berturutan dan didapat selisih tetap pada pengurangan tingkat(tahap) ketiga. Rumus umum suku ke-n berbentuk u_n = a n^3 + bn^2 + c n + d, dengan a, b, c, dan d adalah konstanta real.
18. **Barisan Bertingkat yang mempunyai landasan barisan geometri** adalah suatu barisan yang didapat dari proses pengurangan suku-suku yang berturutan dari barisan geometri dalam beberapa tingkat pengurangan.
19. Barisan bilangan Fibonacci adalah barisan yang didefinisikan secara rekursif sebagai berikut :

$$u_n = \begin{cases} 1 & , \quad n = 1, 2 \\ u_{n-1} + u_{n-2} & , \quad n > 2, \end{cases}$$

dengan n bilangan asli.

A

KELOMPOK
KOMPETENSI

MODUL PENGEMBANGAN KEPROFESIAN BERKELANJUTAN GURU MATEMATIKA SMA

TERINTEGRASI PENGUATAN PENDIDIKAN KARAKTER

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
DIREKTORAT JENDERAL GURU DAN TENAGA KEPENDIDIKAN
2017

www.gtk.kemendikbud.go.id