MEDIA KOMUNIKASI, EDUKASI, DAN INFORMASI PPPPTK MATEMATIKA YOGYAKARTA

LIMAS

Edisi Nomor 39, Desember 2018

PERUBAHAN DARI FUNGSI LINEAR KE PERSAMAAN GARIS

PERSAMAAN FUNGSI

QUATERNION DAN HIPERKOMPLEKS, Bilangan yang Lebih Umum dari Bilangan Kompleks

IZIN TERBIT : No.2426/SK/Ditjen PPG/STT/1998

ISSN 1829-5657

LIMAS

EDISI NOMOR 39, Desember 2018

TIM REDAKSI

Salam Redaksi

Assalamualaikum wr wb

Syukur Alhamdulillah, Buletin LIMAS Edisi Desember No 39 dapat kami selesaikan dengan baik. Redaksi menyampaikan apresiasi yang tinggi kepada semua penulis yang telah berpartisipasi membagi pengetahuannya melalui Buletin LIMAS, namun tidak semua tulisan dapat kami terbitkan dikarenakan keterbatasan halaman dan juga berdasarkan proses seleksi dari tim kami. Meski demikian, kami harapkan tulisan yang diterbitkan pada edisi ini dapat bermanfaat dan menambah wawasan bagi para pembaca sekalian. Kami tetap menunggu partisipasi dari semua khalayak untuk mengirimkan tulisan dengan tema yang terkait dunia matematika dan pendidikan matematika ke Buletin LIMAS. Saran dan kritik untuk menjadikan LIMAS lebih baik lagi kedepan tetap kami nantikan dari Anda semua.

Terima kasih.

ALAMAT REDAKSI

Sub bagian TU dan RT
PPPPTK Matematika Yogyakarta
Jl. Kaliurang Km.6, Sambisari, Depok, Sleman, D.I.Yogyakarta

: (0274) 885725, 881717

FAXING : (0274) 885752

: www.p4tkmatematika.org

: limas.p4tkmatematika@gmail.com

Diterbitkan : Pusat Pengembangan dan Pemberdayaan Pendidik dan Tenaga Kependidikan Matematika
Izin terbit :
No. 2426/Ditjen
PPG/STT/1998

Sampul Depan

DARI REDAKSI

Redaksi menerima tulisan atau artikel dari pembaca. Artikel yang dimuat akan mendapatkan imbalan sepantasnya, sedangkan yang tidak dimuat akan dikembalikan ke penulis. Redaksi berhak memperbaiki naskah yang akan dimuat tanpa mengubah makna/isi. Kritik atau saran dikirim langsung ke redaksi LIMAS

DAFTAR ISI

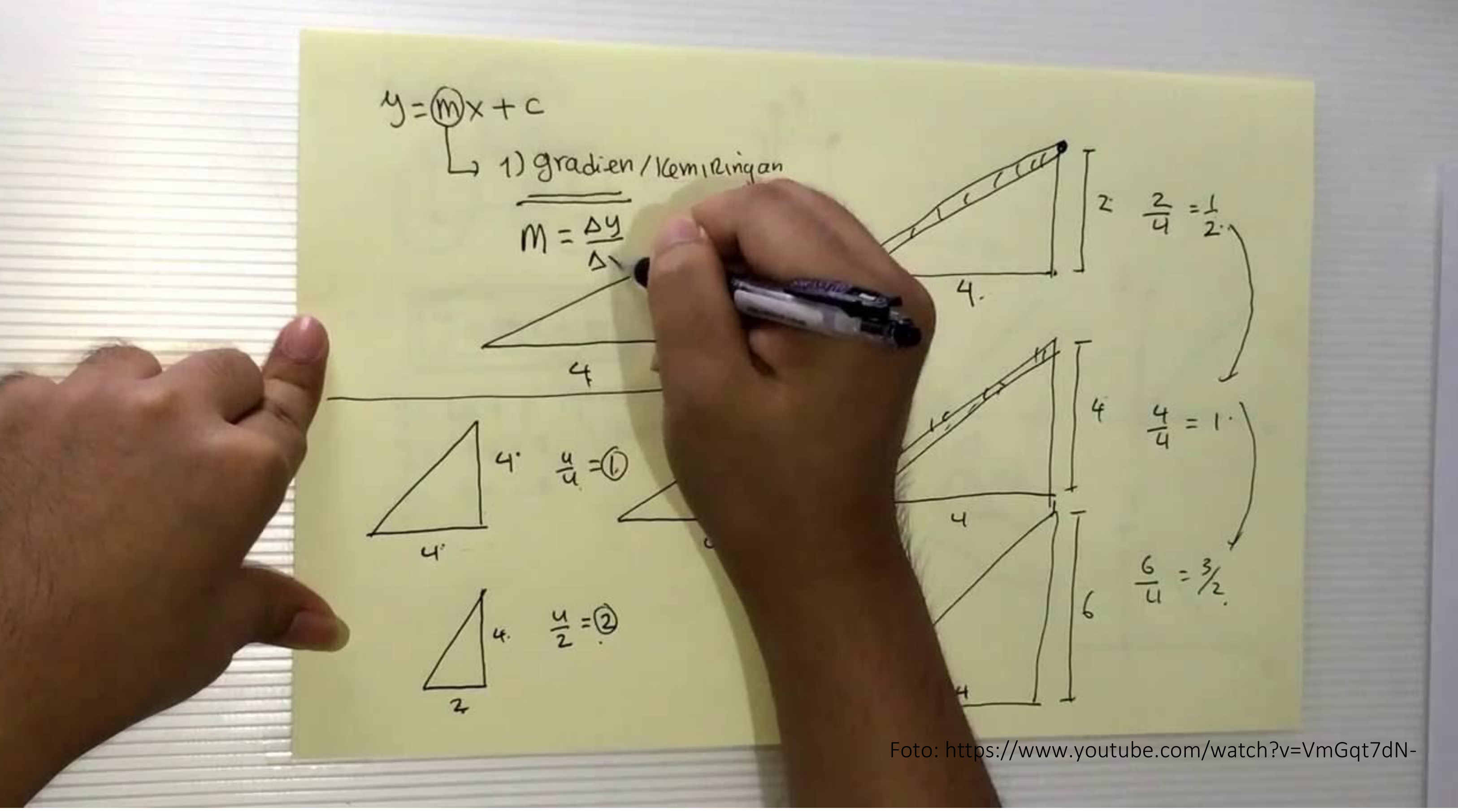


Foto: https://www.youtube.com/watch?v=VmGqt7dN-

PERUBAHAN DARI FUNGSI LINEAR KE PERSAMAAN GARIS

*) Enung Sumarni

A. PENDAHULUAN

Pembelajaran matematika sepanjang hayat, khususnya dalam era globalisasi ini, mengharapkan guru sebagai ujung tombak dalam pembelajaran di kelas memiliki kemampuan yang mumpuni di bidangnya. Salah satu kemampuan tersebut adalah keprofesionalan di bidang yang diampu, yaitu matematika sekolah dengan alur pembelajaran yang sistematis dan hierarkhis serta melalui proses yang mengedepankan pengembangan penalaran peserta didik. Hal tersebut seiring dengan perubahan kurikulum yang mengharapkan para guru mengikuti pemikiran ataupun langkah di abad ke-21, yaitu: berpikir kritis, kreatif, kolaboratif, dan komunikatif. Perubahan adalah suatu keniscayaan seiring waktu bergulir, hanya satu yang tidak akan mengalami perubahan seiring perubahan kurikulum yaitu jiwa guru yang amanah sebagai pengemban dan pengembang kurikulum.

Salah satu tugas guru sebagai pelaksana sekaligus pengembang kurikulum adalah membuat perencanaan untuk pelaksanaan pembelajaran, yang tentunya diawali dengan menganalisis kompetensi inti dan kompetensi dasar (KD) yang termuat dalam Permendikbud nomor 24 tahun 2016. KD yang dianalisis akan melahirkan berbagai strategi yang dapat diterapkan oleh guru, tidak terkecuali KD yang mengharuskan pengembangan berpikir tingkat tinggi. Kemampuan menyelesaikan soal-soal berfikir tingkat tinggi diharapkan dapat dimiliki peserta didik, dimulai dengan guru memproses pembelajaran secara HOTS pula.

Persamaan garis lurus adalah salah satu KD di kelas VIII, dimana sebelum mempelajari KD tersebut para siswa belajar KD tentang relasi dan fungsi. Di sinilah penulis seringkali menemukan ada materi atau konten yang kadangkala terlewat oleh para guru dalam memproseskan setelah relasi fungsi ke persamaan garis lurus. Untuk itu penulis mencoba memaparkan tulisan tentang perubahan dari fungsi linear ke persamaan garis. Semoga tulisan ini dapat sedikit memberikan pencerahan, khususnya bagi guru matematika SMP kelas VIII di semester ganjil.

B. PENGERTIAN PERUBAHAN DARI FUNGSI LINEAR KE PERSAMAAN GARIS LURUS

Perhatikan KD 3.4 dan KD 4.4. pada Permendikbud nomor 24 tahun 2016 jenjang SMP Kelas VIII berikut.

KD 3.4. Menganalisis fungsi linear (sebagai persamaan garis lurus) dan menginterpretasikan grafiknya yang dihubungkan dengan masalah kontekstual

KD 4.4. Menyelesaikan masalah kontekstual yang berkaitan dengan fungsi linear sebagai persamaan garis lurus.

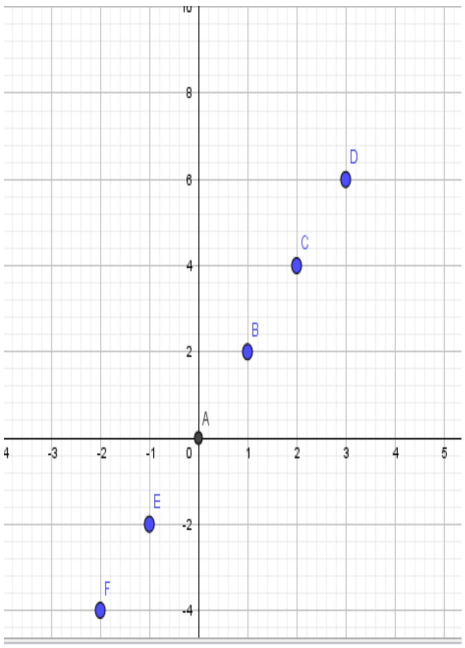
Kedua KD tersebut dituliskan demikian karena KD pengetahuan berpasangan dengan KD keterampilan. Jika dicermati terlihat ada kaitan atau tahapan sebelum ke persamaan garis, yaitu dimulai dari pemahaman atau konsep fungsi linear. Namunterkadang para guru didalam mengimplementasikan KD ini langsung masuk ke dalam persamaan garis lurus, tidak dimulai dari menganalisis fungsi linear.

Sebagai salah satu pendekatan dalam mempelajari KD 3.4, sebaiknya para guru dalam memahamkan peserta didik bahwa garis lurus merupakan representasi dari suatu persamaan garis dimulai dari kumpulan berupa titik, kemudian titik-titik serta menjadi garis dan akhirnya menjadi garis lurus yang bisa terus diperpanjang, dan hal ini sangat tergantung pada daerah asal atau domain yang diketengahkan dalam soal-soal yang diberikan.

Perhatikan contoh tahapan berikut.

1. Gambarkan grafik yang memenuhi sebuah fungsi $f(x) = 2x$, dari suatu himpunan A yang memiliki anggota x, dimana $x \geq -2$ dan $x \leq 3$, serta x adalah bilangan bulat, yang dipetakan ke himpunan R, dengan anggota himpunan R adalah bilangan Real.

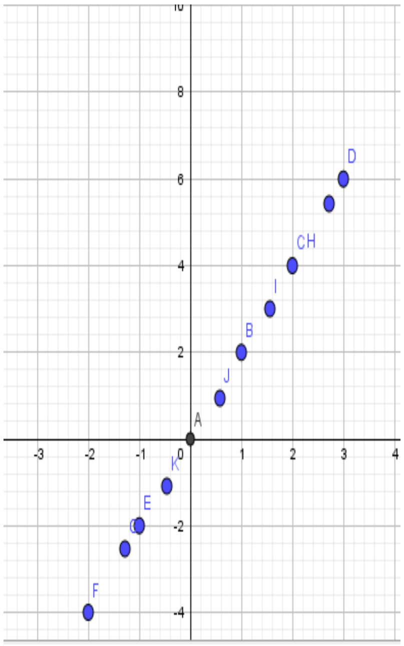
Penyelesaian:
$f: A \to R$, dengan R adalah {bilangan Real}
$A = \{x / -2 \leq x \leq 3, x \in \text{bilangan bulat}\}$
$f(x) = 2x$



$R_F = \{-4, -2, 0, 2, 4, 6\}$

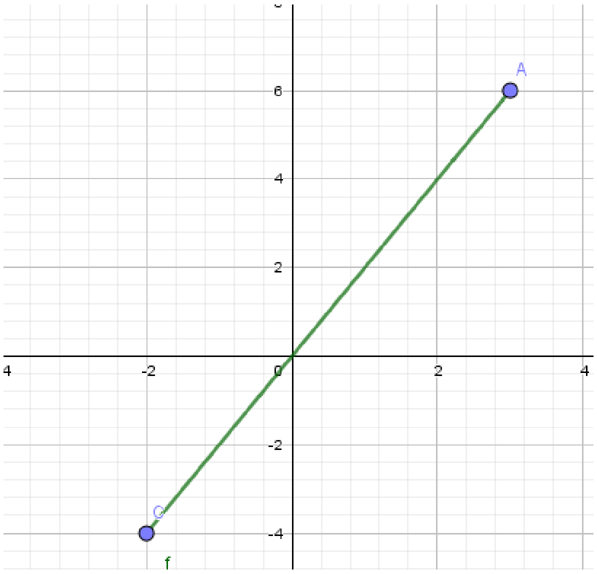
2. Gambarkan grafik yang memenuhi sebuah fungsi $f(x) = 2x$, dari suatu himpunan A yang memiliki anggota x, dimana $x \geq -2$ dan $x \leq 3$, serta x adalah bilangan real, yang dipetakan ke himpunan R, dengan anggota himpunan R adalah bilangan Real.

   Penyelesaian:
   $f: A \to R$, dengan R adalah {bilangan Real}
   $A = \{x / -2 \leq x \leq 3, x \in \text{bilangan real}\}$
   $f(x) = 2x$



$R_F = \{y / -4 \leq y \leq 6, y \in R\}$

3. Kumpulan titik sebagai hasil dari persamaan pada grafik di atas, yaitu $f(x) = 2x$, dimana $f: A \rightarrow R$, dan R adalah {bilangan Real}, $A = \{x / -2 \leq x \leq 3, x \in$ bilangan real$\}$ menjadi berupa garis lurus (garis adalah kumpulan beribu titik), seperti gambar di bawah ini.

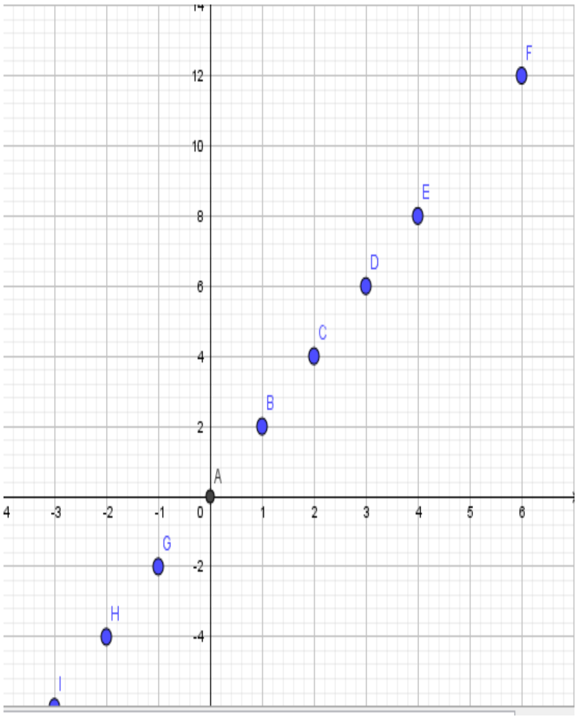


$R_F = \{y / -4 \leq y \leq 6, y \in R\}$

Pada grafik terlihat bahwa batas ujung berupa titik , yang artinya terbatas sampai di titik koordinat $A(3,6)$ dan $C(-2,-4)$

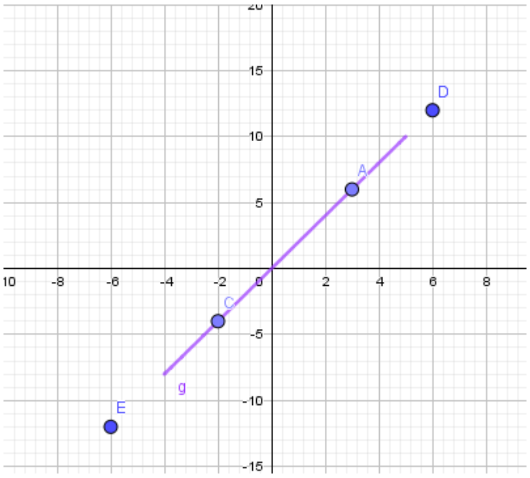
4. Pada tahap selanjutnya, grafik dibuat berdasarkan fungsi yang sama, yaitu $f(x) = 2x$, dengan memetakan anggota himpunan bilangan real ke himpunan bilangan real.

$f: R \to R$
$f(x) = 2x$



$D_{f=}R;\ R_f = R$

Setiap kumpulan titik sebagai hasil dari pemetaan fungsi di atas disambungkan sehingga menjadi sebuah garis yang tidak akan berhenti, karena memenuhi pemetaan dari himpunan bilangan real ke himpunan bilanga real.



$D_{f=}R;\ R_f = R$

Dari paparan grafik kartesius di atas, terlihat tahapan peserta didik diajak untuk memahami bahwa dalam persamaan garis lurus selalu berbentuk garis yang dikedua ujungnya diberikan tanda panah. Dalam hal ini peserta didik dapat memahami ketika garis lurus tidak diberikan tanda panah dalam grafik, artinya domain atau daerah asalnya dibatasi dan bilangan yang digunakan dalam semesta bilangan bulat. Adapun garis lurus yang dapat terus diperpanjang ke atas ataupun ke bawah, adalah garis lurus yang direpresentasikan dari domain bilangan real.

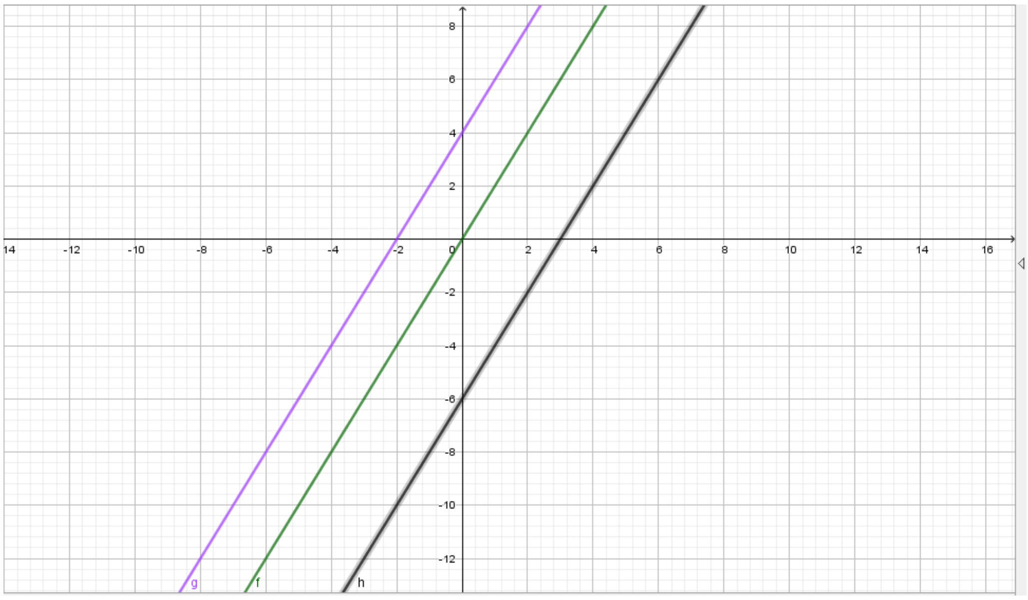
Langkah selanjutnya, disampaikan kepada peserta didik bahwa pembicaraan dalam persamaan garis lurus adalah dalam semesta bilangan real, sehingga grafik berupa garis lurus bukan hanya titik-titik, serta dapat terus diperpanjang ke atas ke bawah dengan domain bilangan real pula dan hasilnya pun adalah dalam kodomain bilangan real. Setelah hal tersebut dipahami oleh peserta didik, dilanjutkan dengan pembelajaran memasuki persamaan garis lurus, melalui pembuatan gambar grafik dalam bidang kartesius.

Dalam pembuatan grafik garis lurus, peserta diajak untuk menemukan pola atau keteraturan dari tahap pembuatan garis pada grafik kartesius, sampai menemukan bentuk umum persamaan garis.

Contoh:
Diberikan tiga persamaan garis berikut.
(i) $y = 2x$
(ii) $y = 2x + 4$
(iii) $y = 2x - 6$

Peserta didik diminta membuat tiga grafik dalam satu koordinat kartesius berdasarkan persamaan yang diberikan sehingga dapat ditemukan keteraturannya. Persamaan garis tersebut dibuat dalam domain, kodomain serta range bilangan real.

Keteraturan dari ketiga persamaan garis yang dimaksud yaitu bahwa ketiganya memiliki gradien yang sama yaitu 2, sehingga ketiga garis tersebut akan saling sejajar.
Keteraturan selanjutnya, untuk garis yang pertama dimana $y = 2x$, nilai $c = 0$, maka garis melalui titik (0,0). Garis yang kedua yaitu $y = 2x + 4$, garis akan memotong pada sumbu y dititik koordinat (0,4). Garis yang ketiga yaitu $y = 2x - 6$, garis akan memotong pada sumbu y di titik koordinat $(0, -6)$
(iv) $y = 2x$
(v) $y = 2x + 4$
(vi) $y = 2x - 6$



Terlihat dalam grafik bahwa ketiga garis memiliki bentuk umum:

$$y = ax + c, \text{dengan } a, c \in R$$

C. PENUTUP

Uraian di atas merupakan salah satu pendekatan dari pembelajaran persamaan garis lurus, dimana hal ini merupakan indikator penunjang atau sebagai pra syarat pengetahuan dalam mempelajari materi persamaan garis lurus. Peserta didik diproses untuk mengembangkan penalarannya dimulai menggunakan pemahaman sebelumnya terkait fungsi linear, dan diperkaya dengan pemahaman daerah asal atau domain fungsi, kemudian menggambar grafik garis lurus melalui tahapan menemukan keteraturan, hingga ditemukan bentuk umum dari suatu persamaan garis. Dari langkah tersebut peserta didik dapat memperoleh pemahaman kapan suatu garis akan melewati titik koordinat (0,0) serta kapan suatu garis akan melewati (0,c) dalam pembuatan grafiknya pada digram kartesius. Pembelajaran dilanjutkan dengan memberikan latihan kepada peserta didik, untuk membuat grafik garis lurus dengan persamaan yang diketahui, melalui tahapan membuat tabel dengan kolom x, kolom y, dan kolom pasangan titik koordinat (x, y).

moga Bermanfaat.

DAFTAR PUSTAKA:

Francis Chow, (2013).”*Assessment for Learning*”, SEAMEO RECSAM,Penang Malaysia.

Francis Chow, (2013).”*Structur Problem Solving*”, SEAMEO RECSAM,Penang Malaysia.

Geogebra tutorial, PPPPTK Matematika Yogjakarta,

Ito-Hino,K. (1995). "*Students' Reasoning and Mathematical Connections in the Japanese Classroom", dalam House, P.A. (1995). Connecting Mathematics across the Curriculum. Yearbook. Virginia: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.*

Koay Suan See, (2013) *Mathematics Education Trends in the 21th Century*, SEAMEO RECSAM, Penang Malaysia

Lee Shok Mee, (2013), *Observation Skills*, SEAMEO RECSAM, Penang Malaysia

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston,VA: USA

Standar Isi KI-KD Kurikulum 2013(2016) Permendikbud nomer 24.

Sugijono, M. A. (2002). *Matematika untuk SMP Kelas VIII.* Jakarta: Erlangga.

---

*) Enung Sumarni, M.Pd.
Widyaiswara PPPPTK Matematika Yogyakarta

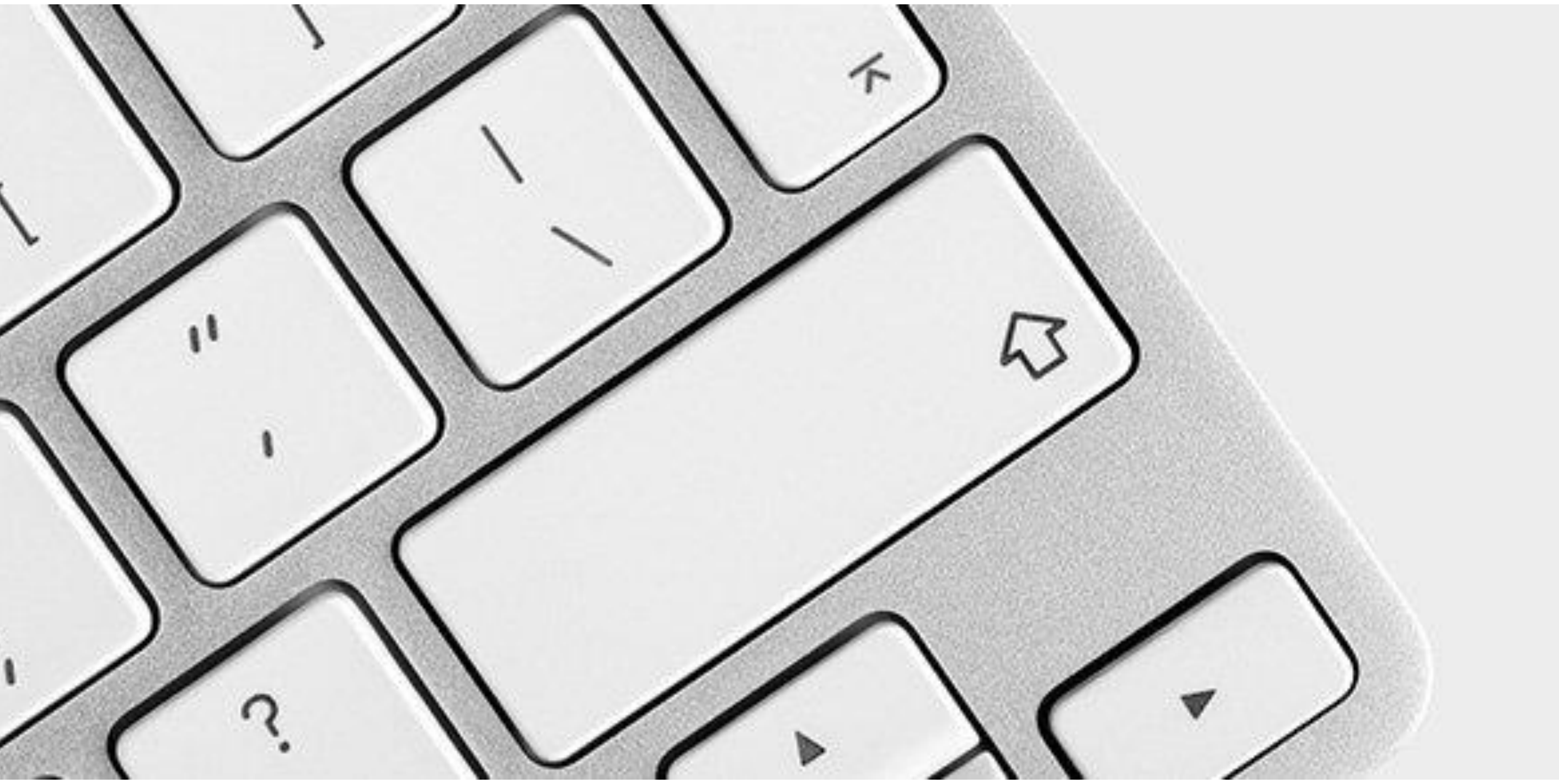


Foto: httpswww.proprofs.com

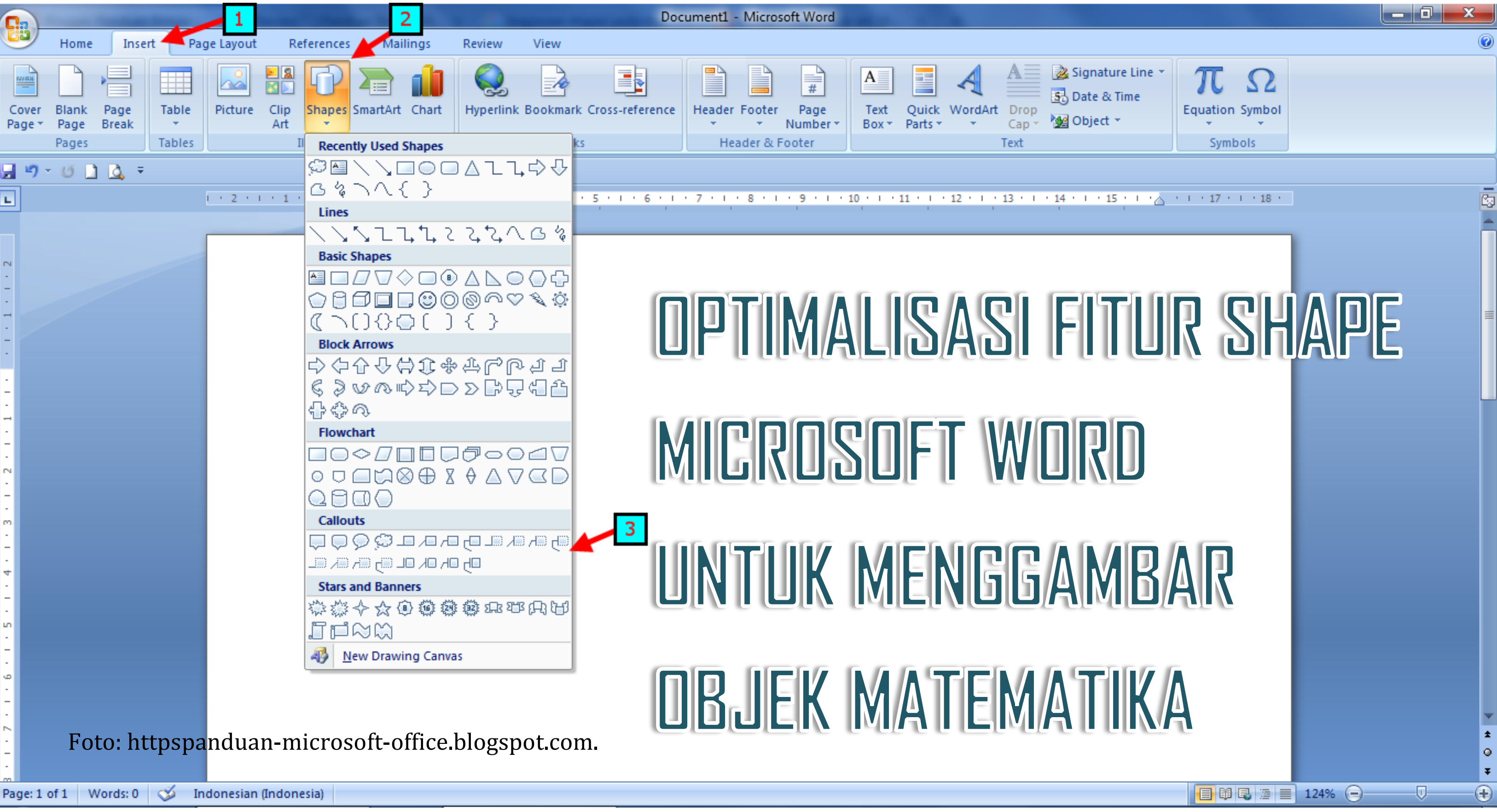


Foto: httpspanduan-microsoft-office.blogspot.com.

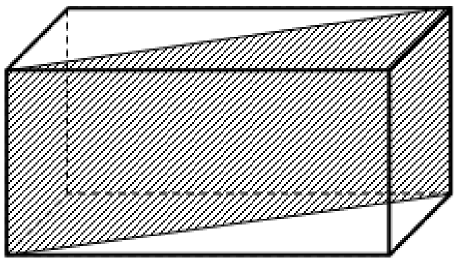
*) Arfianti Lababa

Matematika, tidak dapat dipisahkan dari objek-objek matematika. Objek matematika bersifat abstrak, sehingga untuk mempermudah seseorang dalam mempelajari atau menyelesaikan soal matematika diperlukan bantuan model/gambar/ilustrasi. Namun demikian, membuat model/ilustrasi objek matematika dirasakan oleh kebanyakan guru tidaklah mudah. Untuk menggambar objek matematika, diperlukan ketelitian, kemampuan menggambar dan pemahaman materi matematika itu sendiri.

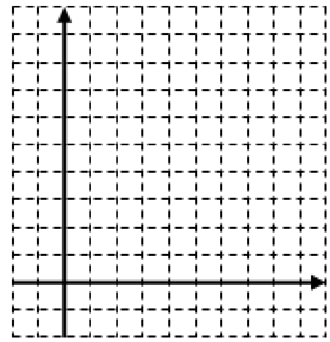
Untuk menunjang keperluan menggambar objek matematika, sebenarnya tersedia program bantu yang cukup banyak. Dari yang sederhana sampai dengan yang rumit dan memerlukan ketelitian. Program bantu tersebut antara lain: Corel Draw, Paint, C++, GeoGebra, dan lain-lain. Untuk menggunakan program-program tersebut perlu penginstalan dan belajar cara menggunakannya.

Untuk keperluan menggambar objek matematika yang tidak terlalu rumit, sebenarnya dapat menggunakan fitur-fitur yang sudah disediakan oleh Microsoft Word. Keuntungan yang diperoleh dengan menggunakan fitur yang disediakan oleh Microsoft Word adalah tidak perlu penginstalan program yang baru, mudah dipelajari dan digunakan. Setiap komputer yang terinstal Microsoft Word, pasti tersedia fitur untuk menggambar tersebut.

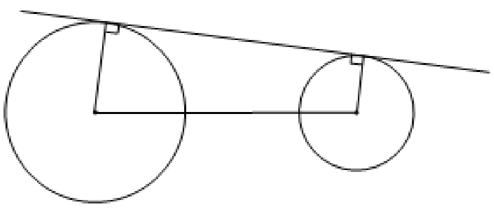
Objek-objek matematika yang dapat dibuat dengan aplikasi menggambar Microsoft Word antara lain:



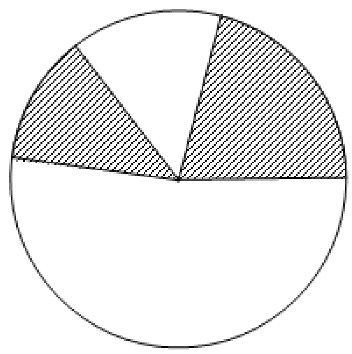
Balok



Bidang Koordinat



Garis Singgung Persekutuan



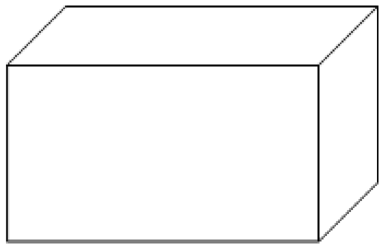
Lingkaran dan Juring

Masih banyak lagi gambar-gambar yang dapat dibuat hanya dengan bantuan Microsoft Word tanpa aplikasi yang lain. Langkah-langkah menggambar bangun-bangun tersebut akan dibahas satu-persatu. Cara yang akan diuraikan berikut bukanlah satu-satunya cara, pembaca dapat berkreasi menemukan cara-cara lain yang lebih mudah.

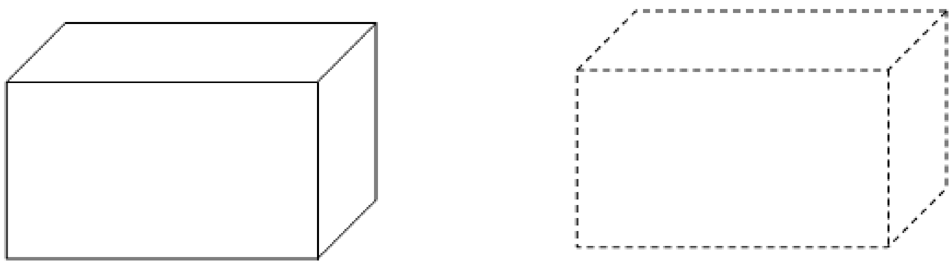
Menggambar Balok

Gambar balok dan variasinya banyak digunakan dalam matematika, terutama jika membahas bangun ruang sisi datar. Gambar balok yang bagus adalah gambar yang stabil, artinya jika diperbesar atau diperkecil, gambar yang dihasilkan tidak rusak. Berikut alternatif menggambar balok tersebut.

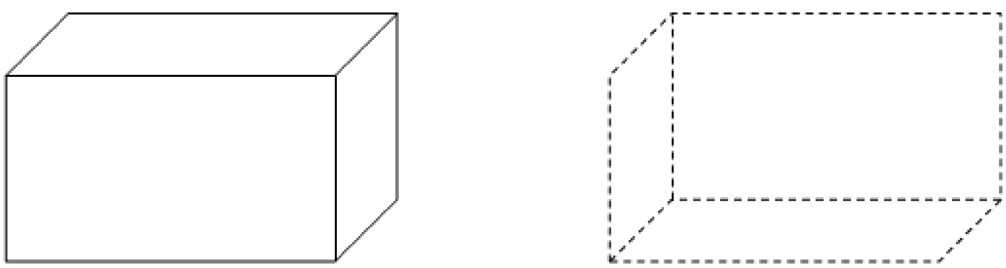
Langkah 1. Masuk ke fitur *shape* dengan mengklik menu **Insert** > **Shapes** dan pilih **Cube**  . Jika yang diinginkan balok, maka kubus tersebut dapat ditarik ke kanan, kiri, atau ke atas sesuai keperluan. Untuk menghilangkan arsiran, klik balok tersebut kemudian klik menu **Format** > **Shape Fill** > **No Fill.** Hasilnya sebagai berikut.



Langkah 2. Duplikasi balok tersebut sehingga menjadi 2 balok (bisa menggunakan Ctrl+D). Klik balok hasil salinan, Klik menu **Format > Shape Outline** > **Dashes** kemudian pilih garis putus-putus. Hasilnya seperti gambar berikut ini.



Selanjutnya klik balok dengan garis putus-putus, klik menu **Format** > **Rotate > Flip Horizontal** > **Flip Vertical**. Hasilnya seperti gambar berikut.

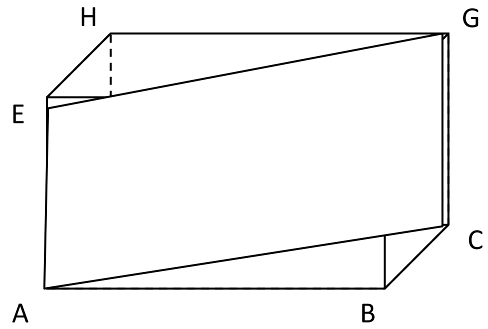


Selanjutnya aktifkan kedua objek di atas, salah satu caranya dengan menekan tombol **Ctrl** di keyboard dan ditahan, diikuti klik objek 1 dan klik objek 2 di atas, lepas tombol **Ctrl**. Selanjutnya masih dalam keadaan dua objek terseleksi, klik menu **Format** > **Align > Align Middle**, kemudian pilih lagi **Align Center**. Selanjutnya dari menu **Format** lagi tekan ikon **Group** dan pilih **Group**. Secara umum hasilnya adalah sebuah balok. Bentuk balok ini stabil. Untuk membuktikan cobalah memperbesar atau memperkecilnya, gambar tidak akan rusak. Untuk menamai titik sudut – titik sudutnya, gunakan text box dari fitur *shape*. Setelah semua sudut diberi nama, selanjutnya satukan objek-objek tersebut dengan cara *grouping*.

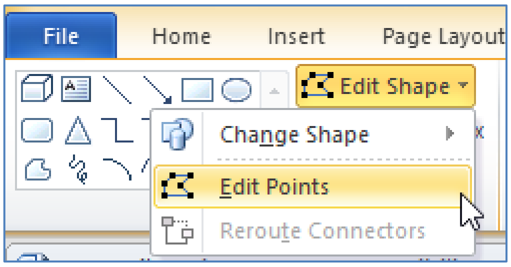
Langkah selanjutnya mengarsir salah satu bidang diagonal, misalnya ACGE. Urutannya adalah sebagai berikut.

Langkah 3. Klik menu **Insert** > **Shapes** > **Freeform** dan klik titik A, klik titik C, klik titik G, kemudian kembali klik titik A.

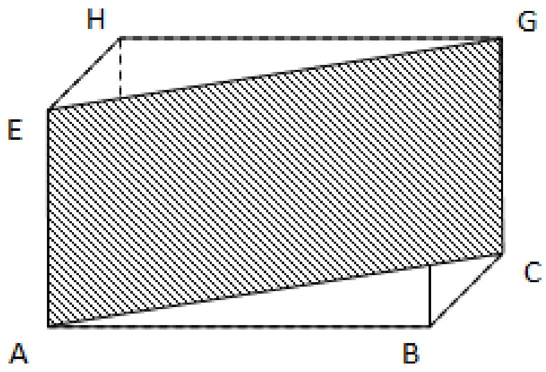
Hasilnya adalah sebagai berikut. Gambar bidang diagonal bisa jadi letak sudut-sudutnya belum seperti yang diinginkan.



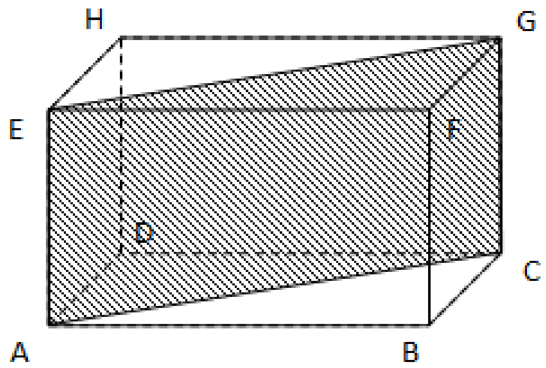
Langkah 4. Klik bidang diagonal yang telah dibuat, selanjutnya klik menu **Format** > **Edit Shape** > **Edit Points**.



Pada tiap sudut bidang diagonal terlihat kotak-kotak hitam, selanjutnya geser/sesuaikan titik-titik tersebut. Untuk hasil yang lebih baik, perbesar tampilan gambar.



Langkah 5. Klik bidang diagonal, klik kanan mouse dan pilih **Format Shape**. Di bagian **Fill** aktifkan **Pattern Fill** dan pilih bentuk arsiran yang diinginkan. Selanjutnya klik menu **Format** > **Wrap Text** > **Behind Text**. Setelah itu jadikan satu *group* dengan balok yang ada. Hasil akhirnya adalah sebagai berikut.



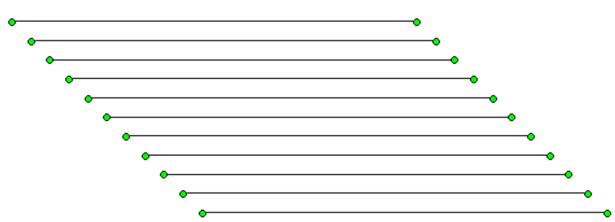
Menggambar Bidang Koordinat

Mengambar bidang koordinat, sebenarnya sangat mudah dan sederhana. Namun jika caranya kurang tepat maka selain hasilnya tidak memuaskan, waktu yang diperlukan cukup lama. Berikut langkah membuat bidang koordinat kartesius.

Langkah 1. Buat garis mendatar, panjangnya sama dengan lebar bidang koordinat yang ingin dibuat. Klik menu **Insert** > **Shapes** > **Line** dan lakukan drag mulai pada titik awal garis sampai pada titik akhir garis. Untuk membuat garis benar-benar lurus tekan tombol shift di *keyboard* pada saat men-*drag*

Langkah 2. Salin garis tersebut sebanyak yang diinginkan. Klik pada garis tersebut dan tekan kombinasi tombol Ctrl+D. Misal buat 10 buah.

Langkah 3. Klik semua garis tersebut sambil menekan tombol **Shift** atau **Ctrl** di *keyboard* , sehingga seperti gambar berikut ini.



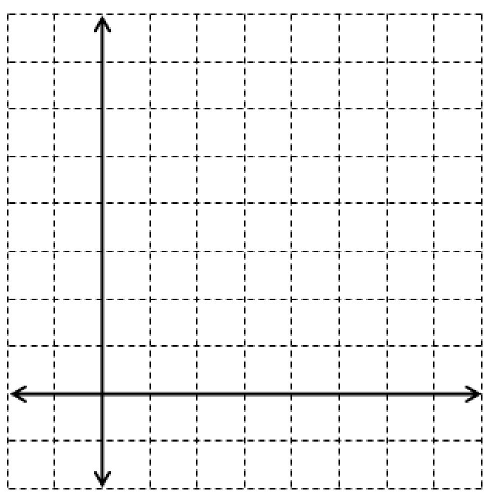
Langkah 4. Klik menu **Format** > **Align** > **Align Left** dan klik **Group** > **Group** untuk meratakan garis dan membuatnya jadi satu grup.

Langkah 5. Klik pada objek, pilih menu Format dan pada kelompok Size, atur supaya panjang dan lebarnya sama dengan mengetikkan ukurannya pada kotak **Width** misal 8 cm (kadang-kadang terlihat panjang dan lebar objek tidak sama, hal tersebut sebenarnya hanya tampilan saja). Ganti garis dengan garis putus-putus, caranya pilih **Shape Outline** pada menu **Format**, klik **Dashes** dan pilih garis putus-putus.

Langkah 6. Salin objek menjadi dua dengan menekan **Ctrl+D**. Salah satu objek dirotasi 90 derajat searah jarum jam.

Langkah 7. Aktifkan kedua objek, pilih menu **Format** > **Align** > **Align Left** dan **Align Middle** serta **Group**.

Langkah 8. Klik objek kemudian lanjutkan klik salah satu garis mendatar kemudian ubah menjadi garis (tidak putus-putus), atur panah kiri kanannya dan buat lebih tebal. Garis ini akan menjadi sumbu X. Dengan cara sama buat sumbu Y. Jika langkah benar, hasilnya adalah sebagai berikut.



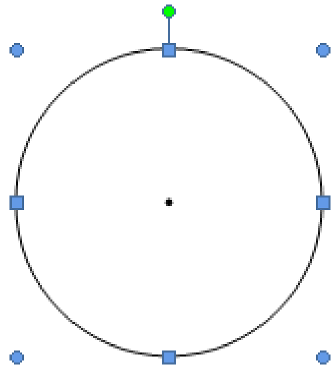
Meskipun sudah jadi, Anda masih dapat menyempurnakan dengan memberi nama sumbu X, sumbu Y, memberi angka, dan lain-lain.

Membuat Garis Singgung Persekutuan Dua Lingkaran

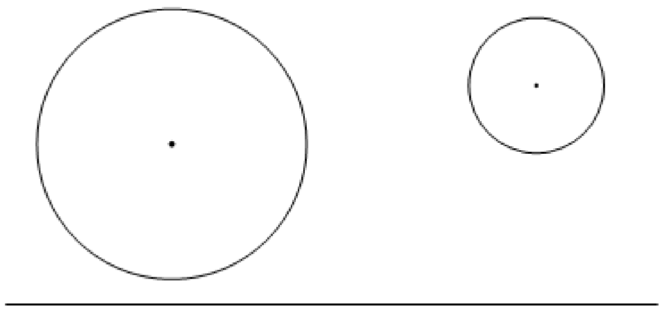
Langkah 1. Klik menu Insert > Oval dan klik pada tampilan di mana lingkaran akan diletakkan. Klik kanan pada lingkaran, pilih **Format Shape**, pada **Fill** pilih **No Fill**. Atur pula *size*-nya, pada tulisan ini digunakan satuan pengukuran *cm.* Misalnya *height* 4 *width* 4 dari menu **Format** (bilangan ini hanya agar mudah diingat).

Langkah 2. Salin objek sehingga menjadi dua buah. Salah satu ubah ukurannya menjadi lebar 0,03” panjang juga 0,03”. Untuk fill pilih warna hitam. Lingkaran ini akan dijadikan titik pusat lingkaran.

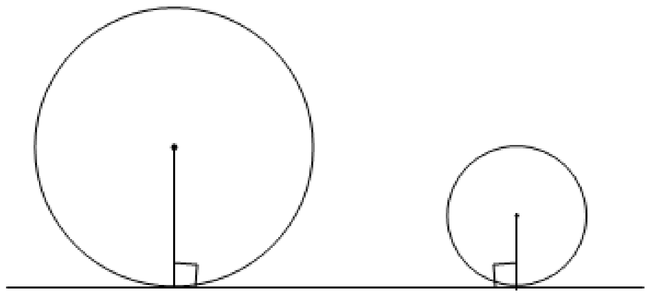
Langkah 3. Klik pada kedua lingkaran dan klik menu **Format** > **Align** > **Align Center** dan **Align middle** serta **Group**. Sampai dengan langkah ini, telah diperoleh sebuah lingkaran dengan sebuah titik pusat tepat di tengahnya.



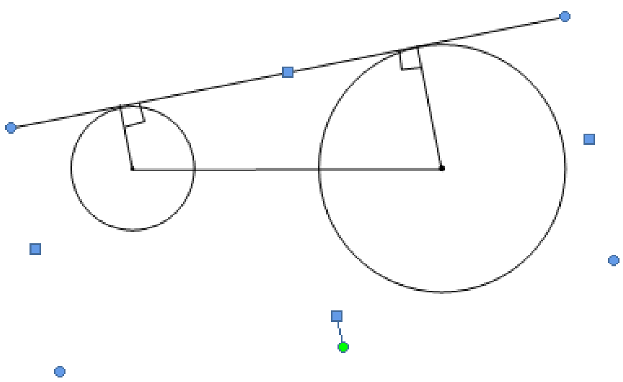
Langkah 4. Salin lingkaran menjadi 2. Salah satu perkecil ukurannya menjadi 2 cm (caranya dengan klik menu **Format**, ganti **size** (ukuran dengan 2 cm pada tinggi dan lebarnya). Buat ruas garis horisontal. Hasil sementara adalah seperti gambar berikut ini.



Langkah 5. Geser kedua lingkaran sehingga menyentuh (menyinggung) garis horisontal. Buat garis vertikal dari titik pusat lingkaran sampai ke garis horisontal. Beri tanda siku-siku pada perpotongan garis vertikal dan horisontal. Hasilnya seperti gambar berikut.



Langkah 6. Buat garis dari titik pusat lingkaran 1 ke pusat lingkaran 2, kemudian lakukan *grouping*. Secara umum garis singgung sekutu kedua lingkaran sudah jadi, namun masih perlu penamaan titik-titiknya serta mengubah garis antara dua titik pusat sebagai garis horisontal seperti contoh berikut ini.



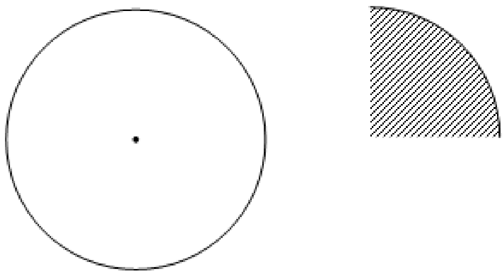
Untuk garis singgung persekutuan dalam, secara umum langkahnya sama, hanya pada saat langkah ke 5, satu lingkaran menyinggung dari arah atas, lingkaran kedua dari arah bawah. Selanjutnya langkahnya sama.

Menggambar Lingkaran dengan Juring Lingkaran

Lingkaran dengan juring-juring di dalamnya antara lain dipakai dalam statistika, yakni membuat diagram lingkaran. Penggunaan lain adalah terkait sudut pusat dan sudut keliling. Untuk menggambar lingkaran dengan juring-juringnya, dimulai dengan menggambar lingkaran dengan titik pusat di tengahnya. Pada saat mempelajari cara membuat garis singgung sekutu dua lingkaran, telah dipelajari cara membuat lingkaran dengan titik pusat di tengahnya, yakni langkah 1 – 3, untuk itu pada bagian ini akan dimulai pada langkah ke empat.

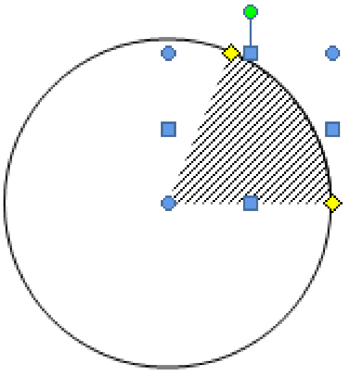
Langkah 4. Klik menu **Insert** > **Shapes** > **Arc**  dan klik di bidang gambar yang kosong.

Langkah 5. Klik kanan pada bangun yang terbentuk dan pilih **Format Shape** > **Fill** > **Pattern fill** dan pilih arsiran yang diinginkan.



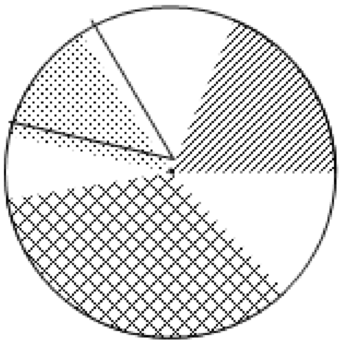
Langkah 6. Aktifkan lingkaran dan juring pertama, kemudian klik menu **Format** > **Align** > **Align Top** dan **Align Right**.

Langkah 7. Klik juring yang sudah ada dalam lingkaran sehingga muncul belah ketupat berwarna kuning pada kedua ujung busurnya dan geser belah ketupat yang atas sesuaikan sudut yang diinginkan. Lihat gambar berikut ini.



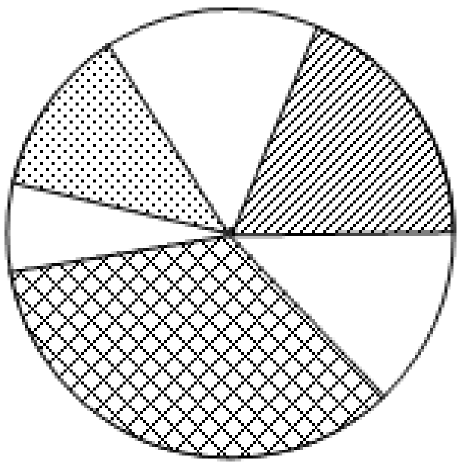
Langkah 8. Lakukan *grouping* pada lingkaran dan juring yang sudah menyatu.

Anda dapat melakukan langkah-langkah di atas untuk menambahkan juring lain. Pada tulisan ini akan dicontohkan terdapat tiga juring. Langkah selanjutnya adalah pembuatan garis-garis pada tiap juring. Untuk membuat garis ini gunakan *freeform* dengan tujuan agar garis dapat ditekuk-tekuk. Langkahnya adalah sebagai berikut. Klik menu **Insert** > **Shapes** > **Freeform** selanjutnya klik di salah satu ujung juring, klik di pusat lingkaran dan *double click* di ujung juring yang lain. Lihat gambar berikut ini.



Besar kemungkinan ketepatan titik-titik tersebut kurang baik. Namun hal tersebut dapat diperbaiki dengan menggunakan fitur edit point. Caranya adalah klik garis tersebut dan klik menu **Format** > **Edit Shape** > **Edit Points**.

Selanjutnya titik-titik berwarna hitam pada ujung garis dan sudut dapat digeser sesuai kebutuhan sehingga diperoleh hasil seperti yang diinginkan. Lakukan hal sama untuk juring yang lain. Hasil akhirnya adalah seperti gambar di bawah ini.



Lingkaran dengan tiga juring sudah tergambar, selanjutnya untuk melengkapi ukuran sudut, nama titik-titik dapat dilakukan dengan menggunakan *text box* seperti pada saat menamai sudut balok pada pembahasan terdahulu. Untuk selanjutnya dapat dicoba membuat juring dengan sudut sesuai ukuran sebenarnya. Ini dapat dilakukan dengan memanipulasi fitur rotasi garis, namun tidak akan dibahas pada tulisan ini.

Kesimpulan

Kemampuan melukis objek matematika sangat penting terutama bagi guru atau calon guru matematika. Untuk melukis objek matematika tidak memerlukan aplikasi atau program tertentu. Fitur yang disediakan oleh Microsoft Word cukup memadai hanya saja perlu latihan untuk menggunakan agar hasil seperti yang diinginkan.

*) Dra. Arfianti Lababa, M.Pd.
Widyaiswara PPPPTK Matematika Yogyakarta

Gambar: httpgetyourimage.club.

Persamaan Fungsi

*)Muhammad Taqiyuddin

1. Pendahuluan

Baru-baru ini pemerintah melalui Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan Republik Indonesiamenerbitkan beberapa buku siswa matematika dengan kurikulum 2013 edisi revisi 2017. Buku-buku tersebut merupakan wujud dari upaya perbaikan atas buku-buku serupa yang telah diterbitkan pada tahun-tahun sebelumnya (lih. As'ari, Tohir, Valentino, Imron, dan Taufiq, 2017; Manullang, Sitanggang, Hutapea, Sinaga, Sinaga, Simanjorang, & Sinambela, 2017). Beberapa perubahan nampak dari buku terbaru, misalnya, penyajian materi dan soal (As'ari, dkk, 2017; Manullang, dkk, 2017).

Terdapat beberapa hal yang menarik, salah satunya terkait dengan soal-soal yang diberikan dalam buku-buku siswa edisi revisi 2017. Banyak ditemukan soal-soal menantang yang menuntut kemampuan pemecahan masalah bagi yang akan menyelesaikannya (lih. As'ari, dkk, 2017; Manullang, dkk, 2017). Hal ini senada dengan tujuan dari pembuatan buku-buku tersebut, yakni, salah satunya, untuk mendorong siswa agar mampu menyelesaikan soal pemecahan masalah (As'ari, dkk, 2017; Manullang, dkk, 2017). Diantara soal-soal yang menarik, terdapat beberapa soal yang terkait dengan persamaan fungsi.

Yang dimaksud dengan persamaan fungsi adalah sebuah persamaan yang melibatkan paling tidak sebuah fungsi yang belum diketahui bentuk eksplisitnya seperti apa. Engel (1998) mengatakan "*Equations for* *unknown functions are called functional equations*" yang artinya adalah persamaan dari fungsi-fungsi yang belum diketahui disebut dengan persamaan fungsi. Sebagai contoh, $f(x+y)=f(x)+f(y)$ merupakan sebuah persamaan fungsi. Persamaan fungsi serupa dengan persamaan aljabar, misalnya persamaan linear atau persamaan kuadrat, hanya saja yang membedakan adalah yang tidak diketahui (*unknown*) adalah fungsi bukan bilangan real (Small, 2007).

Pada bagian selanjutnya akan dipaparkan kajian teori tentang persamaan fungsi. Setelah itu, akan dipaparkan soal-soal persamaan fungsi yang terdapat dalam buku siswa matematika dengaan kurikulum 2013 edisi revisi 2017. Akan dikaji pula apa saja tantangan yang mungkin dihadapi dalam proses menyelesaikan soal-soal tersebut.

2. Persamaan Fungsi

Persamaan fungsi memiliki sejarah yang sudah cukup lama. Nicole Oresme adalah matematikawan dari abad 14 yang pertama kali memperkenalkan persamaan fungsi dengan memberikan definisi fungsi linear dalam bentuk persamaan fungsi (Small, 2007). Small (2007) menyatakan bahwa definisi fungsi linear versi Oresme adalah sebagai berikut. Fungsi f dikatakan linear jika untuk sebarang bilangan real x, y, dan z memenuhi kondisi berikut

$$\frac{y-x}{z-x}=\frac{f(y)-f(x)}{f(z)-f(y)}.$$

Setelah Oresmen, banyak matematikawan yang mengeksplorasi persamaan fungsi, misalnya Augustin-Louis Cauchy, Jean d' Alembert, dan Charles Babbage (Small, 2007).

Dalam kompetisi matematika, persamaan fungsi merupakan salah satu topik yang sering kali muncul. Sebagai contoh, berbagai macam soal tentang persamaan fungsi dapat ditemukan di soal-soal *International Mathematical Olympiad* (IMO) dan *William Lowell Putnam Competition* (Gelca dan Andreescu, 2007; Djukić, Janković, Matić, dan Petrović, 2011). Ada alasan tersendiri mengapa soal tipe ini sering muncul dalam olimpiade matematika. Small (2007) menyatakan bahwa persamaan fungsi menyediakan tantangan dan teka-teki tersendiri dalam upaya menyelesaikannya dan seringkali yang dibutuhkan adalah kecerdikan dalam memanipulasi bentuk persamaan yang diberikan di soal.

Terdapat dua jenis persamaan fungsi yang sering dijumpai, yakni dengan satu variabel dan dua variabel. Sebagai contoh, $f(x)+f\left(\frac{1}{1+x}\right)=x$ merupakan persamaan fungsi dengan satu variabel, sedangkan $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)$ merupakan persamaan fungsi dengan dua variabel (Engel, 1998; Small, 2007). Ada pula persamaan fungsi yang melibatkan tiga atau lebih variabel, misalnya soal IMO tahun 2002, yakni:

"*Find all functions f from the reals to the reals such that*

$$\big(f(x)+f(z)\big)\big(f(y)+f(t)\big)=f(xy-zt)+f(xt+yz)$$

for all real x, y, z, t." (Djukić, dkk., 2011).

Terdapat beberapa strategi yang dapat digunakan untuk menyelesaiakan soal persamaan fungsi yang penulis rangkum dari dua buku yakni: Pertama, *Functional Equations and How to Solve Them* karya Christopher G. Small yang merupakan pelatih berpengalaman dalam mempersiapkan siswa-siswa untuk kompetisi IMO dan Putnam (Small, 2007); Kedua, *Topics in Algebra and Analysis: Preparing for Mathematical Olympiad.* Berikut adalah strategi-strategi yang dimaksud:

1. Kenali kondisi-kondisi tertentu yang dipenuhi oleh fungsi seperti fungsi linear, trigonometri dan logaritma (Small, 2007).
2. Coba masukkan fungsi standar seperti fungsi linear atau polinomial ke dalam persamaan fungsi dan tentukan koefisien-koefisien beserta konstantanya (Small, 2007).
3. Subtitusi beberapa nilai seperti 0 atau 1 untuk dapat menentukan nilai dari $f(0)$ atau $f(1)$ (Manfrino, Ortega, dan Delgado, 2015; Small, 2007).
4. Jika persamaan fungsi melibatkan dua variabel, katakanlah y dan x, coba ganti y dengan x atau sebaliknya (Manfrino, Ortega, dan Delgado, 2015; Small, 2007).
5. Selain subtitusi dengan nilai tertentu seperti 0 dan 1, subtitusi dengan variabel juga dapat dilakukan, seperti $\frac{1}{x}, x+1, x+y$, dan $x-y$ (Manfrino, Ortega, dan Delgado, 2015).
6. Jika persamaan melibatkan $f\big(\alpha(x)\big)$, selidiki apakah terdapat m sedemikian sehingga $\alpha^m(x)=x$, lalu coba aplikasikan f sebanyak m kali (Small, 2007).
7. Periksa apakah fungsi memiliki sifat-sifat tertentu, seperti satu-satu, onto, *bijective*, genap, ganjil, monoton, atau periodik (Manfrino, Ortega, dan Delgado, 2015; Small, 2007).
8. Coba aplikasikan prinsip induksi matematika (Manfrino, Ortega, dan Delgado, 2015).
9. Asumsikan fungsinya monoton atau kontinu, lalu periksa apa yang bisa dapat diperoleh dari asumsi tersebut (Manfrino, Ortega, dan Delgado, 2015).

3. Soal Persamaan Fungsi dan Pembahasan

Paling tidak terdapat dua buah soal yang melibatkan persamaan fungsi yang dapat dijumpai. Kedua soal tersebut dapat dilihat pada Tabel 1. Soal yang pertama terdapat dalam bab relasi dan fungsi (As'ari, dkk, 2017). Sedangkan soal yang kedua terdapat dalam bab limit fungsi (Manullang, dkk, 2017). Menyelesaikan kedua soal tersebut merupakan sebuah tantangan tersendiri karena tidak ada rumus bakunya.

Tabel 1. Soal-Soal Persamaan Fungsi

No	Soal	Sumber
1	Misalkan $f(x)$ adalah fungsi yang memenuhi (a) untuk setiap bilangan real x dan y, maka $f(x+y) = x + f(y)$ dan (b) $f(0) = 2$ Nilai dari $f(2016)$ adalah .... A. 2015 B. 2016 C. 2017 D. 2018	Buku siswa kelas VIII SMP
2	Jika fungsi $f(x) - 2f\left(\frac{2013}{2} - x\right) = x$ maka tentukan nilai dari $\lim\limits_{x\to 2013}\left(\frac{3f(x)}{x-2013}\right)^{2013}$	Buku siswa kelas XI SMA

Selanjutnya, akan dibahas kedua soal tersebut dengan menggunakan strategi-strategi yang telah dipaparkan sebelumnya. Paling tidak terdapat empat cara untuk menyelesaikan soal yang pertama sebagaimana dapat dilihat pada paparan berikut.

Cara I

Ambil sebarang x, y, dan $z \in \mathbb{R}$. Berdasar (a) maka diperoleh

$$\frac{f(y) - f(x)}{f(z) - f(y)} = \frac{(f(x+y) - x) - (f(y+x) - y)}{(f(y+z) - y) - (f(z+y) - z)} = \frac{y - x}{z - x}.$$

Bentuk di atas sesuai dengan definisi Oresme terhadap fungsi linear (Small, 2007). Akibatnya, kita bisa memisalkan $f(x) = ax + b$, untuk suatu a dan $b \in \mathbb{R}$.

Berdasar (a) diperoleh $a(x+y) + b = x + ay + b \Leftrightarrow a = 1$. Sedangkan dengan (b) didapat $b = 2$. Akibatnya diperoleh $f(x) = x + 2$. Oleh karena itu, $f(2016) = 2018$.

Cara II

Berdasarkan (b) dan mensubtitusi $y = 0$ ke (a), maka diperoleh $f(x) = f(x+0) = x + f(0) = x + 2$. Akibatnya $f(2016) = 2018$.

Cara III

Subtitusi $x = 1$ dan $y = -1$ ke (a) maka didapat

$$f(1-1) = 1 + f(-1) \Leftrightarrow f(-1) = f(0) - 1.$$

Berdasarkan (b) diperoleh

$$f(-1) = 2 - 1 = 1.$$

Perhatikan bahwa, kita dapat memperoleh

$$f(1) = f(2-1) = 2 + f(-1) = 2 + 1 = 3$$

$$f(2) = f(3-1) = 3 + f(-1) = 3 + 1 = 4$$

Dengan meninjau proses di atas, maka nilai $f(2016)$ dapat dicari dengan

$$f(2016) = f(2017-1) = 2017 + f(-1) = 2017 + 1 = 2018$$

Cara IV

Berdasar (b) dan dengan mensubtitusi $x = 2016$ dan $y = 0$ ke (a), maka diperoleh

$$f(2016+0) = 2016 + f(0) \Rightarrow f(2016) = 2016 + 2 = 2018.$$

Berikutnya akan dibahas penyelesaian dari soal nomor dua. Akan ditampilkan dua cara untuk menyelesaikannya.

Cara I

Misalkan $\alpha(x) = \frac{2013}{2} - x$, maka α merupakan fungsi involusi karena

$$\alpha^2(x) = \alpha(\alpha(x)) = \frac{2013}{2} - \alpha(x) = \frac{2013}{2} - \left(\frac{2013}{2} - x\right) = x.$$

Ganti nilai x menjadi $\alpha(x)$ dalam

$$f(x) - 2f\left(\frac{2013}{2} - x\right) = x \quad (1),$$

maka diperoleh

$$f\left(\frac{2013}{2} - x\right) - 2f\left(\frac{2013}{2} - \left(\frac{2013}{2} - x\right)\right) = \frac{2013}{2} - x$$

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{2013}{2}-x\right)-2f(x)=\frac{2013}{2}-x \qquad (2).$$

Dengan menjumlahkan (1) dan $2 \times (2)$ diperoleh

$$f(x)=\frac{1}{3}(x-2013).$$

Akibatnya,

$$\lim_{x\to 2013}\left(\frac{3f(x)}{x-2013}\right)^{2013}=\lim_{x\to 2013}\left(\frac{x-2013}{x-2013}\right)^{2013}=\lim_{x\to 2013}1^{2013}=1.$$

Cara II

Jelas bahwa fungsi konstan, fungsi identitas dan fungsi dengan bentuk $f(x)=cx$ tidak memenuhi persamaan fungsi $f(x)-2f\left(\frac{2013}{2}-x\right)=x$. Akan diuji apakah fungsi linear memenuhi. Misalkan $f(x)=ax+b$, maka diperoleh

$$ax+b-2\left(a\left(\frac{2013}{2}-x\right)+b\right)=x \Leftrightarrow ax+b-2013a+2ax-2b-x=0$$

$$\Leftrightarrow (3a-1)x+(-b-2013a)=0$$

Akibatnya, diperoleh $3a-1=0 \Leftrightarrow a=\frac{1}{3}$ dan $-b-2013a=0 \Rightarrow b=-2013a=-\frac{2013}{3}$. Oleh karena itu, fungsi yang memenuhi persamaan fungsi tersebut adalah $f(x)=\frac{1}{3}x-\frac{2013}{3}$. Berdasar uraian di atas, maka dapat didapat

$$\lim_{x\to 2013}\left(\frac{3f(x)}{x-2013}\right)^{2013}=\lim_{x\to 2013}\left(\frac{x-2013}{x-2013}\right)^{2013}=\lim_{x\to 2013}1^{2013}=1.$$

Meskipun solusi dari kedua permasalahan telah dipaparkan, pada saat proses menyelesaikan soal yang serupa mungkin saja terjadi masalah-masalah. Ada baiknya mengutip pendapat seseorang yang sangat berpengalaman dalam pemecahan masalah, baik sebagai *problem solver* maupun pengajar pemecahan masalah. Salah satunya adalah Paul Zeitz yang merupakan mantan ketua tim IMO pertama Amerika Serikat dan pelatih tim Amerika Serikat yang pernah mengantarkan timnya membawa hasil sempurna pada tahun 1994 (Zeitz, 2007). Ia menyatakan bahwa paling tidak ada tiga masalah yang biasa dihadapi oleh problem solver, yakni: Pertama, tidak tahu bagaimana caranya untuk memulai; Kedua, sudah melakukan beberapa progress namun tidak tahu bagaimana meneruskannya; Ketiga, mencoba beberapa strategi namun tidak ada yang bekerja, lalu menyerah (Zeitz, 2007, hlm. 2-3).

4. Kesimpulan dan Saran

Upaya yang dilakukan oleh Kementerian Pendidikan Indonesia patut diapresiasi karena, salah satunya, menyediakan soal yang menantang bagi siswa melalui buku siswa terbaru. Terdapat dua soal yang berkaitan dengan persamaan fungsi yakni yang pertama dengan dua variabel dan yang kedua dengan satu variabel. Meskipun telah ditunjukkan solusi dari kedua permasalahan tersebut, tidak dipungkiri, dapat dicari pula solusi yang lain. Selain itu, dalam menyelesaikan permasalahan seperti di atas, dapat pula dijumpai hambatan-hambatan atau masalah-masalah yang menghadang. Namun, kegigihan dan tekad untuk menyelesaikan permasalahan akan membawa kita mampu menyelesaikannya.

Daftar Pustaka

As'ari A.R., Tohir M., Valentino E., Imron Z., & Taufiq I. 2017. *Matematika SMP/MTs Kelas VIII Semester I Kurikulum 2013 Edisi Revisi*. Jakarta: Kementrian Pendidikan dan Kebudayaan.

Djukić, D., Janković, V., Matić, I., & Petrović, N. 2011. *The IMO Compendium*. New York: Springer.

Engel, A. 1998. *Problem Solving Strategies.* New York: Springer.

Gelca. R & Andreescu, T. 2007. *Putnam and Beyond*. New York: Springer.

Manfrino, F.B., Ortega, J.A.G., & Delgado, R.V. 2015. *Topics in Algebra: Preparing for Mathematical Olympiad.* New York: Birkhäuser.

Manullang, S., Sitanggang, A.K., Hutapea, T.A., Sinaga, L.P., Sinaga, B., Simanjorang, M.M., & Sinambela, P.N.J.M. 2017. *Matematika SMA/MA/SMK/MAK Kelas XI.* Jakarta: Kementrian Pendidikan dan Kebudayaan.

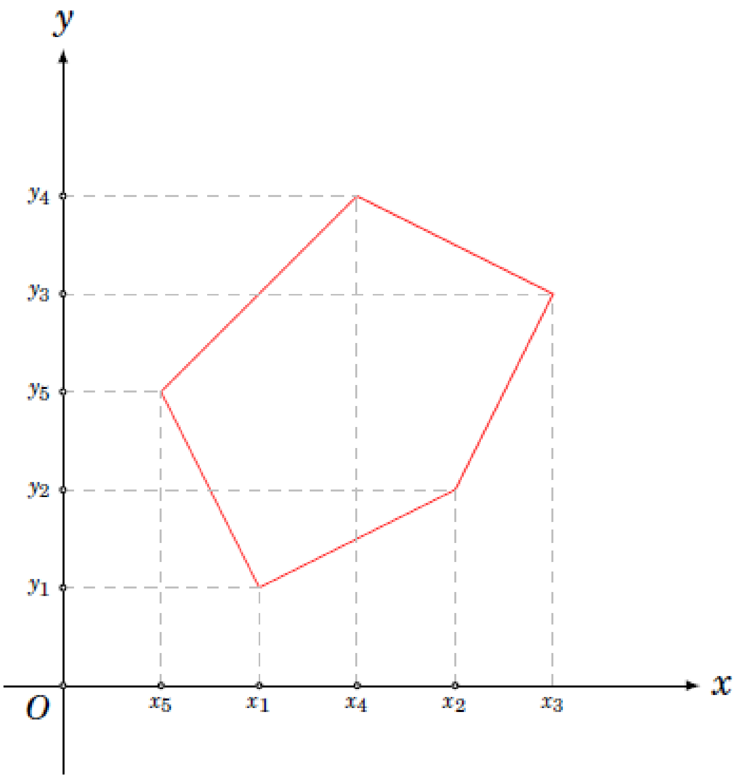
Small, C.G. 2007. *Functional Equations and How to Solve Them.* New York: Springer.

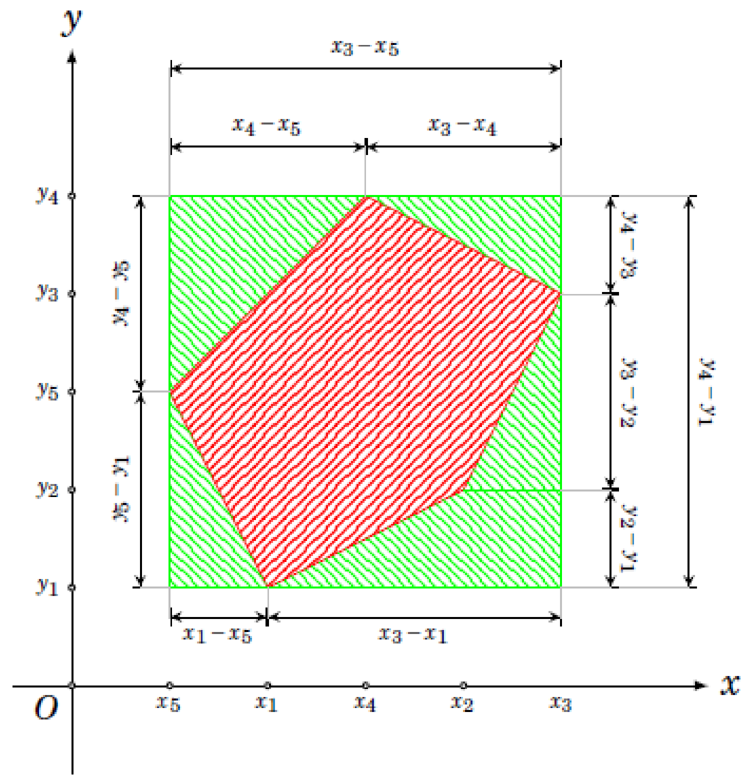
Zeitz, P. 2007. *The Art and Craft of Problem Solving Second Edition*. New York: John Wiley & Sons, Inc.

---

*) Muhammad Taqiyuddin

MTs Darul Ulum, Jl. Kromodiwiryo Ds. Purwogondo Kec. Kalinyamatan, Kab. Jepara, Jawa Tengah





Luas Daerah Segi *n* Dalam Bentuk Determinan

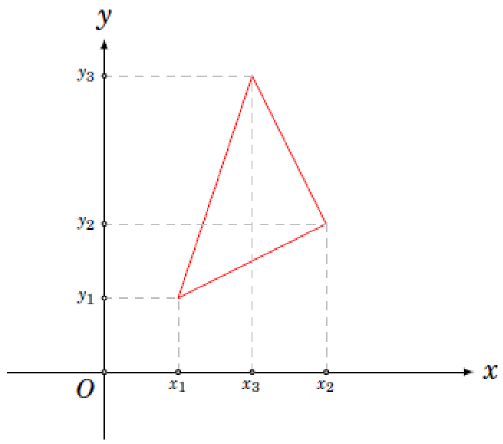
*) Nikodemus Leto Bele

Daerah segitiga yang diketahui panjang ketiga sisinya dapat dihitung dengan rumus Heron. Sedangkan untuk segiempat dapat dihitung dengan rumus Brahmagupta. Perhitungan yang agak rumit akan dihadapi untuk menghitung luas daerah yang diketahui koordinat titik-titik sudutnya, kalau menggunakan rumus Heron. Dalam tulisan ini akan diuraikan luas daerah segitiga, segiempat, dan segilima jika diketahui koordinat titik-titik sudutnya, dengan memanfaatkan luas daerah segitiga, persegipanjang, dan trapesium. Pada akhirnya dapat disimpulkan secara induktif luas daerah segi n yang diketahui koordinat titik-titik sudutnya. Luas daerah-daerah tersebut dinyatakan dalam bentuk *determinan*.

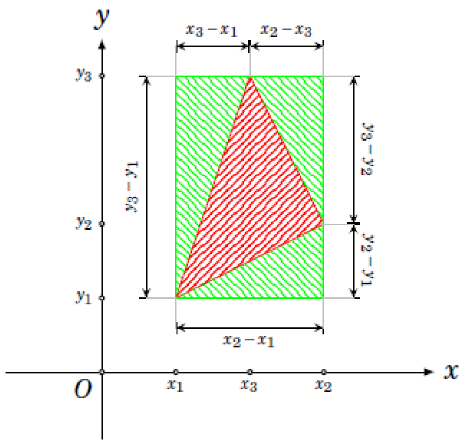
Kata kunci : luas daerah, koordinat, determinan.

1. Luas Daerah Segitiga

Misalkan terdapat segitiga dengan koordinat titik-titik sudutnya (x_1, y_1), (x_2, y_2), dan (x_3, y_3) seperti tampak pada Gambar 1.



Gambar 1. Segitiga



Gambar 2. Daerah Segitiga

Luas daerah segitiga dimaksud (merah) pada Gambar 2 sama dengan luas daerah persegipanjang dikurangi dengan luas daerah semua segitiga hijau.

Luas daerah persegipanjang adalah:

$$\begin{aligned} L_{pp} &= (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) \\ &= x_2y_3 - x_2y_1 - x_1y_3 + x_1y_1 \end{aligned}$$

Jumlah luas daerah segitiga adalah:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{3} L\triangle_i &= \frac{1}{2} \times \left((x_2 - x_1)(y_2 - y_1) + (x_2 - x_3)(y_3 - y_2) + (x_3 - x_1)(y_3 - y_1)\right) \\ &= \frac{1}{2} \times \left(x_2y_2 - x_2y_1 - x_1y_2 + x_1y_1 + x_2y_3 - x_2y_2 - x_3y_3 + x_3y_2 + x_3y_3 - x_3y_1 - x_1y_3 + x_1y_1\right) \\ &= x_1y_1 + \frac{1}{2} \times (x_2y_3 + x_3y_2 - x_2y_1 - x_1y_2 - x_3y_1 - x_1y_3) \end{aligned}$$

Luas daerah segitiga dimaksud adalah :

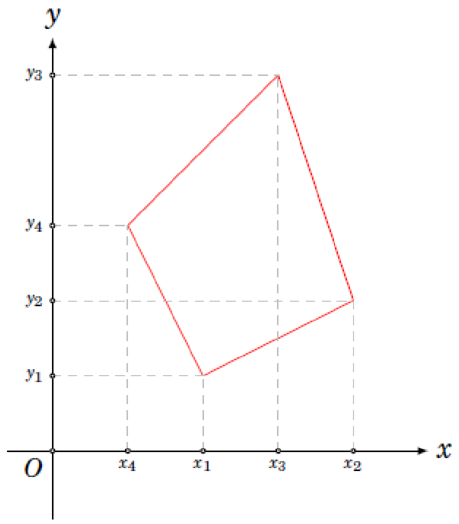
$$\begin{aligned} L_{segi-3} &= L_{pp} - \sum_{i=1}^{3} L\triangle_i \\ &= x_2y_3 - x_2y_1 - x_1y_3 + x_1y_1 - \left(x_1y_1 + \frac{1}{2} \times (x_2y_3 + x_3y_2 - x_2y_1 - x_1y_2 - x_3y_1 - x_1y_3)\right) \\ &= \frac{1}{2} \times \left((x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + (x_3y_1 - x_1y_3)\right) \end{aligned}$$

Dalam bentuk determinan ditulis sebagai berikut.

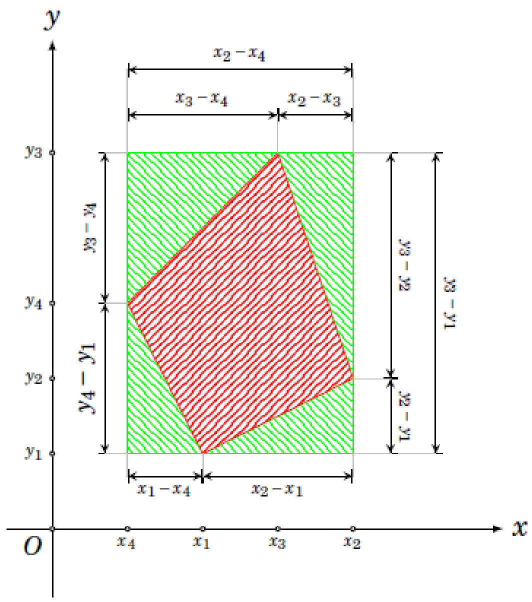
$$L_{segi-3} = \frac{1}{2} \times \left| \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \right|$$

2. Luas Daerah Segiempat

Misalkan terdapat segiempat dengan koordinat titik-titik sudutnya (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) dan (x_4, y_4) seperti tampak pada Gambar 3.



Gambar 3. Segiempat



Gambar 4. Daerah Segiempat

Luas daerah segiempat dimaksud (merah) pada Gambar 4 adalah luas daerah persegipanjang dikurangi jumlah luas daerah semua segitiga hijau.

Luas daerah persegipanjang adalah:

$$\begin{aligned} L_{pp} &= (x_2 - x_4)(y_3 - y_1) \\ &= -x_2 y_1 + x_2 y_3 + x_4 y_1 - x_4 y_3 \end{aligned}$$

Jumlah luas daerah segitiga adalah:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{4} L\Delta_i &= \frac{1}{2} \times \Big((x_2 - x_1)(y_2 - y_1) + (x_2 - x_3)(y_3 - y_2) + (x_3 - x_4)(y_3 - y_4) + (x_1 - x_4)(y_4 - y_1) \Big) \\ &= \frac{1}{2} \times \Big(-x_1 y_2 + x_1 y_4 - x_2 y_1 + x_2 y_3 + x_3 y_2 - x_3 y_4 + x_4 y_1 - x_4 y_3 \Big) \end{aligned}$$

Luas daerah segiempat adalah:

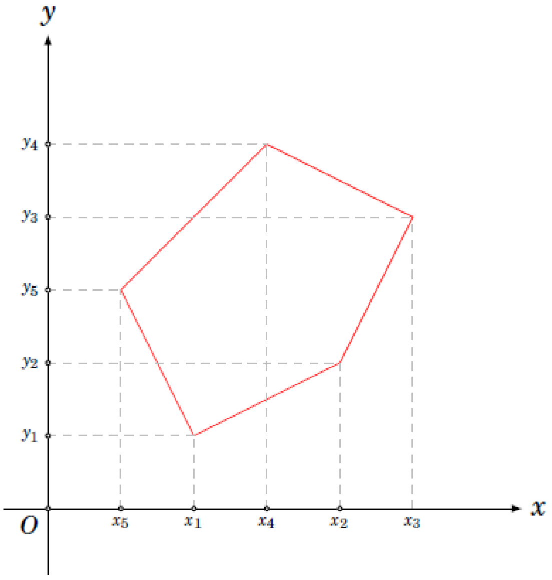
$$L_{segi-4} = L_{pp} - \sum_{i=1}^{4} L\triangle_i$$
$$= -x_2y_1 + x_2y_3 + x_4y_1 - x_4y_3 - \frac{1}{2} \times \left(-x_1y_2 + x_1y_4 - x_2y_1 + x_2y_3 + x_3y_2 - x_3y_4 + x_4y_1 - x_4y_3\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left((x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + (x_3y_4 - x_4y_3) + (x_4y_1 - x_1y_4)\right)$$

Dalam bentuk determinan ditulis:

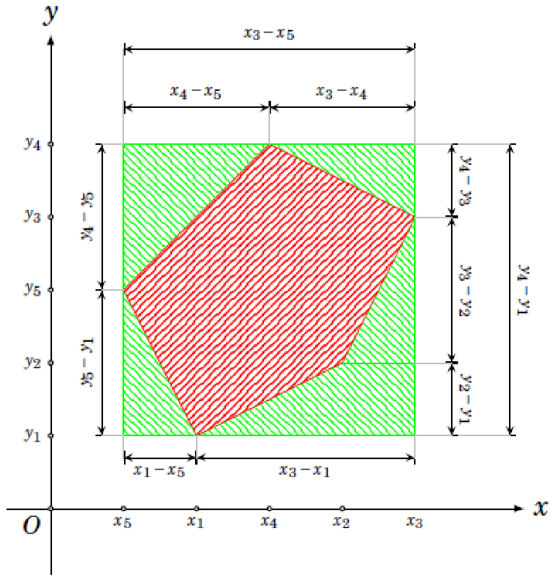
$$L_{segi-4} = \frac{1}{2} \times \left| \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_4 & y_4 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \right|$$

3. Luas Daerah Segilima

Misalkan terdapat segilima dengan koordinat titik-titik sudutnya (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4), dan (x_5, y_5) seperti tampak pada gambar 5.



Gambar 5. Segilima



Gambar 6. Daerah Segilima

Luas daerah segilima adalah luas daerah persegipanjang dikurangi luas daerah hijau.
Luas daerah persegipanjang adalah:

$$L_{pp} = (x_3 - x_5)(y_4 - y_1)$$
$$= x_3y_4 - x_3y_1 - x_5y_4 + x_5y_1$$

Luas daerah hijau adalah:

$$L_h = \frac{1}{2} \times \Big((x_3 - x_1 + x_3 - x_2)(y_2 - y_1) + (x_3 - x_2)(y_3 - y_2) + (x_3 - x_4)(y_4 - y_3) + (x_4 - x_5)(y_4 - y_5)$$
$$+ (x_1 - x_5)(y_5 - y_1)\Big)$$
$$= \frac{1}{2} \times \Big(-x_1y_2 + x_1y_5 + x_2y_1 - x_2y_3 - 2x_3y_1 + x_3y_2 + x_3y_4 + x_4y_3 - x_4y_5 + x_5y_1 - x_5y_4\Big)$$
$$= \frac{1}{2} \times \Big(-x_1y_2 + x_1y_5 + x_2y_1 - x_2y_3 + x_3y_2 + x_3y_4 + x_4y_3 - x_4y_5 + x_5y_1 - x_5y_4\Big) - x_3y_1$$

Luas daerah segilima adalah:

$$L_{segi-5} = L_{pp} - L_h$$
$$= x_3y_4 - x_3y_1 - x_5y_4 + x_5y_1 - \frac{1}{2} \times \Big(-x_1y_2 + x_1y_5 + x_2y_1 - x_2y_3 + x_3y_2 + x_3y_4 + x_4y_3$$
$$- x_4y_5 + x_5y_1 - x_5y_4\Big) + x_3y_1$$
$$= \frac{1}{2}\Big((x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + (x_3y_4 - x_4y_3) + (x_4y_5 - x_5y_4) + (x_5y_1 - x_1y_5)\Big)$$

Dalam bentuk determinan ditulis:

$$L_{segi-5} = \frac{1}{2} \times \left| \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_4 & y_4 \\ x_5 & y_5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_5 & y_5 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \right|$$

4. Kesimpulan

Dari pola untuk L_{segi-3}, L_{segi-4}, dan L_{segi-5} disimpulkan bahwa luas daerah segi *n* yang diketahui koordinat titik-titik sudutnya dirumuskan dengan:

$$L_{segi-n} = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \right|$$

5. Keterbatasan

Luas daerah segi *n* di atas dapat digunakan jika memenuhi ketentuan-ketentuan sebagai berikut: (1) segibanyak konveks dan (2) urutan koordinatnya melingkar.

Daftar Pustaka

Kusuma, Ervina Yudha. 2003. *Seri Matematika Keterampilan Geometri. Bandung*: Pakar Raya

Kuntarti, dkk. *Matematika SMA dan MA Untuk Kelas XII Semester 1*. Jakarta: Esis

---

*) Nikodemus Leto Bele, S.Pd.
SMAN 1 Tasifeto Barat, Belu, Nusa Tenggara Timur

FORMULASI PAKAN TERNAK DENGAN PROGRAM LINEAR

*) Sumadi

A. PENDAHULUAN

Tiga kunci pokok keberhasilan usaha peternakan adalah pembibitan (*breeding*), tatalaksana (*management*) dan pemberian pakan (*feeding*). Sebagai salah satu kunci pokok, ransum memegang peranan yang sangat penting dalam menunjang keberhasilan usaha peternakan. Menurut Siregar (1996) biaya ransum mencapai 60 – 80 % dari total biaya produksi, sehingga bila biaya ransum bisa ditekan seminimal mungkin, maka keuntungan usaha peternakan akan lebih meningkat.

Selain harus murah, ransum harus berkualitas dan dapat memenuhi semua kebutuhan zat-zat nutrisi yang dibutuhkan ternak untuk hidup pokok, pertumbuhan dan berproduksi. Untuk itu perlu dibuat formulasi ransum dengan biaya semurah mungkin, tetapi kebutuhan minimal ternak akan zat-zat nutrisi terpenuhi. Salah satu metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah tersebut adalah dengan *Program Linier*, yaitu suatu cabang dalam ilmu matematika yang dapat mengalokasikan sumber daya yang terbatas untuk mencapai suatu tujuan yang optimal, misalnya memaksimalkan keuntungan atau meminimumkan biaya produksi.

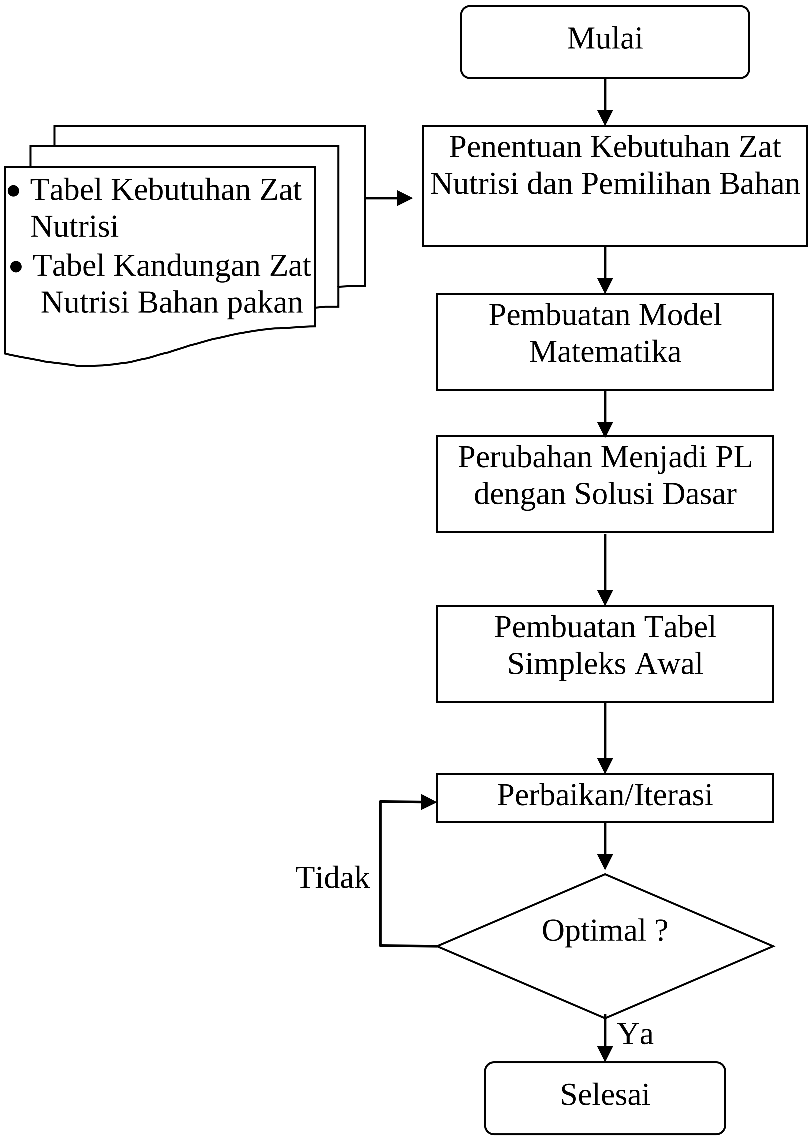
Banyak masalah yang berkaitan dengan alokasi sumber daya yang terbatas, misalnya uang, tenaga kerja, bahan baku, gudang tempat penyimpanan barang dan waktu kerja mesin/tenaga kerja. Dengan program linier dapat diupayakan suatu penyelesaian yang optimal, sehingga diperoleh keuntungan yang maksimal dengan biaya yang semurah mungkin.

Akhir-akhir ini program linier banyak digunakan oleh peneliti, praktisi bisnis maupun lembaga-lembaga pemerintah untuk menyusun suatu program kegiatan. Dalam bidang industri peternakan, program linear diguankan sebagai salah satu metode untuk menyusun formula bahan baku pakan sehingga diperoleh campuran ransum yang memenuhi kebutuhan zat-zat nutrisi bagi ternak dengan harga yang relatif lebih murah.

Pada makalah ini disajikan sebuah contoh formulasi pakan ternak untuk ayam fase petelur sebanyak 100% (1 kilogram) yang mengandung sekurang-kuranganya 2900 Kkal/kg energi metabolisme, 17% protein kasar, 1,9 % kalsium dan 1,5 % posfor.

B. FORMULASI PAKAN TERNAK DENGAN PROGRAM LINEAR

Metode yang paling cocok untuk memecahkan masalah penyusunan formula pakan dengan program linear adalah Metode M Charnes, karena fungsi pembatas pada masalah ini tidak selalu bertanda "≥", tetapi ada pula yang bertanda "≤" atau "=". Langkah pemecahan masalah formulasi pakan ternak dengan program linear seperti disajikan pada Gambar 1 berikut ini.



Gambar 1. Diagram Alur Formula Ransum dengan Program Linear

1. Pembuatan Model Matematika Dari Permasalahan Formulasi Pakan Ternak

Dengan memisalkan bahan baku sebagiai X_1, X_2, X_3, … X_n, harga bahan baku sebagai C_1, C_2, C_3, … , C_n, kandungan zar nutrisi bahan baku sebagai aij dan kebutuhan zat-zat nutrisi sebagai b_1, b_2, b_3, …, b_m, maka model matematika dari masalah formulasi pakan ternak dapat dirumuskan sebagai berikut:

Minimumkan $Z = C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3 + \ldots + C_nX_n$
Dibawah kendala: $a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + \ldots + a_{1n}X_n \ \geq, \leq$ atau $= b_1$
$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 + \ldots + a_{2n}X_n \ \geq, \leq$ atau $= b_2$
$a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 + \ldots + a_{3n}X_n \ \geq, \leq$ atau $= b_3$
……. ……
$a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + a_{m3}X_3 + \ldots + a_{mn}X_n \ \geq, \leq$ atau $= b_m$
X_1, X_2, X_3, … X_n, nonegatif

2. Perubahan Model Matematika Menjadi Bentuk Standar Program Linear

Formulasi pakan ternak merupakan masalah program linear yang unik. Kenunikannya yaitu bahwa tidak semua konstrain (dalam hal ini zat nutrisi) berbatasan minimal, tetapi ada pula yang berbatasan maksimal. Selain itu untuk alasan kepraktisan, formula pakan biasanya juga disusun dalam jumlah yang ditentukan, misalnya 100%, 1 kilogram atau 1000 kilogram (sesuai kapasitas mesin pencampur).

Menurut Soemartojo dan Tapilouw (1996), ketentuan perubahan bentuk model matematika ke model standar program linear dengan Metode M Charnes adalah :

2.1. Fungsi tujuan $Z = C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3 + \ldots + C_nX_n$ diubah menjadi $Z' = C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3 + \ldots + C_nX_n + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 + \ldots + 0S_n + MA_1 + MA_2 + MA_3 + \ldots + MA_n$

2.2. Bila fungsi pematasnya betanda "≤", maka ruas kiri ditambah dengan variabel penambah (*Slack Variabel*) nonegatif yang dilambangkan dengan S, sehingga fungsi pembatas berubah menjadi:
$a_{i1}X_1 + a_{i2}X_2 + a_{i3}X_3 + \ldots + a_{in}X_n + S_i = b_i$ dengan i = 1,2,3, ... m

2.3. Bila fungsi pembatasnya bertanda "≥"maka ruas kiri dikurangi dengan variabel pengurang (*Surplus Variabel*) nonegatif yang dilambangkan dengan S dan ditambah variabel buatan yang dilambangkan dengan A, sehingga fungsi pembatas berubah menjadi:
$a_{i1}X_1 + a_{i2}X_2 + a_{i3}X_3 + \ldots + a_{in}X_n - S_i + A_i = bi$ dengan i = 1,2,3, ... m

2.4. Bila fungsi pembatasnya bertanda "= "maka ruas kiri ditambah variabel buatan yang dilambangkan dengan A, sehingga fungsi pembatas berubah menjadi:
$a_{i1}X_1 + a_{i2}X_2 + a_{i3}X_3 + \ldots + a_{in}X_n + A_i = bi$ dengan i = 1,2,3, ... m

Variabel penambah dan variabel pengurang diberi nilai 1, sedangkan variabel buatan diberi nilai M. M adalah bilangan yang bernilai sangat besar. Menurt Soemartojo dan Tapilouw (1996) nilai M bisa mencapai 10^6, sedangkan menurut Taha (1996) nilai M secara teoritis bisa cenderung mendekati tak hingga.

Besar kecilnya nilai M tergantung pada besarnya nilai fungsi tujuan. yang spesifik antara 10^1 sampai 10^6,. Pemberian nilai M yang terlalu besar dapat menyebabkan pemecahan yang dihasilkan tidak tepat akibat pembulatan dalam perhitungan (Taha, 1996). Selanjutnya pada makalah ini digunakan nilai M sebesar 10^2.

3. Pembuatan Tabel Simplek Awal

Secara teoretis akan terdapat sekurangnya satu variabel pengurang (S) yang bisa dijadikan basis. Akan tetapi jika tidak ada variabel pengurang (S) yang bisa dijadikan basis, maka yang mula-mula dijadikan basis adalah variabel buatan (A). Selanjutnya variabel A dipaksa menjadi nol melalui perbaikan-perbaikan.

Variabel Basis	Z	X_1	X_2	X_3	…	X_n	S_1	S_2	…	S_n	Solusi	Rasio
S_1	0	a_{11}	a_{12}	a_{13}	…	a_{1n}	1	0	…	0	b_1	
S_2	0	a_{21}	a_{22}	a_{23}	…	a_{2n}	0	1	…	0	b_2	
:	:	:	:	:	…	:	:	:	…	:	:	
S_n	0	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	…	a_{mn}	0	0	…	1	b_n	
Z	0	$-C_1$	$-C_2$	$-C_3$	…	$-C_n$	0	0	…	0		

4. Perbaikan-Perbaikan

Setelah terbentuk tabel simpleks awal, perbaikan-perbaikan dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut:

4.1.Memilih kolom kunci (*Pivot*), yaitu kolom yang akan dijadikan dasar perubahan table. Kolom *pivot* dipilih dari baris fungsi tujuan (Zj-Cj) yang bernilai positif paling besar.

4.2.Memilih baris *pivot*, yaitu baris yang akan dijadikan dasar awal merubah tabel. Baris pivot ditentukan berdasarkan pada kolom rasio yang bernilai positif terkecil. Rasio adalah hasil bagi nilai kolom solusi dengan nilai kolom *pivot*. Bila terjadi ada lebih dari satu nilai rasio positif terkecil yang sama, dipilih salah satu secara acak.

4.3.Menentukan elemen *pivot*, yaitu elemen yang berada pada kolom *pivot* dan baris *pivot*. Untuk lebih jelasnya, elemen *pivot* bisa diberi tanda tertentu.

4.4.Mengubah nilai baris *pivot*. Nilai baris *pivot* diubah dengan cara membaginya dengan elemen *pivot*, sehingga nilai elemen *pivot* berubah menjadi 1 (satu).

4.5.Mengubah nilai baris yang lain. Nilai baris yang lain diubah dengan melakukan operasi baris elementer, sehingga nilai elemen-elemen lain selain elemen *pivot* pada kolom *pivot* berubah menjadi 0 (nol). Rumus operasi baris elementer yaitu:

Nilai baris baru = nilai baris lama – (nilai kolom pivot*nilai baris pivot)

4.6.Menghitung nilai baris Zj – Cj

4.7.Menentukan variable masuk (*Entering Variable*), yaitu variabel pada kolom kunci yang dimasukkan ke dalam variabel basis menggantikan variabel pada baris *pivot*.

4.8.Perbaikan selanjutnya dilakukan melalui langkah 4.1. sampai 4.6. hingga diperoleh solusi optimal

5. **Penentuan Solusi Optimal**.

Solusi optimal ditentukan dengan ketentuan:

5.1.Semua elemen baris Zj-Cj telah bernilai non positif, kecuali pada kasus tertentu. Solusi optimal setiap variabel X_1, X_2, X_3 … X_n adalah nilai solusi pada baris yang bersesuaian.

5.2.Nilai optimum fungsi tujuan adalah nilai baris Zj-Cj pada kolom solusi.

C. CONTOH PENYUSUNAN FORMULA PAKAN TERNAK DENGAN PROGRAM LINEAR

Direncanakan akan dibuat formula pakan untuk ayam petelur fase produksi sebanyak 100% untuk mengetahui harga per kilogram pakan jadi. Zat-zat nutrisi yang diprioritaskan adalah :

Zat Nutrisi	Batasan	Kebutuhan	Satuan
Energi Metabolisme (EM)	≥	2900	Kkal/kg
Protein Kasar (PK)	≥	17	%
Kalsium (Ca)	≥	1,9	%
Posphor (P)	≥	1,5	%

Sumber : NRC (1984)

Bahan-bahan yang tersedia :

Nama Bahan	EM	PK	Ca	P
Jagung kuning	3321	8,9	0,02	0,23
Dedak Padi	1630*)	11,9	0,1	1,3
Bungkil Kelapa	1141	18,6	0,18	0,56
Bungkil Kedelai	2400*)	41,3	0,24	0,57
Tepung Ikan	3080*)	52,6	5,68	3,73

Sumber : Hartadi dkk (1986) dan *) Rasyaf (1994)

Permasalahannya adalah: berapa persen masing-masing bahan harus dialokasikan untuk mendapatkan formula pakan dengan harga termurah, bila diketahui harga masing-masing bahan baku berturut-turut adalah Rp 1.500, Rp 700, Rp 1.000, Rp 1.050 dan Rp 2.000.

Pemecahan:

1. Penyusunan Model Matematika

Minimumkan: $Z = 1500X_1 + 700X_2 + 1000X_3 + 1050X_4 + 2000X_5$

Dengan batasan : $3321X_1 + 1630X_2 + 1141X_3 + 2400X_4 + 3080X_5 \geq 2900$

$8.9X_1 + 11.9X_2 + 18.6X_3 + 41.3X_4 + 52.6X_5 \geq 17$

$0.02X_1 + 0.1X_2 + 0.8X_3 + 0.24X_4 + 5.68X_5 \geq 1.9$

$0.23X_1 + 1.3X_2 + 0.56X_3 + 0.57X_4 + 3.73X_5 \geq 1.5$

$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 = 1$

X_1, X_2, X_3, X_4 dan $X_5 \geq 0$ (nonegatif)

2. Perubahan Model Matematika Menjadi Bentuk Program Linear Standar

   Fungsi tujuan:

   $Z = 1500X_1 + 700X_2 + 1000X_3 + 1050X_4 + 2000X_5 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 + 0S_4 + 0S_5 + MA_1 + MA_2 + MA_3 + MA_4 + MA_5$

   Fungsi pembatas:

   $3321X_1 + 1630X_2 + 1141X_3 + 2400X_4 + 3080X_5 – S_1 + A_2 = 2900$

   $8.9X_1 + 11.9X_2 + 18.6X_3 + 41.3X_4 + 52.6X_5 - S_2 + A_2 = 17$

   $0.02X_1 + 0.1X_2 + 0.8X_3 + 0.24X_4 + 5.68X_5 – S_3 + A_3 \geq 1.9$

   $0.23X_1 + 1.3X_2 + 0.56X_3 + 0.57X_4 + 3.73X_5 – S_4 + A_4 = 1.5$

   $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 = 1$

3. Tabel Simpleks Awal dan Perbaikan-perbaikannya

   Untuk mendapatkan hasil yang lebih akurat, perhitungan dilakukan dengan bantuan MS Excels sebagai berikut.

Hitungan_pakan_ternak [Compatibility Mode] - Excel

FILE HOME INSERT PAGE LAYOUT FORMULAS DATA REVIEW VIEW ADD-INS

Tabel Simpleks Awal

C	Cj	1500.00	700.00	1000.00	1050.00	2000.00	0.00	0.00	0.00	0.00	100.00	100.00	100.00	100.00	0.00	
	Basis	X1	X2	X3	X4	X5	S1	S2	S3	S4	A1	A2	A3	A4	Solusi	Rasio
100.00	A1	3321.00	1630.00	1600.00	2400.00	3080.00	-1.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	2900.00	0.87
100.00	A2	8.90	11.90	18.60	41.30	52.60	0.00	-1.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	17.00	1.91
100.00	A3	0.02	0.10	0.18	0.24	5.68	0.00	0.00	-1.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	1.90	95.00
100.00	A4	0.23	1.30	0.56	0.57	3.73	0.00	0.00	0.00	-1.00	0.00	0.00	0.00	1.00	1.50	6.52
100.00	A5	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	1.00
	Zj - Cj	331615.00	163730.00	161034.00	243261.00	312301.00	-100.00	-100.00	-100.00	-100.00	0.00	0.00	0.00	0.00	292140.00	

Ket : 1. Kolom C diisi dengan koefisien variabel basis

2.Kolom basis diisi dengan variabel basis

3. Kolom Zj-Cj = (C*aij) - Cj

= kolom pivot

= baris pivot

= elemen pivot

Perbaikan Pertama

C	Cj	1500.00	700.00	1000.00	1050.00	2000.00	0.00	0.00	0.00	0.00	100.00	100.00	100.00	100.00	0.00	
	Basis	X1	X2	X3	X4	X5	S1	S2	S3	S4	A1	A2	A3	A4	Solusi	Rasio
1500.00	X1	1.00	0.49	0.48	0.72	0.93	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.87	0.94
100.00	A2	0.00	7.53	14.31	34.87	44.35	0.00	-1.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	9.23	0.21
100.00	A3	0.00	0.09	0.17	0.23	5.66	0.00	0.00	-1.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	1.88	0.33
100.00	A4	0.00	1.19	0.45	0.40	3.52	0.00	0.00	0.00	-1.00	0.00	0.00	0.00	1.00	1.30	0.37
100.00	A5	0.00	0.51	0.52	0.28	0.07	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.13	1.75
	Zj - Cj	0.00	968.05	1267.66	3611.50	4750.80	-0.15	-100.00	-100.00	-100.00	-99.85	0.00	0.00	0.00	2563.52	

Perbaikan Kedua

C	Cj	1500.00	700.00	1000.00	1050.00	2000.00	0.00	0.00	0.00	0.00	100.00	100.00	100.00	100.00	0.00	
	Basis	X1	X2	X3	X4	X5	S1	S2	S3	S4	A1	A2	A3	A4	Solusi	Rasio
1500.00	X1	1.00	0.33	0.18	-0.01	0.00	0.00	0.02	0.00	0.00	0.00	-0.02	0.00	0.00	0.68	2.04
2000.00	X5	0.00	0.17	0.32	0.79	1.00	0.00	-0.02	0.00	0.00	0.00	0.02	0.00	0.00	0.21	1.23
100.00	A3	0.00	-0.87	-1.66	-4.23	0.00	0.00	0.13	-1.00	0.00	0.00	-0.13	1.00	0.00	0.70	-0.81
100.00	A4	0.00	0.59	-0.69	-2.36	0.00	0.00	0.08	0.00	-1.00	0.00	-0.08	0.00	1.00	0.57	0.96
100.00	A5	0.00	0.50	0.49	0.22	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.11	0.22
	Zj - Cj	0.00	161.17	-265.60	-123.96	0.00	-0.43	7.13	-100.00	-100.00	-99.57	-107.13	0.00	0.00	1574.89	

Hitungan_pakan_ternak [Compatibility Mode] - Excel

Perbaikan ketiga

C	Cj	1500.00	700.00	1000.00	1050.00	2000.00	0.00	0.00	0.00	0.00	100.00	100.00	100.00	100.00	0.00	
	Basis	X1	X2	X3	X4	X5	S1	S2	S3	S4	A1	A2	A3	A4	Solusi	Rasio
1500.00	X1	1.00	0.00	-0.15	-0.15	0.00	0.00	0.02	0.00	0.00	0.00	-0.02	0.00	0.00	0.61	30.55
2000.00	X5	0.00	0.00	0.15	0.71	1.00	0.00	-0.02	0.00	0.00	0.00	0.02	0.00	0.00	0.17	-7.35
100.00	A3	0.00	0.00	-0.79	-3.84	0.00	0.00	0.13	-1.00	0.00	0.00	-0.13	1.00	0.00	0.90	6.90
100.00	A4	0.00	0.00	-1.27	-2.62	0.00	0.00	0.08	0.00	-1.00	0.00	-0.08	0.00	1.00	0.43	5.62
700.00	X2	0.00	1.00	1.00	0.44	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.22	68.24
	Zj - Cj	0.00	0.00	-426.10	-195.41	0.00	-0.53	6.60	-100.00	-100.00	-99.47	-106.60	0.00	0.00	1538.67	

Perbaikan keempat

C	Cj	1500.00	700.00	1000.00	1050.00	2000.00	0.00	0.00	0.00	0.00	100.00	100.00	100.00	100.00	0.00	
	Basis	X1	X2	X3	X4	X5	S1	S2	S3	S4	A1	A2	A3	A4	Solusi	Rasio
1500.00	X1	1.00	0.00	0.18	0.52	0.00	0.00	0.00	0.00	0.26	0.00	0.00	0.00	-0.26	0.49	0.95
2000.00	X5	0.00	0.00	-0.23	-0.07	1.00	0.00	0.00	0.00	-0.30	0.00	0.00	0.00	0.30	0.30	-4.13
100.00	A3	0.00	0.00	1.36	0.59	0.00	0.00	0.00	-1.00	1.69	0.00	0.00	1.00	-1.69	0.17	0.28
0.00	S2	0.00	0.00	-16.46	-33.90	0.00	-0.01	1.00	0.00	-12.93	0.01	-1.00	0.00	12.93	5.62	-0.17
700.00	X2	0.00	1.00	1.05	0.55	0.00	0.00	0.00	0.00	0.04	0.00	0.00	0.00	-0.04	0.21	0.37
	Zj - Cj	0.00	0.00	-317.48	28.36	0.00	-0.49	0.00	-100.00	-14.68	-99.51	-100.00	0.00	-85.32	1501.57	

Perbaikan kelima (Optimal)

C	Cj	1500.00	700.00	1000.00	1050.00	2000.00	0.00	0.00	0.00	0.00	100.00	100.00	100.00	100.00	0.00	
	Basis	X1	X2	X3	X4	X5	S1	S2	S3	S4	A1	A2	A3	A4	Solusi	Rasio
1500.00	X1	1.00	0.00	-1.02	0.00	0.00	0.00	0.00	0.88	-1.23	0.00	0.00	-0.88	1.23	0.35	
2000.00	X5	0.00	0.00	-0.06	0.00	1.00	0.00	0.00	-0.12	-0.09	0.00	0.00	0.12	0.09	0.32	
1050.00	X4	0.00	0.00	2.32	1.00	0.00	0.00	0.00	-1.71	2.88	0.00	0.00	1.71	-2.88	0.28	
0.00	S2	0.00	0.00	62.18	0.00	0.00	0.05	1.00	-57.85	84.69	-0.05	-1.00	57.85	-84.69	15.26	
700.00	X2	0.00	1.00	-0.24	0.00	0.00	0.00	0.00	0.95	-1.56	0.00	0.00	-0.95	1.56	0.05	
	Zj - Cj	0.00	0.00	-383.25	0.00	0.00	-0.54	0.00	-51.61	-96.33	-99.46	-100.00	-48.39	-3.67	1493.51	

Pemeriksaan Ulang

Variabel	Nama Bahan	Prosentase	Zat Nutrisi								Harga	
			EM		PK		Ca		P			
			Bahan	Formula	Bahan	Formula	Bahan	Formula	Bahan	Formula	Bahan	Formula
X1	Jagung Kuning	34.68	3321.00	1151.89	8.90	3.09	0.02	0.01	0.23	0.08	1500.00	520.27
X5	Tepung Ikan	32.04	3080.00	986.90	52.60	16.85	5.68	1.83	3.73	1.20	2000.00	640.84
X4	Bungkil Kedelai	28.42	2400.00	682.18	41.30	11.74	0.18	0.05	0.56	0.16	1050.00	298.45
X2	Dedak	4.85	1630.00	79.03	11.90	0.58	0.10	0.01	1.30	0.06	700.00	33.94
Jumlah		100.00		2900.00		32.26		1.90		1.50		1493.51
Standar Kebutuhan			≥ 2900		≥ 17,00		≥ 1,90		≥ 1,50			

Gambar 2. Perhitungan Formulasi Ternak dengan Program Linear

4. Solusi Optimal

   Dari hasil perhitungan di atas terlihat bahwa solusi optimal dicapai bila digunakan jagung kuning (X_1) **34,6849** %, dedak halus (X_2) **04,8487** %, bungkil kedelai (X_4) **28,4242** % dan tepung ikan (X_5) **32,0422** % dengan harga pakan jadi Rp 1.493,51 per kilogram.

D. KESIMPULAN

Bersasarkan uraian di atas dapat ditarik kesimpulan sebagai berikut:

1. Metode yang paling cocok untuk memecahkan masalah penyusunan formula pakan dengan program linear adalah Metode M Charnes, karena fungsi pembatas pada masalah ini tidak selalu bertanda "≥", tetapi ada pula yang bertanda "≤" atau "=".
2. Besar bilangan M yang digunakan adalah 10^2
3. Formulasi pakan ternak dengan program linear memiliki kelebihan:
   - Dapat digunakan untuk menyusun formula pakan dengan banyak bahan baku dengan memprioritaskan banyak zat nutrisi sekaligus

- Dapat ditentukan dengan tepat kandungan zat nutrisi formula pakan ternak sesuai standar kebutuhannya
- Formula pakan ternak yang tersusun merupakan formula yang paling murah.

E. DAFTAR PUSTAKA

National Research Council. 1984. *Nutrient Requirement Of Poultry*. Washington DC: National Academy Press.

Rasyam, . 1986 *Beternak Ayam Petelur*. Jakarta: Penebar Swadaya.

Siregar, SB. 1996. Ransum Ternak Ruminansia. Jakarta: Peneber Swadaya.

Soemartojo, N dan Tapiloum, M. 1991. *Materi Pokok Program Linear*. Jakarta: Universitas Terbuka.

Taha, Hamdy A. 1996 *Riset Operasi, Suatu Pengantar*. Jilid 1. Jakarta : Binarupa Aksara.

---

*) Drs. Sumadi, M. Si.
Widyaiswara PPPPTK Matematika Yogyakarta

Gamabr: httpswww.systemgroup.netknowledge-network

Model Antrian Pendaratan Pesawat Terbang

*) Sigit Tri Guntoro

A. Pendahuluan.

Perkembangan dunia penerbangan belakangan ini menunjukkan peningkatan yang sangat signifikan. Utamanya pada penerbangan komersial. Banyak daerah terpencil yang dulunya tidak ada jadwal penerbangan sekarang sudah ada dan bahkan dilayani oleh maskapai yang besar. Sebagai contoh Garuda Indonesia telah melayani penerbangan sampai ke Sabang Aceh, sementara Lion Air melayani penerbangan sampai ke Melangguane Sulawesi Utara. Masih banyak lagi *destinasi* yang dituju maskapai penerbangan nasional untuk melayani sampai ke pelosok daerah. Peningkatan yang signifikan ini terjadi tidak hanya di dalam negeri namun terjadi juga di luar negeri. Tidak mengherankan jika sekarang banyak maskapai asing yang melayani penerbangan tidak hanya internasional tetapi juga melayani penerbangan domestik. Sebagai gambaran, peningkatan volume penumpang tahun 2017 di beberapa bandara disajikan dalam tabel berikut.

No	Nama Bandara	Kota	Negara	Jumlah Penumpang satu tahun	Kenaikan
1.	Hartsfield–Jackson Atlanta International Airport	Atlanta, Georgia	United States	103,902,992	-0.3%
2.	Beijing Capital International Airport	Beijing	China	95,786,442	1.5%
3.	Tokyo Haneda Airport	Ōta, Tokyo	Japan	85,408,975	6.5%
4.	....	....	....	....	....
17.	Soekarno-Hatta International Airport	Tangerang, Banten	Indonesia	63,015,620	8.3%
18.	Singapore Changi Airport	Changi	Singapore	62,219,573	6.0%

Sumber: www.businessinsider.sg diakses 12-11-2018

Indonesia, yang diwakili Bandara Internasional Soekarno-Hatta menempati peringkat ke-17 dengan kenaikan 8,3% serta jumlah penumpang 63.015.620. Dengan penumpang sebanyak ini diperlukan banyak pesawat dan diperkirakan terdapat 1.200 pergerakan pesawat setiap hari. Dapat dibayangkan betapa rumitnya pengaturan *take-off* maupun *landing*. Pertanyaan yang muncul adalah, bagaimana cara mengaturnya?
Berikut ini akan dibahas terkait model matematika pengaturan antrian saat akan *landing* pada suatu bandara.

Kepadatan pesawat di langit Indonesia tanggal 12 November 2018 Pukul 13.30 WIB (sumber: *www.flightradar24.com*)

B. Tentang Penerbangan

Dalam dunia penerbangan dikenal dua aturan yang dijalankan oleh pilot sewaktu menerbangkan pesawat. Aturan tersebut adalah:

1. *Visual Flight Rules* (*VFR*): Pilot menggunakan *visual* (pandangan) dalam menjalankan pesawat. Terbang dengan aturan demikian biasanya dijalankan dalam cuaca yang sangat baik.
2. *Instrument Flight Rules* (*IFR*): Pilot tidak mengunakan pandangan dalam menjalankan pesawat, namun menggunakan instrumen yang ada pada pesawat dan dipandu oleh sistem dalam *Air Traffic Control*. Terbang dengan aturan ini dijalankan jika keadaan cuaca buruk sehingga jarak pandang pilot sangat terbatas (kurang dari 3 mil). Selain itu jika lalu lintas udara sangat padat maka pilot juga menggunakan *IFR* dalam menjalankan pesawat

Apabila terjadi keadaan dimana suatu pesawat dapat menjalankan *VFR* sementara pesawat lain hanya dapat menjalankan *IFR* maka yang diutamakan adalah pesawat dalam keadaan *IFR*. Tahap-tahap yang dijalani suatu pesawat dalam melakukan penerbangan sebagai berikut:

✈ *Preflight*

Preflight adalah tahapan dimana pesawat sudah siap untuk diberangkatkan. Pada tahap persiapan ini kelengakapan informasi mengenai pesawat harus sudah diberikan kepada pihak *ATC*. Informasi tersebut adalah:

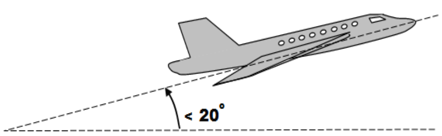
- Nama perusahaan penerbangan
- Nomor penerbangan
- Tipe pesawat dan kelengkapannya
- Kecepatan yang digunakan
- Ketinggian jelajah yang akan ditempuh
- Rute penerbangan (bandara asal, wilayah udara yang akan dilewati, bandara tujuan)
- *Beacon code* (kode untuk setiap pesawat yang akan terbang)

Setelah itu pesawat dijalankan menuju *runway* (landas pacu) dan mesin sudah siap untuk dijalankan pada kondisi maksimal. Pada tahap ini biasanya terdengar ucapan pilot dari *cockpit*. Misalkan untuk pesawat Garuda akan terdengar, "*flight attendant, take-off position*", sementar untuk Lion Air akan terdengar, "*passanger, take-off station*", atau ucapan lain yang intinya memberikan informasi kepada penumpang bahwa pesawat segera terbang.

✈ *Take off*

Pada tahapan ini pesawat dipacu dengan kecepatan rendah menuju tinggi, namun kekuatan mesin pada posisi maksimal. Pada tahap ini biasanya terdengar deru mesin yang sangat keras.

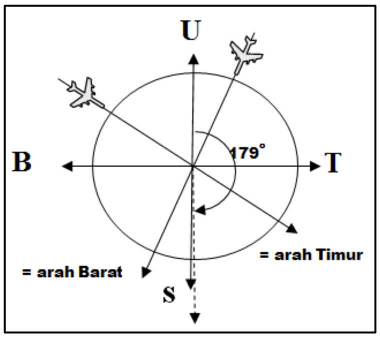
✈ *Departure*



Pesawat meninggalkan landas pacu menuju ketinggian tertentu dengan kekuatan mesin tetap maksimal. Dalam kondisi ini jarak aman antar pesawat secara horizontal 7 mil dan 1000 kaki secara vertikal. Sudut elevasi yang digunakan harus kurang dari 20°. Umumnya pesawat menggunakan sudut elevasi rata-rata 10° − 15°. Jika pesawat menggunakan sudut elevasi lebih dari 20° maka pesawat akan mengalami *stall* (kehilangan daya angkat) yang menyebabkan pesawat bisa jatuh. Pada tahap ini terdengar deru mesin yang sangat keras.

✈ *En Route*

Pesawat mengudara melalui satu atau lebih wilayah udara menuju atau mendekati bandara tujuan. Ketinggian yang dipakai harus memenuhi aturan sebagai berikut:



- Pesawat ke **<u>arah timur</u>** mengambil ketinggian **ganjil** (dalam ribuan) + 500 kaki. Misalnya: 5500 kaki, 7500 kaki, 9500 kaki.
- Pesawat ke **<u>arah barat</u>** mengambil ketinggian genap (dalam ribuan) + 500 kaki. Misalnya: 4500 kaki, 6500 kaki, 8500 kaki.
- Pesawat ke arah **<u>jurusan tiga angka</u>** sampai dengan **179°** mengambil ketinggian sama dengan ke arah timur, diluar itu mengambil ketinggian sama dengan ke arah barat.

Pada umumnya pesawat komersial biasa menempuh ketinggian sekitar 26000 kaki. Jarak aman secara vertikal adalah 1000 kaki. Tahap *en route* ini adalah tahap yang paling lama dijalani oleh sebuah pesawat. Apalagi lagi pesawat dengan kemampuan jelajah yang sangat jauh, tahap ini bisa memakan waktu berjam-jam.

✈ *Descent*

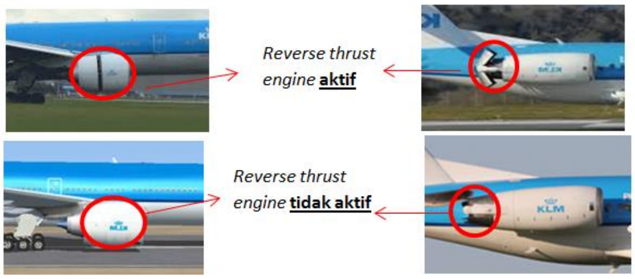
Pada tahapan ini, pilot akan mengurangi ketinggian dan mengurangi kecepatan pesawat untuk mengarahkan pada bandara yang dituju serta menyiapkan untuk proses *approach*. Biasanya akan terdengar informasi dari pilot bahwa pesawat mulai turun. Informasi tersebut disampaikan melalui ucapan dari kokpit yang terdengar sampai kabin. Misalnya untuk Garuda terdengar ucapan dari pilot "*passanger, aircraft descent*". Pada tahapan ini pesawat masih diperbolehkan berputar-putar untuk menunggu giliran mendarat yang dalam penerbangan diistilahkan sebagai *holding*.

✈ *Approach*

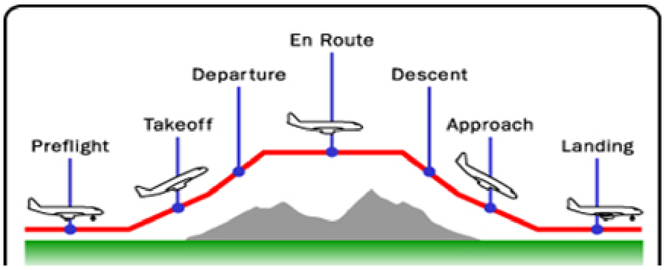
Pilot mengarahkan pesawat menuju landasan dan tidak boleh berputar-putar lagi. Jadi pesawat harus langsung mendarat tanpa boleh ada halangan. Dengan kata lain landasan harus dalam keadaan '*clear*'. Pada tahapan ini biasanya akan terdengar suara pilot dari kokpit, "*landing position*" atau "*landing station*" atau ucapan lain yang menandakan pesawat segera mendarat.

✈ *Landing*

Pesawat sudah mencapai darat di *runway* (landas pacu). Pada tahap ini pilot akan melakukan pengereman maksimal agar pesawat tidak meluncur keluar landasan. Untuk itu pilot akan mengaktifkan rem pada mesin yang dikenal dengan *reverse thrust engine* yang berfungsi membalik arah dorongan mesin. Selanjutnya pesawat akan menuju *apron* (terminal pesawat) melalui jalur *taxiway* (jalur lintasan pesawat di darat).



Penjelasan tahapan-tahapan di atas dapat digambarkan sebagai berikut.



C. Sistem Pengendali Lalu Lintas Udara

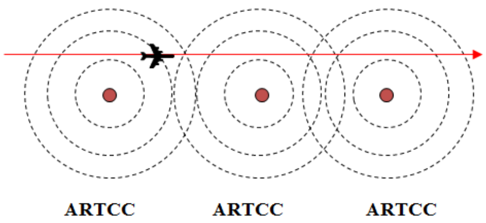
Sistem pengendali lalu lintas udara yang dinamakan *Air Traffic Control System* (ATCS) sebenarnya adalah sistem yang sangat kompleks terdiri dari komputer, radar, radio, dan perangkat lain untuk memandu pilot dalam menerbangkan pesawat mulai dari *preflight* hingga *landing* sampai pesawat parkir di terminal bandara. ATCS mempunyai 5 bagian utama atau sering disebut divisi. Divisi-divisi tersebut adalah:

1. *Air Traffic Control System Command Center* (ATCSCC)

ATCSCC adalah pusat pengendali semua lalu lintas udara pada suatu wilayah tertentu, termasuk mengontrol keadaan cuaca, memantau kepadatan lalu lintas udara, dan menentukan layak tidaknya suatu bandara digunakan untuk mendarat pesawat tertentu.

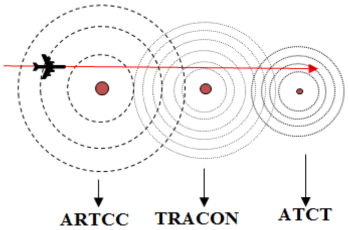
2. *Air Route Traffic Control Center*(*ARTCC*)

ARTCC adalah divisi yang bertugas memandu pesawat saat melakukan *En Route.* Divisi ini merupakan divisi yang paling lama berhubungan dengan pesawat. Area dibawah kendali divisi ini dapat mencapai radius 200 mil dan ketinggian mencapai lebih dari 25.000 kaki. Jika zona udara yang menghubungkan suatu bandara ke bandara lain sangat luas maka diperlukan lebih dari satu ARTCC. Luas wilayah udara yang ter-*cover* oleh ARTCC berbeda-beda tergantung pada pembagian zonanya



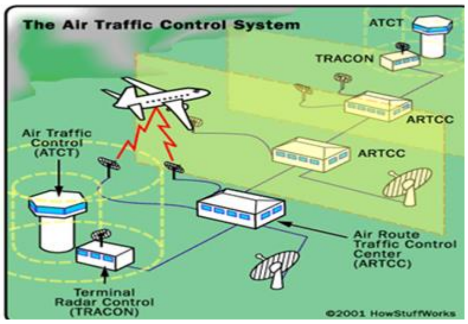
3. *Terminal Radar Approach Control* (TRACON)

TRACON adalah divisi pengoperasi radar yang memandu pesawat saat memasuki tahap *departure* dan tahap *approach*. TRACON merupakan penghubung antara ARTCC dengan *Air Traffic Control Tower*(ATCT)



4. *Air Traffic Control Tower* (ATCT)

ATCT adalah menara yang terletak di setiap bandara. Fungsinya adalah memandu pesawat saat *take-off*, *landing* dan setiap pergerakan pesawat di terminal.



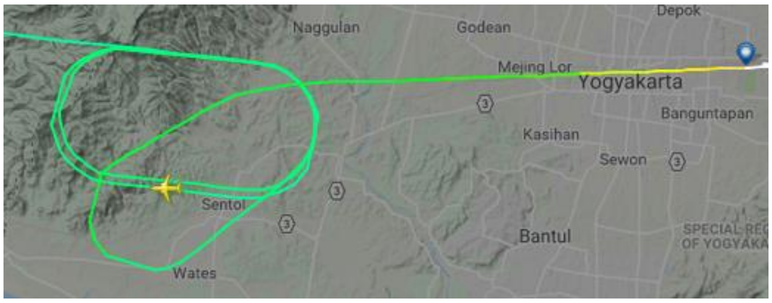
5. *Flight Service Station* (FSS)

FSS adalah divisi yang menyediakan informasi bagi pilot mengenai keadaan cuaca, rute penerbangan, rencana penerbangan, dan informasi lain yang berhubungan dengan penerbangan. Disamping itu FSS juga membantu mengkoordinir operasi pencarian dan operasi pertolongan apabila ada pesawat yang hilang.

D. Model Antrian Pendaratan

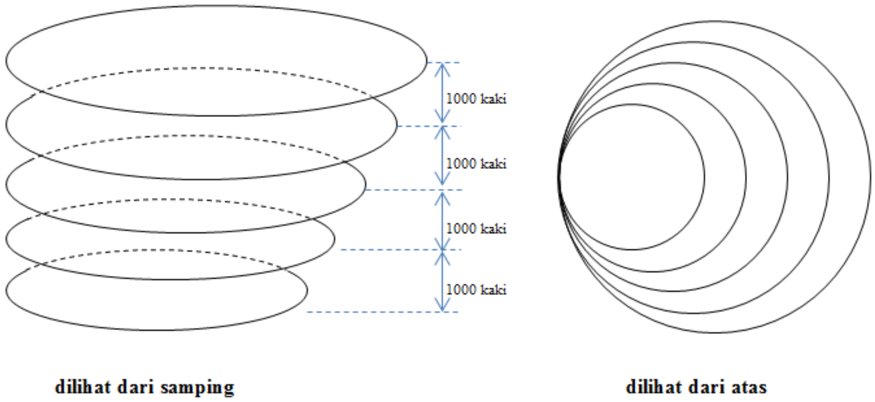
Sebenarnya ada dua antrian yang saling berhubungan yaitu saat akan terbang dan saat akan mendarat. Oleh karena saat akan terbang posisi pesawat masih di darat maka pengaturan antrian lebih mudah. Sebaliknya, karena saat akan mendarat posisi pesawat sedang di udara, maka pengaturan antrian untuk mendarat akan lebih sulit. Mengapa? Karena pesawat tidak bisa berhenti di udara untuk menunggu antrian mendarat. Oleh karena itu model yang dibahas dalam tulisan ini adalah antrian pendaratan.

Pada saat tertentu suatu bandara dihadapkan pada permasalahan dimana ada banyak pesawat yang akan mendarat dalam waktu yang hampir bersamaan. Keadaan seperti ini mengakibatkan banyak pesawat yang menunggu untuk mendarat. Berbeda dengan kendaraan darat atau laut yang bisa menunggu sambil berhenti, pesawat harus terus berjalan ketika menunggu giliran mendarat. Oleh karena itu perlu adanya suatu lintasan tunggu (*holding area*) dengan pengaturan tertentu.

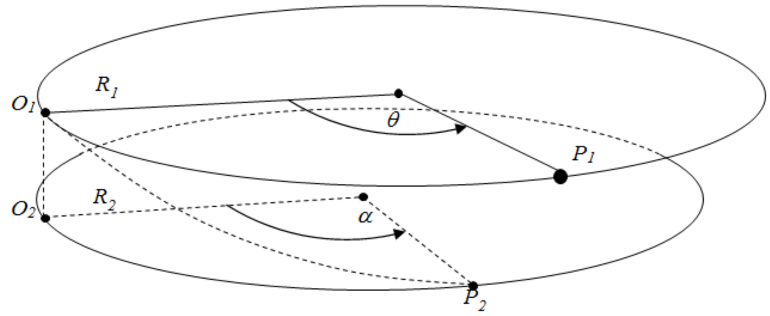


Garuda GA 212 melakukan *holding* saat akan mendarat di Bandara Adisucipto.
Sumber: *www.flightradar24.com*, diakses 12-11-18

Bentuk lintasan tunggu pada kenyatannya seperti gambar di atas. Namun dalam tulisan ini diasumsikan bentuk lintasan tunggu (*holding area*) adalah lapisan-lapisan atau layer-layer berbentuk lingkaran yang diameternya semakin mengecil dari layer atas ke layer di bawahnya. Jarak antar layer adalah 1000 kaki sesuai dengan jarak aman pesawat secara vertikal. Diameter lingkaran pada layer atas lebih besar dari pada diameter lingkaran layer dibawahnya. Secara sederhana lintasan tunggu tersebut dapat diilustrasikan seperti pada gambar berikut.



Selanjutnya pandang dua layer berurutan serta titik P_1 dan P_2 yang diumpamakan sebagai pesawat yang berada pada layer.



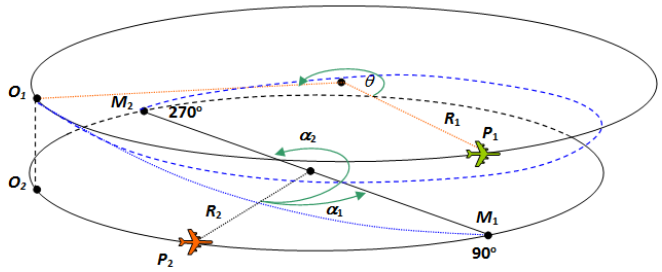
Panjang lintasan dari O_1 menuju P_1, dan panjang lintasan dari O_2 menuju P_2 berturut-turut namakan L_{p1} dan L_{p2} adalah:

$$L_{p1} = \theta R_1 \text{ dan } L_{p2} = \theta R_2 \quad \{\text{panjang busur lingkaran}\}.$$

Sementara itu panjang *helix* dari O_1 ke P_2, namakan L_h adalah:

$$L_h = \sqrt{\left(L_{p2}\right)^2 + (O_1O_2)^2} \qquad \{\textit{penerapan dalil Pythagoras pada helix}\}.$$

Selanjutnya untuk memudahkan dalam pemodelan, titik masuk perpindahan pesawat dari layer atas ke layer bawah ditentukan pada posisi 90° (M_1) atau 270° (M_2) seperti pada gambar berikut.



Dengan demikian jarak-jarak penting (krusial) yaitu P_1O_1, P_2M_1, P_2M_2, O_2P_2, O_1M_1, dan O_1M_2 dapat ditentukan. Dengan dapat ditentukannya jarak krusial tersebut maka pengaturan untuk pindah layer atau tetap dalam layer dapat diatur dengan skema pemodelan. Untuk menerapkan model diperlukan beberapa asumsi yang mungkin berbeda dengan kenyatan. Asumsi-asumsi yang diambil adalah:

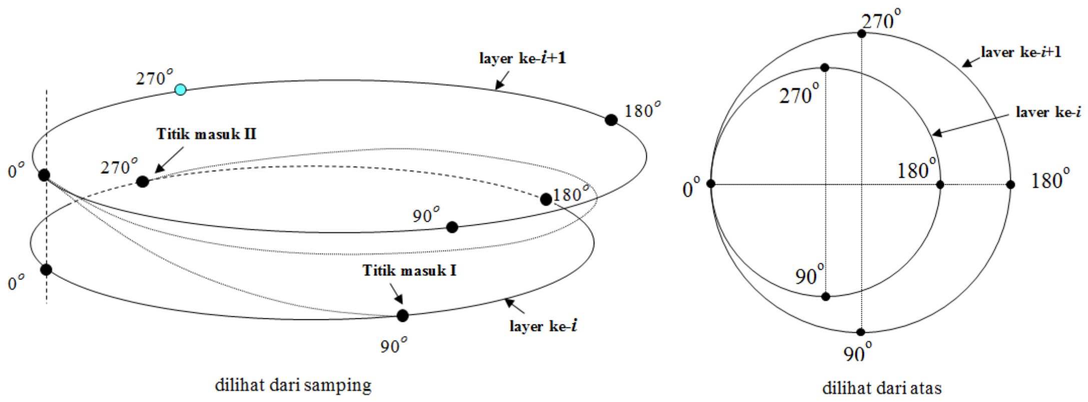
1. Tidak ada gangguan cuaca selama pendaratan (cuaca baik).
2. Arah pendaratan pada landas pacu selalu tetap.
3. Bahan bakar cukup untuk menunggu.
4. Lintasan tunggu (*holding area)* berbentuk lingkaran.
5. Jumlah maksimum di tiap layer adalah 2 pesawat, kecuali pada layer terendah memuat maksimum satu pesawat.
6. Pada saat ada pesawat akan memasuki lintasan tunggu, pesawat-pesawat yang ada pada lintasan tunggu telah berada pada posisi terendahnya.
7. Pesawat memasuki layer melalui koordinat 90° (titik masuk I) atau koordinat 270° (titik masuk II), kecuali saat masuk *holding area* menuju layer yang kosong, titik yang diambil bebas. Sementara untuk keluar layer harus dari kordinat 0°.
8. Kecepatan pesawat sama.
9. Jarak aman 2 pesawat pada ketinggian sama minimal 7 mil.
10. *Tower Center Control* (*TCC*) hanya memandu pesawat yang akan mendarat dan jangkauanya hanya sampai 18000 kaki (untuk mempermudah hitungan).
11. Layer terendah berada pada ketinggian 4000 kaki.

Dengan asumsi tersebut maka banyaknya layer adalah N dengan

$$\begin{aligned} N &= \frac{layer\ tertinggi - layer\ terendah}{1000} + 1 \\ &= \frac{18000 - 4000}{1000} + 1 \\ &= 15 \end{aligned}$$

Ketinggian layer sebagai berikut:
Layer ke-1 memiliki ketinggian h_1 = 4000 kaki
Layer ke-2 memiliki ketinggian h_2 = 5000 kaki
Layer ke-3 memiliki ketinggian h_3 = 6000 kaki
...
Layer ke-14 memiliki ketinggian h_{14} = 17000 kaki
Layer ke 15 memiliki ketinggian h_{15} = 18000 kaki
Karena jarak aman dua pesawat 7 mil secara horisontal, maka diameter layer mengecil dari atas ke bawah. Kondisi seperti ini menyebabkan adanya perbedaan kecepatan sudut antara dua pesawat yang berada pada layer yang berbeda. Hal ini dimaksudkan supaya perubahan jarak antara dua pesawat pada layer yang berbeda selalu berubah-ubah sehingga dapat ditentukan kapan saat pindah layer. Pada model ini diameter layer (supaya aman) diatur sebagai berikut:
Layer ke-1 berdiameter d_1 = 10 mil
Layer ke-2 berdiameter d_2 = 11 mil
Layer ke-3 berdiameter d_3 = 12 mil
...
Layer ke 15 berdiameter d_{15} = 24 mil

Ketebalan *helix* penghubung layer ke-i dan ke-(i+1) adalah 1000 kaki dan berdiameter sama dengan diameter layer ke-i. Dengan demikian *holding area* dapat menampung maksimum $14 \times 2 + 1 = 29$ pesawat.
Lintasan tunggu dapat digambarkan secara visual sebagai berikut.



1. Algoritma Memasuki Lintasan Tunggu

Pesawat memasuki lintasan tunggu melalui kordinat 90° atau 270°, pada layer terendah yang diperbolehkan. Jika layer ke-1 kosong maka pesawat dapat memasuki layer tersebut dan langsung melakukan *landing* apabila sudah '*clear*'. Jika layer ke-1 terisi maka pesawat diharuskan menunggu pada *holding area*, sampai mendapat giliran mendarat.

Algoritma secara rinci adalah sebagai berikut:

Input :

- Panjang lintasan pesawat-pesawat menuju titik-titik masuk

Output :

- *clear* atau *loaded* (lintasan penuh)
- l = layer yang diperbolehkan untuk dimasuki
- δ = titik masuk layer (titik 90° atau 270°)

Algoritma:

Misalkan:

P_{1i} = panjang lintasan pesawat pada layer ke-i menuju titik masuk I saat pesawat yang datang masuk melalui titik masuk I

P_{2i} = panjang lintasan pesawat pada layer ke-i menuju titik masuk II saat pesawat yang datang masuk melalui titik masuk II

Q_1 = jarak pesawat yang datang dengan titik masuk I

Q_2 = jarak pesawat yang datang dengan titik masuk II

$n(s)$= jumlah pesawat pada layer ke s

l = urutan layer yang dimasuki

δ = sudut yang diambil saat masuk layer

Algoritmanya sebagai berikut.

1. $i = 1$
2. $s = i$
   $if\ n(s) = 0\ then\ 'clear'\ ;\ l = s;\ \delta = free\ ;\ end$

$if\ n(s) = 1\ then\ \ i = i + 1$

3. $s = i$

$if\ s = 15\ \ then\ 'loaded'; end$

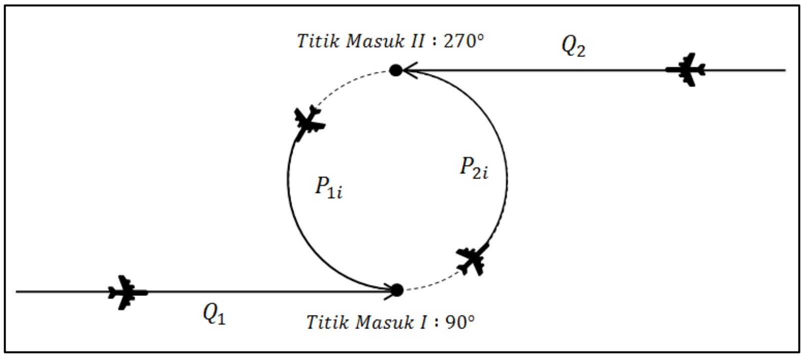
$if\ n(s) = \ 0\ then\ 'clear'\ ;\ l = s\ ;\ \delta = free\ ;\ end$

$if\ n(s)\ = \ 1\ then$

$if\ \ |P_{1i} - Q_1| \geq 7\ \ then\ l = s\ ;\ \delta\ = 90°\ ;\ end$

$if\ |P_{2i} - Q_2| \geq 7\ \ then\ \ l = s\ ;\ \delta = 270°\ ;\ end$

$i\ = \ i\ +\ 1\ ;\ go\ to\ 2$



2. Algoritma Pindah Layer

Algoritma ini mengatur perpindahan pesawat dari layer atas ke layer di bawahnya. Mirip dengan algoritma sebelumnya, dalam algoritma ini Q_1 dan Q_2 diganti dengan jarak lintasan pesawat pada layer sebelumnya.

Misalkan:

T_{1i} = panjang lintasan pesawat pada layer ke-i menuju titik masuk I
T_{2i} = panjang lintasan pesawat pada layer ke-i menuju titik masuk II
U_1 = jarak pesawat yang akan berpindah melalui titik masuk I dari layer di atasnya
U_2 = jarak pesawat yang akan berpindah melalui titik masuk I dari layer di atasnya
$n(i)$= jumlah pesawat pada layer ke-i
δ = sudut yang diambil saat masuk layer

Algoritma secara rinci adalah sebagai berikut:
Pandang sebuah pesawat pada layer ke-i dan sebuah pesawat lain pada layer ke-$(i + 1)$

Input:

- Panjang lintasan pesawat-pesawat menuju titik masuk layer ke-i

Output:

- *clear* atau *loaded*
- δ, sudut yang digunakan untuk memasuki layer

Algoritma:

1. $i\ = 1$
2. $s\ = \ i\ ;$

$if\ i = 15\ then\ \ 'loaded'; end$

$if\ n(s) = \ 0\ then\ 'clear'\ ;\ \delta = free\ (90°\ or\ 270°)\ ;\ end$

$if\ n(s) = 1\ then$

$if\ |T_{1i} - U_1| \geq 7\ then\ \delta = 90°\ ;\ end$

$if\ |T_{2i} - U_2| \geq 7\ then\ \delta = 270°\ ;\ end$

$if\ n(s) = 2\ then\ i = i + 1\ ;$

$go\ to\ 2$

E. Penutup

Dengan kapasitas 29 pesawat pada satu *holding area* dalam pemodelan ini, tentu sangat menguntungkan bagi bandar udara dengan kepadatan lalu lintas tinggi. Namun demikian kondisi sebenarnya berkaitan pengaturan lalu lintas udara ini sangat berbeda dengan model yang telah dijelaskan di atas. Hal ini wajar karena dalam pemodelan ini banyak asumsi yang harus diberlakukan agar pemodelan dapat berjalan. Sebagai contoh, asumsi bahwa arah pendaratan selalu tetap, tidak sesuai dengan kenyataan karena arah angin sekitar bandara selalu berubah-ubah sehingga mempengaruhi arah pendaratan pesawat. Oleh karena itu penerapan model untuk situasi nyata perlu kajian dan teori lebih lanjut.

Referensi

[1] Max Mulder, 2010, *Air Traffic Control*, Sciyo: Croatia

[2] Purcel, Edwin J, *Calculus*, eight edition, 2000, Prentice-Hall Inc. New Jersey

[3] U.S. DEPT. OF TRANSPORTATION FEDERAL AVIATION ADMINISTRATION, 2003, *Pilot's Handbook of Aeronautical Knowledge, U.S*

[4] https://science.howstuffworks.com/transport/flight/modern/air-traffic-control1.htm (diakses 19 November 2018)

*) Sigit Tri Guntoro, M.Si.
Widyaiswara PPPPTK Matematika Yogyakarta

Foto: httpbandarasoekarnohatta.com.

QUATERNION DAN HIPERKOMPLEKS,

Bilangan yang Lebih Umum dari Bilangan Kompleks

*) Sumardyono

Penulis pernah ditanya, apakah setelah bilangan kompleks, ada bilangan lain yang lebih umum dari bilangan kompleks? Pertanyaan ini menarik, bukan saja menunjukkan keingintahuan (*curiosity*) tetapi juga terkait aspek penting yaitu konsep generalisasi (*generalization*) di dalam matematika. Dalam tulisan ini, penulis akan menyajikan mengenai beberapa konsep himpunan bilangan yang lebih umum dibanding himpunan bilangan kompleks atau merupakan generalisasi dari himpunan bilangan kompleks.

Perjuangan Hamilton

Quaternion erat berkaitan dengan William Rowan Hamilton. Mengapa Hamilton? Walaupun sudah diindikasikan oleh Gauss jauh sebelumnya namun Hamilton-lah matematikawan yang memperkenalkan salah satu konsep perluasan bilangan yang disebut "quaternion" tersebut. Dengan mengikuti alur perjuangannya, penulis akan menyajikan konstruksi bilangan tersebut pada tulisan ini.

Seperti yang kita ketahui, bilangan kompleks didefinisikan dengan

$$a + bi$$

dengan a, b bilangan real dan i satuan imajiner di mana $i^2 = -1$.
Himpunan bilangan kompleks dengan penjumlahan secara *pointwise* atau *coordinatewise* membentuk struktur yang disebut "field" atau lapangan. Struktur ini sama dengan himpunan bilangan real. Berikut bagaimana perkalian dan penjumlahan bilangan kompleks dilakukan.

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i)$$

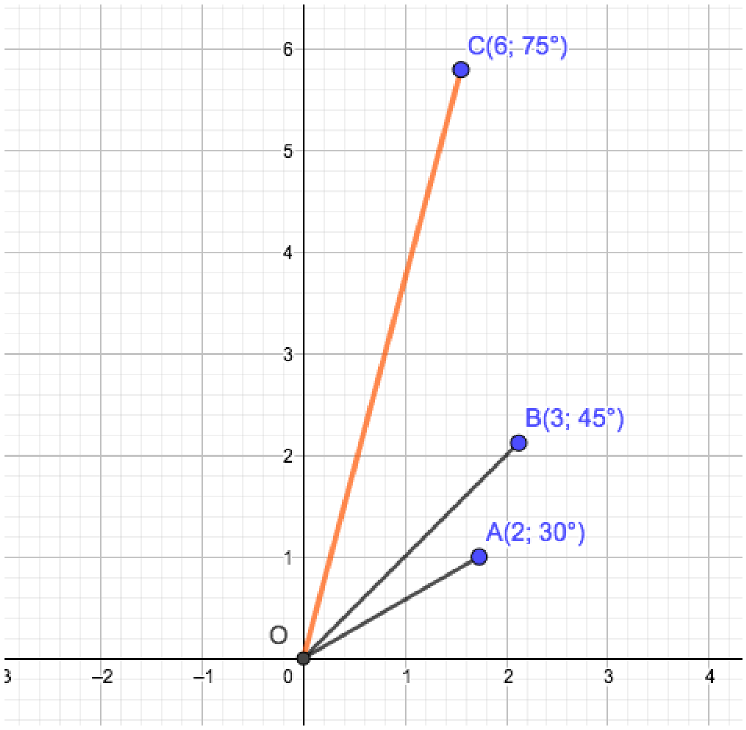
Lebih dari itu, dengan menggunakan koordinat polar diperoleh sifat yang sederhana. Dengan identitas Euler,

$$\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta},$$

maka perkalian dua bilangan kompleks dapat dipahami lebih sederhana:

$$(a + bi)(c + di) = pe^{i\theta}.qe^{i\phi} = pqe^{i(\theta+\phi)}$$

Jadi, hasil perkalian dua bilangan kompleks dalam koordinat polar, dapat dilakukan dengan mengalikan panjangnya (jarak titik ke titik asal) dan menjumlahkan sudutnya.



Gambar. Contoh ilustrasi perkalian dua bilangan kompleks dalam koordinat polar

Dengan melihat bentuk $a + bi$, maka timbul pemikiran bagaimana jika konsep ini diperluas dengan menambah satu komponen "kompleks" berikutnya, yaitu dengan notasi j. Dibentuklah triplet atau pasangan terurut, (a, b, c) dengan definisi sebagai berikut.

$$a + bi + cj$$

dengan a, b, c bilangan real dan i, j satuan-satuan imajiner.
Selanjutnya, ditemukan bahwa penjumlahan mudah didefinisikan yaitu bahwa

$$(a + bi + cj) + (p + qi + rj) = (a + p) + (b + q)i + (c + r)j$$

namun segera terlihat bahwa perkaliannya tidak dapat didefinisikan dengan mudah. Persoalannya, tidak ada definisi perkalian yang dapat dilakukan agar diperoleh sifat yang diinginkan seperti pada bilangan kompleks.

Jika dengan perkalian *pointwise* diperoleh sebagai berikut.

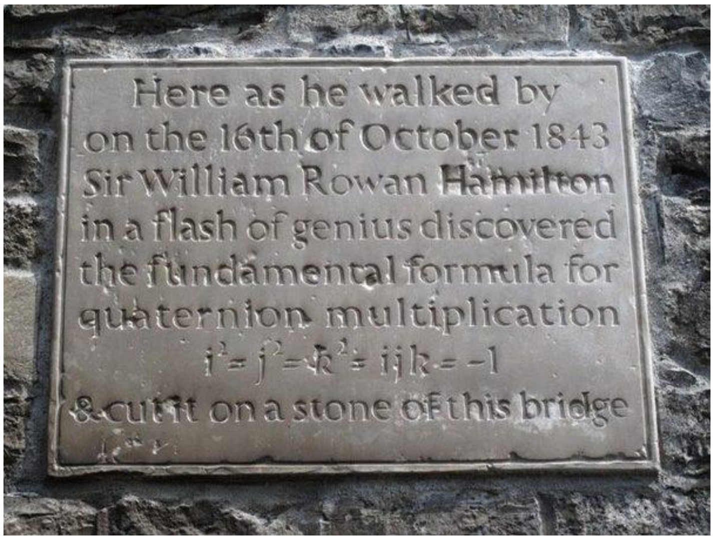
$$(a + bi + cj)(p + qi + rj) = ap + aqi + arj + bpi - bq + brij + cpj + cqji - cr$$

Masalah krusial yang muncul adalah adanya bentuk $(br)ij + (cq)ji$ di mana ij dan ji tidak mudah didefinisikan untuk menghasilkan sifat yang sederhana seperti pada bilangan kompleks, yaitu representasi geometris, konjugat, invers, dan lain-lain.

Selama bertahun-tahun, Hamilton belum dapat mendefinisikan perkalian dua triplet untuk sifat yang diinginkan. Dalam salah satu surat kepada anaknya, Hamilton mengisahkan: "setiap pagi, saat aku turun untuk sarapan, adikmu William Edwin dan kamu sendiri, bertanya padaku "Jadi, Ayah, dapatkah kamu mengalikan triplet?". Aku seringkali malas untuk menanggapi, dengan gelengan kepala yang sedih: "Tidak, aku hanya berhasil menjumlahkan dan mengurangkan dua triplet".

Quartenion

Sampai suatu ketika di bulan Oktober 1843, saat Hamilton berjalan bersama istrinya di sebuah kanal di Dublin, ia mendapat ide untuk meninggalkan gagasan triplet dan beralih ke quadruplet, dan seketika mendapatkan sifat-sifat sederhana yang diinginkan selama ini.



Gambar. Plakat tentang temuan Hamilton yang terpasang pada Jembatan Brougham
(sumber: https://www.quora.com/topic/Quaternions-mathematics)

Dengan menggunakan $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ didefinisikan bilangan quaternion, yaitu

$$a + bi + cj + dk$$

yang dapat dinyatakan dengan quadruplet (a, b, c, d).

Perhatikan bahwa lambang i, j, k *bukan* menunjukkan vektor-vektor satuan pada koordinat kartesian dimensi tiga. Juga walaupun $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, *tidak* berarti bahwa $bi + cj + dk = (b + c + d)i$ *karena* i, j, k menandakan komponen yang berbeda.

Kadang quaternion dapat ditulis sebagai $(a, \boldsymbol{v})$ dengan a disebut bagian "real" atau bagian skalar dan $\boldsymbol{v}$ adalah bagian "imajiner" atau bagian vektor.

Penjumlahan didefinisikan dengan *pointwise*:

$$(a, b, c, d) + (p, q, r, s) = (a + p, b + q, c + r, d + s)$$

Dengan mendefinisikan bahwa

$$ij = k, jk = i, ki = j \text{ dan } ji = -k, kj = -i, ik = -j$$

maka perkalian mudah didefinisikan dengan mengalikan tiap komponen secara distributif.

$$(a + bi + cj + dk)(p + qi + rj + sk) = A + Bi + Cj + Dk$$

dengan $A = ap - bq - cr - ds, B = aq + bp + cs - dr$
$C = ar - bs + cp + dq, D = as + br - cq + dp$

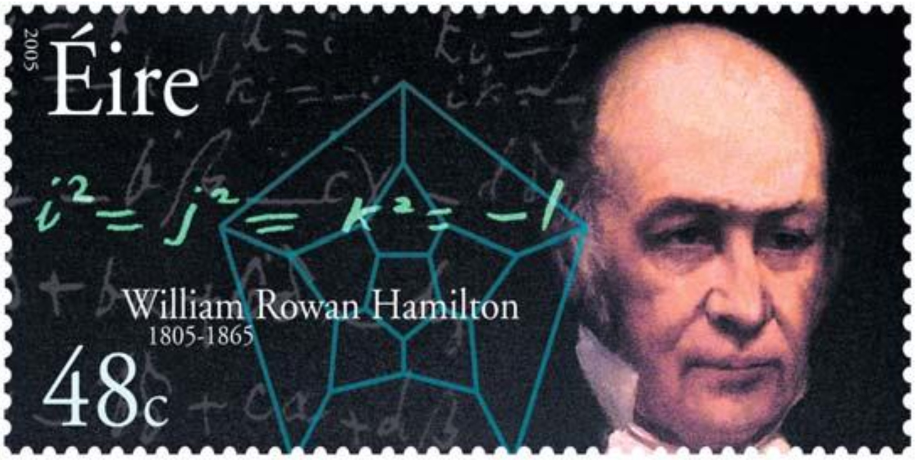
Jika komponen quaternion diperlakukan seperti komponen vektor dimensi tiga, maka perkalian dua quaternion dapat didefinisikan menggunakan perkalian pada vektor yaitu *cross product* dan *dot producti* sebagai berikut.

Misal dua quaternion $(a, \boldsymbol{v})$ dan $(b, \boldsymbol{w})$ maka perkalian quaternion dilakukan sebagai berikut.

$$\boldsymbol{vw} = (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) - \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}$$
$$(a + \boldsymbol{v})(b + \boldsymbol{w}) = (ab - \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}) + (a\boldsymbol{w} + b\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})$$

Dari sekian banyak sifat yang dapat dipenuhi oleh quaternion, ada satu sifat bilangan kompleks yang tidak berlaku yaitu komutatif pada perkalian! Jadi, perkalian quaternion *tidak komutatif*.

$$(a, b, c, d)(p, q, r, s) \neq (p, q, r, s)(a, b, c, d)$$



Gambar. Perangko memuat wajah Hamilton beserta temuannya.
(sumber: https://rjlipton.files.wordpress.com/2011/04/hamilton.jpg)

Himpunan bilangan ini, $\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk: a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ merupakan grup non-komutatif. Jadi, dengan elemen nol 0 dan elemen satuan 1, pada quaternion juga berlaku sifat asosiatif $(x + y) + z = x + (y + z)$ dan $x(yz) = (xy)z$ untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{H}$.
Untuk setiap quaternion tak-nol terdapat invers yang didefinisikan sebagai berikut.

$$(a + bi + cj + dk)^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}(a - bi - cj - dk)$$

Selanjutnya, $x^* = a - bi - cj - dk$ disebut **konjugat** dari $x = a + bi + cj + dk$. Dari sini dapat didefinisikan suatu *norm* untuk quaternion (perluasan nilai mutlak dari bilangan real) yang didefinisikan sebagai berikut.

$$\|x\| = \sqrt{xx^*} = \sqrt{x^*x} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

Bilangan quaternion membentuk struktur Ruang Vektor, Grup Multiplikatif, dan Aljabar Pembagian (*division algebra*). Walaupun tidak selengkap sifat pada himpunan bilangan kompleks, apalagi pada himpunan bilangan real, namun bilangan quaternion ini sudah memperluas konsep bilangan kompleks. Bilangan semacam quaternion ini tergolong kelompok bilangan yang kini disebut bilangan *hypercomplex*.

Bilangan Hiperkompleks (*Hypercomplex*)

van der Waerden (1985) seperti dikutip Wolfram, mendefinisikan bilangan hiperkompleks sebagai bilangan yang memiliki sifat-sifat berdasarkan sifat bilangan real dan bilangan kompleks. Salah satu bilangan hiperkompleks adalah quaternion, seperti yang sudah dibahas. Contoh lainnya antara lain biquatenion, octonion, matriks, aljabar ekterior, aljabar grup, dan masih banyak lagi.

Octonion adalah bilangan hiperkompleks berupa octoplet dengan bagian real (tunggal) serta bagian vektor yang terdiri atas tujuh komponen. Octonion dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$a + bi_1 + ci_2 + di_3 + ei_4 + fi_5 + gi_6 + hi_7$$

Seperti diduga, ${i_k}^2 = -1, \mathrm{k} = 1, 2, \ldots, 7$. Bilangan octonion disebut juga bilangan Cayley.

Pada himpunan octonion ini terdapat operasi penjumlahan dan perkalian yang dapat didefinisikan dengan mudah, namun tidak terpenuhi sifat komutatif maupun asosiatif pada perkalian. Dengan demikian himpunan bilangan octonion memiliki sifat-sifat pada bilangan kompleks yang jauh lebih sedikit.

Bilangan hiperkompleks lainnya adalah biquaternion. Bilangan ini lebih luas daripada bilangan quaternion. Bilangan biquartenion adalah bilangan quaternion namun dengan koefisien bilangan kompleks.

$$\mathbb{B} = \{a + bi + cj + dk: a, b, c, d \in \mathbb{C}\}$$

Seperti pada quaternion, pada biquaternion tidak berlaku sifat komutatif.

Selanjutnya, terdapat pula bilangan hiperkompleks yang disebut split-biquaternion. Bilangan split-biquaternion mirip bilangan quaternion kecuali koefisiennya merupakan bilangan *split-complex*. Bilangan *split-complex* sendiri memiliki bentuk:

$$z = x + jy$$

dengan $x, y \in \mathbb{R}$ dan $j^2 = 1$ namun di sini j bukan bilangan real 1 maupun -1.

Aplikasi bilangan hiperkompleks

Quaternion sekarang banyak digunakan baik dalam matematika itu sendiri maupun dalam matematika terapan atau ilmu lainnya. Quaternion dapat dijumpai aplikasinya pada kalkulasi terkait rotasi dalam dimensi tiga, *computer graphics, computer vision*, *robotic,* teori kontrol, *bioinformatics*, *molecular dynamics*, *computer simulations*, *orbital mechanics*, dan juga *crystallographic texture analysis*. Dalam ilmu fisika, quaternion digunakan pada sistem yang terkait dengan grup Lorentz, grup relativitas umum, atau terkait aljabar Clifford. Secara praktis, misalnya untuk mempelajari gerakan spin elektron dalam mekanika kuantum, maka konsep quaternion berperan penting.

Salah satu sifat yang diinginkan oleh Hamilton dengan perluasan bilangan kompleks adalah dapat direpresentasikan secara geometris dengan sederhana, seperti halnya pada bilangan kompleks. Ternyata pada bilangan quaternion, ia menjumpai sifat geometris tersebut. Pada saat Anda, misalnya menggerakkan gambar benda yang ada di dalam layar komputer atau layar HP layaknya dalam ruang dimensi tiga, maka besar kemungkinan program yang menggerakannya berdasarkan aplikasi quaternion. Dalam matematika, quaternion digunakan sebagai alternatif cara dalam perhitungan pada dimensi tiga, yang jauh lebih sederhana dibanding menggunakan sudut Euler (jenis sudut dalam dimensi tiga), atau matriks dalam dimensi tiga.

Pandang pada ruang dimensi tiga dengan koordinat kartesian. Misalnya sebuah vektor akan digunakan sebagai sumbu putar yaitu $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z) = u_x i + u_y j + u_z k$. Besar putarannya adalah θ.
Rotasi tersebut dapat dinyatakan dengan **quaternion** sebagai beriku.

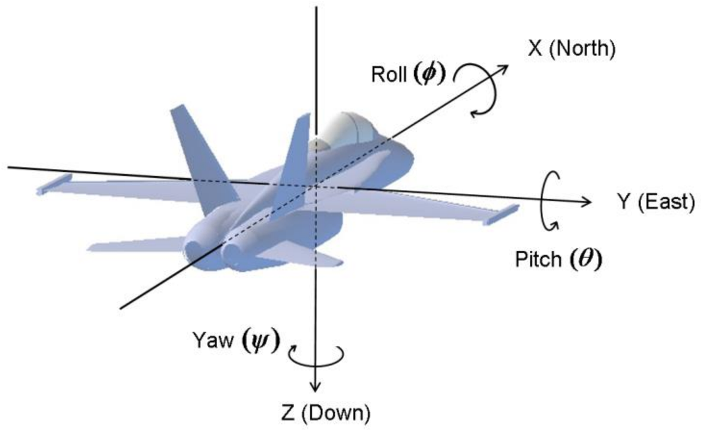
$$\boldsymbol{q} = \cos\frac{\theta}{2} + (u_x i + u_y j + u_z k)\sin\frac{\theta}{2}$$

Sekarang komponen i, j, k diperlakukan sebagai komponen sebuah quaternion.
Nah, misalkan sebuah titik pada dimensi tiga, $\boldsymbol{p} = (p_x, p_y, p_z) = p_x i + p_y j + p_z k$ maka hasil rotasi sebesar θ dengan sumbu putar $\vec{u}$ dapat dinyatakan dengan sederhana menggunakan perkalian pada quaternion, yaitu

$$\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{q}\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}^{-1}$$

dengan $\boldsymbol{p}'$ titik hasil rotasi, $\boldsymbol{q}^{-1}$ invers quaternion q dan perkalian dengan menggunakan perkalian pada quaternion.

Pada rotasi yang lebih rumitpun, penggunaan quaternion lebih sederhana dibanding menggunakan matriks untuk transformasi pada dimensi tiga, misalnya pada rotasi 3 sumbu. Sebagai ilustrasi, perhatikan gerakan pesawat pada gambar di bawah, yang ditentukan oleh 3 macam perputaran: *roll*, *pitch*, dan *yaw*. Pergerakan ini dapat dikontrol dengan menggunakan konsep quaternion.



Gambar. Perputaran dalam dimensi tiga, salah satu aplikasi bilangan quaternion.
(sumber: http://www.chrobotics.com/wp-content/uploads/2012/11/F18.png)

Daftar Pustaka

Weisstein, Eric W. *Biquaternion*. dalam http://mathworld.wolfram.com/biquaternion.html (diakses 6 September 2018)

Weisstein, Eric W. *Octonion*. dalam http://mathworld.wolfram.com/octonion.html (diakses 6 September 2018)

Weisstein, Eric W. *Hypercomplex Number*. dalam http://mathworld.wolfram.com/hypercomplex_number.html (diakses 6 September 2018)

Weisstein, Eric W. *Quaternion*. dalam http://mathworld.wolfram.com/quaternion.html (diakses 6 September 2018)

Wikipedia. *Biquaternion*. dalam https://en.wikipedia.org/wiki/biquaternion (diakses 6 September 2018)

Wikipedia. *Dual quaternion*. dalam https://en.wikipedia.org/wiki/dual_quaternion (diakses 6 September 2018)

Wikipedia. *Quaternion*. dalam https://en.wikipedia.org/wiki/quaternion (diakses 6 September 2018)

Wikipedia. *Quaternion and spatial rotation*. dalam https://en.wikipedia.org/wiki/quaternion_and_spatial_rotation (diakses 12 September 2018)

Wikipedia. *Split-quaternion*. dalam https://en.wikipedia.org/wiki/split-quaternion (diakses 6 September 2018)

Quora. *Can quaternions be explained to a nonmathematician?*. dalam https://www.quora.com/topic/Quaternions-mathematics (diakses 6 September 2018)

---

*) Dr. Sumardyono, M.Pd.
Analis Matematika dan Widyaiswara PPPPTK Matematika Yogyakarta

Peresmian Gedung Gauss PPPPTK Matematika

Gedung Pembelajaran Gauss berlantai tiga di PPPPTK Matematika

Mendikbud Prof. Muhadjir Effendi, M.AP., menandatangani prasasti peresmian Gedung Pembelajaran Gauss PPPPTK Matematika.

Sarasehan Kebangsaan

Dialog Wawasan Kebangsaan menghadirkan 3 Kepala PPPPTK Matematika periode terdahulu. Foto kiri ke kanan: Prof. Dr. rer.nat. Widodo, M.S. (Kepala PPPPTK Matematika 2011-2015), Herry Sukarman, M.Sc.Ed (Kepala PPPPTK Matematika 2009-2010), dan Drs. Kasman Sulyono, MM. (Kepala PPPPTK Matematika 2005-2009)

Foto kiri ke kanan: Drs. Kasman Sulyono, MM. (Kepala PPPPTK Matematika 2005-2009), Dr. Dra. Daswatia Astuty, M.Pd. (Kepala PPPPTK Matematika 2016 - sekarang), dan Herry Sukarman, M.Sc.Ed (Kepala PPPPTK Matematika 2009-2010)

SeNdiMat VI

Seminar Nasional Pendidikan Matematika

Menteri Pendidikan dan Kebudayaan Republik Indonesia, Prof. Muhadjir Effendy, M.AP., menutup secara resmi kegiatan Seminar Nasional Pendidikan Matematika (SeNdiMat) ke-VI yang bertajuk “Peran Pendidikan Matematika dalam Pengembangan Pembelajaran Science, Technology, Engineering, Mathematics (STEM) untuk menyongsong Generasi Emas 2045 melalui Kecakapan Abad 21” di PPPPTK Matematika

Simulasi Kebencanaan

Pusat Pengembangan Pemberdayaan Pendidik dan Tenaga Kependidikan (PPPPTK) Matematika menggelar In House Training (IHT) Kebencanaan tanggal 12 November 2018 di PPPPTK Matematika. IHT ini digelar sebagai pembekalan menghadapi kebencanaan kepada setiap pegawai yang ada dil ingkungan PPPPTK Matematika. Dalam IHT tersebut, pegawai diberi informasi dan penegahuan agar bisa mengantsipasi dan menyelematkan diri dari bencana apabila terjadi gempa dan kebakaran.