GURU PEMBELAJAR

MODUL MATEMATIKA SMA

KELOMPOK KOMPETENSI G

Kurikulum Matematika 1, Kalkulus, dan Trigonometri

DIREKTORAT JENDERAL GURU DAN TENAGA KEPENDIDIKAN
KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
2016

Kata Sambutan

Peran guru profesional dalam proses pembelajaran sangat penting sebagai kunci keberhasilan belajar siswa. Guru profesional adalah guru yang kompeten membangun proses pembelajaran yang baik sehingga dapat menghasilkan pendidikan yang berkualitas. Hal tersebut menjadikan guru sebagai komponen yang menjadi fokus perhatian pemerintah pusat maupun pemerintah daerah dalam peningkatan mutu pendidikan terutama menyangkut kompetensi guru.

Pengembangan profesionalitas guru melalui program Guru Pembelajar merupakan upaya peningkatan kompetensi untuk semua guru. Sejalan dengan hal tersebut, pemetaan kompetensi guru telah dilakukan melalui uji kompetensi guru (UKG) untuk kompetensi pedagogik profesional pada akhir tahun 2015. Hasil UKG menunjukkan peta kekuatan dan kelemahan kompetensi guru dalam penguasaan pengetahuan. Peta kompetensi guru tersebut dikelompokkan menjadi 10 (sepuluh) kelompok kompetensi. Tindak lanjut pelaksanaan UKG diwujudkan dalam bentuk pelatihan guru paska UKG melalui program Guru Pembelajar. Tujuannya untuk meningkatkan kompetensi guru sebagai agen perubahan dan sumber belajar utama bagi peserta didik. Program Guru Pembelajar dilaksanakan melalui pola tatap muka, daring penuh (*online*), dan daring kombinasi (*blended*) tatap muka dengan *online*.

Pusat Pengembangan dan Pemberdayaan Pendidik dan Tenaga Kependidikan (PPPPTK), Lembaga Pengembangan dan Pemberdayaan Pendidik dan Tenaga Kependidikan Kelautan Perikanan Teknologi Informasi dan Komunikasi (LP3TK KPTK) dan Lembaga Pengembangan dan Pemberdayaan Kepala Sekolah (LP2KS) merupakan Unit Pelaksanana Teknis di lingkungan Direktorat Jenderal Guru dan Tenaga Kependidikan yang bertanggung jawab dalam mengembangkan perangkat dan melaksanakan peningkatan kompetensi guru sesuai bidangnya. Adapun perangkat pembelajaran yang dikembangkan tersebut adalah modul untuk program Guru Pembelajar tatap muka dan Guru Pembelajar online untuk semua mata pelajaran dan kelompok kompetensi. Dengan modul ini diharapkan program Guru Pembelajar memberikan sumbangan yang sangat besar dalam peningkatan kualitas kompetensi guru.

Mari kita sukseskan program Guru Pembelajar ini untuk mewujudkan Guru Mulia Karena Karya.

Jakarta, Maret 2016

Direktur Jenderal,

Sumarna Surapranata

NIP. 195908011985031002

GURU PEMBELAJAR

MODUL

MATEMATIKA SMA

KELOMPOK KOMPETENSI G

PEDAGOGIK

PENGEMBANGAN KURIKULUM

MATEMATIKA I

DIREKTORAT JENDERAL GURU DAN TENAGA KEPENDIDIKAN

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN

2016

Penulis:
Pujiadi, S.Pd., M.Pd., M.Kom., 08156501190, pujiadi.lpmpjateng@gmail.com

Penelaah:
Drs. Amin Suyitno, M.Pd., 085865168227, aminsuyitno.unnes@gmail.com

Ilustrator:
Denny Saputra, S.Kom. 085227133999, denny.s4putr4@gmail.com

Kata Pengantar

Peningkatan kualitas pendidikan saat ini menjadi prioritas, baik oleh pemerintah pusat maupun daerah. Salah satu komponen yang menjadi fokus perhatian adalah peningkatan kompetensi guru. Peran guru dalam pembelajaran di kelas merupakan kunci keberhasilan untuk mendukung keberhasilan belajar siswa. Guru yang profesional dituntut mampu membangun proses pembelajaran yang baik sehingga dapat menghasilkan *output* dan *outcome* pendidikan yang berkualitas.

Dalam rangka memetakan kompetensi guru, telah dilaksanakan Uji Kompetensi Guru (UKG) Tahun 2015. UKG tersebut dilaksanakan bagi semua guru, baik yang sudah bersertifikat maupun belum bersertifikat untuk memperoleh gambaran objektif kompetensi guru, baik profesional maupun pedagogik. Hasil UKG kemudian ditindaklanjuti melalui Program Guru Pembelajar sehingga diharapkan kompetensi guru yang masih belum optimal dapat ditingkatkan.

PPPPTK Matematika sebagai Unit Pelaksana Teknis Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan di bawah pembinaan Direktorat Jenderal Guru dan Tenaga Kependidikan mendapat tugas untuk menyusun modul guna mendukung pelaksanaan Guru Pembelajar. Modul ini diharapkan dapat menjadi sumber belajar bagi guru dalam meningkatkan kompetensinya sehingga mampu mengambil tanggung jawab profesi dengan sebaik-baiknya.

Yogyakarta, Maret 2016

Kepala PPPPTK Matematika,

Dr. Dra. Daswatia Astuty, M.Pd.

NIP. 196002241985032001

Daftar Isi

Daftar Tabel

Pendahuluan

A. Latar Belakang

Penyelenggaraan pendidikan sebagaimana yang diamanatkan dalam Undang-undang Nomor 20 Tahun 2003 tentang Sistem Pendidikan Nasional diharapkan dapat mewujudkan proses berkembangnya kualitas pribadi peserta didik sebagai generasi penerus bangsa di masa depan, yang diyakini akan menjadi faktor determinan bagi tumbuh kembangnya bangsa dan negara Indonesia sepanjang zaman.

Standar Proses Pendidikan Dasar dan Menengah yang tertuang dalam Permendikbud nomor 65 tahun 2013 menyatakan bahwa proses pembelajaran pada satuan pendidikan diselenggarakan secara interaktif, inspiratif, menyenangkan, menantang, memotivasi peserta didik untuk berpartisipasi aktif, serta memberikan ruang yang cukup bagi prakarsa, kreativitas, dan kemandirian sesuai dengan bakat, minat, dan perkembangan fisik serta psikologis peserta didik (Kemdikbud, 2013-b).

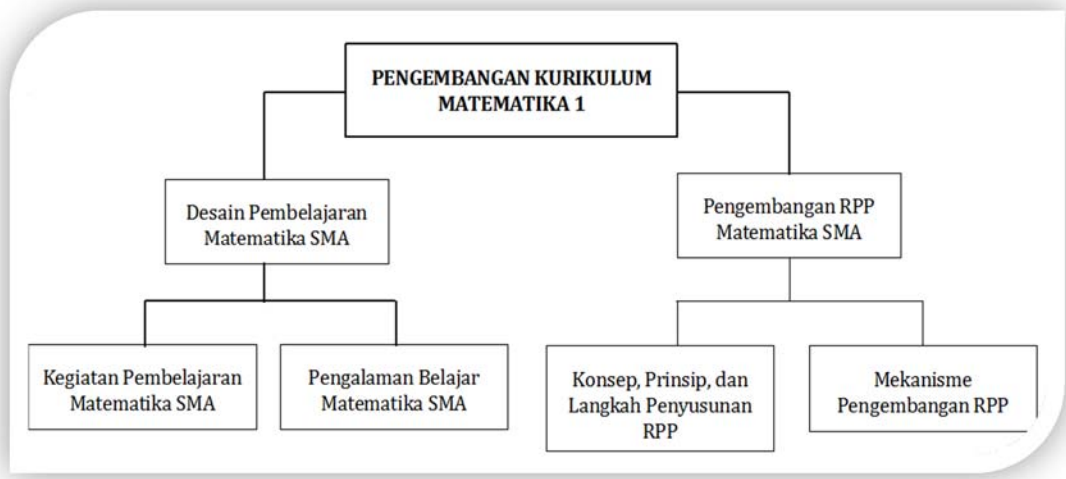
Dengan demikian kompetensi guru merupakan faktor yang sangat penting bagi keberhasilan upaya meningkatkan mutu pendidikan khususnya yang terkait dengan pembelajaran. Guru harus menjadi pendidik profesional yang memiliki kompetensi sebagai agen pembelajaran. Untuk standar kompetensi guru itu sendiri meliputi kompetensi pedagogi, kepribadian, profesional dan sosial. Standar ini telah ditetapkan dalam Peraturan Pemerintah nomor 19 Tahun 2005 tentang Standar Nasional Pendidikan, yang direvisi menjadi Peraturan Pemerintah nomor 32 tahun 2013. Secara lebih teknis kompetensi ini juga telah diuraikan dalam Peraturan Menteri Pendidikan Nasional nomor 16 tahun 2007 tentang Standar Kualifikasi Akademik dan Kompetensi Guru.

Modul ini merupakan bagian dari upaya peningkatan kompetensi guru, khususnya untuk kompetensi pedagogi dan kompetensi profesional. Modul ini digunakan sebagai bahan pembelajaran untuk guru-guru matematika SMA yang mengikuti diklat PKB, khususnya terkait dengan kompetensi pengembangan kurikulum matematika.

B. Tujuan

Modul ini disusun dalam rangka memfasilitasi guru-guru matematika SMA pada Diklat PKB agar dapat meningkatkan kompetensinya khususnya dalam mendesain pembelajaran matematika SMA, dan mengembangkan RPP, dengan baik dan terstandar.

C. Peta Kompetensi



D. Ruang Lingkup

Materi yang termuat pada modul ini sesuai dengan kebutuhan peningkatan kompetensi guru khususnya yang terkait dengan pengembangan kurikulum matematika. Secara garis besar ruang lingkup materi yang diuraikan dalam setiap kegiatan pembelajaran adalah sebagai berikut.

Kegiatan Pembelajaran 1 yakni tentang Desain Pembelajaran Matematika SMA, menguraikan tentang: (1) Kegiatan Pembelajaran Matematika SMA, dan (2) Pengalaman Belajar Matematika SMA. Kegiatan Pembelajaran 2, yakni tentang Pengembangan Rencana Pelaksanaan Pembelajaran (RPP), terdiri dari dua uraian materi yakni: (1) Konsep, Prinsip, Komponen, dan Langkah Penyusunan RPP, dan (2) Mekanisme Pengembangan RPP.

E. Saran Cara Penggunaan Modul

1. Modul ini terbagi atas dua kegiatan pembelajaran, yakni kegiatan pembelajaran 1 dan kegiatan pembelajaran 2. Masing-masing kegiatan pembelajaran memuat: Tujuan, Indikator Pencapaian Kompetensi, Uraian Materi, Aktivitas Pembelajaran, Latihan/ Kasus /Tugas, Rangkuman, Umpan Balik dan Tindak Lanjut, dan Kunci Jawaban.
2. Kajilah uraian materi dengan seksama sebelum pembelajaran dimulai, dan selama pembelajaran berlangsung.
3. Ikuti aktivitas pembelajaran yang telah diuraiakan dengan sungguh-sunguh dan semangat, baik secara individu maupun kelompok.
4. Kerjakan setiap butir soal latihan yang telah disediakan dengan benar dan cermat, untuk mengukur tingkat penguasaan Anda pada setiap KB, dan cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban yang terdapat pada bagian akhir KB.
5. Upayakan untuk selalu berkomunikasi dan bertukar fikiran dengan sesama peserta diklat maupun fasilitator, terlebih bila Anda mengalami kesulitan terkait materi pembelajaran.
6. Kerjakan soal-soal evaluasi yang telah disediakan pada bagian akhir modul ini.
7. Bila Anda menghendaki penjelasan untuk memudahkan pemahaman Anda tentang kata-kata/ istilah/ frase yang berhubungan dengan uraian naskah, yang Anda anggap sulit/ sukar dimengerti, maka Anda dapat melihat glosarium yang tersedia di bagian akhir modul ini.
8. Anda disarankan juga untuk membaca referensi yang menjadi rujukan utama penyusunan modul ini.

Kegiatan Pembelajaran 1:

Desain Pembelajaran Matematika SMA

A. Tujuan

Melalui kegiatan pembelajaran ini, dapat meningkatkan wawasan dan kompetensi guru khususnya dalam memahami tentang bagaimanakah mendesain kegiatan pembelajaran matematika SMA, dan bagaimanakah merancang pengalaman belajar matematika bagi siswa SMA.

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

Setelah mengikuti kegiatan pembelajaran ini, peserta diharapkan dapat menjelaskan tentang :

1. kegiatan pembelajaran matematika SMA yang menumbuhkan kerjasama
2. pengalaman belajar matematika SMA untuk meraih tujuan

C. Uraian Materi

1. Kegiatan Pembelajaran Matematika SMA

Pembelajaran matematika di SMA, dirancang dengan titik tolak pencapaian kompetensi pengetahuan yang rumuskan dalam KD 3 terintegrasi dengan pencapaian kompetensi keterampilan yang dirumuskan dalam KD 4. Pemilihan materi ajar dan proses pembelajaran dirancang dengan mempertimbangkan pencapaian/ berkembang kompetensi sikap yang dirumuskan dalam KD 1 dan KD 2. Pencapaian/ perkembangan sikap yang dirumuskan dalam KD 1 dan KD 2 merupakan dampak dari pembelajaran untuk mencapai kompetensi yang dirumuskan dalam KD 3 dan KD 4.

Perancangan pembelajaran dilakukan dengan pola pikir berikut: (1) Pemilihan pasangan KD 3 dan KD 4 yang bersesuaian, yaitu pemilihan pasangan pengetahuan dan keterampilan yang bersesuaian. Misalnya KD 3.1 dan KD 4.1 adalah pasangan pengetahuan dan keterampilan yang bersesuaian. (2) Selanjutnya menjabarkan materi dan proses pembelajaran agar peserta didik mencapai kompetensi yang dinyatakan dalam KD 3.1 dan KD 4.1 dengan mempertimbangkan pencapaian/ perkembangan sikap peserta didik seperti yang dinyatakan dalam KD 1 dan KD 2. Karakteristik materi pembelajaran matematika dan proses pencapaian kompetesi yang dinyatakan dalam KD 3 dan KD 4 di arahkan untuk pencapaian/ perkembangan kompetensi sikap peserta didik seperti yang dinyatakaan dalam KD 1 dan KD 2, misalnya sikap teliti dalam menggambar grafik fungsi eksponen dan logaritma. Ketelitian diperlukan ketika membuat skala yang proporsinal dalam menggambar grafik fungsi eksponen dan logaritma.

Pada proses pembelajaran langsung di mana peserta didik mengembangkan pengetahuan, kemampuan berpikir dan keterampilan psikomotorik melalui interaksi langsung dengan sumber belajar yang dirancang dalam silabus dan RPP berupa kegiatan-kegiatan pembelajaran. Dalam pembelajaran langsung tersebut peserta didik melakukan kegiatan belajar mengamati kejadian, peristwa, situasi, pola, fenomena yang terkait dengan matematika; menanya atau mempertanyakan mengapa atau bagaimana fenomena bisa terjadi; mengumpulkan atau menggali informasi melalui mencoba, percobaan, mengkaji, mendiskusikan untuk mendalami konsep yang terkait dengan fenomena tersebut; serta melakukan asosiasi atau menganalisis secara kritis dalam menjelaskan keterkaitan antar konsep dan menggunakan, memanfaatkan dan memilih prosedur/algoritma yang sesuai, menyusun penalaran dan generalisasi, dan mengkomunikasikan apa yang sudah ditemukannya dalam kegiatan analisis.

Proses pembelajaran langsung menghasilkan pengetahuan dan keterampilan langsung atau yang disebut dengan *instructional effect*. Pada Pembelajaran tidak langsung yang terjadi selama proses pembelajaran langsung tetapi tidak dirancang dalam kegiatan khusus. Pembelajaran tidak langsung berkenaan dengan pengembangan nilai dan sikap. Berbeda dengan pengetahuan tentang nilai dan sikap yang dilakukan dalam proses pembelajaran langsung oleh mata pelajaran tertentu, pengembangan sikap sebagai proses pengembangan moral dan perilaku dilakukan oleh seluruh mata pelajaran dan dalam setiap kegiatan yang terjadi di kelas, sekolah, dan masyarakat. Oleh karena itu, dalam proses pembelajaran, semua kegiatan yang terjadi selama belajar di sekolah dan di luar dalam kegiatan kokurikuler dan ekstrakurikuler terjadi proses pembelajaran untuk mengembangkan moral dan perilaku yang terkait dengan sikap.

Baik pembelajaran langsung maupun pembelajaran tidak langsung terjadi secara terintegrasi dan tidak terpisah. Pembelajaran langsung berkenaan dengan pembelajaran yang menyangkut KD (kompetensi dasar) yang dikembangkan dari kompetensi inti (KI-3 dan KI-4). Keduanya, dikembangkan secara bersamaan dalam suatu proses pembelajaran dan menjadi wahana untuk mengembangkan KD pada KI-1 dan KI-2. Pembelajaran tidak langsung berkenaan dengan pembelajaran yang menyangkut KD yang dikembangkan dari KI-1 dan KI-2.

Pembelajaran pokok tersebut dapat dirinci dalam berbagai kegiatan belajar sebagaimana tercantum dalam tabel berikut.

Tabel 1 Langkah Pembelajaran

Langkah Pembelajaran	Deskripsi Kegiatan	Bentuk hasil belajar
Mengamati *(observing)*	mengamati dengan indra (membaca, mendengar, menyimak, melihat, menonton, dan sebagainya) dengan atau tanpa alat	perhatian pada waktu mengamati suatu objek/membaca suatu tulisan/mendengar suatu penjelasan, catatan yang dibuat tentang yang diamati, kesabaran, waktu (*on task*) yang digunakan untuk mengamati
Menanya *(questioning)*	Membuat dan mengajukan pertanyaan, tanya jawab, berdiskusi tentang informasi yang belum dipahami, informasi tambahan	jenis, kualitas, dan jumlah pertanyaan yang diajukan peserta didik (pertanyaan faktual, konseptual, prosedural, dan hipotetik)

	yang ingin diketahui, atau sebagai klarifikasi.	
Mengumpulkan informasi *(experimenting)*	Mengeksplorasi, mencoba, berdiskusi, mendemonstrasi-kan, meniru bentuk/ gerak, melakukan eksperimen, membaca sumber lain selain buku teks, mengumpulkan data dari nara sumber melalui angket, wawancara, dan memodifikasi/ menambahi/mengembangkan	jumlah dan kualitas sumber yang dikaji/digunakan, kelengkapan informasi, validitas informasi yang dikumpulkan, dan instrumen/alat yang digunakan untuk mengumpulkan data.
Menalar/ Mengasosiasi *(associating)*	mengolah informasi yang sudah dikumpulkan, menganalisis data dalam bentuk membuat kategori, mengasosiasi atau menghubungkan fenomena/informasi yang terkait dalam rangka menemukan suatu pola, dan menyimpulkan.	mengembangkan interpretasi, argumentasi dan kesimpulan mengenai keterkaitan informasi dari dua fakta/konsep, interpretasi argumentasi dan kesimpulan mengenai keterkaitan lebih dari dua fakta/konsep/teori, mensintesis dan argumentasi serta kesimpulan keterkaitan antar berbagai jenis fakta-fakta/konsep/teori/pendapat; mengembangkan interpretasi, struktur baru,argumentasi, dan kesimpulan yang menunjukkan hubungan fakta/konsep/teori dari dua sumber atau lebih yang tidak

		bertentangan; mengembangkan interpretasi, struktur baru, argumentasi dan kesimpulan dari konsep/teori/pendapat yang berbeda dari berbagai jenis sumber.
Mengomunikasikan *(communicating)*	menyajikan laporan dalam bentuk bagan, diagram, atau grafik; menyusun laporan tertulis; dan menyajikan laporan meliputi proses, hasil, dan kesimpulan secara lisan	menyajikan hasil kajian (dari mengamati sampai menalar) dalambentuk tulisan, grafis, media elektronik, multi media dan lain-lain

2. Pengalaman Belajar Matematika SMA

Keterlibatan siswa secara aktif dalam proses pembelajaran sebagaimana dinyatakan dalam Permendikbud dilakukan melalui pengalaman belajar mengamati, menanya, mengumpulkan informasi/mengekslorasi, menalar/mengasosiasi, dan mengomu-nikasikan. Dalam pembelajaran, guru menugaskan siswa melakukaan pengamatan, bahan pengamatan dapat diambil dari buku teks, dari fenomena alam, konteks situasi/ masalah nyata. Selanjutnya kegiatan pengamatan yang dilakukan siswa ditindaklanjuti dengan memberi kesempatan kepada untuk siswa bertanya tentang/ hal-hal yang berkaitaan dengan objek observasi yang diberikan.

Dengan ini diharapkan kemampuan berpikir kritis siswa dapat bertumbuh. Agar siswa dapat bertanya dan kualitas pertanyaan baik, diperlukan bahan observasi yang menarik perhatian dan sesuai/ tidak jauh dari pengalaman belajar siswa. Keemudian guru memberi penugasan dimana siswa mengumpulkan informasi/ ekplorasi untuk memperluas, memperdalam, merinci objek observasi/ hal-hal yang berkaitan dengan objek yang diobservasi. Dengan rangkaian pengalaman belajar dalam kegiatan mengamati, menanya, dan mengumpulkan informasi/ eksplorasi siswa lebih siap untuk melakukan proses pembelajaran selanjutnya, yaitu menalar/ mengasosiasi. Tahap kegiatan menalar/ mengasosiasi, guru memberi penugasan kepada siswa untuk menghubungkan pengalaman yang diperoleh peserta didik pada kegiatan mengaamati, menanya, dan mengumpulkan informasi/ mengekplor melalui penugasan mensintesis pengetaahuan dan keterampilan sesuai tuntutan kompetensi yang dinyatakan dalam KD 3 dan KD 4 atau sebagian dari tuntutan kompetensi tersebut. Terakhir, siswa diberi kesempatan mengomunikasikan hasil kerja yang dilakukan dari proses mengamati-menanya-mengeksplor-mengasosiasi, dengan ini siswa mempunyai pengalaman berargumentasi, dan mengkomunikasikan gagasan dengan format yang sesuai.

Tahapan pelaksanaan pendekatan pembelajaran mengamati-menanya-mengeksplorasi-mengasosiasi-mengomunikasikan disesuikan dengan kebutuhan, sehingga terdapat variasi-variasi tahapan pembelajaran, misalnya dapat berupa mengamati-menanya-menalar-mengasosiasi-mengomunikasikan, atau mengamati-menanya-mengamati-menanya-menalar-mengasosiasi-mengomunikasikan, atau tahapan belajar lainnya yang memberi peserta didik pengalaman belajar mengamati, menanya, mengeksplor, mengasosiasi, dan mengomunikasikan.

Proses pembelajaran pada setiap satuan pendidikan baik itu pendidikan dasar ataupun pendidikan menengah hendaknya merupakan pembelajaran yang interaktif, inspiratif, menyenangkan, menantang, dan memotivasi peserta didik untuk berpartisipasi aktif, serta memberikan ruang yang cukup bagi prakarsa, kreativitas, dan kemandirian sesuai dengan bakat, minat, dan perkembangan fisik serta psikologis peserta didik. Itu sekurang-kurangnya yang diamanatkan oleh Permendiknas No. 41 Tahun 2007, dan Permendikbud No 65 Tahun 2013.

Belajar matematika artinya membangun pemahaman tentang konsep-konsep, fakta, prosedur, dan gagasan matematika. Menurut Hierbert dan Carpenter dalam Goos et al (Kemdikbud, 2014-c) bahwa memahami adalah membuat pengaitan antara gagasan, fakta, dan prosedur. Mengenalkan gaya belajar kepada siswa dan mengadaptasi berbagai macam strategi pembelajaran akan memudahkan siswa memahami konsep-konsep matematika. Hal ini didukung oleh pendapat Strong, Thomas, Perini dan Silver dalam Mink (Kemdikbud, 2014-c) yang mengatakan bahwa "pengenalan gaya belajar matematika dan mengadaptasi strategi pembelajaran matematika yang berbeda dapat memfasilitasi siswa belajar".

Dengan pemahaman seperti ini, memungkinkan seorang guru untuk dapat berupaya memberikan inspirasi kepada siswa dengan gagasan-gagasan matematika yang menantang dan menyenangkan yang dikemas dalam pembelajaran matematika yang interaktif. Sehingga secara kreatif siswa dapat menciptakan atau menemukan konsep-konsep matematika yang sebelumnya telah ditemukan para pendahulunya. Dengan adanya ruang gerak untuk proses penemuan bagi siswa memungkinkan siswa memiliki prakarsa dan kreativitas.

Pembelajaran matematika hendaknya berangkat dari hal-hal yang bersifat kongkret menuju abstrak. Pelaksanaan kegiatan belajar mengajar guru dituntut lebih mengoptimalkan penggunaan peralatan, media, alat peraga dan sumber belajar lainnya yang menarik dan berdaya guna sesuai dengan tuntutan kompetensi. Pembelajaran matematika intinya adalah pada problem solving, namun problem solving yang dilakukan secara otomatis juga menyentuh persoalan penalaran untuk membangun pola berfikir kritis peserta didik.

Untuk menciptakan pembelajaran yang dimaksud maka guru harus memperhatikan pilar-pilar pembelajaran, yaitu:

1) konsep-konsep disajikan dengan logika matematika sederhana dan disajikan dengan bahasa yang mudah dipahami oleh peserta didik sehingga baik peserta didik berkemampuan rendah pun dapat merasakan kemudahan mempelajari konsep-konsep tersebut. Guru diharapkan memiliki pengetahuan mengenai kemampuan yang siswa miliki yang terkait dengan materi yang akan diajarkan;
2) menumbuhkan keasyikan dalam belajar, rasa ingin tahu sehingga akan terus mengeksplor serta melakukan investigasi dalam kegiatan belajar dalam memecahkan soal-soal dan masalah-masalah dalam materi terkait;

3) menumbuhkan suasana kesenangan dan keriangan (*fun*) dalam kegiatan pembelajaran, yaitu terciptanya suasana rileks, tidak tegang atau cemas (*anxiety*) baik, bebas berpendapat yang berbeda dari pendapat yang lainnya, dihargai sekalipun pendapatnya tidak sepenuhnya benar, kepekaan dan peduli dalam merespons terhadap masalah yang dikemukakan /dialami peserta didik, serta lingkungan belajar menarik (misalnya keadaan kelas terang, pengaturan tempat duduk leluasa untuk peserta didik bergerak).
4) aktif, yaitu pembelajaran yang berpusat pada peserta didik (*student centered*). Untuk mengaktifkan peserta didik, kata kunci yang dapat dipegang guru adalah adanya kegiatan yang dirancang untuk dilakukan peserta didik baik kegiatan berpikir maupun berbuat (*hands on dan minds on activities*). Fungsi dan peran guru lebih banyak sebagai fasilitator. Ciri-ciri pembelajaran aktif adalah peserta didik: aktif bertanya, aktif belajar, mengemukakan gagasan, merespon gagasan orang lain dan membandingkannya dengan gagasannya sendiri. Bentuk kegiatan yang mendukung belajar aktif misalnya: bermain peran, menulis dengan kata – kata sendiri, belajar kelompok, memecahkan masalah, diskusi, mempraktikan keterampilan, melakukan kegiatan investigasi dan eksplorasi. Pembelajaran berpusat pada peserta didik mempunyai ciri-ciri seperti tertera pada tabel berikut.

Tabel 2 Ciri pembelajaran berpusat siswa

Guru	Peserta didik
1. sebagai fasilitator, bukan penceramah 2. memantau kegiatan belajar peserta didik 3. memberikan umpan balik 4. mengajukan pertanyaan yang menantang 5. mempertanyakan gagasan peserta didik untuk menuntun mereka menemukan jawaban terhadap permasalahan mereka	1. aktif bertanya 2. aktif belajar 3. mengemukakan gagasan 4. merespon gagasan orang lain dan membandingkannya dengan gagasannya sendiri 5. fokus pembelajaran pada peserta didik bukan Guru.

pembelajaran didesain sedemikian rupa sehingga dapat menstimulasi peserta didik untuk mengembangkan gagasannya (kreatif dan inovatif) dengan memanfatkan sumber belajar yang ada. Hal ini dapat dilakukan dengan cara: menyajikan suatu situasi yang menarik (kontekstual) sehingga peserta didik dapat merespon untuk menyelesaikan permasalahan sesuai dengan pengalaman dan pengetahuan mereka (informal), memberi kebebasan untuk mengembangkan gagasan dan pengetahuan baru, bersikap respek dan menghargai ide–ide peserta didik, memberikan waktu yang cukup unuk peserta didik berpikir dan menghasilkan karya, serta mengajukan pertanyaan–pertanyaan untuk menggugah kreativitas seperti : "mengapa", "bagaimana" , "apa yang terjadi jika….", dan bukan pertanyaan "apa" atau "kapan",

efektifitas, yaitu pembelajaran yang berfokus pada kompetensi yang harus dikuasai peserta didik setelah proses pembelajaran berlangsung (seperti dicantumkan dalam tujuan pembelajaran) dengan menggunakan cara yang efisien,

kreatif : pembelajaran didesain sedemikian rupa sehingga dapat menstimulasi peserta didik untuk mengembangkan gagasannya dengan memanfatkan sumber belajar yang ada.

efektif : pembelajaran yang menghasilembar kerjaan kompetensi yang harus dikuasai peserta didik setelah proses pembelajaran berlangsung (seperti dicantumkan dalam tujuan pembelajaran) dengan menggunakan cara yang efisien.

D. Aktifitas Pembelajaran

Kegiatan 1

Diskusikan dalam kelompok kecil:

Dalam pembelajaran matematika di SMA, terdapat proses pembelajaran langsung dan proses pembelajaran tidak langsung. Jelaskan apa dan bagaimana kedua jenis proses pembelajaran tersebut!

Kegiatan 2

Diskusikan dalam kelompok kecil:

Keterlibatan siswa secara aktif dalam proses pembelajaran sesuai standar proses dilakukan melalui pengalaman belajar mengamati, menanya, mengumpulkan informasi/ mengeksplorasi, menalar/mengasosiasi, dan mengomunikasikan. Jelaskan bentuk-bentuk kegiatan pembelajaran dari masing-masing pembelajaran tersebut!

Kegiatan 3

Diskusikan dalam kelompok kecil:

Untuk menciptakan pembelajaran matematika yang sesuai harapan, maka guru harus memperhatikan pilar-pliar pembelajaran. Jelaskan pilar-pilar pembelajaran itu!

E. Latihan/Kasus/Tugas

Pilihlah dengan memberi tanda silang (X) pada jawaban yang Anda anggap benar!

1. Jelaskan apa yang dimaksud indikator pencapaian kompetensi.
2. Dalam pembelajaran meniscayakan adanya tujuan pembelajaran. Jelaskan apa yang dimaksud tujauan pembelajaran
3. Kegiatan mengumpulkan informasi dalam pembelajaran akan diikuti dengan mengolah informasi. Berikan gambaran singkat mengenai mengolah informasi
4. Misalkan kompetensi yang akan diraih adalah menentukan ruang sampel suatu percobaan dan guru menginginkan suatu penugasan yang dapat menumbuhkan kerjasama antara siswa. Berikan contoh kegiatan yang sesuai

F. Rangkuman

1. Pembelajaran matematika di SMA, dirancang dengan titik tolak pencapaian kompetensi pengetahuaan yang rumuskan dalam KD3 terintegrasi dengan pencapaian kompetensi keterampilan yang dirumuskan dalam KD4. Pemilihan materi ajar dan proses pembelajaran dirancang dengan mempertimbangkan pencapaian/ berkembang kompetensi sikap yang dirumuskan dalam KD 1 dan KD 2.
2. Keterlibatan siswa secara aktif dalam proses pembelajaran sesuai standar proses dilakukan melalui pengalaman belajar mengamati, menanya, mengumpulkan informasi/ mengeksplorasi, menalar/mengasosiasi, dan mengomunikasikan.
3. Pilar-pliar pembelajaran matematika.
   a. Konsep-konsep disajikan dengan logika matematika sederhana dan disajikan dengan bahasa yang mudah dipahami oleh peserta didik.
   b. Menumbuhkan keasyikan dalam belajar, dan rasa ingin tahu.
   c. Menumbuhkan suasana kesenangan dan keriangan (fun) dalam kegiatan pembelajaran.
   d. Aktif.

e. Pembelajaran didesain agar menstimulasi peserta didik untuk mengembangkan gagasannya .
f. Efektifitas.
g. Kreatif.
h. Efektif.

G. Umpan Balik dan Tindak Lanjut

Cocokkanlah jawaban Anda dengan kunci jawaban yang terdapat pada bagian akhir Kegiatan Pembelajaran ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian gunakan rumus berikut ini untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda dalam Kegiatan Pembelajaran ini.

Rumus:

$$\text{Tingkat Penguasaan} = \frac{\text{Jumlah jawaban yang benar}}{\text{Jumlah soal}} \text{ x } 100\%$$

Arti tingkat penguasaan yang Anda capai:

90 – 100	=	Baik sekali
80 – 89	=	Baik
70 – 79	=	Cukup
< 70	=	Kurang

Jika tingkat penguasaan Anda minimal 80%, maka Anda dinyatakan berhasil dengan baik. Anda dapat melanjutkan untuk mempelajari Kegiatan Pembelajaran berikutnya. Sebaliknya, bila tingkat penguasaan Anda kurang dari 80%, silakan pelajari kembali uraian yang terdapat dalam Kegiatan Pembelajaran ini, khususnya bagian yang belum Anda kuasai.

H. Kunci Jawaban

1. Rumusan yang merupakan penanda perilaku (sikap, pengetahuan dan keterampilan) terkait isi yang akan digunakan guru sebagai landasan pembelajaran
2. Rumusan yang merupakan fokus utama perubahan perilaku dalam proses penguasaan kompetensi yang dikembangkan dalam proses pembelajaran untuk mencapai standar kompetensi lulusan yang telah dicanangkan

3. Intinya adalah mengolah informasi yang sudah dikumpulkan, menganalisis data, mengasosiasi atau menghubungkan fenomena/informasi yang terkait dalam rangka menemukan suatu pola, dan menyimpulkan
4. Contoh kegiatan harus memuat sustu trial atau percobaan yang didalamnya memuat kerjasama.

Kegiatan Pembelajaran 2

Pengembangan Rencana Pelaksanaan Pembelajaran (RPP) Matematika SMA

A. Tujuan

Melalui kegiatan pembelajaran ini, dapat meningkatkan wawasan dan kompetensi guru khususnya dalam memahami tentang konsep penyusunan RPP, prinsip penyusunan RPP, komponen RPP, dan langkah penyusunan RPP, serta mampu menyusun RPP sesuai dengan mekanisme pengembangan RPP

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

Setelah mengikuti pembelajaran modul ini, peserta diharapkan dapat:

1. menjelaskan tentang konsep penyusunan RPP,
2. menjelaskan tentang prinsip penyusunan RPP,
3. menjelaskan tentang komponen RPP,
4. menjelaskan tentang langkah penyusunan RPP, dan
5. menyusun RPP sesuai dengan mekanisme pengembangan RPP
6. menyusun indikator pencapaian kompetensi

C. Uraian Materi

1. Konsep, Prinsip, Komponen, dan Langkah Penyusunan RPP

Sesuai standar proses bahwa tahap pertama dalam pembelajaran adalah perencanaan pembelajaran yang diwujudkan dengan kegiatan penyusunan RPP. RPP adalah rencana kegiatan pembelajaran tatap muka untuk satu pertemuan atau lebih. RPP dikembangkan dari silabus untuk mengarahkan kegiatan pembelajaran peserta didik dalam upaya mencapai Kompetensi Dasar (KD). Setiap pendidik pada satuan pendidikan berkewajiban menyusun RPP secara lengkap dan sistematis agar pembelajaran berlangsung secara interak tif, inspiratif, menyenangkan, menantang, efisien, memotivasi peserta didik untuk berpartisipasi aktif, serta memberikan ruang yang cukup bagi prakarsa, kreativitas, dan kemandirian sesuai dengan bakat, minat, dan perkembangan fisik serta psikologis peserta didik. RPP disusun berdasarkan KD yang dilaksanakan dalam satu kali pertemuan atau lebih.

Dalam menyusun RPP seorang guru harus memperhatikan prinsip-prinsip penyusunan RPP, yaitu sebagai berikut.

1) Setiap RPP harus secara utuh memuat kompetensi dasar sikap spiritual (KD dari KI-1), sosial (KD dari KI-2), pengetahuan (KD dari KI-3), dan keterampilan (KD dari KI-4).
2) Satu RPP dapat dilaksanakan dalam satu kali pertemuan atau lebih.
3) Memperhatikan perbedaan individu peserta didik.
4) RPP disusun dengan memperhatikan perbedaan kemampuan awal, tingkat intelektual, minat, motivasi belajar, bakat, potensi, kemampuan sosial, emosi,gaya belajar, kebutuhan khusus, kecepatan belajar, latar belakang budaya, norma, nilai, dan/atau lingkungan peserta didik.
5) Berpusat pada peserta didik.
6) Proses pembelajaran dirancang dengan berpusat pada peserta didik untuk mendorong motivasi, minat, kreativitas, inisiatif, inspirasi, kemandirian, dan semangat belajar, menggunakan pendekatan saintifik meliputi mengamati, menanya, mengumpulkan informasi/mencoba, menalar/mengasosiasi, dan mengomunikasikan.
7) Berbasis konteks.
8) Proses pembelajaran yang menjadikan lingkungan sekitarnya sebagai sumber belajar.
9) Berorientasi kekinian.
10) Pembelajaran yang berorientasi pada pengembangan ilmu pengetahuan dan teknologi, dan nilai-nilai kehidupan masa kini.
11) Mengembangkan kemandirian belajar.
12) Pembelajaran yang memfasilitasi peserta didik untuk belajar secara mandiri.
13) Memberikan umpan balik dan tindak lanjutpembelajaran.
14) RPP memuat rancangan program pemberian umpan balik positif, penguatan, pengayaan, dan remedi.

15) Memiliki keterkaitan dan keterpaduan antarkompetensi dan/ atau antarmuatan.
16) RPP disusun dengan memperhatikan keterkaitan dan keterpaduan antara KI, KD, indikator pencapaian kompetensi, materi pembelajaran, kegiatan pembelajaran, penilaian, dan sumber belajar dalam satu keutuhan pengalaman belajar. RPP disusun dengan mengakomodasikan pembelajaran tematik, keterpaduan lintas mata pelajaran, lintas aspek belajar,dan keragaman budaya.
17) Memanfaatkan teknologi informasi dan komunikasi
18) RPP disusun dengan mempertimbangkan penerapan teknologi informasi dan komunikasi secara terintegrasi, sistematis, dan efektif sesuai dengan situasi dan kondisi.

Komponen RPP sesuai dengan Permendikbud Nomor 103 tahun 2014 paling sedikit memuat: (1) identitas sekolah/madrasah, mata pelajaran, dan kelas/semester; (2) alokasi waktu; (3) KI,KD, indikator pencapaian kompetensi; (4) materi pembelajaran; (5) kegiatan pembelajaran; (6) penilaian; dan (7) media/alat, bahan, dan sumber belajar.

Guru harus dapat menyusun dan mengembangkan RPP sesuai dengan karakteristik peserta didik dan materi pelajaran yang akan dibahas, begitu juga dengan komponennya, misalnya menambahkan tujuan pembelajaran secara utuh mencakup pengetahuan, keterampilan, dan sikap yang ingin dicapai sebagai hasil pembelajaran tertentu. Semua komponen tersebut dituangkan dalam RPP dengan menggunakan format seperti berikut.

Format RPP

RENCANA PELAKSANAAN PEMBELAJARAN (RPP)

Sekolah : ....
Mata pelajaran : ....
Kelas/Semester : ....
AlokasiWaktu : ....

A. Kompetensi Inti (KI)
B. Kompetensi Dasar
   1. KD pada KI-1
   2. KD pada KI-2
   3. KD pada KI-3
   4. KD pada KI-4
C. Indikator Pencapaian Kompetensi
   1. Indikator KD pada KI-1
   2. Indikator KD pada KI-2
   3. Indikator KD pada KI-3
   4. Indikator KD pada KI-4
D. Materi Pembelajaran (dapat berasal dari buku teks pelajaran dan buku panduan guru, sumber belajar lain berupa muatan lokal, materi kekinian, konteks pembelajaran dari lingkungan sekitar yang dikelompokkan menjadi materi untuk pembelajaran reguler, pengayaan, dan remedial)
E. Kegiatan Pembelajaran
   1. Pertemuan Pertama: (... JP)
      a. KegiatanPendahuluan;
      b. Kegiatan Inti;
         - Mengamati
         - Menanya
         - Mengumpulkan informasi/mencoba
         - Menalar/mengasosiasi
         - Mengomunikasikan

c. Kegiatan Penutup

2. Pertemuan Kedua: (... JP)
   a. Kegiatan Pendahuluan
   b. Kegiatan Inti
      - Mengamati
      - Menanya
      - Mengumpulkan informasi/mencoba
      - Menalar/mengasosiasi
      - Mengomunikasikan
   c. Kegiatan Penutup
3. Pertemuan seterusnya.

F. Penilaian, Pembelajaran Remedial dan Pengayaan
   1. Teknik penilaian
   2. Instrumen penilaian
      a. Pertemuan Pertama
      b. Pertemuan Kedua
      c. Pertemuan seterusnya
   3. Pembelajaran remedial dan pengayaan
   Pembelajaran remedial dilakukan segera setelah kegiatan penilaian.

G. Media/alat, Bahan, dan Sumber Belajar
   1. Media/alat
   2. Bahan
   3. Sumber Belajar

Format di atas merupakan format yang memuat komponen RPP minimal, sehingga guru dapat mengembangkannya secara maksimal, sesuai dengan kebutuhan .

Untuk dapat menyusun RPP dengan baik dan mudah, guru hendaknya melakukan langkah-langkah penyunan RPP sebagai berikut.

1) Pengkajian silabus meliputi: (1) KI dan KD; (2) materi pembelajaran; (3) proses pembelajaran; (4) penilaian pembelajaran; (5) alokasi waktu; (6) sumber belajar.
2) Perumusan indikator pencapaian KD pada KI-3, dan KI-4 dan untuk mata pelajaran Agama dan PPKn juga merumus indicator pencapaian yang koheren dan linier untuk KI-1, KI-2.
3) Perumusan tujuan pembelajaran yang merupakan penambahan dari komponen minimal sesuai Permendikbud Nomor 103 tahun 2014.
4) Penyusunan Materi Pembelajaran.

   Materi pembelajaran dapat berasal dari buku teks pelajaran dan buku panduan guru, sumber belajar lain berupa muatan lokal, materi kekinian, konteks pembelajaran dari lingkungan sekitar yang dikelompokkan menjadi materi untuk pembelajaran reguler, pengayaan, dan remedial.
5) Penjabaran Kegiatan Pembelajaran yang ada pada silabus dalam bentuk yang lebih operasional berupa pendekatan saintifik disesuaikan dengan kondisi peserta didik dan satuan pendidikan termasuk penggunaan media, alat, bahan, dan sumber belajar.
6) Penentuan alokasi waktu untuk setiap pertemuan berdasarkan alokasi waktu pada silabus, selanjutnya dibagi ke dalam kegiatan pendahuluan, inti, dan penutup.
7) Pengembangan penilaian pembelajaran dengan cara menentukan lingkup, teknik, dan instrumen penilaian, serta membuat pedoman penskoran.
8) Menentukan strategi pembelajaran remedial segera setelah dilakukan penilaian.
9) Menentukan media, alat, bahan dan sumber belajar disesuaikan dengan yang telah ditetapkan dalam langkah penjabaran proses pembelajaran.

2. Mekanisme Pengembangan RPP

Pengembangan RPP dapat digambarkan sebagai suatu proses menjabarkan keterkaitan antara KI dan KD dengan ketercapaian SKL, melalui proses pembelajaran dan penilaian. Rangkain proses tersebut dapat digambarkan seperti pada gambar berikut.

Gambar 1. Keterkaitan KI dan SKL dalam Pembelajaran

Secara rinci penjelasan dari gambar di atas dijelaskan sebagai berikut.

a. Keterkaitan antara KI dan SKL.

KI-3 kompetensi pengetahuan yang dikembangkan menjadi Kompetensi Dasar (KD) dan Indikator Pencapaian Kompetensi (IPK), dan selanjutnya dikembangkan menjadi materi pokok/tema/topik yang harus dicapai oleh peserta didik melalui kegiatan pembelajaran (*though curriculum*) dan akan memberikan pengalaman belajar secara langsung (*direct teaching*). Untuk mengetahui keberhasilan peserta didik terhadap pengetahuan, dilakukan penilaian pengetahuan dalam bentuk tes tulis, tes lisan, atau penugasan.

KI-4 merupakan kompetensi keterampilan yang dikembangkan menjadi KD dan IPK dan harus dicapai oleh peserta didik melalui kegiatan pembelajaran (*though curriculum*) yang akan memberikan pengalaman belajar secara langsung (*direct teaching*). Penilaian kompetensi keterampilan dapat dilakukan antara lain dengan penilaian projek, unjuk kerja, atau portofolio.

KI-1 dan KI-2 merupakan kompetensi sikap spiritual dan sikap sosial (dapat dikembangkan menjadi KD dan IPK sesuai karakteristik mata pelajaran) yang harus dicapai peserta didik sebagai dampak penggiring (*nurturant effects*) dan merupakan pengalaman belajar tidak langsung (*indirect teaching*) melalui kegiatan pembelajaran yang dikembangkan guru. Penilaian ketercapaian kompetensi sikap tersebut dapat dilakukan melalui pengamatan/observasi, penilaian diri, penilaian antar teman, atau jurnal.

Keempat kompetensi tersebut harus dicapai peserta didik sebagai hasil pembelajaran secara utuh dan terpadu, agar peserta didik dapat mencapai kompetensi minimal sesuai dengan tuntutan Standar Kompetensi Lulusan (SKL).

Kegiatan pembelajaran yang dikembangkan menggunakan model pembelajaran yang sesuai dengan pendekatan saintifik, yaitu pendekatan pembelajaran yang memberikan pengalaman belajar kepada peserta didik melalui kegiatan mengamati, menanya, mengumpulkan informasi/ mencoba, menalar/ mengasosiasi, dan mengomunikasikan.

b. Mengembangkan Indikator Pencapaian Kompetensi (IPK).

Indikator merupakan rumusan yang menggambarkan karakteristik, ciri-ciri, perbuatan, atau respon yang harus ditunjukkan atau dilakukan oleh peserta didik dan digunakan sebagai penanda/indikasi pencapaian kompetensi dasar. Indikator Pencapaian Kompetensi (IPK) adalah perilaku yang dapat diukur dan/atau diobservasi untuk menunjukkan ketercapaian kompetensi dasar tertentu yang menjadi acuan penilaian mata pelajaran. Indikator Pencapaian Kompetensi (IPK) dapat dirumuskan dengan menggunakan kata kerja operasional yang dapat diamati dan diukur, yang mencakup sikap, pengetahuan, dan keterampilan.

Indikator merupakan penanda pencapaian KD yang ditandai oleh perubahan perilaku yang dapat diukur yang mencakup sikap, pengetahuan, dan keterampilan. Indikator untuk KD yang diturunkan dari KI-1 dan KI-2 dirumuskan dalam bentuk perilaku umum yang bermuatan nilai dan sikap yang gejalanya dapat diamati sebagai dampak pengiring dari KD pada KI-3 dan KI-4. Indikator untuk KD yang diturunkan dari KI-3 dan KI-4 dirumuskan dalam bentuk perilaku spesifik yang dapat diamati dan terukur.

Indikator dikembangkan sesuai dengan karakteristik peserta didik, mata pelajaran, satuan pendidikan, potensi daerah dan dirumuskan dalam kata kerja operasional yang terukur dan/atau dapat diobservasi. Indikator digunakan sebagai dasar untuk menyusun alat penilaian. Indikator diurutkan dari kompetensi sederhana ke kompleks.

Penggunaan KKO pada IPK disesuaikan dengan karakteristik mata pelajaran, dan dikaitkan dengan materi pembelajaran yang memuat pengetahuan faktual, konseptual, dan prosedural (untuk kelas X), serta metakognisi (untuk kelas XI dan XII). Kata kerja operasional pada KD benar-benar terwakili dan teruji akurasinya pada deskripsi yang ada di kata kerja operasional indikator. Jika RPP digunakan untuk beberapa kali pertemuan, maka indikator dirinci untuk setiap pertemuan.

Beberapa hal yang perlu diperhatikan dalam merumuskan indikator pencapaian kompetensi adalah sebagai berikut.

1) Untuk satu KD dirumuskan minimal ke dalam dua indikator pencapaian kompetensi. Jumlah dan variasi rumusan indikator disesuaikan dengan karakteristik, kedalaman, dan keluasan KD, serta disesuaikan dengan karakteristik peserta didik, mata pelajaran, satuan pendidikan.
2) Perumusan indikator dalam bentuk kata kerja operasional yang dapat diukur atau diamati kinerjanya melalui penilaian.
3) Rumusan indikator hendaknya relevan dan merinci kompetensi dasar sehingga dapat digunakan sebagai acuan pembelajaran dan penilaian dalam mencapai kompetensi.
4) Rumusan indikator hendaknya disesuaikan dengan prinsip-prinsip pembelajaran matematika berdasarkan masalah, memberikan pengalaman belajar bagi siswa, seperti menyelesaikan masalah otentik (masalah

bersumber dari fakta dan lingkungan budaya), berkolaborasi, berbagi pengetahuan, saling membantu, berdiskusi dalam menyelesaikan masalah.

5) Rumusan indikator berbeda dengan tujuan pembelajaran. Rumusan tujuan pembelajaran merupakan kemampuan atau hasil belajar yang dicapai dikaitkan dengan kondisi, situasi, karakteristik pembelajaran/ peserta didik/ satuan pendidikan/ daerah.

Indikator memiliki kedudukan yang sangat strategis dalam mengembangkan pencapaian kompetensi. Indikator berfungsi sebagai pedoman dalam:

1) mengembangkan materi pembelajaran,
2) mendesain kegiatan pembelajaran yang efektif,
3) mengembangkan bahan ajar, dan
4) merancang dan melaksanakan penilaian dalam menentukan bentuk dan jenis penilaian.

Indikator pengetahuan dan keterampilan merupakan hasil belajar langsung, dapat dikembangkan hingga tingkat kompetensi tertinggi (mencipta). Adapun indikator sikap merupakan hasil belajar tidak langsung setelah dilakukan kegiatan untuk mencapai pengetahuan dan keterampilan.

c. Mengidentifikasi Materi Pembelajaran.

Materi pembelajaran dikembangkan dari KD-3 dan/atau KD-4, serta memperhatikan KD-1 dan KD-2 sebagai dampak penggiring (nurturant effects) hasil belajar peserta didik. Materi Pembelajaran berasal dari buku teks pelajaran dan buku panduan guru, sumber belajar lain berupa muatan lokal, materi kekinian, konteks pembelajaran dari lingkungan sekitar yang dikelompokkan menjadi materi untuk pembelajaran reguler, pengayaan, dan remedial. Selain itu materi pembelajaran juga harus mencakup materi-materi yang dapat melatih peserta didik untuk memiliki pengetahuan factual, konseptual, procedural dan/ atau metakognitif.

Materi pokok yang akan diajarkan, termasuk analisis topik, dan peta konsep. Adapun materi prasyarat, yaitu materi yang harus dikuasai oleh siswa sebagai dasar untuk mempelajari materi pokok. Dalam hal ini perlu dilakukan tes kemampuan awal siswa.

Materi pembelajaran, memuat fakta, konsep, prinsip, dan prosedur yang relevan, dan ditulis dalam bentuk butir-butir sesuai dengan rumusan indikator ketercapaian kompetensi. Fakta, yaitu kejadian atau peristiwa yang dapat dilihat, didengar, dibaca, disentuh, atau diamati. Konsep, merupakan ide yang mempersatukan fakta-fakta atau dengan kata lain konsep merupakan suatu penghubung antara fakta-fakta yang saling berhubungan. Prinsip, merupakan generalisasi tentang hubungan antara konsep-konsep yang berkaiatan. Prosedur, merupakan sederatan langkah yang bertahap dan sistematis dalam menerapkan prinsip.

Untuk melakukan identifikasi materi pembelajaran harus mempertimbangkan hal-hal antara lain sebagai berikut.

1) Potensi peserta didik.
2) Relevansi dengan karakteristik daerah.
3) Tingkat perkembangan fisik, intelektual, emosional, sosial, dan spritual peserta didik.
4) Kebermanfaatan bagi peserta didik.
5) Struktur keilmuan.
6) Aktualitas, kedalaman, dan keluasan materi pembelajaran.
7) Relevansi dengan kebutuhan peserta didik dan tuntutan lingkungan.
8) Alokasi waktu.

d. Mengembangkan kegiatan pembelajaran

Kegiatan pembelajaran dirancang untuk memberikan pengalaman belajar yang melibatkan proses mental dan fisik melalui interaksi antar peserta didik, peserta didik dengan guru, lingkungan, dan sumber belajar lainnya untuk mencapai KD. Terkait pengalaman belajar, dapat dilihat kembali pada kegiatan pembelajaran sebelumnya.

Sintaksis pembelajaran adalah langkah-langkah pembelajaran yang dirancang dan dihasilkan dari kajian teori yang melandasi model pembelajaran berbasis konstruktivistik. Sementara, rencana pembelajaran adalah operasional dari sintaks. Sehingga skenario pembelajaran yang terdapat pada rencana pembelajaran disusun mengikuti setiap langkah-langkah pembelajaran (sintaks). Sintaks model pembelajaran terdiri dari 5 langkah pokok, yaitu: (1) apersepsi budaya, (2) orientasi dan penyelesaian masalah, (3) persentase dan mengembangkan hasil kerja, (4) temuan objek matematika dan penguatan skemata baru, dan (5) menganalisis dan mengevaluasi proses dan hasil penyelesaian masalah. Kegiatan yang dilakukan untuk setiap tahapan pembelajaran dijabarkan sebagai berikut.

1) Kegiatan guru pada tahap apersepsi budaya antara lain, sebagai berikut.
    a) Menginformasikan indikator pencapaian kompetensi dasar.
    b) Menciptakan persepsi positif dalam diri siswa terhadap budayanya dan matematika sebagai hasil konstruksi sosial.
    c) Menjelaskan pola interaksi sosial, menjelaskan peranan siswa dalam menyelesaikan masalah.
    d) Memberikan motivasi belajar pada siswa melalui penanaman nilai matematis, soft skill dan kebergunaan matematika.
    e) Memberi kesempatan pada siswa menanyakan hala-hal yang sulit dimengerti pada materi sebelumnya.
2) Kegiatan guru pada tahap penyelesaian masalah dengan pola interaksi edukatif antara lain sebagai berikut.
    a) Membentukan kelompok.
    b) Mengajukan masalah yang bersumber dari fakta dan lingkungan budaya siswa.
    c) Meminta siswa memahami masalah secara individual dan kelompok.
    d) Mendorong siswa bekerjasama menyelesaikan tugas-tugas.
    e) Membantu siswa merumuskan hipotesis (dugaan).
    f) Membimbing, mendorong/ mengarahkan siswa menyelesaikan masalah dan mengerjakan latihan soal.
    g) Memberikan scaffolding pada kelompok atau individu yang mengalami kesulitan.

h) Mengkondisikan antar anggota kelompok berdiskusi, berdebat dengan pola kooperatif.

i) Mendorong siswa mengekspresikan ide-ide secara terbuka.

j) Membantu dan memberi kemudahan pengerjaan siswa dalam menyelesaikan masalah dalam pemberian solusi.

3) Kegiatan guru pada tahap persentasi dan mengembangkan hasil kerja antara lain sebagai berikut.

a) Memberi kesempatan pada kelompok mempresentasikan hasil penyelesaian masalah di depan kelas.

b) Membimbing siswa menyajikan hasil kerja.

c) Memberi kesempatan kelompok lain mengkritisi/ menanggapi hasil kerja kelompok penyaji dan memberi masukan sebagai alternatif pemikiran membantu siswa menemukan konsep berdasarkan masalah.

d) Mengontrol jalannya diskusi agar pembelajaran berjalan dengan efektif .

e) Mendorong keterbukaan, proses-proses demokrasi.

f) Menguji pemahaman siswa.

4) Kegiatan guru pada tahap temuan objek matematika dan penguatan skemata baru antara lain sebagai berikut.

a) Mengarahkan siswa membangun konsep dan prinsip secara ilmiah.

b) Menguji pemahaman siswa atas konsep yang ditemukan melalui pengajuan contoh dan bukan contoh konsep.

c) Membantu siswa mendefinisikan dan mengorganisasikan tugas-tugas belajar yang berkaitan dengan masalah.

d) Memberi kesempatan melakukan konektivitas konsep dan prinsip dalam mengerjakan soal tantangan.

e) Memberikan scaffolding.

5) Kegiatan guru pada tahap menganalisis dan mengevaluasi proses dan hasil penyelesaian masalah antara lain sebagai berikut.

a) Membantu siswa mengkaji ulang hasil penyelesaian masalah.

b) Memotivasi siswa untuk terlibat dalam penyelesaian masalah yang selektif.

c) Mengevaluasi materi akademik: memberi kuis atau membuat peta konsep atau peta materi.

Kegiatan pembelajaran sendiri diorganisasikan menjadi tiga tahap kegiatan yaitu, kegiatan pendahuluna, kegiatan inti, dan kegiatan penutup. Secara rinci tahapan ini diuraikan sebagai berikut.

1) Kegiatan pendahuluan, kegiatan yang dilakukan guru adalah menyiapkan peserta didik secara psikis dan fisik untuk mengikuti proses pembelajaran, mengajukan pertanyaan-pertanyaan tentang materi yang sudah dipelajari dan terkait dengan materi yang akan dipelajari, mengantarkan peserta didik kepada suatu permasalahan atau tugas yang akan dilakukan untuk mempelajari suatu materi dan KD yang akan dikuasai, menyampaikan garis besar cakupan materi dan penjelasan tentang kegiatan yang akan dilakukan peserta didik untuk menyelesaikan permasalahan atau tugas, dan menyampaikan lingkup dan teknik penilaian.
2) Kegiatan inti, merupakan proses pembelajaran untuk mencapai kompetensi, yang dilakukan secara interaktif, inspiratif, menyenangkan, menantang, memotivasi peserta didik untuk berpartisipasi aktif, serta memberikan ruang yang cukup bagi prakarsa, kreativitas, dan kemandirian sesuai dengan bakat, minat dan perkembangan fisik serta psikologis peserta didik. Kegiatan inti menggunakan pendekatan saintifik dan disesuaikan dengan karakteristik mata pelajaran matematika dan peserta didik. Guru memfasilitasi peserta didik untuk melakukan pengalaman belajar berupa mengamati, menanya, mengumpulkan informasi/ mencoba, menalar/ mengasosiasi, dan mengomunikasikan, atau memfasilitasi kegiatan sesuai dengan langkah model yang digunakan. Dalam setiap kegiatan guru harus memperhatikan perkembangan sikap peserta didik pada kompetensi dasar dari KI-1 dan KI-2 antara lain mensyukuri karunia Tuhan, jujur, teliti, kerja sama, toleransi, disiplin, taat aturan, menghargai pendapat orang lain yang tercantum dalam silabus dan RPP.

3) Kegiatan penutup, terdiri atas kegiatan guru bersama peserta didik antara lain membuat rangkuman/simpulan pelajaran, melakukan refleksi, dan memberikan umpan balik terhadap proses dan hasil pembelajaran, dan kegiatan guru untuk melakukan penilaian, merencanakan kegiatan tindak lanjut, dan menyampaikan rencana pembelajaran pada pertemuan berikutnya.

e. Menentukan Model dan/ atau Metode Pembelajaran

Model dan/ atau metode dipilih yang sesuai dengan pendekatan saintifik yang diperlukan untuk mengembangkan sikap (spiritual dan sosial), pengetahuan, dan keterampilanyang pelaksanaannya difokuskan kepada kesesuaian dengan pengalaman belajar peserta untuk mencapai kompetensi tertentu. Selain itu, pemilihan model atau metode juga harus mempertimbangkan karakteristik KD atau materi pembelajaran.

Jika kegiatan pembelajaran menggunakan model tertentu maka langkah-langkah kegiatan di RPP disesuaikan dengan langkah (sintaksis) model pembelajaran tersebut, untuk mengembangkan dan menciptakan pembelajaran saintifik. Lebih lanjut tentang model, metode, strategi pembelajaran, dapat dipelajari pada modul tersendiri.

f. Menentukan alokasi waktu

Penentuan alokasi waktu pada setiap KD didasarkan pada jumlah minggu efektif dan alokasi waktu mata pelajaran per minggu dengan mempertimbangkan jumlah KD, keluasan, kedalaman, tingkat kesulitan, dan tingkat kepentingan KD. Waktu harus leluasa untuk memungkinkan peserta didik berproses (menyelesaikan tugas dan mengikuti prosedur yang ditetapkan). Alokasi waktu dirinci dan disesuaikan dengan RPP karena yang dicantumkan pada silabus merupakan perkiraan waktu rerata untuk menguasai KD yang dibutuhkan oleh peserta didik yang beragam.

g. Mengembangkan Penilaian.

1) Penilaian pencapaian KD peserta didik dilakukan berdasarkan indikator.
2) Penilaian dilakukan dengan menggunakan penilaian autentik dan non autentik, dalam bentuk tertulis maupun lisan, pengamatan kinerja, pengukuran sikap, penilaian hasil karya berupa tugas, projek dan/atau produk, penggunaan portofolio, dan/atau penilaian diri.
3) Penilaian diarhkan untuk mendorong peserta didik menghasilkan karya, maka penyajian portofolio merupakan cara penilaian yang dapat dilakukan untuk jenjang pendidikan dasar dan menengah.
4) Penilaian diarahkan untuk mengukur pencapaian kompetensi.
5) Penilaian menggunakan acuan kriteria; yaitu berdasarkan apa yang bisa dilakukan peserta didik setelah mengikuti proses pembelajaran, dan bukan untuk menentukan posisi seseorang terhadap kelompoknya.
6) Sistem penilaiannya berkelanjutan dalam arti semua indikator ditagih, kemudian hasilnya dianalisis untuk menentukan KD yang telah dimiliki dan yang belum, serta untuk mengetahui kesulitan peserta didik. Hasil penilaian dianalisis untuk menentukan tindak lanjut.
7) Tindak lanjut hasil penilaian berupa perbaikan proses pembelajaran berikutnya, program remedi bagi peserta didik yang pencapaian kompetensinya di bawah ketuntasan, dan program pengayaan bagi peserta didik yang telah memenuhi ketuntasan.
8) Sistem penilaian disesuaikan dengan pengalaman belajar yang ditempuh dalam proses pembelajaran. Misalnya, jika pembelajaran menggunakan pendekatan tugas observasi lapangan maka evaluasi harus diberikan baik pada proses misalnya teknik wawancara, maupun produk berupa hasil melakukan observasi lapangan.

a. Menentukan alat/ bahan/ media, atau sumber belajar.

Merupakan rujukan, objek dan/atau bahan yang digunakan untuk kegiatan pembelajaran, yang berupa media cetak dan elektronik, nara sumber, serta lingkungan fisik, alam, sosial, dan budaya. Secara rinci tentang materi ini dibahas dalam modul tersendiri.

D. Aktifitas Pembelajaran

Kegiatan 1

Diskusikan dalam kelompok kecil.

Jelaskan tentang pengertian RPP, prinsip-prinsip penyusunan RPP, komponen RPP, dan langkah penyusunan RPP!

Kegiatan 2

Diskusikan dalam kelompok kecil.

Pengembangan RPP dapat digambarkan sebagai suatu proses menjabarkan keterkaitan antara KI dan KD dengan ketercapaian SKL, melalui proses pembelajaran dan penilaian? Jelaskan keterkaitan tersebut!

Kegiatan 3

Diskusikan dalam kelompok kecil.

Indikator merupakan penanda pencapaian KD yang ditandai oleh perubahan perilaku yang dapat diukur yang mencakup sikap, pengetahuan, dan keterampilan. Jelaskan hal yang perlu diperhatikan dalam merumuskan indikator pencapaian kompetensi!

Kegiatan 4

Diskusikan dalam kelompok kecil.

Materi pembelajaran dikembangkan dari KD-3 dan/atau KD-4, serta memperhatikan KD-1 dan KD-2 sebagai dampak penggiring *(nurturant effects)* hasil belajar peserta didik. Jelaskan hal-hal yang harus dipertimbangkan untuk melakukan identifikasi materi pembelajaran!

Kegiatan 5

Diskusikan dalam kelompok kecil.

Kegiatan pembelajaran dirancang untuk memberikan pengalaman belajar yang melibatkan proses mental dan fisik melalui interaksi antar peserta didik, peserta didik dengan guru, lingkungan, dan sumber belajar lainnya untuk mencapai KD. Jelaskan hal-hal yang harus diperhatikan dalam mengembangkan kegiatan pembelajaran!

Kegiatan 6

Diskusikan dalam kelompok kecil.

Kegiatan pembelajaran diorganisasikan menjadi tiga tahap kegiatan yaitu, kegiatan pendahuluna, kegiatan inti, dan kegiatan penutup. Jelaskan kegiatan-kegiatan yang dilakukan pada masing-masing tahap!

Kegiatan 7

Diskusikan dalam kelompok kecil.

Jelaskan secara umum bagaimana menentukan model dan/atau metode pembelajaran, menentukan alokasi waktu, dan mengembangkan penilaian, dalam penyusunan RPP!

Kegiatan 8

Diskusikan dalam kelompok kecil.

Selesaikan tugas 1, tugas 2, dan tugas 3, secara bertahap!

E. Latihan/Kasus/Tugas

Latihan

Pilihlah dengan memberi tanda silang (X) pada jawaban yang Anda anggap benar!

1. Berikut ini yang merupakan konsep tentang penyusunan RPP yang benar adalah ... .
   a. RPP adalah rencana kegiatan pembelajaran tatap muka untuk satu pertemuan atau lebih
   b. RPP dikembangkan dari silabus untuk mengarahkan kegiatan pembelajaran peserta didik dalam upaya mencapai indikator pencapaian kompetensi
   c. Penyusunan RPP merupakan rangkaian kegiatan yang dimulai dari kajian terhadap instrumen penilaian proses dan hasil pembelajran siswa
   d. RPP dikembangkan dari buku pedoman guru untuk mengarahkan kegiatan pembelajaran peserta didik dalam upaya mencapai Kompetensi Dasar (KD)
2. Prinsip-prinsip penyusunan RPP, antara lain adalah sebagai berikut, **kecuali** ....
   a. Proses pembelajaran yang menjadikan lingkungan sekitarnya sebagai sumber belajar

b. Pembelajaran yang memfasilitasi peserta didik untuk belajar secara bersama-sama dalam kelompok
c. Setiap RPP harus secara utuh memuat kompetensi dasar sikap spiritual, sosial, pengetahuan, dan keterampilan.
d. RPP disusun dengan mempertimbangkan penerapan teknologi informasi dan komunikasi secara terintegrasi, sistematis, dan efektif

3. Berikut ini adalah komponen-komponen yang termuat dalam sebuah RPP.
   (1) identitas sekolah/madrasah, mata pelajaran, dan kelas/semester;
   (2) alokasi waktu;
   (3) KI,KD, indikator pencapaian kompetensi;
   (4) tujuan pembelajaran
   (5) materi pembelajaran;
   (6) Pendekatan, model, dan metode pembelajaran
   (7) kegiatan pembelajaran;
   (8) penilaian;
   (9) media/alat, bahan, dan sumber belajar.

   Mengacu pada Permendikbud Nomor 103 tahun 2014 tentang Pembelajaran, dari komponen-komponen di atas yang bukan merupakan komponen minimal adalah ... .
   a. (1) dan (3)
   b. (2) dan (5)
   c. (4) dan (6)
   d. (8) dan (9)

4. Berikut ini merupakan hal yang terkait dengan perumusan indikator pencapaian kompetensi yang benar, **kecuali** ... .
   a. Untuk satu KD dirumuskan minimal ke dalam satu indikator pencapaian kompetensi
   b. Perumusan indikator dalam bentuk kata kerja operasional yang dapat diukur atau diamati kinerjanya melalui penilaian
   c. Rumusan indikator hendaknya relevan dan merinci kompetensi dasar sehingga dapat digunakan sebagai acuan pembelajaran dan penilaian dalam mencapai kompetensi

d. Rumusan indikator hendaknya disesuaikan dengan prinsip-prinsip pembelajaran matematika berdasarkan masalah, dan memberikan pengalaman belajar bagi siswa

5. Indikator memiliki kedudukan yang sangat strategis dalam mengembangkan pencapaian kompetensi. Fungsi indikator adalah sebagai berikut, **kecuali** ... .
   a. mengembangkan materi pembelajaran
   b. menentukan bentuk dan jenis penilaian
   c. mendesain kegiatan pembelajaran yang efektif
   d. mengembangkan media pembelajaran, dan menentukan alat dan bahan
6. Untuk melakukan identifikasi materi pembelajaran harus mempertimbangkan antara lain hal-hal sebagai berikut, **kecuali** ... .
   a. Alokasi waktu
   b. Potensi daerah
   c. Struktur keilmuan
   d. Kebermanfaatan bagi peserta didik
7. Berikut ini yang **bukan** merupakan hasil belajar yang akan dicapai melalui kegiatan pembelajaran adalah ... .
   a. Produk, yaitu alat peraga dan media yang terkait dengan materi pokok kompetensi dasar
   b. Kognitif, yaitu kemampuan matematisasi, kemampuan abstraksi, pola pikir deduktif, berpikir tingkat tinggi (berpikir kritis dan berpikir kreatif).
   c. Keterampilan, yaitu keterampilan menyelesaikan masalah, keterampilan berkolaborasi, kemampuan berkomunikasi.
   d. Afektif, yaitu menghargai budaya, penerimaan individu atas perbedaan yang ada, bekerjasama, tangguh menghadapi masalah, jujur mengungkapkan pendapat, berlatih berpikir kritis, kreatif, dan senang belajar matematika
8. Menguji pemahaman siswa atas konsep yang ditemukan melalui pengajuan contoh dan bukan contoh konsep, dan memberi kesempatan melakukan

konektivitas konsep dan prinsip dalam mengerjakan soal tantangan. Ini merupakan kegiatan yang dilakukan guru untuk tahapan pembelajaran ... .

a. apersepsi budaya
b. orientasi dan penyelesaian masalah
c. temuan objek matematika dan penguatan skemata baru
d. menganalisis dan mengevaluasi proses dan hasil penyelesaian masalah

9. Berikut ini yang **bukan** merupakan kegiatan guru pada tahap apersepsi budaya adalah ... .
   a. Menciptakan persepsi positif dalam diri siswa terhadap budayanya dan matematika sebagai hasil konstruksi sosial
   b. Memberikan motivasi belajar pada siswa melalui penanaman nilai matematis, soft skill dan kebergunaan matematika
   c. Menjelaskan pola interaksi sosial, menjelaskan peranan siswa dalam menyelesaikan masalah
   d. Mengarahkan siswa membangun konsep dan prinsip secara ilmiah
10. Kegiatan pembelajaran diorganisasikan menjadi tiga tahap kegiatan yaitu, kegiatan pendahuluna, kegiatan inti, dan kegiatan penutup. Berikut ini yang **bukan** merupakan kegiatan pendahuluan adalah ... .
   a. menyampaikan garis besar cakupan materi dan penjelasan tentang kegiatan yang akan dilakukan peserta didik
   b. menyiapkan peserta didik secara psikis dan fisik untuk mengikuti proses pembelajaran
   c. mengantarkan peserta didik kepada suatu permasalahan atau tugas yang akan dilakukan
   d. mengajukan pertanyaan-pertanyaan tentang materi akan dipelajari

Tugas 1

1. Buatlah rumusan indikator pencapaian kompetensi, sesuai dengan hasil analisis keterkaitan KI-KD, dan pemilihan materi pembelajaran.
2. Tuangkan hasil diskusi dalam format di LK-1, yang tersedia pada lampiran 1.

Tugas 2

1. Berdasarkan hasil tugas 1, susunlah rancangan penerapan pendekatan saintifik pada pembelajaran secara rinci.
2. Tuangkan hasil diskusi dalam format di LK-2, yang tersedia pada lampiran 2.

Tugas 3

1. Berdasarkan hasil tugas 1 dan tugas 2 di atas, susunlah RPP secara lengkap.
2. Pada komponen kegiatan pembelajaran, pilihlah satu model pembelajaran, dan gunakan sintak model pembelajaran tersebut untuk menentukan langkah-langkah pembelajarannya, dengan memperhatikan hasil perancangan penerapan pendekatan saintifik pada pembelajaran yang telah dituangkan dalam LK-2.

F. Rangkuman

1. Untuk dapat menyusun RPP dengan baik, maka guru harus memperhatikan prinsip-prinsip penyusunan RPP, komponen RPP, langkah penyusunan RPP, dan mekanisme pengembangan RPP.
2. Pengembangan RPP dapat digambarkan sebagai suatu proses menjabarkan keterkaitan antara KI dan KD dengan ketercapaian SKL, melalui proses pembelajaran dan penilaian.
3. Indikator merupakan rumusan yang menggambarkan karakteristik, ciri-ciri, perbuatan, atau respon yang harus ditunjukkan atau dilakukan oleh peserta didik dan digunakan sebagai penanda/indikasi pencapaian kompetensi dasar.
4. Materi pembelajaran dikembangkan dari KD-3 dan/atau KD-4, serta memperhatikan KD-1 dan KD-2 sebagai dampak penggiring *(nurturant effects)* hasil belajar peserta didik.
5. Kegiatan pembelajaran dirancang untuk memberikan pengalaman belajar yang melibatkan proses mental dan fisik melalui interaksi antar peserta didik, peserta didik dengan guru, lingkungan, dan sumber belajar lainnya untuk mencapai KD.
6. Kegiatan pembelajaran diorganisasikan menjadi tiga tahap kegiatan yaitu, kegiatan pendahuluna, kegiatan inti, dan kegiatan penutup.

7. Model dan/ atau metode pembelajaran yang dipilih hendaknya sesuai dengan pendekatan saintifik yang diperlukan untuk mengembangkan sikap (spiritual dan sosial), pengetahuan, dan keterampilan yang pelaksanaannya difokuskan kepada kesesuaian dengan pengalaman belajar peserta untuk mencapai kompetensi tertentu.
8. Penentuan alokasi waktu pada setiap KD didasarkan pada jumlah minggu efektif dan alokasi waktu mata pelajaran per minggu dengan mempertimbangkan jumlah KD, keluasan, kedalaman, tingkat kesulitan, dan tingkat kepentingan KD.
9. Penilaian pencapaian KD peserta didik dilakukan berdasarkan indikator

G. Umpan Balik dan Tindak Lanjut

Cocokkanlah jawaban Anda dengan kunci jawaban yang terdapat pada bagian akhir Kegiatan Pembelajaran ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian gunakan rumus berikut ini untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda dalam Kegiatan Pembelajaran ini.

Rumus:

$$\text{Tingkat Penguasaan} = \frac{\text{Jumlah jawaban yang benar}}{\text{Jumlah soal}} \text{ x } 100\%$$

Arti tingkat penguasaan yang Anda capai:

90 – 100	=	Baik sekali
80 – 89	=	Baik
70 – 79	=	Cukup
< 70	=	Kurang

Jika tingkat penguasaan Anda minimal 80%, maka Anda dinyatakan berhasil dengan baik. Anda dapat melanjutkan untuk mempelajari Kegiatan Pembelajaran berikutnya. Sebaliknya, bila tingkat penguasaan Anda kurang dari 80%, silakan pelajari kembali uraian yang terdapat dalam Kegiatan Pembelajaran ini, khususnya bagian yang belum Anda kuasai

H. Kunci Jawaban

1) a
2) b
3) c
4) a
5) d
6) b
7) a
8) c
9) d
10) d

Evaluasi

Pilihlah dengan memberi tanda silang (X) pada jawaban yang Anda anggap benar!

1. Berdasarkan KD yang bersesuaian, dirumuskan tujuan pembelajaran yang akan dicapai adalah "Dengan proses pendekatan saintifik siswa dapat mendeskripsikan prinsip induksi matematis". Pengalaman belajar siswa yang sesuai dengan tujuan tersebut adalah... .
   a. Mengamati dan menemukan pola induksi matematis
   b. Menemukan kesalahan dalam pernyataan matematis
   c. Membuktikan suatu pernyataan menggunakan induksi matematis
   d. Memanipulasi bentuk aljabar untuk membuktikan suatu pernyataan
2. Untuk membelajarkan KD "Mengidentifikasi relasi yang disajikan dalam berbagai bentuk yang merupakan fungsi" secara kontekstual dan aktual, pengalaman belajar yang dapat diberikan Pak Iwan kepada siswanya adalah ….
   a. siswa membuat berbagai bangun yang luasnya 30 cm^2, selanjutnya membuat tabel yang menunjukkan karakteristik setiap bangun, dan mendiskusikan bangun yang memiliki keliling terkecil.
   b. siswa mengukur panjang, lebar, tinggi dan berat berbagai obyek tiga dimensi, selanjutnya siswa membuat deskripsi hubungan antara berbagai ukuran masing-masing benda dengan beratnya.
   c. siswa mengukur keliling dan menentukan luas setiap bangun segibanyak beraturan, selanjutnya siswa memasukkan data ke dalam tabel, dan mendiskusikan berbagai pola yang telah mereka amati.
   d. siswa mengukur keliling enam persegi yang berbeda ukurannya kemudian mengisi tabel "panjang sisi" dan "keliling", selanjutnya siswa membuat prediksi keliling terbesar dan terkecil dari berbagai panjang sisi pada data baru yang diberikan
3. Diberikan KD "Merancang model matematika dari masalah program linear". Penugasan yang dapat menumbuhkan kerjasama antarsiswa adalah ... .
   a. Guru membagi kelas ke dalam beberapa kelompok, setiap kelompok diberi tugas mencari data sekunder perancangan pembangunan suatu rumah tinggal.

b. Guru membagi kelas ke dalam beberapa kelompok, setiap kelompok diberi tugas untuk mencari nilai maksimum hasil panen suatu lahan pertanian yang ditanami tiga tanaman dengan umur tanam hampir sama.
c. Guru membagi kelas ke dalam beberapa kelompok, setiap kelompok diberi tugas merancang pembuatan slide presentasi pengambilan data transportasi BBM.
d. Guru membagi kelas ke dalam beberapa kelompok, setiap kelompok diberi tugas merancang poster suatu materi pembelajaran matematika untuk acara dies sekolah yang segera dilaksanakan.

4. Pada saat mengoreksi hasil ulangan, seorang menemukan sebagian besar siswa mengerjakan suatu soal sebagai berikut.

$$\frac{\cancel{\frac{5}{4}} + x}{\cancel{\frac{5}{4}}} = 5$$

$$x = 5$$

Berkaitan dengan hal tersebut, tindakan yanga tepat dilakukan oleh guru tersebut adalah ....

a. Menjelaskan kembali arti pencoretan pada persamaan
b. Memberikan penguatan pada siswa bahwa cara tersebut boleh dilakukan karena $x = 5$ adalah nilai yang benar
c. Malarang sama sekali melakukan pencoretan karena tidak ada konsep mencoret dalam matematika
d. Memberikan contoh yang serupa

5. Perhatikan KD “Mendeskripsikan konsep matriks sebagai representasi numerik dalam kaitannya dengan konteks nyata”. Konteks masalah kekinian yang paling tepat dipergunakan dalam pembelajaran KD tersebut adalah ... .

a. Ketersediaan jadwal penerbangan beberapa maskapai dengan beberapa rute penerbangan
b. Tabel keterhubungan 7 kota besar di Indonesia dengan maskapai penerbangan Berlian Air.
c. Tabel kebutuhan alat kantor dari 3 karyawan dari hari senin, selasa, rabu, kamis, jumat dan sabtu.

d. Klasemen liga sepakbola Indonesia, dengan banyak pertandingan, kemenangan, kekalahan, kemasukan, dan memasukkan gol

6. Indikator memiliki kedudukan yang sangat strategis dalam mengembangkan pencapaian kompetensi. Fungsi indikator adalah sebagai berikut, kecuali ... .
   a. mengembangkan materi pembelajaran
   b. menentukan bentuk dan jenis penilaian
   c. mendesain kegiatan pembelajaran yang efektif
   d. mengembangkan media pembelajaran, dan menentukan alat dan bahan
7. Rumuskan yang tepat untuk indikator pencapaian kompetensi “Mendeskripsikan konsep barisan dan deret pada konteks dunia nyata, seperti bunga, pertumbuhan dan peluruhan” adalah ....
   a. menyebutkan jenis-jenis bunga tunggal
   b. menentukan nilai bunga tunggal
   c. memahami konsep bunga tunggal
   d. menjelaskan konsep bunga tunggal
8. Salah satu rumusan KD sebagai berikut. "Mendekripsikan prinsip induksi matematika dan menerapkannya dalam membuktikan rumus jumlah deret persegi dan kubik." Salah satu kata kerja yang tepat untuk merumuskan indikator pencapaian KD tersebut adalah ….
   a. menentukan prinsip induksi matematika
   b. membuktikan prinsip induksi matematika
   c. memahami prinsip induksi matematika
   d. menggunakan prinsip induksi matematika

Penutup

Demikianlah modul ini telah disusun dengan sebaik-baiknya, walaupun disana sini masih terdapat berbagai kekurangan. Modul ini memuat uraian materi yang terkait dengan pengembangan kurikulum matematika, mulai dari pembahasan tentang arti penting dan karakteristik matematika, hingga pengembangan RPP dan instrumen penilaian pembelajaran maematika. Modul ini juga telah dilengkapi dengan petunjuk aktivitas pembelajaran, latihan soal, dan soal evaluasi.

Pada akhirnya, mudah-mudahan modul ini dapat memberi manfaat bagi Bapak/ Ibu guru matematika, khususnya para peserta diklat PKB, sebagai acuan pembelajaran dalam mengikuti diklat, maupun sebagai bahan pembelajaran di luar diklat, sehingga dapat membantu Bapak/ Ibu guru dalam mengembankan kompetensinya.

Terakhir, semoga segala upaya kita untuk meningkatkan pendidikan di negeri ini, khususnya pendidikan matematika, senantiasa membawa hasil yang positif, dan tercatat sebagai amal kebaikan di sisi-Nya. Amin.

Glosarium

SKL	:	Kependekan dari Standar Kompetensi Lulusan adalah kriteria mengenai kualifikasi kemampuan lulusan yang mencakup sikap, pengetahuan, dan keterampilan.
KI	:	Kependekan dari Kompetensi Inti yaitu tingkat kemampuan untuk mencapai Standar Kompetensi Lulusan yang harus dimiliki seorang Peserta Didik pada setiap tingkat kelas atau program yang menjadi landasan Pengembangan Kompetensi dasar.
KD	:	Kependekan dari Kompetensi Dasar yaitu tingkat kemampuan dalam konteks muatan Pembelajaran, pengalaman belajar, atau mata pelajaran yang mengacu pada Kompetensi inti.
Sikap spiritual	:	Sikap yang terkait dengan pembentukan peserta didik yang beriman dan bertakwa.
Sikap sosial	:	Sikap yang terkait dengan pembentukan peserta didik yang berakhlak mulia, mandiri, demokratis, dan bertanggung jawab.
Dampak penggiring *(nurturant effects)*	:	Hasil belajar yang dihasilkan oleh proses pembelajaran sebagai akibat terciptanya suasana belajar yang dialami langsung oleh siswa tanpa pengarahan langsung dari pembelajar.

Daftar Pustaka

Kemendiknas. (2007). *Peraturan Menteri Pendidikan Nasional nomor 16 tahun 2007 tentang Standar Kualifikasi Akademik dan Kompetensi Guru.* Jakarta: Kementerian Pendidikan Nasional.

Kemdikbud. (2013). *Peraturan Menteri Pendidikan dan Kebudayaan Nomor 65 Tahun 2013 tentang tentang Standar Proses Pendidikan Dasar dan Menengah*. Jakarta: Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan

Kemdikbud. (2014-a). *Peraturan Menteri Pendidikan dan Kebudayaan Nomor 103 Tahun 2014 tentang PembelajaranpPada Pendidikan Dasar dan Pendidikan Menengah*. Jakarta: Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan.

Kemdikbud. (2014-b). *Kerangka Dasar dan Struktur Kurikulum Sekolah Menengah Atas/ Madrasah Aliyah (Lampiran I-b Peraturan Menteri Pendidikan Dan Kebudayaan Nomor 59 Tahun 2014 Tentangkurikulum 2013 Sekolah Menengah Atas/Madrasah Aliyah).* Jakarta: Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan

Kemdikbud. (2014-c). *Pedoman Mata Pelajaran Matematika untuk SMA/MA/SMK/MAK (Lampiran III Peraturan Menteri Pendidikan Dan Kebudayaan Nomor 59 Tahun 2014 Tentangkurikulum 2013 Sekolah Menengah Atas/Madrasah Aliyah).* Jakarta: Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan

Kemdikbud. (2015-a). *Model Pengembangan Rencana Pelaksanaan Pembelajaran Sekolah Menengah Atas*. Jakarta: Direktorat Pembinaan Sekolah Menengah Atas.

Kemdikbud. (2015-b). *Peraturan Menteri Pendidikan dan Kebudayaan Nomor 53 Tahun 2015 tentang Penilaian Hasil Belajar oleh Pendidik dan Satuan Pendidikan pada Pendidikan Dasar dan Pendidikan Menengah*. Jakarta: Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan.

Kemdikbud. (2015-c). *Panduan Penilaian untuk Sekolah Menengah Atas*. Jakarta: Direktorat Jenderal Pendidikan Dasar dan Menengah.

Peraturan Pemerintah nomor 19 Tahun 2005 *tentang Standar Nasional Pendidikan*

Peraturan Pemerintah nomor 32 Tahun 2013 *tentang Perubahan atas Peraturan Pemerintah nomor 19 Tahun 2005 tentang Standar Nasional Pendidikan*

Lampiran

Lampiran 1

LK- 1

Analisis keterkaitan KI dan KD dengan
Indikator Pencapaian Kompetensi dan Materi Pembelajaran

Tujuan Kegiatan:
Melalui diskusi kelompok peserta mampu menjabarkan KI dan KD ke dalam indikator pencapaian kompetensi dan materi pembelajaran.

Langkah Kegiatan**.**

1. Siapkan dokumen kurikulum KI – KD dan silabus!
2. Isilah lembar kerja yang tersedia dengan KI dan KD yang bapak/ibu pilih!
3. Rumuskan indikator pencapaian kompetensi (IPK) hasil penjabaran KD tersebut, cantumkan pada kolom yang tersedia!
4. Tentukan materi/topik pembelajaran yang sesuai dengan KD dan rumusan indikator!
5. Setelah selesai, presentasikan hasil diskusi kelompok Anda!
6. Perbaiki hasil kerja kelompok Anda jika ada masukan dari kelompok lain!

Format Analisis Keterkaitan KI dan KD dengan IPK dan Materi Pembelajaran

Mata Pelajaran : ______________________

Kelas : ______________________

Semester : ______________________

Kompetensi Inti	Kompetensi Dasar	Indikator Pencapaian Kompetensi	MateriPembelajaran Topik/Subtopik
KI-1			
KI-2			
KI-3			
KI-4			

Lampiran 2 **LK- 2**

Perancangan Penerapan Pendekatan Saintifik Pada Pembelajaran Matematika

Tujuan Kegiatan:
Melalui diskusi kelompok peserta mampu merancang penerapan pendekatan saintifik pada pembelajaran matematika.

Langkah Kegiatan**.**

1. Siapkan dokumen kurikulum dan hasil kegiatan analisis KI-KD-IPK-Materi (LK-1)
2. Isilah Lembar Kerja perancangan Penerapan Pendekatan Saintifik yang tersedia secara diskusi kelompok
3. Setelah selesai, presentasikan hasil diskusi kelompok Anda
4. Perbaiki hasil kerja kelompok Anda jika ada masukan dari kelompok lain

Format Perancangan Penerapan Pendekatan Saintifik pada Pembelajaran

Kompetensi Dasar	:
Indikator Pencapaian Kompetensi	:
Topik	:
Sub Topik	:
Alokasi Waktu	:

Tahapan Pembelajaran	**Kegiatan Pembelajaran**
Mengamati	
Menanya	
Mengumpulkan informasi	
Mengasosiasikan	
Mengomunikasikan	

Lampiran 3

Kunci Jawaban Evaluasi

1) c
2) b
3) b
4) a
5) d
6) d
7) d
8) d

GURU PEMBELAJAR

MODUL

MATEMATIKA SMA

KELOMPOK KOMPETENSI G

PROFESIONAL

KALKULUS DAN TRIGONOMETRI

DIREKTORAT JENDERAL GURU DAN TENAGA KEPENDIDIKAN

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN

2016

Penulis:
1. Sigit Tri Guntoro, M.Si., 081328431558, sigittri92@yahoo.co.id
2. Abdul Aziz

Penelaah:
1. Untung Trisna Suwaji, S.Pd., M.Si., 081328047171, ontongts@yahoo.com
2. Himmawati Puji Lestari, M.Si., 085643025501, himmawati@uny.ac.id

Ilustrator:
Denny Saputra, S.Kom. 085227133999, denny.s4putr4@gmail.com

Kata Pengantar

Peningkatan kualitas pendidikan saat ini menjadi prioritas, baik oleh pemerintah pusat maupun daerah. Salah satu komponen yang menjadi fokus perhatian adalah peningkatan kompetensi guru. Peran guru dalam pembelajaran di kelas merupakan kunci keberhasilan untuk mendukung keberhasilan belajar siswa. Guru yang profesional dituntut mampu membangun proses pembelajaran yang baik sehingga dapat menghasilkan *output* dan *outcome* pendidikan yang berkualitas.

Dalam rangka memetakan kompetensi guru, telah dilaksanakan Uji Kompetensi Guru (UKG) Tahun 2015. UKG tersebut dilaksanakan bagi semua guru, baik yang sudah bersertifikat maupun belum bersertifikat untuk memperoleh gambaran objektif kompetensi guru, baik profesional maupun pedagogik. Hasil UKG kemudian ditindaklanjuti melalui Program Guru Pembelajar sehingga diharapkan kompetensi guru yang masih belum optimal dapat ditingkatkan.

PPPPTK Matematika sebagai Unit Pelaksana Teknis Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan di bawah pembinaan Direktorat Jenderal Guru dan Tenaga Kependidikan mendapat tugas untuk menyusun modul guna mendukung pelaksanaan Guru Pembelajar. Modul ini diharapkan dapat menjadi sumber belajar bagi guru dalam meningkatkan kompetensinya sehingga mampu mengambil tanggung jawab profesi dengan sebaik-baiknya.

Yogyakarta, Maret 2016

Kepala PPPPTK Matematika,

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
PUSAT PENGEMBANGAN DAN PEMBERDAYAAN PENDIDIK DAN TENAGA KEPENDIDIKAN MATEMATIKA

Dr. Dra. Daswatia Astuty, M.Pd.

NIP. 196002241985032001

Daftar Isi

Daftar Gambar

a. Bagian Kalkulus

b. Bagian Trigonometri

Daftar Tabel

a. Bagian Kalkulus

b. Bagian Trigonometri

Pendahuluan

A. Latar Belakang

Merujuk pada Peraturan Menteri Pendayagunaan Aparatur Negara dan Reformasi Birokrasi (Permenpan dan RB) Nomor 16 tahun 2009 tentang Jabatan Fungsional Guru dan Angka Kreditnya memuculkan paradigma baru profesi guru. Konsekuensinya adalah guru dituntut melakukan pengembangan keprofesian berkelanjutan (PKB) sehingga guru dapat menjalankan tugas dan fungsinya secara profesional. Masih merujuk pada Permenpan dan RB tersebut, pengembangan keprofesian berkelanjutan meliputi kegiatan pengembangan diri yaitu diklat fungsional dan kegiatan kolektif guru serta publikasi ilmiah dan karya inovasi. Dengan demikian sebenarnya guru pasti akan mencari kegiatan seperti yang tertuang dalam peraturan tersebut.

Berkaitan dengan hal ini pemerintah harus menyediakan atau paling tidak memfasilitasi kegiatan dimana guru terus dapat mengembangkan kompetensinya, disamping guru juga harus secara aktif berupaya mencari kegiatan untuk pengembangan dirinya. Salah satu upaya pemerintah adalah diklat pasca uji kompetensi guru (UKG). Diklat yang dimaksud disini adalah pelatihan terhadap kompetensi guru yang perlu ditingkatkan didasarkan pada uji kompetensinya.

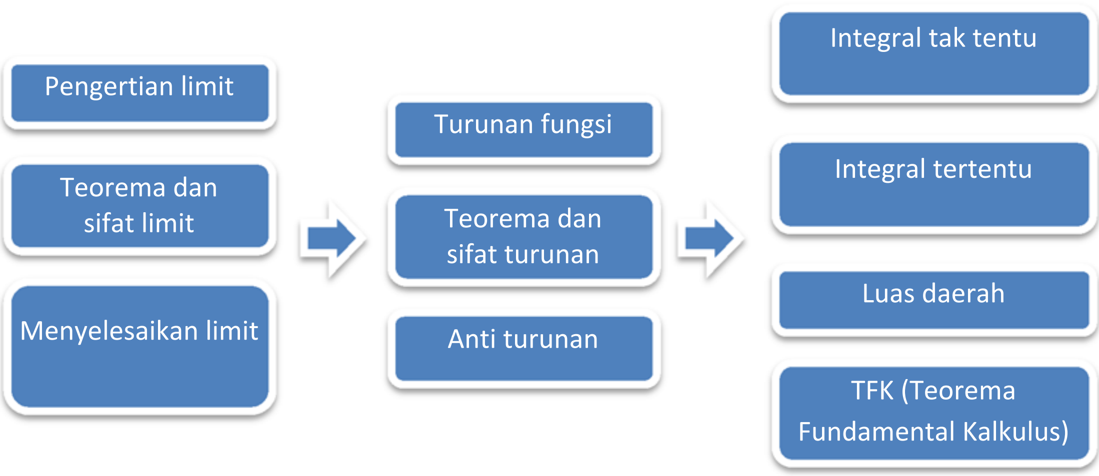
Khusus untuk modul ini, meskipun dapat dimanfaatkan secara mandiri, sebenarnya modul ini akan digunakan dalam kegiatan diklat pasca UKG. Karena dimanfaatkan untuk kegiatan diklat maka didalamnya memuat kegiatan-kegiatan yang berisikan aktifitas pada saat diklat. Kegiatan-kegiatan tersebut (baik diklat maupun mandiri) dilakukan agar kompetensi guru meningkat yang akan terlihat pada peningkatan nilai UKG.

B. Tujuan

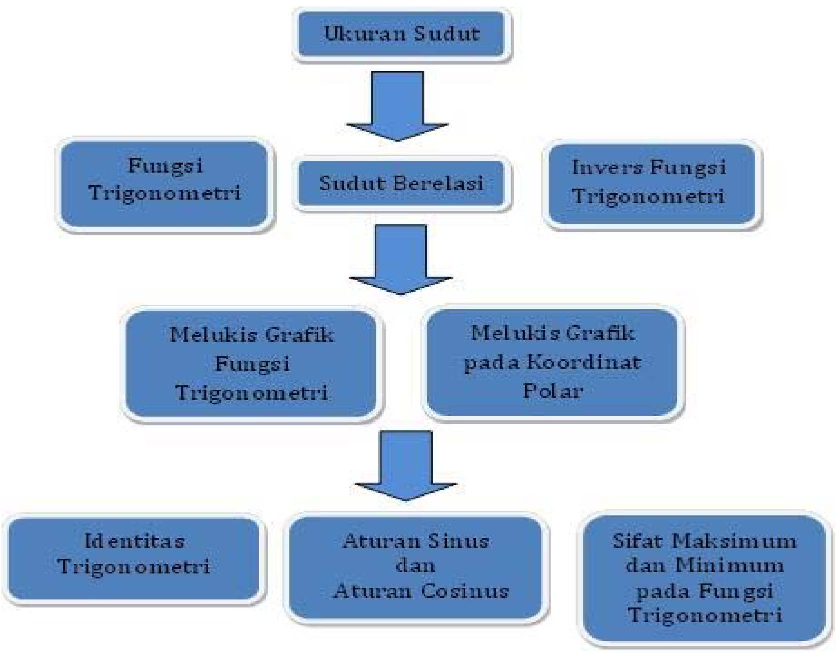
Tujuan disususnnya modul ini adalah untuk memfasilitasi guru dalam rangka pengembangan keprofesian berkelanjutan (PKB) baik secara mandiri maupun melalui kediklatan. Jika modul ini digunakan dalam kediklatan maka fasilitator dan peserta diklat dapat secara bersama memanfaatkan modul ini untuk pembelajaran di kelas dengan alur kegiatan sesuai dengan skenario fasilitator. Namun bila guru ingin mempelajari modul ini secara mandiri maka kegiatannya harus dimulai dari awal sampai akhir.

C. Peta Kompetensi

- Bagian Kalkulus



- Bagian Trigonometri



D. Ruang Lingkup

Dalam modul ini dipaparkan materi berkaitan dengan kalkulus dan trigonometri. Untuk bagian kalkulus membahas mengenai limit, turunan dan integral dengan rincian:

- limit, meliputi pengertian limit, sifat dan teorema limit, limit tak hingga, limit di tak hingga, dan strategi penyelesaiannya
- turunan, meliputi pengertian turunan, sifat-sifat dan teorema turunan, dan gambar grafik turunan
- integral, meliputi integral tak tentu, strategi menentukan integral tak tentu, integral tertentu, dan menentukan luas daerah

Untuk bagian trigonometri meliputi:

- ukuran sudut
- fungsi trigonometri, sudut berelasi, dan invers fungsi trigonometri.
- identifikasi grafik fungsi trigonometri dan melukis koordinat polar (kutub)
- Identitas trigonometri, aturan sinus, aturan cosinus, dan sifat maksimum dan minimum dari fungsi trigonometri.

E. Saran Cara Penggunaan Modul

Modul ini dapat digunakan untuk dua keperluan yaitu untuk diklat atau kegiatan mandiri.

1. Untuk keperluan diklat

Jika modul ini digunakan dalam kegiatan diklat maka sebaiknya fasilitator menyusun poin-poin penting untuk dijadikan sebagai bahan tayang. Selanjutnya peserta melakukan kegiatan atau pengerjaan tugas sesuai dengan yang sudah dirancang dalam bahan modul ini. Sebagai alternatif, langkah pembelajaran yang dapat dilakukan adalah:

- Fasilitator menyampaikan poin-poin kegiatan akan dilakukan
- Peserta diklat membaca materi, mengerjakan bagian aktifitas, menyelesaikan tugas atau latihan yang didampingi fasilitator.
- Selanjutnya, cocokan hasil pengerjaan pengerjaan peserta dengan kunci jawaban. Untuk melihat ketercapaian kompetensi dan langkah apa yang mesti dilakukan silahkan lihat bagian tindak lanjut.

Upayakan permasalahan tuntas dibahas dalam kegiatan ini. Sangat dimungkinkan dalam kegiatan ini, peserta maupun fasilitator mencari referensi dari bahan bacaan lain atau sumber lain.

2. Untuk kegiatan mandiri

Jika bahan modul ini digunakan untuk keperluan kegiatan secara mandiri maka pembaca perlu memulainya secara urut dari bagian pertama sampai bagian akhir. Sangat disarankan untuk tidak membuka kunci jawaban terlebih dahulu sebelum pembaca mengerjakan semua latihan pada suatu bagian kegiatan belajar.

KEGIATAN PEMBELAJARAN (KB)

BAGIAN I KALKULUS

KB1 : Limit Fungsi dan Strategi Penyelesaiannya

A. Tujuan

Kegiatan belajar ini bertujuan untuk memberikan pemahaman kepada peserta diklat atau pembaca berkaitan dengan pengertian limit fungsi dengan bahasa sederhana maupun dengan ungkapan formal. Selain itu, kegiatan belajar ini ditujukan untuk memberikan tambahan pengetahuan berkaitan dengan strategi penyelesaian masalah limit fungsi. Kegiatan yang dimaksud dapat dilakukan secara mandiri maupun dalam kegiatan diklat.

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

Setelah membaca dan mengikuti serangkaian kegiatan pada modul ini, peserta diklat atau pembaca mampu

1. memahami pengertian limit dengan bahasa sederhana maupun dengan definisi formal ε-δ (baca: epsilon delta)
2. menggunakan sifat limit fungsi untuk menentukan nilai limit fungsi aljabar
3. menggunakan sifat limit fungsi untuk menentukan nilai limit fungsi trigonometri
4. membuktikan kebenaran suatu limit fungsi

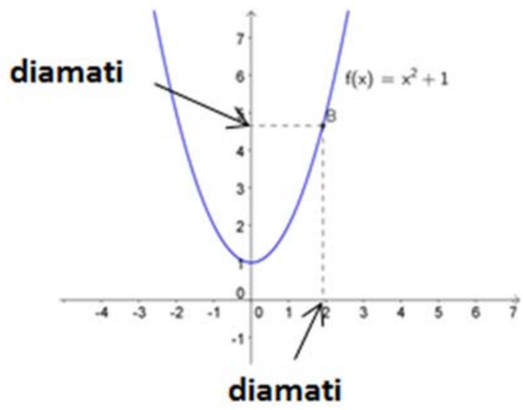
C. Uraian Materi

1. Pengertian limit fungsi

Pernahkah Anda menjumpai seorang guru atau pendidik lainnya mengajarkan limit fungsi dengan langsung definisi? Biasanya, guru yang mengajarkan limit fungsi dengan langsung definisi akan menyajikan langsung limit menggunakan ε-δ (baca: epsilon delta) pada tahap awal pembahasan, yaitu definisi limit fungsi seperti berikut ini.

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ artinya untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga berlaku $|f(x) - L| < \varepsilon$ untuk $0 < |x - a| < \delta$

Cara seperti ini tidaklah salah, karena sejatinya secara formal limit harus disajikan dalam ε-δ seperti pengertian di atas. Namun apakah siswa atau mungkin kita (guru) bisa paham dengan maksud kalimat tersebut? Tentunya ada sebagian paham dan sebagian lain tidak mengerti maksud definisi tersebut. Untuk memudahkan pemahaman kita mulai dari contoh. Misalkan diberikan $f(x) = x^2 + 1$.



Gambar 1 Pengamatan fungsi

Kemudian amati nilai $f(x)$ pada sumbu-y bila x mendekati 2 pada sumbu-x. Pada saat x mendekati 2 perhatikan bahwa $f(x)$ mendekati suatu nilai tertentu. Perlu ditekankan disini bahwa pada waktu x mendekati 2 maka fokus perhatian kita adalah nilai pada ordinat (sumbu-y), jadi bukan fokus pada kurva $f(x) = x^2 + 1$. Mengapa demikian? Karena kurva tersebut hanyalah aturan pemasangan x dan $f(x)$, sedangkan fokus kita pada nilai $f(x)$ yang ada pada sumbu-y. Demikian juga perlu diingat bahwa mendekati 2 pada contoh ini adalah mendekati dari kiri dan mendekati dari kanan karena fungsi terdefinisi di $x < 2$ dan di $x > 2$ (persekitaran 2). Untuk melihat pola yang terjadi perhatikan tabel Tabel 1 berikut.

Tabel 1

x	1,997	1,998	1,999	2	2,001	2,011	2,111
$f(x)$	4,988009	4,992004	4,996001	?	5,004001	5,044121	5,456321

Mencermati tersebut wajar kita akan menyimpulkan bahwa $f(x)$ mendekati 5 untuk x mendekati 2. Dari sini muncul pertanyaan "berapa nilai $f(2)$?", atau "haruskah $f(2) = 5$?" Kenyataannya memang $f(x)$ mendekati 5 jika x mendekati 2 dan kebetulan $f(2) = 5$. Sebenarnya nilai 5 yang didekati oleh $f(x)$ jika x mendekati 2 tidak ada kaitan dengan nilai $f(2) = 5$. Bahkan andaikan $f(2)$ tidak terdefinisipun $f(x)$ tetap mendekati 5 jika x mendekati 2 (lihat grafik dan tabel di atas). Kondisi seperti ini kita maknai sebagai "jika $x \to 2$ maka $f(x) \to 5$" (sebagian literatur mengganti kata 'mendekati' dengan kata 'menuju'). Inilah sebenarnya yang kemudian ditulis menjadi

$$\lim_{x \to 2} (x^2 + 1) = 5.$$

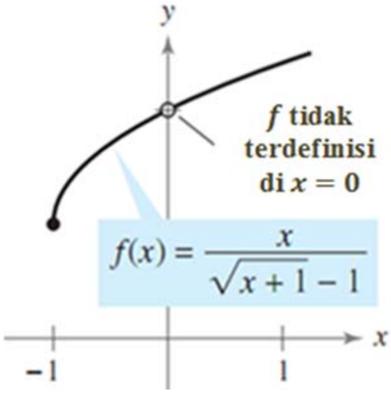
Apabila kita dalami lebih lanjut, pengungkapan " jika $x \to 2$ maka $f(x) \to 5$" yaitu mendefinisikan limit dengan bahasa verbal belum operasional dalam matematika. Mengapa demikian? Misalkan diketahui $\lim_{x \to c} f(x) = k$ dan $\lim_{x \to c} g(x) = l$, kemudian kita diminta menunjukkan bahwa $\lim_{x \to c} f(x) + g(x) = k + l$, maka kita akan mengalami kesulitan dalam mengungkapkan buktinya. Oleh karena itu perlu pendefinisian secara formal. Seorang matematikawan Perancis bernama Augustin-Louis Cauchy menyusun definisi tentang limit secara formal yang masih digunakan sampai sekarang sebagai berikut.

Definisi :

Pengertian $\lim_{x \to c} f(x) = L$ **secara formal adalah bahwa untuk setiap** $\varepsilon > 0$ **, terdapat** $\delta > 0$ **sedemikian hingga** $|f(x) - L| < \varepsilon$ **untuk setiap** $0 < |x - c| < \delta$.

Definisi ini sebenarnya sama dengan mengatakan " jika $x \to c$ maka $f(x) \to L$". Selain itu dari definisi tersebut nyata terlihat bahwa kita tidak membicarakan nilai $f(x)$ di

c atau nilai $f(c)$ tetapi nilai $f(x)$ untuk x disekitar c. Bahkan andaikan f tidak terdefinisi di c maka L tetap limit fungsi tersebut. Sebagai contoh amati grafik berikut.

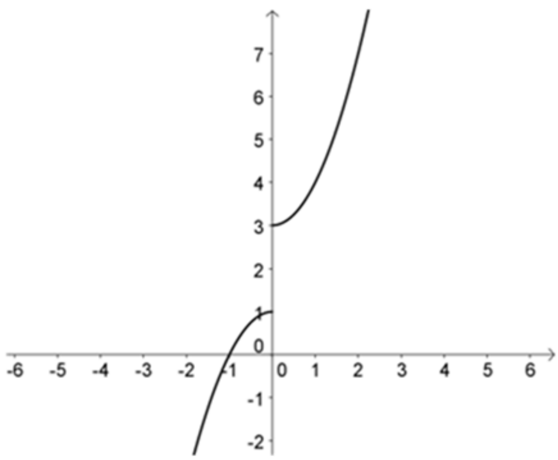


Gambar 2 Fungsi tidak kontinyu

Jelas bahwa fungsi f tidak terdefinisi di $x = 0$ ($f(0)$ tidak terdefinisi), tetapi nilai limitnya ada yaitu 2 atau $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} = 2$.

Sekarang, amati fungsi g yang didefinisikan

$$g(x) = \begin{cases} x^2 + 3, & untuk\ x \geq 0 \\ -x^2 + 1, & untuk\ x < 0 \end{cases}$$



Gambar 3 Fungsi tidak ada limit

Pada Gambar 3 terlihat bahwa ada dua kasus yang terkait. Pertama, untuk x mendekati 0 dari arah kiri ($x \to 0^-$) maka $f(x)$ mendekati 1, artinya $f(x)$ tidak mendekati 3 dan juga tidak mendekati nilai yang lain. Kedua, untuk x mendekati 0 dari arah kanan ($x \to 0^+$) maka $f(x)$ mendekati 3, tidak mendekati 1 dan juga tidak mendekati nilai yang lain. Dengan keadaan seperti ini apakah $\lim_{x \to 0} g(x) = \begin{cases} x^2 + 3, & \text{untuk } x \geq 0 \\ -x^2 + 1, & \text{untuk } x < 0 \end{cases}$ ada? Atau nilai limitnya ada dua yaitu 1 dan 3? Pertanyaan ini akan terjawab setelah kita paham pengertian limit fungsi.

2. Sifat-sifat dan teorema limit

Perlu menjadi perhatian bahwa ketika ingin menentukan nilai limit suatu fungsi, kita tidak harus kembali pada definisi limit, tetapi memanfaatkan teorema atau sifat-sifat limit. Berkaitan dengan teorema atau sifat yang dimaksud akan lebih baik jika teorema atau sifat yang digunakan sudah dibuktikan terlebih dahulu. Berikut ini beberapa sifat dan teorema terkait limit yang dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan limit

Misalkan c suatu konstanta dan $\lim_{x \to a} f(x)$ serta $\lim_{x \to a} g(x)$ dua-duanya ada maka berlaku

1) $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$
2) $\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x)$
3) $\lim_{x \to a} [f(x). g(x)] = \lim_{x \to a} f(x). \lim_{x \to a} g(x)$
4) $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$ bila $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$
5) $\lim_{x \to a} cf(x) = c \lim_{x \to a} f(x)$
6) $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$
7) $\lim_{x \to a} [f(x)]^p = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]^p$ bila p positip dan ruas kiri limitnya ada
8) $\lim_{x \to a} c = c$
9) $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, jika $\frac{f(x)}{g(x)}$ dalam bentuk $\frac{0}{0}$, $f'(x)$ dan $g'(x)$ ada. (Teorema L'Hopital)
10) Untuk $f(x)$ suatu fungsi yang kontinyu di a maka $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Bukti untuk sifat di atas tidak disajikan dalam tulisan ini, tetapi pembaca dapat memperolehnya di buku referensi [2] pada daftar pustaka.

Berikut ini contoh penggunaan sifat-sifat limit. Detail penggunan sifat limit ini dapat dilihat di bagian aktivitas pada modul ini.

Contoh 3.1:

Tentukan hasil $\lim_{x\to 0}[(2x^2+1)+\sin x]$

Jawab:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}[(2x^2+1)+\sin x] &= \lim_{x\to 0}(2x^2+1)+\lim_{x\to 0}(\sin x)\\ &= 1+0\\ &= 1\end{aligned}$$

Contoh 3.2:

Tentukan hasil $\lim_{x\to 1}[2x^2-x^3]$

Jawab:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}[2x^2-x^3] &= \lim_{x\to 1}2x^2-\lim_{x\to 1}x^3\\ &= 2-1\\ &= 1\end{aligned}$$

Contoh 3.3:

Tentukan nilai $\lim_{x\to 2}\left[5x^2\cdot\frac{1}{x^2+1}\right]$

Jawab:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\left[5x^2\cdot\frac{1}{x^2+1}\right] &= \lim_{x\to 2}5x^2\cdot\lim_{x\to 2}\frac{1}{x^2+1}\\ &= 20\cdot\frac{\lim_{x\to 2}1}{\lim_{x\to 2}x^2+1}\\ &= 20\cdot\frac{1}{5}\\ &= 4\end{aligned}$$

Namun perhatikan untuk kasus berikut:

$\lim_{x\to 0}\left[2x\cdot\frac{1}{\sin x}\right]=\lim_{x\to 0}2x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin x}$ (memanfaatkan sifat 3)

Seperti kita ketahui ruas kiri hasilnya 2 sedangkan ruas kanan tidak terdefinisi. Mengapa demikian? (lihat soal latihan)

<u>Contoh 3.4:</u>

Diketahui $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$, tentukan $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$.

Jawab:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{x}{\sin x}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to 0} 1}{\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sin x}} = \frac{1}{1} = 1$$

<u>Contoh 3.5:</u>

Tentukan nilai $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{\frac{x^2-4}{x-2}}$

Jawab:

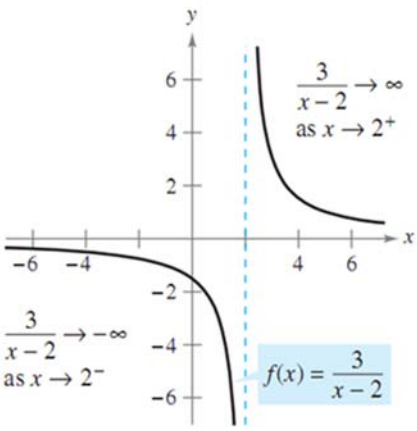
$$\lim_{x\to 2} \sqrt{\frac{x^2-4}{x-2}} = \sqrt{\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}}$$

$$= \sqrt{4}$$

$$= 2$$

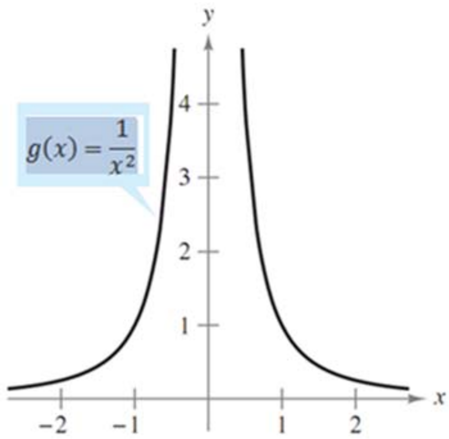
3. Limit tak hingga (infinite limits)

Pada bagian sebelumnya telah disinggung mengenai ketidakadaan limit suatu fungsi. Selanjutnya amati grafik fungsi $f(x) = \frac{3}{x-2}$ seperti gambar berikut.



Gambar 4 Grafik Ketidakadaan limit

Apabila kita cermati Gambar 5 di atas terlihat bahwa untuk x mendekati 2 dari arah kiri maka f menuju tak hingga negatif. Tetapi untuk x mendekati 2 dari arah kanan maka f menuju tak hingga positip. Kondisi seperti ini menunjukkan bahwa $f(x)$ tidak punya limit untuk x mendekati 2. Jadi $\lim_{x\to 2} \frac{3}{x-2}$ tidak ada. Selanjutnya bandingkan dengan fungsi g berikut.



Gambar 5 Limit tak hingga

Perhatikan pada Gambar 6 di atas, tampak bahwa $g(x)$ akan menuju tak hingga positip bila x menuju 0. Kasus seperti ini pun menunjukkan bahwa $g(x)$ tidak mempunyai limit untuk x mendekati 0. Jadi $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$ tidak ada. Dari sini muncul permasalahan, apa yang membedakan ketidakadaan nilai $\lim_{x\to 2} \frac{3}{x-2}$, $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$ dan $\lim_{x\to 0} h(x)$ dengan $h(x) = \begin{cases} x^2 + 3, & \text{untuk } x \geq 0 \\ -x^2 + 1, & \text{untuk } x < 0 \end{cases}$. Apakah ketiganya sama? Atau ada perbedaan dari ketiganya. Secara pengamatan dari ketiganya tampak adanya perbedaan. Perhatikan tabel 3 berikut

Tabel 2

Limit Fungsi	Nilai limit fungsi	Keterangan
$\lim_{x\to 2} \frac{3}{x-2}$	Tidak ada	Limit kiri menuju negatif tak hingga sedangkan limit kanan menuju (positip) tak hingga
$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$	Tidak ada	Baik limit kiri maupun limit kanan menuju (positip) tak hingga

$\lim_{x\to 0} h(x)$ dimana $h(x) = \begin{cases} x^2+3, & \text{untuk } x \geq 0 \\ -x^2+1, & \text{untuk } x < 0 \end{cases}$	Tidak ada	Limit kiri menuju 1 sedangkan limit kanan menuju 3

Bila kita cermati maka ada perbedaan yang nyata dari ketiganya yaitu kondisi yang menyebabkan limit tidak ada (lihat kolom keterangan). Dari sini kemudian dikembangkan suatu konsep limit tak hingga sebagai berikut.

Suatu limit fungsi f dikatakan sebagai **limit tak hingga (*infinite limits*)** jika f menuju tak hingga positip atau f menuju tak hingga negatif. Secara formal definisi yang dimaksud adalah sebagai berikut

Misalkan f suatu fungsi yang terdefinisi pada interval terbuka yang memuat c (boleh juga tidak terdefinisi di c) maka yang dimaksud dengan

$$\lim_{x\to c} f(x) = \infty$$

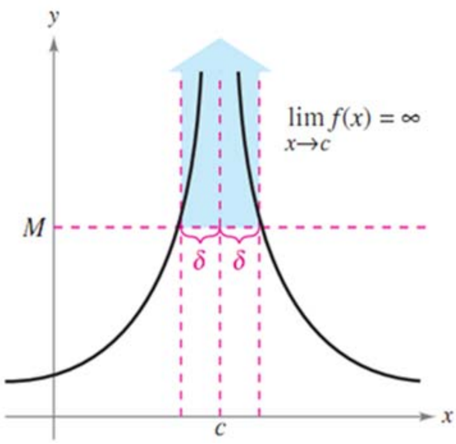
adalah untuk setiap $M > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga $f(x) > M$ untuk $0 < |x-c| < \delta$.

Demikian pula untuk

$$\lim_{x\to c} f(x) = -\infty$$

artinya untuk setiap $N < 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga $f(x) < N$ untuk $0 < |x-c| < \delta$

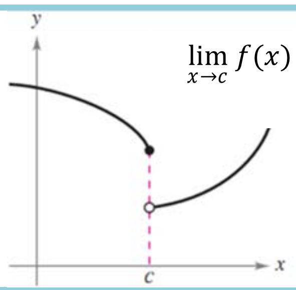
Dengan pendefinisian ini maka ketidakadaaan limit seperti yang sudah di bahas sebelumnya menjadi berbeda sedikit. Sebagai contoh $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$. Semula $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$ tidak ada, tetapi dengan pendefinisian baru maka kita tulis $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$. Sebagai gambaran lihat grafik di bawah



Gambar 6 Limit tak hingga

Perhatikan bahwa kita telah berani menggunakan tanda "$= \infty$" setelah ada definisi tersebut. Untuk mempermudah pemahaman perhatikan tabel berikut.

Tabel 3

Limit Fungsi	Nilai limit fungsi	Keterangan
$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$	∞	Baik limit kiri maupun limit kanan menuju (positip) tak hingga
$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x}$	Tidak ada	Limit kiri menuju negatif tak hingga sedangkan limit kanan menuju positip tak hingga
$\lim\limits_{x \to 2} \frac{-1}{(x-2)^2}$	$-\infty$	Baik limit kiri maupun limit kanan menuju negatif tak hingga
$\lim\limits_{x \to c} f(x)$ 	Tidak ada	Limit kiri tidak sama dengan limit kanan

Perlu menjadi perhatian bahwa tanda sama dengan ("=") pada contoh $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$, bukan berarti limitnya ada di tak hingga, namun untuk menjelaskan bagaimana ketidakadaan limit fungsi tersebut. Ringkasnya, khusus untuk contoh tersebut, nilai fungsi akan menuju tak hingga jika x menuju 0.

Secara umum, bila diketahui $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \infty$ atau $\lim\limits_{x \to c} f(x) = -\infty$ bukan berarti limitnya ada di tak hingga atau di negatif tak hingga, namun untuk menggambarkan bagaimana limit fungsi tersebut tidak ada dengan menunjukkan bahwa nilai fungsi menuju tak hingga atau negatif tak hingga jika x menuju c.

<u>Contoh 4.1</u>

Tentukan limit $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x}$

Jawab:

Perhatikan bahwa untuk x mendekati 1 dari kiri $(x \to 1^-)$ maka $\frac{1}{x}$ menuju negatif tak hingga sedangkan jika x mendekati 1 dari kanan $(x \to 1^+)$ maka $\frac{1}{x}$ menuju positif tak hingga. Dengan demikian $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x}$ tidak ada

<u>Contoh 4.2</u>

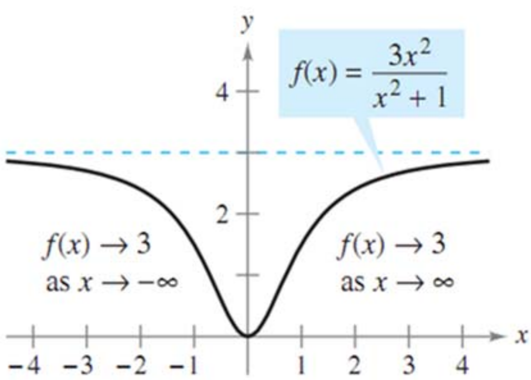
Tentukan limit $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{\sqrt{x-1}}$

Jawab:

Perhatikan bahwa $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ terdefinisi untuk $x > 1$ atau dengan kata lain $D_f = \{x|x \in R, x > 1\}$. Sehingga limit yang dapat kita selidiki adalah limit kanan. Sedangkan limit kiri tidak dibicarakan. Jadi pemaknaan $x \to 1$ adalah $x \to 1^+$. Jika kita perhatikan dan kita cermati maka nilai $f(x)$ semakin membesar apabila x mendekati 1. Jadi $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = \infty$

4. Limit di tak hingga (limits at infinity)

Untuk mempermudah dalam pemahaman kita mulai dari contoh suatu fungsi yang didefinisikan sebagai $f(x) = \frac{3x^2}{x^2+1}$. Selanjutnya kita lihat grafik fungsinya.



Gambar 7 Limit di tak hingga

Secara grafik, kita dapat lihat bahwa $f(x)$ akan munuju 3 bila x menuju tak hingga, atau kita tulis "$f(x) \to 3$ untuk $x \to \infty$". Dapat juga kita tulis "$Jika\ x \to \infty\ maka\ f(x) \to 3$". Sementara itu secara numerik dapat kita lihat pada tabel berikut.

Tabel 4

x	$-\infty \leftarrow x$	-1000	-100	-10	1	0	1	10	100	1000	$\rightarrow \infty$
$f(x)$	$3 \leftarrow$	2,99999 7	2,9997	2,97	1, 5	0	1,5	2,97	2,999 7	2,99999 7	$\rightarrow 3$

Dengan memperhatikan tabel 5 maka dapat ditarik kesimpulan bahwa $f(x) \rightarrow 3$ untuk $x \rightarrow \infty$. Apabila dimaknai lebih lanjut, pernyataan x menuju tak hingga $(x \rightarrow \infty)$ mengandung arti bahwa untuk setiap bilangan positip M selalu ada nilai x sehingga $x > M$. Demikian pula untuk x menuju negatif tak hingga $(x \rightarrow -\infty)$ mengandung arti bahwa untuk setiap bilangan negatif N selalu ada nilai x sehingga $x < N$. Berdasarkan pemaknaan ini maka disusun definisi formal untuk limit di tak hingga sebagai berikut.

Misalkan L suatu bilangan real maka yang dimaksud dengan

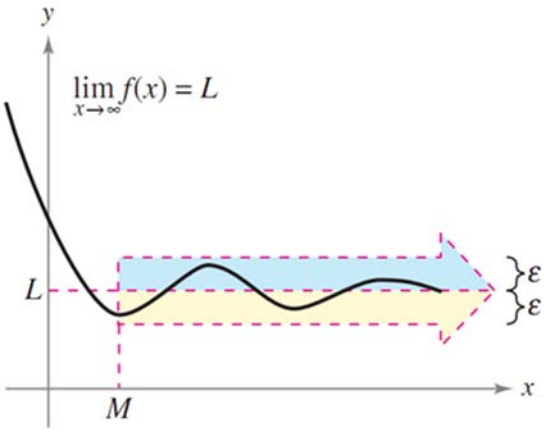
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

adalah untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $M > 0$ sehingga jika $x > M$ berlaku $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Demikian pula untuk $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$

artinya setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N < 0$ sehingga jika $x < N$ berlaku $|f(x) - L| < \varepsilon$

Definisi di atas dapat diilustrasikan seperti gambar berikut.



Gambar 8 Limit di tak hingga

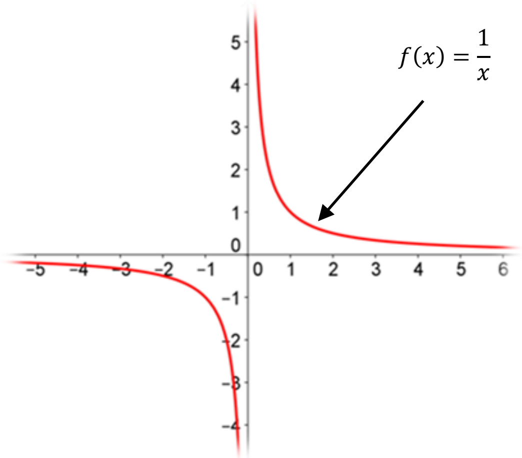
Terlihat bahwa untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $M > 0$ sehingga untuk $x > M$ maka grafik berada diantara garis horisontal $y = L + \varepsilon$ dan $y = \ L - \varepsilon$.

Contoh 5.1

a. Tentukan hasil dari $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x}$

Jawab:

Fungsi $f(x) = \frac{1}{x}$ dapat digambarkan sebagai berikut.



Gambar 9 Ketidakadaan limit

Bila dicermati maka tampak bahwa $f(x)$ menuju 0 untuk x menuju tak hingga. Jadi dapat disimpulkan bahwa $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$. Bukti bahwa $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$ untuk kegiatan aktifitas.

b. Dengan menggunakan sifat limit, tentukan $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x-1}{x+1}$

Jawab:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x-1}{x+1} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{2x-1}{x}}{\frac{x+1}{x}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty} 2 - \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}}{\lim\limits_{x\to\infty} 1 + \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}}$$

$$= \frac{2 - \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}}{1 + \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}}$$

$$= \frac{2-0}{1+0}$$

$$= 2$$

c. Tentukan $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2+x^2-x^3}{x^2-1}$

Jawab:

Karena soal tersebut termasuk dalam bentuk $\frac{\infty}{\infty}$ maka pembilang dan penyebut dibagi x^2 atau x^3 (selengkapnya lihat bagian cara menyelesaikan limit). Untuk pengerjaan di bawah, pembilang dan penyebit dibagi oleh x^2.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2+x^2-x^3}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2+x^2-x^3}{x^2}}{\frac{x^2-1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{x^2}+\frac{x^2}{x^2}-\frac{x^3}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{x^2}+1-x}{1-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2}{x^2} + \lim\limits_{x\to\infty} 1 - \lim\limits_{x\to\infty} x}{\lim\limits_{x\to\infty} 1 - \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{0+1-\lim\limits_{x\to\infty} x}{1-0}$$

$$= -\infty$$

5. Strategi Sederhana dalam Menyelesaikan Limit

Strategi sederhana yang dimaksud disini adalah cara menyelesaikan persoalan limit dengan memanfaatkan teorema dan penjelasan-penjelasan pada bagian sebelumnya.

a. Limit fungsi $f(x)$untuk x menuju nilai tertentu ($x \to a, a \in R$)

1) Substitusi langsung pada fungsinya.

Misalkan ingin ditentukan hasil $\lim_{x\to c} f(x)$. Jika $f(c)$ tidak menemui hasil "janggal" dalam arti tidak terdefinisi / tidak tentu / tak hingga, maka umumnya nilai limitnya adalah $f(c)$. Cara ini sejatinya sekedar memanfaatkan kekontinyuan fungsi di titik c. Namun cara ini perlu pencermatan lebih lanjut, karena bila fungsinya tidak kontinyu maka cara ini tidak bisa digunakan. Jadi perlu kehati-hatian, walaupun $f(c)$ ada tetapi belum tentu berlaku $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$

Contoh 6.1:

a. $$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-4}{x-2} = \frac{3^2-4}{3-2} = \frac{9-4}{3-2} = 5$$

b. $$\lim_{x\to 2}\left(\sqrt{\frac{x^2-2x}{x^3+1}+x-1}\right)^{\frac{x^2-1}{x-1}} = \left(\sqrt{\frac{2^2-2(2)}{2^3+1}+2-1}\right)^{\frac{2^2-1}{2-1}} = \left(\sqrt{\frac{0}{9}+2-1}\right)^{3} = 1$$

<u>Bedakan</u> dengan contoh berikut

c. $$\lim_{x\to 2}\left(\sqrt{\frac{x^2-2x}{x-2}+x-1}\right)^{\frac{x^2-1}{x-1}} = \left(\sqrt{\frac{2^2-2(2)}{2-2}+2-1}\right)^{\frac{2^2-1}{2-1}} = \left(\sqrt{\frac{0}{0}+2-1}\right)^{3} ?$$

Tidak boleh dilanjutkan dengan cara tersebut karena memuat bentuk tak tentu $\frac{0}{0}$.

d. Diberikan fungsi $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3}, untuk\ x \neq 3 \\ 0\ , untuk\ x = 3 \end{cases}$. Tentukan $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3}$

Jelas bahwa $f(3) = 0$, tetapi $\lim_{x \to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = 6$. Jadi tidak berlaku $\lim_{x \to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = f(3)$ walaupun $f(3)$ ada yaitu 0.

2) Pada bentuk rasional umumnya dapat disederhanakan.

Cara ini sesungguhnya sekedar mengubah bentuk rasional menjadi bentuk lain sehingga mempunyai faktor yang sama di pembilang dan penyebut. Faktor yang sama ini selanjutnya dapat digunakan untuk merasionalkan penyebut. Faktor yang sama ini dapat pula hasil dari memfaktorkan pembilang

Contoh 6.2:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 27}{x^2 - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{\cancel{(x-3)}(x^2 + 3x + 9)}{\cancel{(x-3)}(x+3)}$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{x^2 + 3x + 9}{x + 3}$$

$$= \frac{9}{2}$$

$Ingat: a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

3) Substitusi memuat bentuk $\boldsymbol{\frac{k}{0}}$ dengan $\boldsymbol{k \neq 0}$.

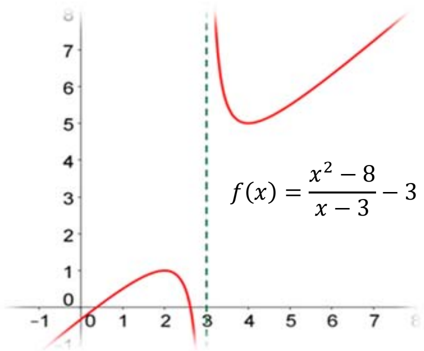
Jika dengan substitusi memuat bentuk $\frac{k}{0}$ dengan $k \neq 0$, umumnya Namun demikian, ada beberapa kasus walaupun memuat bentuk $\frac{k}{0}$ dengan $k \neq 0$ tetapi limitnya ada. Cara seperti ini sebenarnya hanya memanfaatkan kebiasaan orang menghindari bentuk $\frac{k}{0}$.

Contoh 6.3:

a). Tentukan $\lim_{x \to 3} \left(\frac{x^2-8}{x-3} - 3\right)$

Jawab:

Bila $x = 3$ disubstitusikan ke dalam fungsi maka diperoleh $\frac{3^2-8}{3-3} - 3 = \frac{1}{0} - 3$ yaitu memuat bentuk $\frac{k}{0}$ dengan $k \neq 0$. Oleh karena itu $\lim_{x \to 3} \left(\frac{x^2-8}{x-3} - 3\right)$ tidak ada. Sebagai gambaran untuk memperjelas grafik dari fungsi tersebut adalah



Gambar 10 Ketidakadaan limit

Jadi $\lim_{x \to 3} \left(\frac{x^2-8}{x-3} - 3\right)$ tidak ada

b). $\lim_{x \to 2} \left(\frac{2}{2x-4} - \frac{x-1}{x-2}\right)$

Perhatikan bahwa limit tersebut memuat $\frac{k}{0}$ dengan $k \neq 0$ yaitu

$\frac{2}{2(2)-4} - \frac{2-1}{2-2} = \frac{2}{0} - \frac{1}{0}$ yang memuat bentuk $\frac{2}{0}$ dan $\frac{1}{0}$

Meskipun memuat bentuk $\frac{2}{0}$ dan $\frac{1}{0}$, namun limitnya ada yaitu

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 2} \left(\frac{2}{2x-4} - \frac{x-1}{x-2}\right) &= \lim_{x \to 2} \left(\frac{2}{2x-4} - \frac{2x-2}{2x-4}\right) \\
&= \lim_{x \to 2} \frac{2-(2x-2)}{2x-4} = \lim_{x \to 2} \frac{4-2x}{2x-4} \\
&= \lim_{x \to 2} \left(-\frac{2x-4}{2x-4}\right) = -1
\end{aligned}$$

Mengapa meskipun fungsi di atas memuat bentuk $\frac{k}{0}$ dengan $k \neq 0$ tetapi limitnya ada? Jawabannya adalah karena bentuk tersebut pada hakekatnya adalah bentuk $\infty - \infty$ (lihat strategi berikutnya).

4) Substitusi memuat bentuk $\frac{0}{0}$.

Jika dengan substitusi memuat bentuk $\frac{0}{0}$ maka nilai limit dapat ditentukan dengan menyederhanakan atau menggunakan *teorema L'hopital* (lihat sifat limit) hanya pada bentuk yang memuat $\frac{0}{0}$ tersebut. Cara ini sebenarnya hanya menggabungkan sifat-sifat limit. Perlu dicatat disini bahwa penggunaan teorema tersebut, hanya sebatas penggunaan dulu, karena pembahasan teorema belum diberikan. Sebagai gambaran, mengingat sifat 1 dan sifat 6 maka

$$\lim_{x\to 1}\sqrt{x+\frac{x^2-1}{x-1}}=\sqrt{\lim_{x\to 1}x+\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}}$$

Perhatikan bahwa teorema *L'hopital* dapat digunakan untuk bagian $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$ saja, tidak perlu mulai dari $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x+\frac{x^2-1}{x-1}}$

Contoh 6.4:

a). $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^3-64}{x^2-16}$ memuat bentuk $\frac{0}{0}$ karena $\frac{4^3-64}{4^2-16}=\frac{0}{0}$. Jadi penyelesaiannya adalah

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 4}\frac{x^3-64}{x^2-16}&=\lim_{x\to 4}\frac{(x^3-64)'}{(x^2-16)'}\\&=\lim_{x\to 4}\frac{3x^2}{2x}\\&=\lim_{x\to 4}\frac{3}{2}x=6\end{aligned}$$

b). $\lim\limits_{x\to 2}\left(\sqrt{\frac{x^2-2x}{x-2}}+x-1\right)^{\frac{x^2-1}{x-1}}$ memuat bentuk $\frac{0}{0}$ hanya pada bagian $\frac{x^2-2x}{x-2}$. Secara jelasnya bentuk tersebut adalah $\left(\sqrt{\frac{0}{0}}+x-1\right)^{\frac{x^2-1}{x-1}}$.

Perhatikan bagian dari $\lim\limits_{x\to 2}\left(\sqrt{\frac{x^2-2x}{x-2}}+x-1\right)^{\frac{x^2-1}{x-1}}$ yang memuat bentuk $\frac{0}{0}$ yaitu $\left(\sqrt{\frac{0}{0}}+x-1\right)^{\frac{x^2-1}{x-1}}$ sehingga hanya bentuk $\frac{0}{0}$ ini yang perlu *teorema L'hopital*.

Jadi
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\left(\sqrt{\frac{x^2-2x}{x-2}}+x-1\right)^{\frac{x^2-1}{x-1}}&=\lim_{x\to 2}\left(\sqrt{\frac{(x^2-2x)'}{(x-2)'}}+x-1\right)^{\frac{x^2-1}{x-1}}\\&=\lim_{x\to 2}\left(\sqrt{\frac{2x-2}{1}}+x-1\right)^{\frac{x^2-1}{x-1}}\\&=\lim_{x\to 2}\left(\sqrt{\frac{2(2)-2}{1}}+2-1\right)^{\frac{2^2-1}{2-1}}\\&=\left(\sqrt{3}\right)^3=3\sqrt{3}\end{aligned}$$

Hal ini dapat dilakukan mengingat sifat limit

c). $\lim\limits_{x\to 9}\sqrt{\dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9}} = \lim\limits_{x\to 9}\sqrt{\dfrac{(\sqrt{x}-3)'}{(x-9)'}}$

$= \lim\limits_{x\to 9}\sqrt{\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1}}$

$= \dfrac{1}{6}\sqrt{6}$

b. Limit fungsi $f(x)$ untuk x menuju tak hingga (*limits at infinity*)

1) **Limit fungsi yang memuat bentuk $\infty - \infty$.**

Limit fungsi yang memuat bentuk $\infty - \infty$ umumnya diselesaikan melalui cara mengalikan dengan sekawannya

Contoh 6.5:

a). $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2x-\sqrt{4x^2-x}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(2x-\sqrt{4x^2-x}\right)\cdot\dfrac{\left(2x+\sqrt{4x^2-x}\right)}{\left(2x+\sqrt{4x^2-x}\right)}$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-(4x^2-x)}{2x+\sqrt{4x^2-x}}$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{2x+\sqrt{4x^2-x}}\cdot\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{x}{x}}{\frac{2x}{x}+\sqrt{\frac{4x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}}}$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{2+\sqrt{4-\frac{1}{x}}}$

$= \dfrac{1}{2+\sqrt{4-0}} = \dfrac{1}{4}$

b). $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+7x}-\sqrt{x^2-x}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+7x}-\sqrt{x^2-x}\right)\cdot\frac{\left(\sqrt{x^2+7x}+\sqrt{x^2-x}\right)}{\sqrt{x^2+7x}+\sqrt{x^2-x}}$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+7x-(x^2-x)}{\sqrt{x^2+7x}+\sqrt{x^2-x}}\right)$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{6x}{\sqrt{x^2+7x}+\sqrt{x^2-x}}\right)$

$$= \lim_{x \to \infty} \left(\frac{6}{\sqrt{1+\frac{7}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}} \right)$$ **[pembilang dan penyebut dibagi x]**

$$= \frac{6}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}} = 3$$

2) **Limit fungsi yang memuat bentuk $\frac{\infty}{\infty}$**

Limit fungsi yang memuat bentuk $\frac{\infty}{\infty}$ dengan pembilang dan penyebut suatu polinomial, perlu memperhatikan

- Pangkat tertinggi variabel pembilang lebih besar dari penyebut maka tidak punya limit

  Contoh 6.6:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - 2x^2 + x - 5}{x^2 + 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^3}{x^2} - 2\frac{x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2} - \frac{5}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x-2+\frac{1}{x}-\frac{5}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{\lim_{x \to \infty} x - \lim_{x \to \infty} 2 + \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} - \lim_{x \to \infty} \frac{5}{x^2}}{\lim_{x \to \infty} 1 + \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{\lim_{x \to \infty} x - 2 + 0 - 0}{1+0} = \infty$$

- Pangkat tertinggi variabel penyebut lebih besar dari pangkat tertinggi variabel pembilang maka nilai limitnya nol

  Contoh 11:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 + x - 5}{x^3 + 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{2x^2}{x^2} + \frac{1}{x} - \frac{5}{x^2}}{\frac{x^3}{x^2} + \frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{2+\frac{1}{x}-\frac{5}{x^2}}{x+\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{2+0-0}{x+0} = 0$$

- Pangkat tertinggi variabel pembilang sama dengan pangkat tertinggi variabel penyebut maka nilai limitnya adalah perbandingan koefisien variabel tertinggi dari pembilang dan penyebut

Contoh 6.7:

a). $$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^3-2x^2+x-5}{2x^3+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{5x^3}{x^3}-2\frac{x^2}{x^3}+\frac{x}{x^3}-\frac{5}{x^3}}{\frac{2x^3}{x^3}+\frac{1}{x^3}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{5-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{5}{x^3}}{2+\frac{1}{x^3}} = \frac{5-0+0-0}{2+0} = \frac{5}{2}$$

b). $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{9x^4-2x^2+x-5}}{2x^2+1}$.

Perhatikan bahwa suku dengan variabel pangkat tertinggi pembilang adalah $9x^4$. Karena di dalam akar maka untuk keperluan menghitung limit, suku tersebut "dipandang" sebagai $\sqrt{9x^4}$ (menghilangkan suku $-2x^2+x-5$). Tetapi sebenarnya tidak demikian (lihat latihan). Sehingga pengerjaan dapat disederhanakan sebagai

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{9x^4-2x^2+x-5}}{2x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{9x^4}}{2x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{9}x^2}{2x^2} = \frac{\sqrt{9}}{2} = \frac{3}{2}$$

c). $$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{2x^4-x-5}}{2x^2-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{2}x^2}{2x^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

D. Aktivitas Pembelajaran

<u>Aktivitas 1:</u>

Perhatikan penyelesaian dari soal berikut.

(i) Tentukan $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$

(ii) Tentukan penyelesaian dari $\frac{x^2-1}{x-1} = 2x$

Pengerjaan untuk (i)

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{1.(x+2)}{1}$$

$$= \lim_{x\to 2} (x+2)$$

$$= 4$$

Pengerjaan (ii)

$$\frac{x^2-1}{x-1} = 2x$$

$$\frac{(\cancel{x-1})(x+1)}{\cancel{x-1}} = 2x$$

$$x+1 = 2x$$

$$1 = 2x - x$$

$$x = 1$$

tetapi, $x = 1$ bukan penyelesaian

persamaan tersebut

Mencermati pengerjaan tersebut, memunculkan pertanyaan mengapa proses mencoret pada pengerjaan (i) boleh dilakukan, tetapi proses mencoret pengerjaan (ii) tidak boleh dilakukan? Jelaskan

Aktivitas 2:

Diketahui hubungan antara temperatur (T) dan Volum (V) pada suatu wadah bertekanan tetap adalah $T = \frac{V-22{,}4334}{0{,}08213}$. Dengan mencermati hubungan tersebut, apakah T mempunyai batas bawah? Jelaskan mengapa demikian.

Aktivitas 3a:

Perhatikan pengerjaan limit berikut

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}[(2x^2+1)+\sin x] &= \lim_{x\to 0}(2x^2+1) + \lim_{x\to 0}(\sin x)\\ &= 1+0\\ &= 1\end{aligned}$$

Jelaskan secara rinci dan detail sifat-sifat apa saja yang digunakan untuk mengerjakan soal limit tersebut.

Aktivitas 3b:

Seorang siswa mengerjakan soal limit di bawah ini dengan hasil akhir 0.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{1+x} - 1}$$

Siswa tersebut langsung menduga 0 karena bagian pembilang ada unsur x dan kebetulan x menuju 0. Apakah hasil ini benar? Berikan penjelasan

Aktivitas 4:

Pernahkah Anda mendengar sesorang mengatakan "limitnya tak hingga" atau "limitnya tidak ada"? Berkaitan dengan ini diskusikan bagaimana cara menulis hasil limit fungsi berikut.

(i) $\lim_{x \to 0} \frac{3}{x}$

(ii) $\lim_{x \to 0} \frac{3}{x^2}$

(iii) $\lim_{x \to 0} h(x)$ dimana $h(x) = \begin{cases} x^2 + 3, & \text{untuk } x \geq 0 \\ -x^2 + 1, & \text{untuk } x < 0 \end{cases}$

Aktivitas 5.a:

Diskusikan perbedaan limit tak hingga (*infinite limits*) dan limit di tak hingga (*limits at infinity*).

Aktifitas 5.b

Dalam menyelesaikan $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{16x^4-2x^2+x-5}}{2x^2+1}$, bolehkah kita "pandang" $\sqrt{16x^4-2x^2+x-5}$ sebagai $\sqrt{16x^4}$ (menghilangkan suku $-2x^2+x-5$ di bawah akar) sehingga pengerjaan menjadi lebih sederhana? Diskusikan dan berikan penjelasan.

Aktifitas 6a:

Buatlah suatu fungsi (misalkan $h(x)$) yang relatif rumit, kemudian substitusikan suatu bilangan (namakan a) sehingga tidak terjadi hasil penyebut bernilai nol. Setelah itu Tentukan $\lim_{x\to a} h(x)$. Selidiki apakah hasil limitnya $h(a)$? Sebagai pemantapan, boleh menggunakan media TIK untuk menentukan hasil limitnya

Aktifitas 6.b

Dalam menyelesaikan $\lim_{x\to\infty} \left(2x-\sqrt{4x^2-x}\right)$, bolehkah kita "pandang" $\sqrt{4x^2-x}$ sebagai $\sqrt{4x^2}$ saja (menghilangkan suku "$-x$" di bawah akar) sehingga pengerjaan menjadi lebih sederhana? Diskusikan bandingkan dengan aktifitas 5.3 dan berikan penjelasan.

E. Latihan

Kerjakan soal-soal berikut ini

1. Buktikan bahwa jika $\lim\limits_{x\to a} f(x) = K$ dan $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L$ maka $\lim\limits_{x\to a} (f(x) + g(x)) = K + L$
2. Jika $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ ada, apakah limit kiri dan limit kanan keduanya harus selalu ada? Apakah boleh salah satu saja? Jelaskan
3. Tentukan nilai $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x}$
4. Buktikan $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}$ tidak ada

F. Rangkuman

Pengertian limit fungsi dapat diungkapkan dalam bahasa verbal maupun bahasa formal. Dalam bahasa verbal $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ diungkapkan sebagai $f(x)$ akan mendekati nilai L apabila x mendekati a. Sedangkan penyajian dengan bahasa formal arti $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ adalah untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga $|f(x) - L| < \varepsilon$ untuk setiap $0 < |x - c| < \delta$.

Untuk menentukan nilai limit suatu fungsi, kita tidak harus kembali pada definisi limit, tetapi memanfaatkan teorema atau sifat-sifat limit. Teorema yang sering digunakan adalah sebagai berikut.

Misalkan c suatu konstanta dan $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ serta $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ dua-duanya ada maka berlaku

1) $\lim\limits_{x\to a} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$
2) $\lim\limits_{x\to a} [f(x) - g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) - \lim\limits_{x\to a} g(x)$
3) $\lim\limits_{x\to a} [f(x).\, g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x).\, \lim\limits_{x\to a} g(x)$
4) $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ bila $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$
5) $\lim\limits_{x\to a} cf(x) = c \lim\limits_{x\to a} f(x)$
6) $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$
7) $\lim\limits_{x\to a} [f(x)]^p = \left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]^p$ bila p positip dan ruas kiri limitnya ada
8) $\lim\limits_{x\to a} c = c$

9) $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, jika $\frac{f(x)}{g(x)}$dalam bentuk $\frac{0}{0}$, $f'(x)$ dan $g'(x)$ ada. (Teorema L'Hopital)

10) Untuk $f(x)$ suatu fungsi yang kontinyu di a maka $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Selain menyelesaikan permasalahan limit dapat menggunakan strategi sederhana sebagai berikut

a. Limit fungsi $f(x)$untuk x menuju nilai tertentu ($x \to a, a \in R$)

1) Substitusi langsung pada fungsinya.
2) Menyederhanakan bentuk rasional
3) Jika dengan substitusi memuat bentuk $\frac{k}{0}$ dengan $k \neq 0$, umumnya fungsi tidak mempunyai limit. Namun demikian, ada beberapa kasus walaupun memuat bentuk $\frac{k}{0}$ dengan $k \neq 0$ tetapi limitnya ada.
4) Jika dengan substitusi memuat bentuk $\frac{0}{0}$ maka nilai limit dapat ditentukan dengan menyederhanakan atau menggunakan *teorema L'hopital* (lihat sifat limit) hanya pada bentuk yang memuat $\frac{0}{0}$ tersebut.

b. Limit fungsi $f(x)$ untuk x menuju tak hingga (*limits at infinity*)

1) Limit fungsi yang memuat bentuk $\infty - \infty$, umumnya diselesaikan melalui cara mengalikan dengan sekawannya
2) Limit fungsi yang memuat bentuk $\frac{\infty}{\infty}$ dengan pembilang dan penyebut suatu polinomial, perlu memperhatikan
   - Pangkat tertinggi variabel pembilang lebih besar dari penyebut maka tidak punya limit
   - Pangkat tertinggi variabel penyebut lebih besar dari pangkat tertinggi variabel pembilang maka nilai limitnya nol
   - Pangkat tertinggi variabel pembilang sama dengan pangkat tertinggi variabel penyebut maka nilai limitnya adalah perbandingan koefisien variabel tertinggi dari pembilang dan penyebut

Berkaitan dengan istilah limit tak hingga, terdapat perbedaan antara limit tak hingga (*infinite limits*) dan limit di tak hingga (*limits at infinity*). Limit tak hingga $\lim_{x \to c} f(x) = \infty$ dimaknai sebagi untuk setiap $M > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga $f(x) > M$ jika $0 <$

$|x-c|<\delta$. Sedangkan $\lim_{x\to c} f(x) = -\infty$ dimaknai sebagi untuk setiap $N<0$ terdapat $\delta>0$ sehingga $f(x)<N$ jika $0<|x-c|<\delta$

Contoh diantaranya adalah $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$ dan $\lim_{x\to 2} \frac{-1}{(2-x)^2} = -\infty$

Sementara itu untuk limit di tak hingga $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ dimaknai sebagai untuk setiap $\varepsilon>0$ terdapat $M>0$ sehingga jika $x>M$ berlaku $|f(x)-L|<\varepsilon$, sedangkan $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ dimaknai sebagai untuk setiap $\varepsilon>0$ terdapat $N<0$ sehingga jika $x<N$ berlaku $|f(x)-L|<\varepsilon$

Contoh: $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ demikian pula $\lim_{n\to-\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

G. Umpan Balik dan Tindak Lanjut

Setelah mempelajari modul ini Anda diharapkan sudah mampu memahami pengertian limit fungsi dengan bahasa sederhana maupun bahasa formal. Selain itu Anda diharapkan mampu menyelesaikan permasalahan limit baik berkaitan dengan menentukan nilai limit maupun berkaitan dengan pembuktian limit. Untuk megukur itu semua Anda harus mengerjakan semua soal yang ada di bagian latihan. Selanjutnya cocokkan jawaban Anda dengan kunci. Karena kegiatan ini merupakan evaluasi diri maka pengerjaan yang jujur adalah kunci keberhasilan untuk mengukur capaian kompetensi (CK). Berkaitan dengan itu, pertimbangkan hal berikut

Perolehan CK (dalam %)	Deskripsi dan tindak lanjut
$91 \le CK \le 100$	**Sangat Baik**, berarti Anda benar-benar memahami pengertian limit. Selanjutnya kembangkan pengetahuan dan tuangkan dalam pembelajaran
$76 \le CK < 91$	**Baik**, berarti Anda cukup memahami pengertian limit walaupun ada beberapa bagian yang perlu dipelajari lagi. Selanjutnya pelajari lagi beberapa bagian yang dirasakan belum begitu dipahami.
$50 \le CK < 76$	**Cukup**, berarti Anda belum cukup memahami pengertian limit. Oleh karena itu Anda perlu mempelajari lagi bagian yang belum dikuasai dan menambah referensi dari sumber lain
$CK < 50$	**Kurang**, berarti Anda belum dapat memahami pengertian limit. Oleh karena itu Anda perlu mempelajari lagi dari awal dan menambah referensi dari sumber lain

H. Kunci Jawaban

1. Jawab:

Setiap $\varepsilon > 0$ terdapat δ_1 dan δ_2 sehingga berlaku $|f(x) - K| < \frac{\varepsilon}{2}$ jika $0 < |x - a| < \delta_1$ dan $|g(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ jika $0 < |x - a| < \delta_2$. Selanjutnya, pilih $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, maka akan berlaku

$$\begin{aligned} |[f(x) + g(x)] - [K + L]| &= |(f(x) - K) + (g(x) - L)| \\ &\leq |f(x) - K| + |g(x) - L| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

2. Jawab:

Tidak harus. Contoh $\lim_{x\to 1} \sqrt{x-1} = 0$, tetapi limit kiri tidak ada karena domain fungsinya adalah $x \geq 1$

3. Jawab:

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x\to 0} 2.\frac{\sin 2x}{2x}$. Karena untuk $x \to 0$ maka $2x \to 0$ maka berlaku $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x\to 0} 2.\frac{\sin 2x}{2x} = 2 \lim_{2x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x} = 2.1 = 1$

4. Jawab:

Andaikan $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = l$. Maka kita dapat ambil $\varepsilon = (|l| + 1) > 0$ sehingga berlaku $|\frac{1}{x} - l| < (|l| + 1)$ jika $0 < |x| < \delta$ untuk suatu $\delta > 0$. Sementara itu untuk $|x| < \frac{1}{2|l|+1}$ maka dipenuhi $2|l| + 1 < \left|\frac{1}{x}\right|$. Sehingga dengan memilih $\delta^* = \min\{\delta, |l| + 1\}$ maka berlaku

$$\begin{aligned} 2|l| + 1 &< \left|\frac{1}{x}\right| \\ &= \left|\frac{1}{x} - l + l\right| \\ &\leq \left|\frac{1}{x} - l\right| + |l| \\ &< (|l| + 1) + |l| \\ &= 2|l| + 1 \end{aligned}$$

Terjadi suatu kontradiksi karena tidak mungkin $2|l| + 1 < 2|l| + 1$. Jadi pengandaian salah, yang berarti $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ tidak ada

KB2 : Turunan dan Integral

A. Tujuan

Kegiatan belajar ini bertujuan untuk memberikan pemahaman kepada peserta diklat atau pembaca berkaitan dengan pengertian turunan, integral yang mencakup integral tak tentu dan integral tertentu serta teorema fundamental kalkulus. Selain itu, kegiatan belajar ini ditujukan untuk memberikan tambahan pengetahuan berkaitan dengan cara menyelesaikan integral tak tentu dan integral tertentu. Kegiatan yang dimaksud dapat dilakukan secara mandiri maupun dalam kegiatan diklat.

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

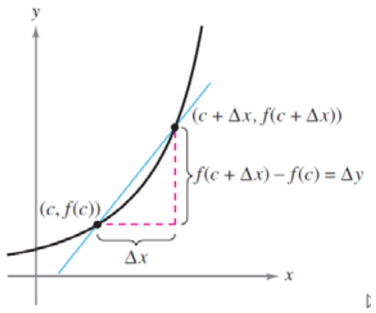
Setelah membaca dan mengikuti serangkaian kegiatan pada modul ini, peserta diklat atau pembaca mampu

1. memahami pengertian turunan, integral tak tentu dan integral tertentu dari suatu fungsi
2. menentukan hasil integral tak tentu dan integral tertentu fungsi aljabar
3. menentukan hasil integral tak tentu dan integral tertentu fungsi trigonometri
4. memahami teorema fundamental kalkulus

C. Uraian Materi

1. Pengertian Turunan

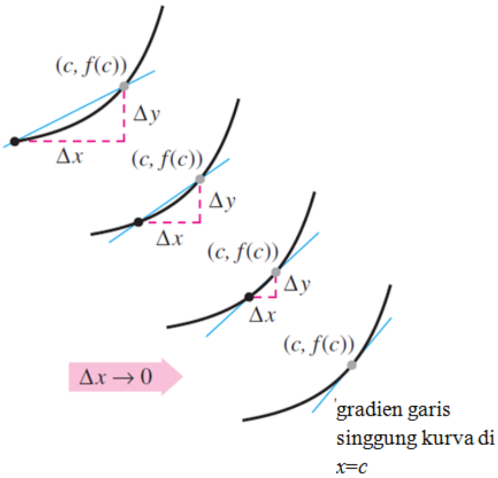
Jika kita berbicara mengenai kecepatan, percepatan, nilai maksimum dan minimum suatu fungsi maka sebenarnya kita sedang membahas mengenai turunan. Sementara itu turunan (secara definisi) adalah pengembangan dari konsep limit. Sebagai awal pembicaraan marilah kita memahami turunan sebagai gradien garis singgung. Perhatikan gradien garis (bukan garis singgung) yang memotong kurva $y = f(x)$ berikut.



Gambar 11 Gradien

Gardien garis $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}$.

Untuk $\Delta x \to 0$ dapat diilustrasikan seperti gambar berikut



Gambar 12 Pemahaman gradien garis singgung

Dengan demikian **gradien garis singgung** kurva di titik $(c, f(c))$ namakan m dapat dipahami sebagai formula

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}$$

jika nilai limitnya ada. Misalkan fokus kita tidak pada pada satu titik, tetapi pada titik sembarang di domainnya maka formula di atas dapat dinyatakan sebagai suatu fungsi yang dilambangkan dengan $f'(x)$ dimana

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

jika limitnya ada. Bentuk terakhir inilah yang dinamakan **turunan** dari fungsi f pada domainnya. Mengingat penjelasan sebelumnya maka turunan fungsi f ini dapat dikatakan sebagai fungsi gradien garis singgung kurva f. Berkaitan dengan notasi ini, ada sebagian literatur yang menyajikan $f'(x)$ sebagai $[f(x)]'$ atau $(f(x))'$

Contoh 1.1:

Tentukan turunan dari $f(x) = x^2$

Jawab:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(x^2 + 2xh + h^2) - x^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} (2x + h) \\ &= 2x \end{aligned}$$

2. Sifat-sifat dan Teorema Turunan

Perlu menjadi perhatian bahwa ketika ingin menentukan turunan suatu fungsi, kita tidak harus kembali pada definisinya, tetapi memanfaatkan teorema atau sifat-sifat pada turunan. Berikut ini beberapa sifat dan teorema terkait turunan serta beberapa hasil turunan yang sering digunakan. Bukti untuk sifat di atas tidak disajikan dalam tulisan ini, tetapi pembaca dapat memperolehnya di buku referensi [2] pada daftar pustaka.

1) $[x^n]' = nx^{n-1}$
2) $[cf(x)]' = c\,[f(x)]'$
3) $[f(x) \pm g(x)]' = [f(x)]' \pm [g(x)]'$
4) $[f(x).\,g(x)]' = [f(x)]'g(x) \pm f(x)[g(x)]'$
5) $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{[f(x)]'g(x) + f(x)[g(x)]'}{[g(x)]^2}$
6) $\left[f\big(g(x)\big)\right]' = f'\big(g(x)\big).\,g'(x)$
7) $[e^x]' = e^x$
8) $[\ln|x|]' = \frac{1}{x}$
9) $[a^x] = a^x \ln a$
10) $[\sin x]' = \cos x$

11) $[\cos x]' = -\sin x$

12) $[\tan x]' = \sec^2 x$

Contoh 2.1

Tentukan turunan dari $f(x) = x^2 - \frac{\sin x}{2x}$

Jawab:

Dengan memanfaatkan sifat turunan diperoleh

$$\left[x^2 - \frac{\sin x}{2x}\right]' = [x^2]' - \left[\frac{\sin x}{2x}\right]'$$
$$= 2x - \frac{2x\cos x - 2\sin x}{4x^2}$$

Contoh 2.2

Tentukan gardien garis singgung kurva $f(x) = \log x$ di titik (10,1)

Jawab:

Untuk menentukan gradien garis singgung di suatu titik, dapat dilakukan melalui definisi (menggunakan limit) atau dengan cara menentukan fungsi turunannya terlebih dahulu. Misalnya kita mengambil cara menentukan fungsi turunannya terlebih dahulu

$$f'(x) = [\log x]' = \left[\frac{\ln x}{\ln 10}\right]' = \frac{1}{\ln 10}\frac{1}{x} = \frac{1}{x\ln 10}$$

Berarti $f'(10) = \frac{1}{10\ln 10}$.

Jadi gradien garis singgung di titik (10,1) adalah $\frac{1}{10\ln 10}$

3. Integral Tak Tentu (Indefinite Integral)

Sebelum pembicaraan lanjut, marilah kita bahas mulai dari istilahnya. Mengapa ada kata tak tentu? Misalkan kita ingin mencari fungsi F yang mempunyai turunan $f(x) = 3x^2$. Mungkin saja kita langsung menentukan $F(x) = x^3$ karena $F'(x) = 3x^2$. Tetapi jika diperhatikan lagi, masih banyak fungsi yang turunannya $3x^2$. Contoh $F_1(x) = x^3 + 1$, $F_2(x) = x^3 + 25$ mempunyai hasil turunan $F_1{}'(x) = 3x^2$ dan $F_2{}'(x) = 3x^2$. Kita masih dapat menentukan banyak lagi fungsi lain yang turunannya $f(x) = 3x^2$. Pengerjaan seperti ini dinamakan menemukan suatu antiturunan dari suatu fungsi. Proses menentukan fungsi $F(x)$ sedemikaian hingga $F'(x) = f(x)$ dinamakan proses **antiturunan** atau **pengintegralan tak tentu.** Secara definisi dituliskan sebagai berikut.

Fungsi F dinamakan suatu antiturunan dari f pada interval I jika $F'(x) = f(x)$ untuk setiap x yang berada dalam interval I

Perlu menjadi perhatian bahwa kata "suatu" disini amat penting, karena kata "suatu" itu menunjuk pada salah satu fungsi antiturunannya. Operasi untuk menentukan semua anti turunan $f(x)$ ditulis dengan simbol integral "$\int$". Jadi penyelesaian proses ini dituliskan sebagai

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c.$$

Dengan melihat hubungan antara proses pengintegralan dengan proses turunan maka dapat dikatakan bahwa integral adalah invers dari turunan.

Contoh 4.1:

a. Diberikan $f(x) = x^2$, tentukan
   (i) suatu anti turunan dari $f(x)$
   (ii) hasil dari $\int f(x)dx$

Jawab:

(i) Karena yang diminta hanya menentukan suatu antiturunan, kita dapat dengan bebas memilih suatu fungsi yang turunannya x^2, misalkan saja ambil fungsi $g(x) = \frac{1}{3}x^3 + 10$ maka $g(x)$ ini adalah suatu anti turunan dari $f(x)$.

(ii) Untuk pertanyaan kedua, sebenarnya kita diminta menentukan semua fungsi yang turunannya x^2. Jadi hasilnya adalah

$\int f(x)dx = \frac{1}{3}x^3 + c$ dimana c suatu konstanta

Sebelum membahas mengenai luas daerah yang dibatasi grafik, perlu dibahas terlebih dahulu cara menentukan hasil integral tak tentu

b. Tentukan hasil dari
   (i) $\int (x^3 + 1)x\,dx$
   (ii) $\int (x^3 + \cos x + \sin x)\,dx$

Jawab:

(i) $\int (x^3 + 1)x\,dx = \int (x^4 + x)\,dx = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^2 + c$

(ii) $\int (x^3 + \cos x + \sin x)\,dx = \frac{1}{4}x^4 + \cos x - \sin x + c$

4. Strategi sederhana dalam menentukan hasil integral tak tentu

- Sedapat mungkin disederhanakan (jika bisa dilakukan)

  Contoh 5.1:

  a. $\int \frac{x^2-1}{x-1}\, dx = \int \frac{(x-1)(x+1)}{x-1}\, dx$

  $= \int (x+1) dx$

  $= \frac{1}{2}x^2 + x + c$

  b. $\int (x+1)\left(\frac{1}{x^{-1}+2} + \frac{2}{x+2}\right) dx = \int (x+1)\left(\frac{2}{x^{-1}+2} \cdot \frac{x}{x} + \frac{1}{2x+1}\right) dx$

  $= \int (x+1)\left(\frac{2x}{1+2x} + \frac{1}{2x+1}\right) dx$

  $= \int (x+1) \cdot 1\, dx$

  $= \frac{1}{2}x^2 + x + c$

- Jika ada faktor yang bentuk aljabarnya relatif sederhana, <u>hindari</u> untuk pemisalan

  Contoh 5.2:

  Tentukan $\int x^2\sqrt{x^3+7}\, dx$

  Perhatikan bahwa bentuk aljabar x^2 lebih mudah dari bentuk aljabar $x^3 + 7$.

  Oleh karena itu hindari pemisalan $u = x^2$. Gunakan pemisalan $u = x^3 + 7$.

  $du = 3x^2 dx \leftrightarrow dx = \frac{1}{3x^2} du$. Jadi

$$\int x^2\sqrt{x^3+7}\, dx = \int x^2\sqrt{u}\, \frac{1}{3x^2} du$$

$$= \frac{1}{3}\int \sqrt{u} du = \frac{2}{9}\, u^{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{2}{9}\sqrt{(x^3+7)^3} + c$$

- Untuk fungsi rasional, jadikan sebagai penjumlahan dengan penyebut faktor-faktornya

  Contoh 5.3:

  Tentukan $\int \frac{2}{x^2-x-2}\, dx$

  Perhatikan bahwa

$$\frac{2}{x^2-x-2} = \frac{2}{(x-2)(x+1)}$$

$$= \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1}$$
$$= \frac{A(x+1) + B(x-2)}{x^2 - x - 2}$$
$$= \frac{(A+B)x + (A-2B)}{x^2 - x - 2}$$

Dari sini diperoleh $A = \frac{2}{3}, B = -\frac{2}{3}$. Sehingga

$$\int \frac{2}{x^2 - x - 2}\, dx = \int \left(\frac{2}{3}\frac{1}{(x-2)} - \frac{2}{3}\frac{1}{(x+1)}\right) dx$$
$$= \frac{2}{3}\ln(x-2) - \frac{2}{3}\ln(x+1)$$

- Untuk kasus campuran yang merupakan perkalian dua fungsi dimana salah satu fungsi bisa diturunkan terus sampai menghasilkan 0 dan fungsi yang lain selalu dapat ditentukan integralnya maka pengerjaannya dapat dilihat seperti pada contoh.

  Contoh 5.6:

  a. Misalnya akan ditentukan hasil dari $\int x^3 \cos 2x \, dx$.

  Pengerjaan sebagai berikut:

Bagian Aljabar (diturunkan)		Bagian Transenden (diintegralkan)
x^3		$\cos 2x$
$3x^2$	+	$\frac{1}{2}\sin 2x$
$6x$	-	$-\frac{1}{4}\cos 2x$
6	+	$-\frac{1}{8}\sin 2x$
0	-	$\frac{1}{16}\cos 2x$

Jadi diperoleh,

$$\int x^3 \cos 2x\, dx = x^3 \cdot \frac{1}{2} \sin 2x + 3x^2 \cdot \frac{1}{4} \cos 2x - 6x \cdot \frac{1}{8} \sin 2x - 6 \cdot \frac{1}{16} \cos 2x + c$$

$$= \frac{1}{2} x^3 \sin 2x + \frac{3}{4} x^2 \cos 2x - \frac{3}{4} x \sin 2x - \frac{3}{8} \cos 2x + c$$

b. Tentukan hasil $\int (x^2 - 1) x^3\, dx$

Cara 1:

Pengerjaan sebagai berikut:

Jadi diperoleh,

$$\int (x^2 - 1) x^3\, dx = (x^2 - 1).\frac{1}{4} x^4 + 2.\left(-\frac{1}{20} x^5\right) + 2.\frac{1}{120} x^6$$

$$= \frac{1}{6} x^6 - \frac{1}{4} x^4 + c$$

Cara 2:

$$\int (x^2 - 1) x^3\, dx = \int (x^5 - x^3)\, dx$$

$$= \frac{1}{6} x^6 - \frac{1}{4} x^4 + c$$

Selain strategi sederhana dalam menentukan integral, perlu diingat juga beberapa sifat-sifat dan rumus integral tak tentu seperti tertuang pada lamiran

5. Integral Tertentu (Definite Integral)

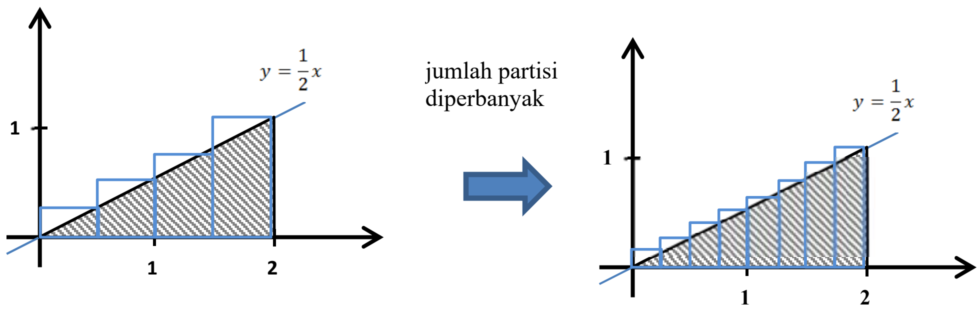
Untuk mempermudah pemahaman kita mulai dari suatu fungsi $f(x)$ yang kontinyu pada interval $a \leq x \leq b$. Selanjutnya kita bagi interval $[a, b]$ dalam n subinterval dengan panjang sama yaitu $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Kemudian misalkan $x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b$ batas-batas pada subinterval. Pilih titik-titik $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ pada subinterval sehingga x_i^* berada pada subinterval $[x_{i-1}, x_i]$, maka **integral tertentu** $f(x)$ dari a sampai b adalah

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \Delta x$$

jika limit tersebut ada. Simbol "$\int$ " dinamakan simbol integral. Suatu hal yang perlu ditegaskan disini bahwa simbol "$\int$ " berbeda makna dengan simbol "$\int$ " pada antiturunan. Apa perbedaannya? Lihat di aktifitas.

Contoh 6.1:

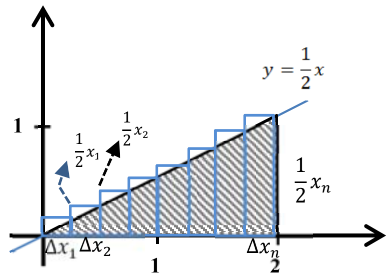
Perhatikan luasan berikut beserta partisinya.



Gambar 13 Cara mempartisi

Selanjutnya, pada interval $[0,2]$ kita buat menjadi n subinterval dengan panjang sama yaitu $\Delta x = \frac{2-0}{n}$ dengan batas-batas interval

$x_0 = 0, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{2n}{n} = 2$.



Gambar 14 Contoh partisi

Kemudian kita pilih x_i^* yang berada pada subinterval $[x_{i-1}, x_i]$ sebagai $x_i^* = x_i$ (supaya lebih mudah). Dengan mengacu pada pendefinisian integral tertentu maka diperoleh

$$\int_0^2 f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\frac{2}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left[\frac{2}{n} + \frac{4}{n} + \cdots + \frac{2n}{n}\right].\frac{2}{n}$$

$$= 1$$

Jadi,

$$\int_0^2 \frac{1}{2}x\,dx = 1$$

Terlihat bahwa integral tertentu menunjukan suatu luas. Dari sini timbul pertanyaan, apakah untuk menentukan integral tertentu selalu harus selalu menggambar dan menggunakan partisi? Jawabannya adalah tidak harus. Kita cukup bersyukur dan bangga dengan adanya Teorema Fundamental Kalkulus (TFK) yang diantaranya menyatakan bahwa

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

dimana $F(x)$ adalah anti turunan dari $f(x)$.

Berkaitan dengan penulisan, banyak orang menggunakan $F(x)|_a^b$ untuk mengganti $F(b) - F(a)$. Dalam tulisan ini tidak dibahas mengenai bukti TFK, namun pembaca dapat memperolehnya di referensi [1, [2] dan [3]

Misalkan untuk contoh tadi, kita akan menentukan hasil dari $\int_0^2 \frac{1}{2}x\,dx$. Langkah pertama adalah menentukan anti turunan (primitive) dari $f(x) = \frac{1}{2}x$ yaitu

$$F(x) = \int \frac{1}{2}x\ \ dx = \frac{1}{4}x^2 + c$$

Dengan memakai TFK maka diperoleh

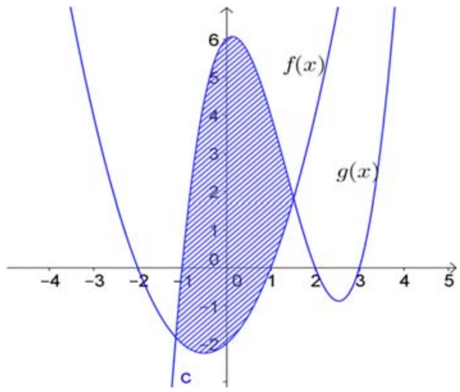
$$\int_0^2 f(x)dx = F(2) - F(0)$$

$$= \left[\frac{1}{4}2^2 + c\right] - \left[\frac{1}{4}0^2 + c\ \right]$$

$= 1$

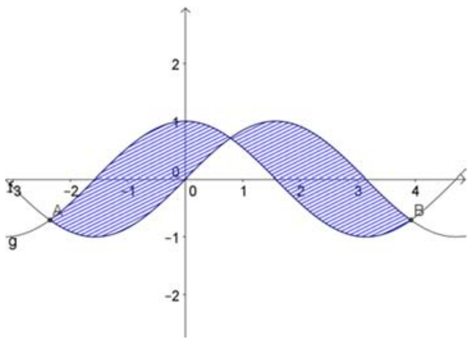
6. Menentukan luas daerah

Untuk menentukan luas daerah khususnya daerah yang dibatasi oleh dua grafik dilakukan dengan menghitung integral tertentu masing-masing kurva. Proses ini dapat dilakukan jika integral tak tentu sudah diperoleh. Untuk itu, gunakan cara-cara untuk menentukan integral tak tentu yang sudah dibahas pada bagian sebelumnya. Jika dua grafik membentuk kurva tertutup sederhana (misalkan fungsi f dan g) maka untuk menentukan luas daerah yang dimaksud adalah dengan menentukan integral tertentu $f - g$ dengan batas integral titik-titik potongnya.



kurva tertutup sederhana

Gambar 15 Kurva tertutup sederhana

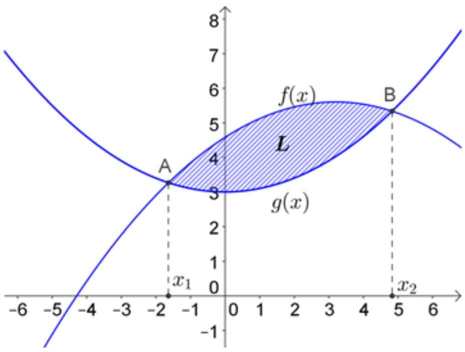


kurva tertutup tidak sederhana

Gambar 16 Kurva tertutup tidak sederhana

Mengapa demikian? Coba cermati uraian berikut.

Diberikan fungsi f dan g seperti gambar di bawah ini.



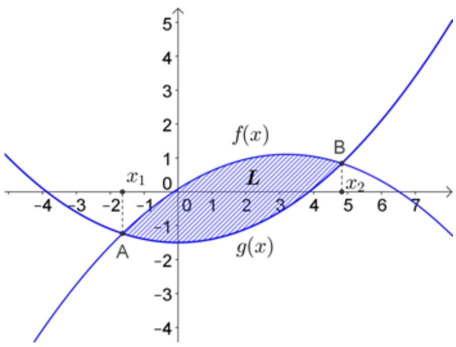
Gambar 17 Luas daerah antara dua kurva

Dengan memperhatikan grafik di atas jelas bahwa L dapat ditentukan dengan

$$L = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx - \int_{x_1}^{x_2} g(x)dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} f(x) - g(x)\, dx$$

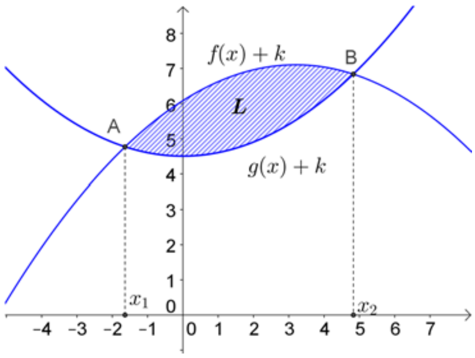
Selanjutnya, untuk daerah berikut, apakah untuk menghitung luas juga dilakukan pengurangan seperti cara sebelumnya?



Gambar 18 Contoh luas daerah antara dua kurva

Apakah $L = \int_{x_1}^{x_2} f(x) - g(x)\, dx$?

Sekarang coba perhatikan bila kedua fungsi di atas masing-masing ditambah k sehingga luasannya di atas sumbu-x.



Gambar 19 Contoh luas daerah antara dua kurva

Perhatikan bahwa menambahkan k pada masing-masing fungsi tidak mengubah luas maupun absis titik potong kedua fungsi tersebut. Dengan demikian luas L adalah luas daerah dibawah kurva $f(x)+k$ dikurangi luas daerah dibawah kurva $g(x)+k$ dengan batas x_1 dan x_2. Atau dalam bentuk integral dinyatakan dengan

$$L = \int_{x_1}^{x_2} (f(x)+k)dx - \int_{x_1}^{x_2} (g(x)+k)dx$$

Akibatnya,

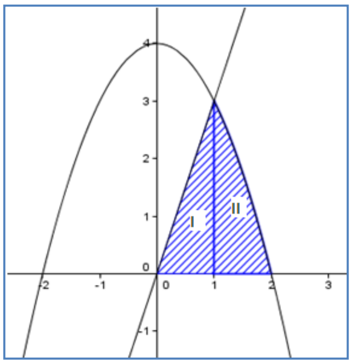
$$\begin{aligned} L &= \int_{x_1}^{x_2} (f(x)+k)dx - \int_{x_1}^{x_2} (g(x)+k)dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \big((f(x)+k)-(g(x)+k)\big)\,dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} (f(x)-g(x))\,dx \end{aligned}$$

Berarti luas daerah yang dibatasi oleh kurva tertutup sederhana dimanapun letaknya dapat ditentukan dengan cara menghitung integral tertentu hasil pengurangan kurva pertama oleh kurva kedua (atau sebaliknya) dengan batas-batas titik potongnya.

Sedangkan untuk kurva tertutup tidak sederhana, menentukan luas harus memperhatikan bagian-bagian luasannya

Contoh 7.1:

a. Berapa luas daerah yang dibatasi oleh $y = 3x$, $y = -x^2 + 4$ dan sumbu-*x* ?



Gambar 20 Luas daerah pada dua luasan

Jawab:

Untuk daerah I sangat mudah ditentukan luasnya yaitu $Luas\ I\ = 1\frac{1}{2}$. Sedangkan daerah II dihitung dengan menggunakan integral

$$Luas\ II = \int_1^2 -x^2 + 4$$

$$= -\frac{1}{3}x^3 + 4x\Big|_1^2$$

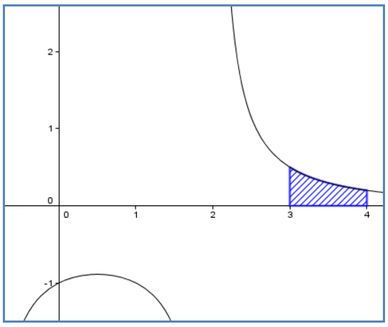
$$= -\frac{1}{3}2^3 + 4(2) - \left(-\frac{1}{3}1^3 + 4(1)\right)$$

$$= 1\frac{2}{3}$$

Sehingga,

$Luas\ I\ +\ Luas\ II = 1\frac{1}{2} + 1\frac{2}{3} = 3\frac{1}{6}$

b. Hitunglah luas daerah yang dibatasi oleh $f(x) = \frac{1}{x^2-x-2}$, $x = 3$, dan $x = 4$ serta sumbu-*x*.



Gambar 21 Luas daerah di bawah sumbu-x

Jawab:

Untuk menentukan luas daerah yang diarsir, sama saja dengan menentukan hasil dari $\int_3^4 \frac{2}{x^2-x-2}dx$.

$$\int_3^4 \frac{2}{x^2-x-2}dx = \frac{2}{3}\ln(x-2) - \frac{2}{3}\ln(x+1)\Big|_3^4$$

$$= \ln\frac{8}{5}$$

c. Tentukan luas daerah yang dibatasi kurva $f(x) = 4 - x^2$ dan $g(x) = x + 2$

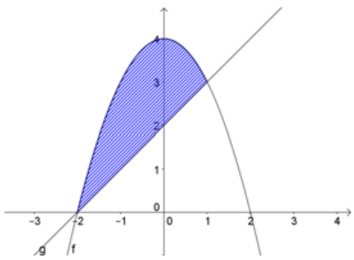
Jawab:

Ditentukan terlebih dahulu titik potongnya (dalam hal ini adalah batas integralnya).

$4 - x^2 = x + 2$

$x^2 + x - 2 = 0$

$(x+2)(x-1) = 0 \rightarrow$ titik potongnya $(-2,0)$ dan $(1,3)$.



Gambar 22 Luas daerah antara dua kurva

Luas daerah yang dimaksud adalah

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{1}\big(f(x)-g(x)\big)dx &= \int_{-2}^{1}\big((4-x^2)-(x+2)\big)dx\\ &= -\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+2x\Big|_{-2}^{1}\\ &= 4\frac{1}{2}\end{aligned}$$

D. Aktivitas Pembelajaran

Aktivitas 1a

Dengan menggunakan definisi turunan (melalui limit), tentukan turunan $f(x)=x^3$ kemudian diskusikan apa yang paling dirasa sulit dalam menentukan turunan tadi?

Aktivitas 2a

Tentukan hasil dari $\left[\sqrt{x^2+\sin x}\right]'$. Sifat-sifat mana saja yang digunakan untuk menyelesaikan hasil tersebut? Jelaskan dan diskusikan

Aktivitas 2b

Lengkapi tabel berikut ini

Tabel 5

No	Fungsi	Penulisan kembali	Turunan Fungsi	Bentuk Sederhana
1	$y = \sqrt{x}$	$y = x^{\frac{1}{2}}$	$y' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$	$y, = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
2	$y = \frac{\sqrt{x}}{2x}$	...	...	...
3	$y = \frac{1}{2\sin x}$	...	...	...
4	$\frac{12}{3\sqrt[3]{x^5}}$	...	...	...
5	$\frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{x}}$	...	...	...

Aktivitas 3

Gambarlah sketsa grafik fungsi $f(x) = (x^2 - 1)^3$ dan tentukan titik-titik pada grafik tersebut sehingga gradien garis singgungnya sejajar dengan sumbu$-x$

Aktivitas 4

Coba kerjakan soal berikut.

(i) $\int (\sin x + x^3) dx$

(ii) $\int_0^{\pi} (\sin x + x^3) dx$

Apa yang membedakan hasil (i) dan (ii)? Jelaskan

Aktivitas 5a

Tentukan hasil dari $\int \frac{x^2-2x+1}{\sqrt{x}}dx$ dan diskusikan langkah-langkah apa yang dilakukan untuk menyelesaikan soal tersebut.

Aktivitas 5b

Coba cermati dua orang yang berusaha mencoba menyelesaikan persoalan berikut

Orang 1:

Tentukan kasil dari $\int x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$.

Jawab:

Misalkan $t = x^2$, maka $dt = 2xdx$ dan $x = t^{\frac{1}{2}}$ sehingga

$$\begin{aligned}\int x^2\sqrt{x^3+1}\,dx &= \int t\sqrt{x^3+1}\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}dt\\ &= \frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}}\sqrt{t^{\frac{3}{2}}+1}\,dt\\ &= \frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}}\left(t^{\frac{3}{2}}+1\right)^{\frac{1}{2}}\,dt\\ &= \frac{1}{2}\int \left(t^{\frac{1}{2}}\cdot t^{\frac{3}{2}}+t^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\,dt\end{aligned}$$

tidak bisa melanjutkan.

Orang 2:

Tentukan hasil dari $\int x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$.

Jawab:

Misalkan $t = x^3+1$, maka $dt = 3x^2dx$ sehingga

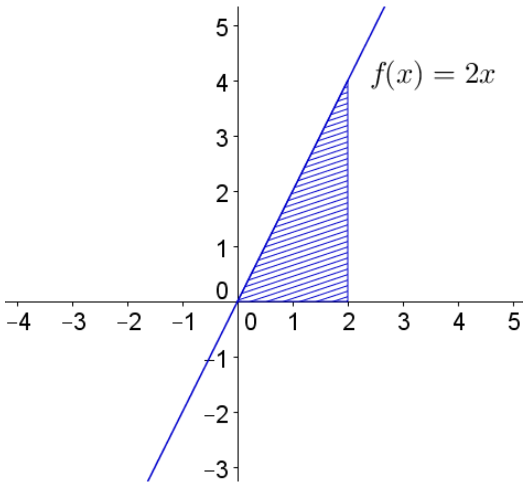
$$\begin{aligned}\int x^2\sqrt{x^3+1}\,dx &= \int x^2\sqrt{t}\,.\frac{1}{3x^2}\,dt\\ &= \int \sqrt{t}\,dt\\ &= \int t^{\frac{1}{2}}\,dt\\ &= \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+c\end{aligned}$$

Jadi $\int x^2\sqrt{x^3+1}\,dx = \int \sqrt{t}\,dt = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+c = \frac{2}{3}(x^3+1)^{\frac{3}{2}}+c$

Dengan mencermati pekerjaan tersebut, diskusikan mengapa orang 1 tidak mampu menyelesaikan soal tersebut?

Aktivitas 6a

Perhatikan grafik fungsi dan luasan berikut berikut.



Dengan menggunakan integral tertentu (dengan partisi) hitunglah luas daerah yang diarsir. Selanjutnya, cocokkan dengan hasil hitungan yang menggunakan teorema fundamental kalkulus.

Aktivitas 6b

Jawablah pertanyaan berikut, sebelum berdiskusi.

(i) Apakah hasil $\int_a^b f(x)dx$ suatu bilangan?

(ii) Apakah hasil $\int f(x)dx$ suatu bilangan?

Selanjutnya diskusikan apa yang membedakan antara $\int_a^b f(x)dx$ dengan $\int f(x)dx$.

Aktivitas 6c

Dengan memanfatkan TFK hitunglah

(i) $\int_0^2 x^2 dx$

(ii) $\int_{-1}^1 x^3 dx$

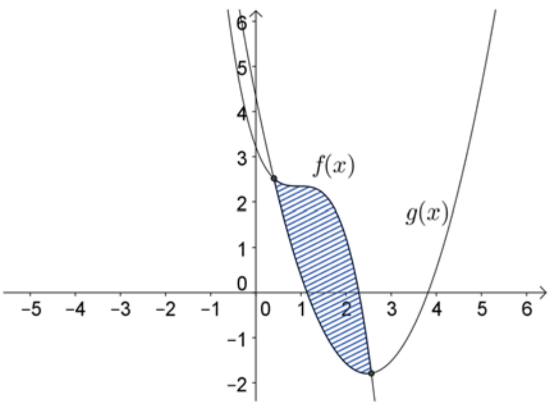
(iii) $\int_1^2 \frac{x^2+1}{\sqrt{x}} dx$

(iv) $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\sin x - \cos x)\, dx$

(v) $\int_0^1 (x^2 - 1)x^4\, dx$

Aktivitas 7a

Perhatikan luasan berikut.



Apakah luasan tersebut dapat dihitung secara langsung dengan

$\int_a^b [f(x) - g(x)]dx$ dengan a dan b absis titik potongnya? Jelaskan dan diskusikan

Aktivitas 7b

Karena hasil dari $\int_{-2}^{2} x^5 dx = 0$ maka luas daerah yang dibatasi kurva x^5 , garis $x = -2$, garis $x = 2$ dan sumbu-x adalah 0. Setujukan Anda dengan pernyatan tersebut. Jelaskan dan diskusikan

E. Latihan

1. Buktikan turunan dari 3x adalah 3
2. Misalkan gradien garis singgung pertama m, gradien garis singgung kedua n dimana $\mathrm{m} < \mathrm{n}$, apakah garis singgung pertama pasti lebih datar dari garis singgung kedua?
3. Contohkan fungsi yang tidak mempunyai gradien garis singgung pada titik tertentu.
4. Tentukan hasil dari $\int \mathrm{e}^{2\mathrm{x}} \sin 2\mathrm{x}\, \mathrm{dx}$
5. Tentukan luas daerah yang dibatasi garis $\mathrm{x} = -2, \mathrm{x} = 2$ dan kurva x^3
6. Tentukan luas daerah yang dibatasi fungsi $\mathrm{f(x)} = \mathrm{x} + 3$ dan $g(x) = x^2 - 9$

F. Rangkuman

Diberikan suatu fungsi $f(x)$. Gradien garis singgung kurva di titik $(\mathrm{c}, \mathrm{f(c)})$ namakan m dipahami sebagai formula

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}$$

jika nilai limitnya ada. Misalkan fokus kita tidak pada pada satu titik, tetapi pada titik sembarang di domainnya maka formula di atas dapat dinyatakan sebagai suatu fungsi yang dilambangkan dengan $\mathrm{f}'(\mathrm{x})$ dimana

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

jika limitnya ada. Bentuk terakhir inilah yang dinamakan turunan dari fungsi f pada domainnya. Mengingat penjelasan sebelumnya maka turunan fungsi f ini dapat dikatakan sebagai fungsi gradien garis singgung kurva f. Berkaitan dengan notasi ini, ada sebagian literatur yang menyajikan $f'(x)$ sebagai $[f(x)]'$ atau $(f(x))'$.

Ketika ingin menentukan turunan suatu fungsi, kita tidak harus kembali pada definisi di atas, tetapi memanfaatkan teorema atau sifat-sifat pada turunan. Beberapa sifat yang sering digunakan adalah sebagai berikut.

1) $[x^n]' = nx^{n-1}$
2) $[cf(x)]' = c\,[f(x)]'$
3) $[f(x) \pm g(x)]' = [f(x)]' \pm [g(x)]'$
4) $[f(x).\,g(x)]' = [f(x)]'g(x) \pm f(x)[g(x)]'$
5) $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{[f(x)]'g(x)+f(x)[g(x)]'}{[g(x)]^2}$
6) $\left[f\big(g(x)\big)\right]' = f'\big(g(x)\big).\,g'(x)$
7) $[e^x]' = e^x$
8) $[\ln|x|]' = \frac{1}{x}$
9) $[a^x] = a^x \ln a$
10) $[\sin x]' = \cos x$
11) $[\cos x]' = -\sin x$
12) $[\tan x]' = \sec^2 x$

Fungsi F dinamakan suatu antiturunan dari f pada interval I jika $F'(x) = f(x)$ untuk setiap x yang berada dalam interval I. Kata "suatu" disini amat penting, karena kata "suatu" itu menunjuk pada salah satu fungsi antiturunannya. Operasi untuk menentukan semua anti turunan $f(x)$ ditulis dengan simbol integral " $\int$ ". Jadi penyelesaian proses ini dituliskan sebagai

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c.$$

Dengan melihat hubungan antara proses pengintegralan dengan proses turunan maka dapat dikatakan bahwa integral adalah invers dari turunan. Suatu hal yang penting disini adalah Teorema Fundamental Kalkulus (TFK) yang diantaranya menyatakan bahwa

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

dimana $F(x)$ adalah anti turunan dari $f(x)$.

Berkaitan dengan penulisan, banyak orang menggunakan $F(x)|_a^b$ untuk mengganti $F(b) - F(a)$.

G. Umpan Balik dan Tindak Lanjut

Setelah mempelajari modul ini Anda diharapkan sudah mampu memahami pengertian turunan dan integral serta teorema fundamental kalkulus (TFK). Selain itu Anda diharapkan mampu menyelesaikan permasalahan berkaitan dengan turunan dan integral. Untuk megukur itu semua Anda harus mengerjakan semua soal yang ada di bagian latihan. Selanjutnya cocokkan jawaban Anda dengan kunci. Karena kegiatan ini merupakan evaluasi diri maka pengerjaan yang jujur adalah kunci keberhasilan untuk mengukur capaian kompetensi (CK). Berkaitan dengan itu, pertimbangkan hal berikut

Perolehan CK (dalam %)	Deskripsi dan tindak lanjut
$91 \leq CK \leq 100$	**Sangat Baik**, berarti Anda benar-benar memahami pengertian turunan dan integral. Selanjutnya kembangkan pengetahuan dan tuangkan dalam pembelajaran
$76 \leq CK < 91$	**Baik**, berarti Anda cukup memahami pengertian turunan dan integral walaupun ada beberapa bagian yang perlu dipelajari lagi. Selanjutnya pelajari lagi beberapa bagian yang dirasakan belum begitu dipahami.
$50 \leq CK < 76$	**Cukup**, berarti Anda belum cukup memahami pengertian turunan dan integral. Oleh karena itu Anda perlu mempelajari lagi bagian yang belum dikuasai dan menambah referensi dari sumber lain
$CK < 50$	**Kurang**, berarti Anda belum dapat memahami pengertian turunsan dan integral. Oleh karena itu Anda perlu mempelajari lagi dari awal dan menambah referensi dari sumber lain

H. Kunci Jawaban

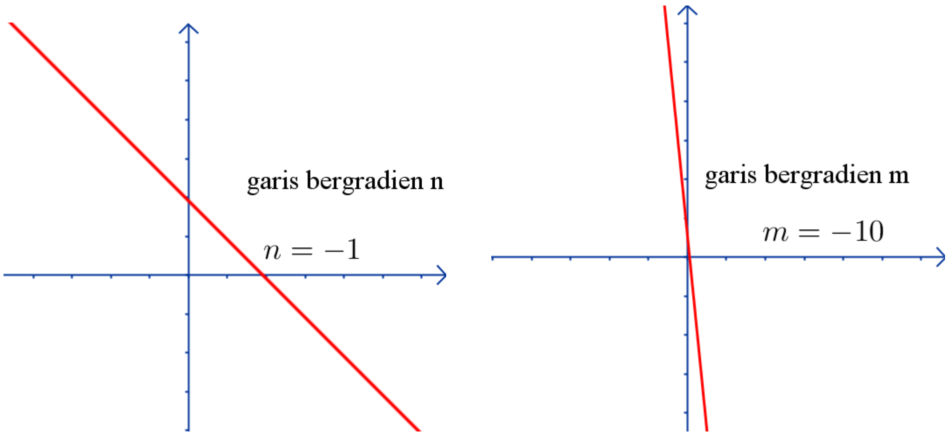
1. Jawab:

Misalkan $f(x) = 3x$ maka

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{x\to h} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{x\to h} \frac{3(x+h)-3x}{h} \\ &= \lim_{x\to h} \frac{3h}{h} \\ &= 3 \end{aligned}$$

2. Jawab:

Tidak pasti. Contoh $m = -10$ dan $n = -1$, jelas bahwa $-10 < -1$ tetapi garis singgung bergradien $n = -1$ lebih datar



3. Jawab:

Salah satu contoh adalah $f(x) = |x|$. Fungsi ini tidak mempunyai gradien garis singgung di $x = 0$

4. Jawab:

Misalkan $t = 2x$ maka $dx = \frac{1}{2}dt$. Jadi

$$\int e^{2x} \sin 2x \, dx = \frac{1}{2}\int e^t \sin t \, dt$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{1}{2}(-e^t \cos x + e^t \sin t + c)$$

$$= \frac{1}{4}(-e^{2x} \cos 2x + e^{2x} \sin 2x + c)$$

5. Jawab:

Karena yang diminta adalah luas daerah di batasi hanya satu kurva, maka kita harus berhati-hati terhadap posisi kurvanya. Dalam hal ini kita akan menghitung bagian-bagiannya yaitu

$$L_1 = \left| \int_{-2}^{0} x^3 dx \right|$$

$$= \left| \frac{1}{4} x^4 \Big|_{-2}^{0} \right|$$

$$= 4$$

dan

$$L_2 = \int_{0}^{2} x^3 dx$$

$$= \frac{1}{4} x^4 \Big|_{-2}^{0}$$

$$= 4$$

Jadi luas daerah yang dimaksud adalah $L_1 + L_2 = 8$

6. Jawab:

Titik potong $f(x) = x + 3$ dan $g(x) = x^2 - 9$ adalah $(-3,0)$ dan $(4,7)$.

Jadi luas daerahnya adalah

$$\int_{-3}^{4} [f(x) - g(x)] dx = \int_{-3}^{4} [(x + 3) - (x^2 - 9)] dx$$

$$= \int_{-3}^{4} (12 + x - x^2) dx$$

$$= 57,17$$

KEGIATAN PEMBELAJARAN (KB)

BAGIAN 2 TRIGONOMETRI

Kegiatan Pembelajaran (KB)
KB 1 : Ukuran Sudut

A. Tujuan

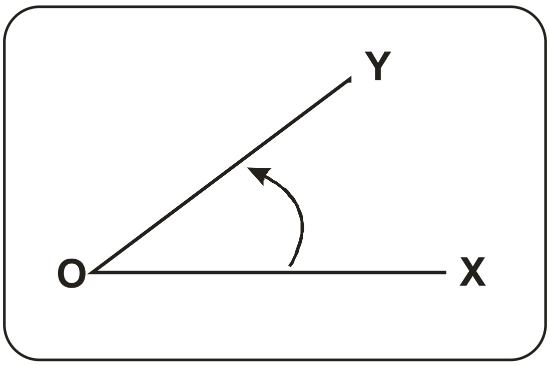
Memahami satuan pengukuran sudut.

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

Peserta diklat atau pembaca dapat memahami satuan pengukuran sudut dan menjelaskan hubungan antara radian dan derajat sebagai satuan pengukuran sudut

C. Uraian Materi

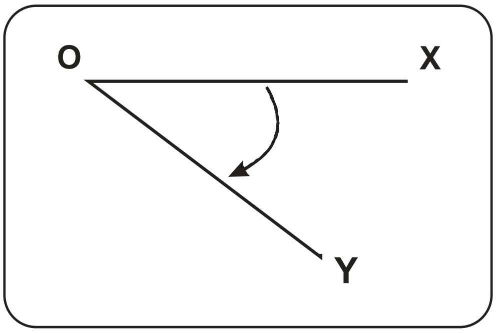
Sudut didefinisikan sebagai perputaran suatu garis tertentu ke garis tertentu lainnya terhadap pusat putaran. Pada umumnya sudut dinotasikan dengan " $\angle$ "



Gambar 1 Rotasi garis berlawanan arah jarum jam

Diperhatikan, garis OX diputar terhadap titik O ke garis OY, sehingga membentuk sudut XOY, dan ditulis $\angle XOY$

Selanjutnya, jika garis OX diputar berlawanan arah jarum jam kegaris OY, maka $\angle XOY$ disebut sudut positif (Gambar 1). Sebaliknya, jika garis OX diputar searah jarum jam ke garis OY, maka $\angle XOY$ disebut sudut negatif (Gambar 2).



Gambar 2 Rotasi garis searah jarum jam

1. Ukuran Sudut

Untuk menyatakan besar sudut, dapat dilakukan dengan dua ukuran, yaitu :

- Ukuran Derajat

  Ketika membicarakan ukuran sudut dalam derajat maka pertanyaan yang sering terlintas di benak kita adalah mengapa satu putaran lingkaran sama dengan 360 derajat ? Untuk menjawab ini, coba kita tengok kembali sejarah bangsa Sumeria di masa lalu yang tinggal di Mesopotamia (sekitar Irak selatan). Bangsa ini telah menemukan tulisan sekitar tahun 3000 SM dan membuat kalender pada 2400 SM. Kalender itu terdiri atas 12 bulan dimana masing-masing terdapat 30 hari. Ini berakibat dalam satu tahun ada 360 hari. Temuan ini didasari dari pengamatan mereka terhadap matahari, dan lima planet yang dapat terlihat yaitu Merkurius, Venus, Mars, Yupiter dan Saturnus. Pada saat itu ada anggapan matahari berputar mengelilingi bumi selama 360 hari dan gerakan Matahari dianggap sebagai lingkaran penuh, maka disepakati bahwa satu putaran lingkaran penuh sebesar 360 derajat. Selain itu para ahli matematika dan astronomi asal Babilonia dan Yunani juga sepakat bahwa 1 putaran sama dengan 360 derajat. Mereka menggunakan basis 60 atau dikenal dengan sebutan seksagesimal sebagai basis bilangan kala itu untuk menentukan 1 putaran penuh sama dengan 360^o, Selanjutnya sistem ukuran dengan menggunakan derajat ini juga dikenal sebagai sistem *seksagesimal*. Derajat sendiri dinotasikan dengan “ ° ”, contohnya $72°$ (dibaca : tujuh puluh dua derajat).

$$1 \text{ putaran} = 360°, \text{ sehingga } 1° = \frac{1}{360} \text{ putaran.}$$

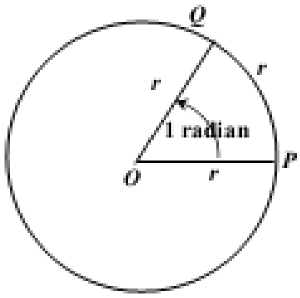
$$1° = 60' \text{ (60 menit)}$$

$$1' = 60'' \text{ (60 detik)}$$

Menit dan detik dalam hal ini bukanlah ukuran waktu, melainkan derajat sudut.

- Ukuran Radian (Ukuran Lingkaran)

Seperti yang kita ketahui bahwa sebuah lingkaran yang memiliki jari – jari r memiliki keliling 2πr. Perhatikan Gambar 3 berikut.



Gambar 3 Lingkaran

Gambar di atas adalah sebuah lingkaran dengan jari – jari r dan berpusat di titik O. Panjang busur $\widehat{PQ}$ sama dengan panjang jari – jari lingkaran, dituliskan $\widehat{PQ} = \widehat{OP} = \widehat{OQ} = r$. Besar sudut pusat $\angle POQ$ disebut 1 radian karena panjang busur $\widehat{PQ}$ (di depan sudut pusat $\angle POQ$) sama dengan r. Karena keliling lingkaran sama dengan $2\pi r$ maka sudut 1 lingkaran penuh = $2\pi \times 1$ radian = 2π radian . Perhatikan perhitungan di bawah ini.

$$\left(\frac{\angle POQ}{360°}\right) = \left(\frac{panjang\ busur\ \widehat{PQ}}{keliling\ lingakaran}\right)$$

$$\left(\frac{1\ radian}{360°}\right) = \frac{r}{2\pi r}$$

$$\frac{1\ radian}{360°} = \frac{1}{2\pi}$$

$$1\ radian = \frac{180°}{\pi} \approx 57{,}3°$$

$$1° \approx 0{,}017\ radian$$

Selanjutnya jika diketahui sudut pusat $\angle POQ$ secara umum maka besar sudut pusat $\angle POQ$ dalam radian didefinisikan sebagai perbandingan antara panjang busur $\widehat{PQ}$ (busur di depan sudut pusat $\angle POQ$) dengan jari-jari lingkaran.

$$\angle POQ = \left(\frac{panjang\ busur\ \widehat{PQ}}{jari - jari\ lingkaran}\right) radian$$

Secara matematis ditulis :

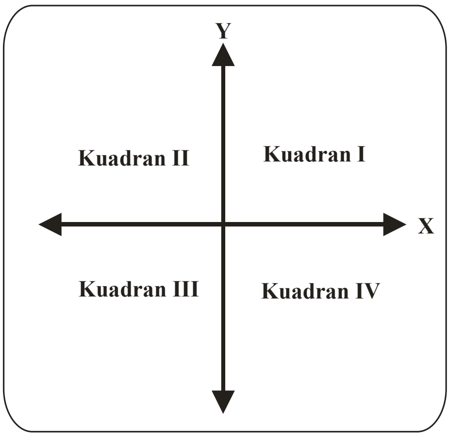
$$\angle POQ = \left(\frac{S}{r}\right) radian$$

dengan S adalah panjang busur $\widehat{PQ}$, dan r adalah jari-jari lingkaran.

Ukuran a radian ditulis dengan $a\ rad$.

2. Sudut dalam Koordinat Cartesius

Dalam koordinat Cartesius jika diketahui sudut dengan acuan awal pada sumbu$-x$ positif dan titik acuannya pada sumbu $-x$, maka sudut itu dinamakan sudut awal yang besarnya adalah $0°$. Lebih lanjut, sudut $0°$ disebut sudut acuan. Dalam sistem koordinat Cartesius, oleh kedua sumbu koordinat bidang terbagi menjadi empat daerah. Keempat daerah tersebut dikenal dengan Kuadran I, Kuadran II, Kuadran III, dan Kuadran IV.



Gambar 4 Daerah kuadran

Dari gambar diatas dapat disimpulkan letak suatu sudut α pada empat Kuadran, dan tanda nilai absis x dan ordinat y sebagai berikut :

Tabel 1

Kuadran	Absis x	Absis y	Besar α
I	+	+	$0° < \alpha < 90°$
II	−	+	$90° < \alpha < 180°$
III	−	−	$180° < \alpha < 270°$
IV	+	−	$270° < \alpha < 360°$

Sudut yang besarnya $0°, 90°, 180°, 270°$, dan $360°$ merupakan sudut-sudut pembatas kuadran. Sudut-sudut tersebut tidak terletak di Kuadran I, Kuadran II, Kuadran III, maupun Kuadran IV.

Contoh Soal

Nyatakanlah :

a. $150°$ dalam ukuran radian.

b. $\frac{3}{4}\pi\ rad$ dalam ukuran derajat.

Jawab:

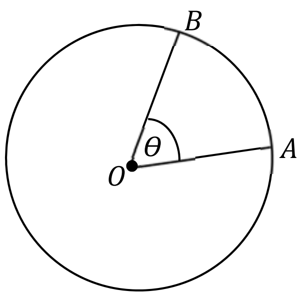
a. $150° = \left(150 \times \frac{\pi}{180}\right) rad = \frac{5\pi}{6} rad$

b. $\frac{3}{4}\pi = \frac{3}{4}\pi \times \frac{180°}{\pi} = 135°$

D. Aktivitas Pembelajaran

Luas Juring.

Diperhatikan gambar dibawah ini.



Gambar 5 Lingkaran dengan juring AOB

Diperoleh bahwa luas daerah AOB (juring AOB) dibanding dengan luas lingkaran sama dengan besar sudut θ dibanding dengan sudut satu putaran penuh.

Untuk θ dalam ukuran derajat diperoleh

$$\frac{Luas\ Juring\ AOB}{Luas\ Lingkaran} = \frac{\theta}{360°}$$

atau

$$Luas\ Juring\ AOB = \frac{\dots \pi r^2}{\dots}$$

Untuk θ dalam ukuran radian diperoleh

$$\frac{Luas\ Juring\ AOB}{Luas\ Lingkaran} = \frac{\theta}{\ldots}$$

atau

$$Luas\ Juring\ AOB = \frac{\ldots}{\ldots} = \frac{\ldots}{\ldots}$$

Setelah mengetahui formula menghitung luas juring, maka tentukan luas juring AOB, jika diketahui $\theta = 1{,}2\ rad$ dan jari-jari lingakarannya sama dengan 6 cm.

Jawab.

E. Latihan

1. Ubahlah sudut – sudut berikut ke dalam ukuran radian.
   a. $45°$
   b. $-310°$
   c. $45°45'45''$
   d. $147°20'45''$
2. Ubahlah sudut – sudut berikut ke dalam ukuran derajat, menit, dan detik.
   a. -1
   b. $-\pi$
   c. $\frac{3}{7}\pi$
   d. $\frac{2}{3}\pi$
3. Tentukan (dalam ukuran derajat dan radian) sudut keliling dan sudut pusat bentuk-bentuk berikut.
   a. Sebuah segi enam beraturan (6 sisi)
   b. Sebuah segi n beraturan (n sisi)

F. Rangkuman

Sudut didefinisikan sebagai perputaran suatu garis tertentu ke garis tertentu lainnya terhadap pusat putaran. Untuk menyatakan besar sudut, dapat dilakukan dengan dua ukuran, yaitu ukuran derajat dan ukuran radian (ukuran lingkaran). Dari kedua macam ukuran tersebut diperoleh hubungan

$$1\ radian = \frac{180°}{\pi} \approx 57{,}3°$$

dan

$$1° \approx 0{,}017 radian$$

Dalam sistem koordinat Cartesius, oleh kedua sumbu koordinat bidang terbagi menjadi empat daerah yang dikenal dengan Kuadran I, Kuadran II, Kuadran III, dan Kuadran IV.

G. Umpan Balik dan Tindak Lanjut

Untuk mengetahui tingkat penguasaan anda, cocokkan jawaban dengan kunci jawaban pada bagian akhir kegiatan belajar. Hitung jawaban benar anda, kemudian gunakan rumus di bawah ini untuk mengetahui tingkat penguasaan anda terhadap materi kegiatan pembelajaran ini.

Rumus

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah jawaban benar}}{3} \times 100\%$$

Kriteria

90% – 100% = baik sekali

80% – 89% = baik

70% – 79% = cukup

< 70% = kurang

H. Kunci Jawaban

1. a. $\pi/_4\ rad$ b. $\approx 5{,}27\ rad$ c. $\approx 0{,}778\ rad$ d. $\approx 2{,}455\ rad$
2. a. $\approx -57°18'$ b. $-180°$ c. $\approx 77°8'34"$ d. $120°$
3. a. sudut pusat $60°$ atau $\frac{\pi}{3} rad$, sudut keliling $120°$ atau $\frac{2\pi}{3} rad$

   b. sudut pusat $\frac{360°}{n}$ atau $\frac{2\pi}{n} rad$, sudut keliling $180° - \frac{360°}{n}$ atau $\left(1 - \frac{2}{n}\right)\pi\ rad$

KB 2 : Fungsi Trigonometri, Sudut Berelasi, dan Invers Fungsi Trigonometri

A. Tujuan

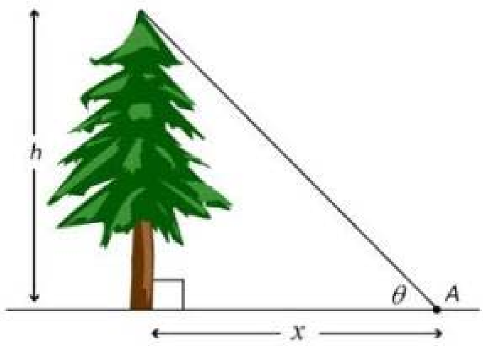
- Menjelaskan konsep enam perbandingan trigonometri (fungsi trigonometri).
- Menggeneralisasi rasio trigonometri untuk sudut-sudut di berbagai kuadran dan sudut-sudut berelasi.
- Menjelaskan konsep invers fungsi trigonometri.

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

Peserta diklat atau pembaca dapat menjelaskan konsep enam perbandingan trigonometri, fungsi trigonometri, dan menggeneralisasi rasio trigonometri untuk sudut-sudut di berbagai kuadran dan sudut-sudut berelasi serta dapat menjelaskan konsep invers dari fungsi trigonometri.

C. Uraian Materi

Pada saat kita jalan-jalan ke hutan, kita akan melihat banyak pohon. Pernahkah kita berfikir, berapa tinggi pohon tersebut?.

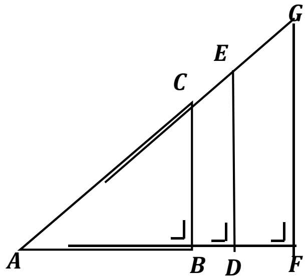


Gambar 6 Pengamatan sudut pada pohon

Lebih lanjut, dapatkah kita mengetahui tinggi pohon tanpa harus mengukurnya langsung? Ketika kita melihat pucuk pohon tersebut, maka dapat kita bayangkan sebuah segitiga siku-siku terbentuk disana, yaitu antara kita, pucuk pohon, dan arah horizontal kita dengan pohon tersebut. Ternyata, tanpa mengukur langsung, kita dapat menentukan tinggi pohon dengan segitiga yang terbentuk dari pohon dan bayangannya. Lebih lanjut, kita akan bahas dalam materi trigonometri berikut, yang selanjutnya bisa kita aplikasikan salah satunya untuk menghitung tinggi pohon.

1. Fungsi Trigonometri

Perhatikan gambar segitiga siku – siku berikut.



Gambar 7 Segitiga – segitiga siku – siku yang sebangun

Jelas bahwa ΔABC sebangun dengan ΔADE, dan ΔAFG. Dari sini berakibat bahwa

$$\frac{BC}{AC} = \frac{DE}{AE} = \frac{FG}{AG}$$

Karena perbandingan di atas tetap maka nilai perbandingan di atas hanya bergantung pada $\angle BAC$. Dengan kata lain, perbandingan di atas adalah fungsi dari $\angle BAC$, bukan fungsi panjang segitiga. Dari uraian di atas, berikut didefinisikan fungsi sinus $\angle BAC$ atau sin $\angle BAC$ (dalam hal ini $\angle BAC$ terletak di kuadran I).

$$\frac{BC}{AC} = \frac{DE}{AE} = \frac{FG}{AG} = sin\ \angle BAC$$

Analog perbandingan

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE} = \frac{AF}{AG}$$

didefinisikan sebagai $cosinus\ \angle BAC$ atau $cos\ \angle BAC$.

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE} = \frac{AF}{AG} = cos\ \angle BAC$$

dan perbandingan

$$\frac{BC}{AB} = \frac{DE}{AD} = \frac{FG}{AF}$$

didefinisikan sebagai $tangen\ \angle BAC$ atau $tan\ \angle BAC$.

$$\frac{BC}{AB} = \frac{DE}{AD} = \frac{FG}{AF} = tan\ \angle BAC$$

Selanjutnya didefinisikan juga fungsi $cotangen\ \angle BAC$ atau $cot\ \angle BAC$, $secan\ \angle BAC$ atau $sec\ \angle BAC$, dan $cosecan\ \angle BAC$ atau $csc\ \angle BAC$.

$$cot\ \angle BAC = \frac{1}{tan\angle BAC}$$

$$sec\ \angle BAC = \frac{1}{cos\angle BAC}$$

$$csc\ \angle BAC = \frac{1}{sin\angle BAC}$$

2. Sudut Istimewa

a. Sudut $0°$

Pandang segitiga ABC siku – siku di B dan titik C berimpit dengan titik B. Ini berarti $\angle BAC = 0°$ dan BC = 0, serta AB = AC.

Ini berakibat

$$sin\ 0° = sin\angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{0}{AE} = 0$$

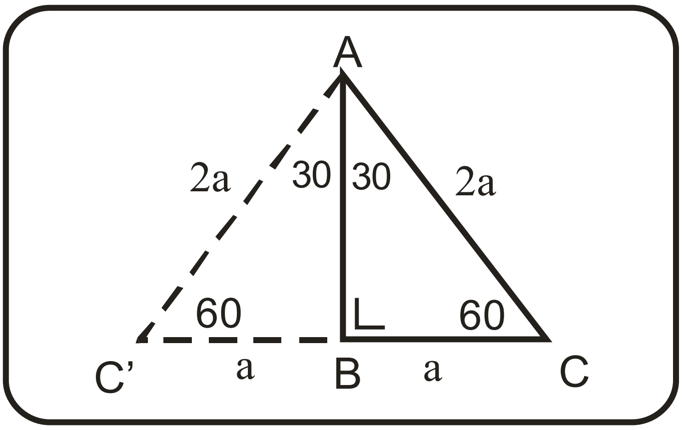
Selanjutnya,

$$cos\ 0° = cos\angle BAC = \frac{AB}{AC} = \frac{AB}{AB} = 1$$

$$tan\ 0° = tan\angle BAC = \frac{BC}{AB} = \frac{0}{AB} = 0$$

b. Sudut $30°$

Perhatikan segitiga siku-siku ABC, diketahui $\angle A = 30°$, dan panjang $AB = a$.



Gambar 8 Segitiga samasisi

maka $\angle C = 60°$.

Selanjutnya, segitiga ABC dicerminkan terhadap garis AB, diperoleh segitiga sama sisi $AC'C$ dengan panjang sisi $2a$. Akibatnya panjang sisi $AC = 2a$.

Perhatikan kembali segitiga siku-siku ABC, $BC = a$, $AC = 2a$, dengan Dalil Pythagoras diperoleh

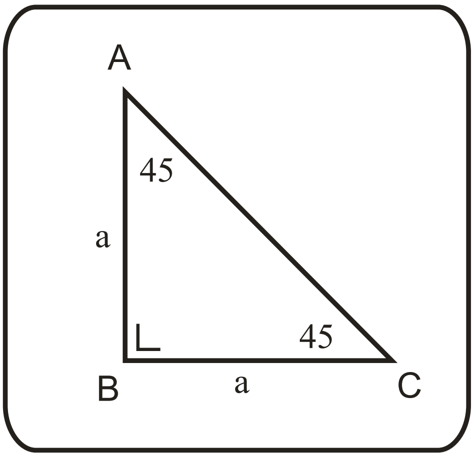
$$AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$$

sehingga, perbandingan trigonometri untuk sudut $30°$ adalah sebagai berikut.

- $\sin 30° = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$
- $\cos 30° = \frac{AB}{AC} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
- $\tan 30° = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$
- $\cot 30° = \frac{AB}{BC} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}$
- $\sec 30° = \frac{AC}{AB} = \frac{2a}{a\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$
- $\csc 30° = \frac{AC}{BC} = \frac{2a}{a} = 2$

c. Sudut $45°$

Diperhatikan segitiga siku-siku sama kaki berikut.



Gambar 9 Segitiga samakaki

Diperoleh sudut A dan C sama dengan $45°$. Diketahui panjang $AB = a$, maka $BC = a$. Dengan Dalil Pythagoras, diperoleh

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$$

sehingga, perbandingan trigonometri untuk sudut $45°$ adalah sebagai berikut.

- $\sin 45° = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
- $\cos 45° = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
- $\tan 45° = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{a} = 1$
- $\cot 45° = \frac{AB}{BC} = \frac{a}{a} = 1$
- $\sec 45° = \frac{AC}{AB} = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}$
- $\csc 45° = \frac{AC}{BC} = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}$

d. Sudut $60°$

Dari penjelasan pada sudut $30°$, dapat ditentukan pula perbandingan trigonometri untuk sudut $60°$. Diperhatikan Gambar 8, diperoleh perbandingan trigonometri untuk sudut $60°$ adalah sebagai berikut.

- $sin\ 60° = \frac{AB}{AC} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
- $cos\ 60° = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$
- $tan\ 60° = \frac{AB}{BC} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}$

- $cot\ 60° = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$
- $sec\ 60° = \frac{AC}{BC} = \frac{2a}{a} = 2$
- $csc\ 60° = \frac{AC}{AB} = \frac{2a}{a\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$

e. Sudut $90°$

Dengan cara yang sama dengan sudut $0°$, dalam sistem kuadran sudut $90°$ berada pada sumbu Y dengan $r = b$, $x = 0$, dan $y = b$, untuk $b \neq 0$. Perbandingan trigonometri untuk sudut $90°$ adalah sebagai berikut.

- $sin\ 90° = \frac{y}{r} = \frac{b}{b} = 1$
- $cos\ 90° = \frac{x}{r} = \frac{0}{b} = 0$
- $tan\ 90° = \frac{y}{x} = \frac{b}{0} = tak\ terdefinisi$
- $cot\ 90° = \frac{x}{y} = \frac{0}{b} = 0$
- $sec\ 90° = \frac{r}{x} = \frac{b}{0} = tak\ terdefinisi$
- $csc\ 90° = \frac{r}{y} = \frac{b}{b} = 1$

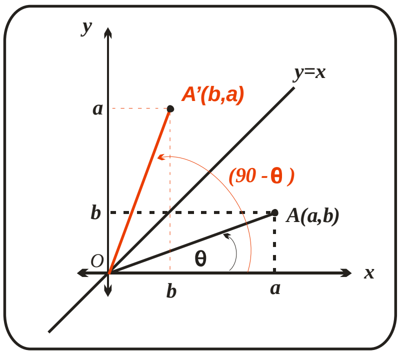
3. Sudut Berelasi

Dalam sub bab ini berisi cara untuk menentukan atau menghitung nilai-nilai dari keenam perbandingan trigonometri untuk suatu sudut A yang berada di kuadran I, II, III, maupun IV. Hal ini dapat dilakukan apabila sudut A dapat diubah atau direlasikan dengan suatu sudut θ di kuadran I (dengan $0 < \theta < 90°$). Sebagai contoh sudut A=120°berelasi dengan sudut $\theta = 30°$ atau $\theta = 60°$, karena $A = 90° + 30°$ atau $A = 180° - 60°$. Relasi dari sudut-sudut ini dalam trigonometri dapat dilukiskan pada grafik Cartesius dengan sifat pencerminan (refleksi) maupun perputaran (rotasi).

- Sudut berelasi di kuadran I

Relasi sudut θ dengan $(90° - \theta)$, dengan $0 < \theta < 90°$

Perhatikan gambar berikut.



Gambar 10 Sudut berelasi di kuadran I

Titik $A(a,b)$ dicerminkan terhadap garis $y = x$ maka diperoleh :

i. Bayangan titik A, yaitu $A'(b,a)$

ii. $\angle A'OY = \theta$, maka $\angle A'OX = (90° - \theta)$

iii. Panjang $A'O = AO = r$

Berdasarkan gambar tersebut, maka diperoleh:

Tabel 2

Untuk $A(a,b)$ dan sudut θ	Untuk $A'(b,a)$ dan sudut $(90° - \theta)$
$sin\ \theta° = \frac{b}{r}$	$sin(90° - \theta) = \frac{a}{r}$
$cos\ \theta° = \frac{a}{r}$	$cos(90° - \theta) = \frac{b}{r}$
$tan\ \theta° = \frac{b}{a}$	$tan(90° - \theta) = \frac{a}{b}$
$cot\ \theta° = \frac{a}{b}$	$cot\ (90° - \theta) = \frac{b}{a}$
$sec\ \theta° = \frac{r}{a}$	$sec(90° - \theta) = \frac{r}{b}$
$csc\ \theta° = \frac{r}{b}$	$csc\ \ (90° - \theta) = \frac{r}{a}$

Dari hasil diatas, dapat disimpulkan relasi antara sudut θ dengan sudut $(90° - \theta)$, yaitu :

$$sin(90° - \theta) = cos\,\theta$$

$$cos(90° - \theta) = sin\,\theta$$

$$tan(90° - \theta) = cot\,\theta$$

$$csc(90° - \theta) = sec\,\theta$$

$$sec(90° - \theta) = csc\,\theta$$

$$cot(90° - \theta) = tan\,\theta$$

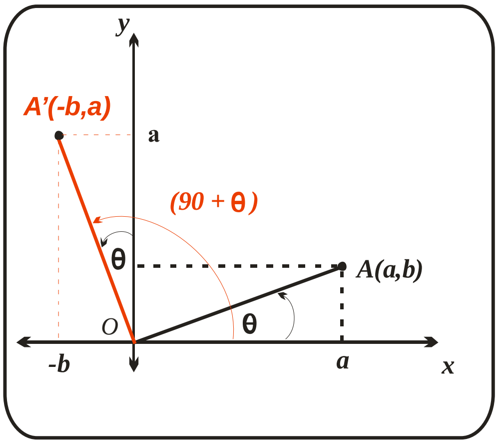
Diperhatikan bahwa, untuk sudut yang berelasi dengan $(90° - \theta)$, sin berubah menjadi cos, cos berubah menjadi sin, tan berubah menjadi cot, cot berubah menjadi tan, sec berubah menjadi csc, dan csc berubah menjadi sec.

- Sudut berelasi di kuadran II

  Relasi sudut-sudut dalam kuadran II meliputi relasi antara sudut θ dengan $(90° + \theta)$ atau θ dengan $(180° - \theta)$, dengan $0 < \theta < 90°$.

  Relasi sudut θ dengan sudut $(90° + \theta)$.

  Perhatikan gambar berikut



Gambar 11 Sudut berelasi di kuadran II

Diketahui titik $A(a,b)$, dengan panjang $OA = r$, dan $\angle AOX = \theta$. Titik $A(a,b)$ diputar berlawanan arah jarum jam sejauh 90°, diperoleh

i. Bayangan titik A : $A'(-b,a)$

ii. $\angle A'OX = (90° + \theta)$

iii. Panjang $A'O = AO = r$.

Selanjutnya berdasarkan gambar, diperoleh perbandingan trigonemetri sudut θ dan $(90° + \theta)$

Tabel 3

Untuk $A(a, b)$ dan sudut θ	Untuk $A'(-b, a)$ dan sudut $(90° + \theta)$
$sin\ \theta° = \frac{b}{r}$	$sin(90° + \theta) = \frac{a}{r}$
$cos\ \theta° = \frac{a}{r}$	$cos(90° + \theta) = -\frac{b}{r}$
$tan\ \theta° = \frac{b}{a}$	$tan(90° + \theta) = -\frac{a}{b}$
$cot\ \theta° = \frac{a}{b}$	$cot(90° + \theta) = -\frac{b}{a}$
$sec\ \theta° = \frac{r}{a}$	$sec(90° + \theta) = -\frac{r}{b}$
$csc\ \theta° = \frac{r}{b}$	$csc(90° + \theta) = \frac{r}{a}$

Dari hasil diatas, dapat disimpulkan relasi antara sudut θ dengan sudut $(90° + \theta)$, yaitu :

$$sin(90° + \theta) = cos\ \theta$$

$$cos(90° + \theta) = -\ sin\ \theta$$

$$tan(90° + \theta) = -\ cot\ \theta$$

$$csc(90° + \theta) = sec\ \theta$$

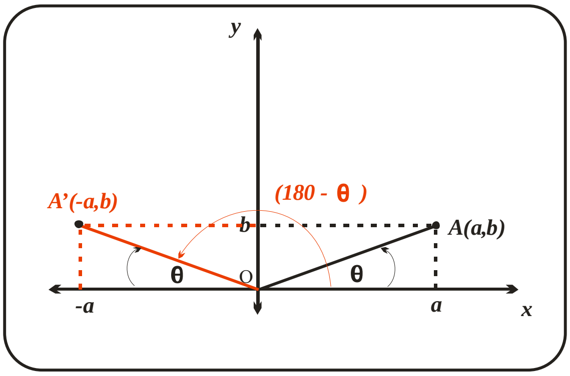
$$sec(90° + \theta) = -\ csc\ \theta$$

$$cot(90° + \theta) = -\ tan\ \theta$$

Diperhatikan bahwa, untuk sudut yang berelasi dengan $(90° + \theta)$, sin berubah menjadi cos, cos berubah menjadi sin, tan berubah menjadi cot, cot berubah menjadi tan, sec berubah menjadi csc, dan csc berubah menjadi sec. Selanjutnya karena$(90° + \theta)$ berada di kuadran II, maka sin dan csc bernilai positif, sedangkan yang lainnya bernilai negatif.

- Relasi sudut θ dengan sudut $(180° - \theta)$.

  Perhatikan gambar berikut



Gambar 12 Relasi sudut $\boldsymbol{\theta}$ dengan sudut $(\mathbf{180° - \boldsymbol{\theta}})$

Diketahui titik $A(a, b)$, dengan panjang $OA = r$, dan sudut $AOX = \theta$. Titik $A(a, b)$ dicerminkan terhadap sumbu Y, maka diperoleh :

i. Bayangan titik A : $A'(-a, b)$
ii. $\angle A'OX = (180° - \theta)$
iii. Panjang $A'O = AO = r$.

Selanjutnya berdasarkan gambar, diperoleh perbandingan trigonemetri sudut θ dan $(180° - \theta)$

Tabel 4

Untuk $A(a, b)$ dan sudut θ	Untuk $A'(-a, b)$ dan sudut $(180° - \theta)$
$sin\ \theta° = \frac{b}{r}$ $cos\ \theta° = \frac{a}{r}$ $tan\ \theta° = \frac{b}{a}$ $cot\ \theta° = \frac{a}{b}$	$sin(180° - \theta) = \frac{b}{r}$ $cos(180° - \theta) = -\frac{a}{r}$ $tan(180° - \theta) = -\frac{b}{a}$ $cot(180° - \theta) = -\frac{a}{b}$

$sec\ \theta° = \frac{r}{a}$ $csc\ \theta° = \frac{r}{b}$	$sec(180° - \theta) = -\frac{r}{a}$ $csc(180° - \theta) = \frac{r}{b}$

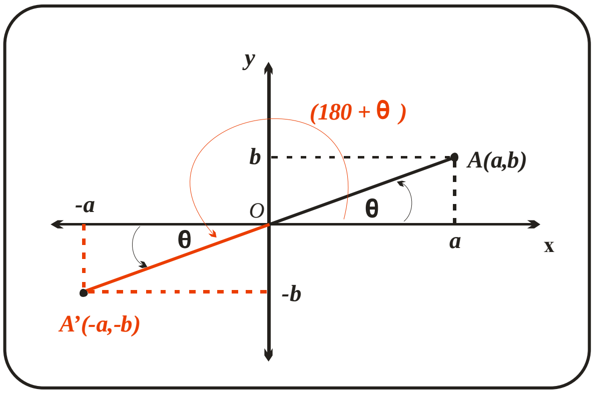
Dari hasil diatas, dapat disimpulkan relasi antara sudut θ dengan sudut $(180° - \theta)$, yaitu :

$$sin(180° - \theta) = sin\,\theta$$
$$cos(180° - \theta) = -\,cos\,\theta$$
$$tan(180° - \theta) = -\,tan\,\theta$$
$$csc(180° - \theta) = csc\,\theta$$
$$sec(180° - \theta) = -\,sec\,\theta$$
$$cot(180° - \theta) = -\,cot\,\theta$$

- Sudut berelasi di kuadran III

  Relasi sudut-sudut dalam kuadran III meliputi relasi antara sudut θ dengan $180° + \theta)$ atau θ dengan $(270° - \theta)$, dengan $0 < \theta < 90°$.
- Relasi sudut θ dengan $(180° + \theta)$.

  Perhatikan gambar berikut



Gambar 13 Sudut berelasi di kuadran III

Diketahui titik $A(a, b)$, dengan panjang $OA = r$, dan sudut $AOX = \theta$. Titik $A(a, b)$ diputar berlawanan arah jarum jam sejauh 180°, diperoleh

i. Bayangan titik A : $A'(-a, -b)$.

ii. $\angle A'OX = (180 + \theta)$

iii. Panjang $A'O = AO = r$.

Selanjutnya berdasarkan gambar, diperoleh perbandingan trigonemetri sudut θ dan $(180° + \theta)$.

Tabel 5

Untuk $A(a, b)$ dan sudut θ	Untuk $A'(-a, -b)$ dan sudut $(180° + \theta)$
$sin\,\theta° = \frac{b}{r}$	$sin(180° + \theta) = -\frac{b}{r}$
$cos\,\theta° = \frac{a}{r}$	$cos(180° + \theta) = -\frac{a}{r}$
$tan\,\theta° = \frac{b}{a}$	$tan(180° + \theta) = \frac{b}{a}$
$cot\,\theta° = \frac{a}{b}$	$cot(180° + \theta) = \frac{a}{b}$
$\sec\theta° = \frac{r}{a}$	$sec(180° + \theta) = -\frac{r}{a}$
$csc\,\theta° = \frac{r}{b}$	$csc(180° + \theta) = -\frac{r}{b}$

Dari hasil diatas, dapat disimpulkan relasi antara sudut θ dengan

sudut $(180° + \theta)$, yaitu :

$$sin(180° + \theta) = -\,sin\,\theta$$

$$cos(180° + \theta) = -\,cos\,\theta$$

$$tan(180° + \theta) = tan\,\theta$$

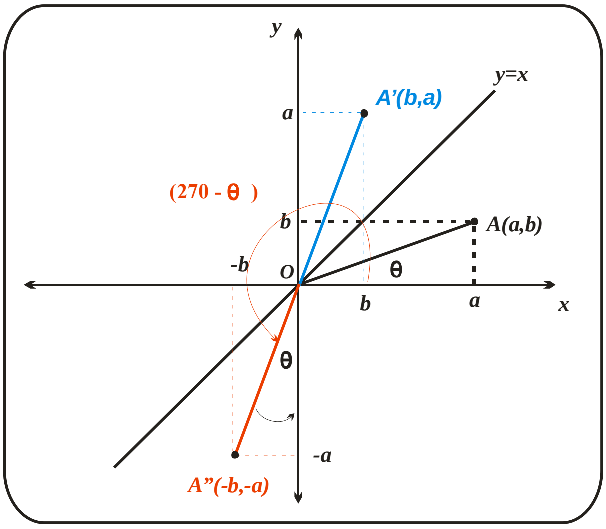
$$csc(180° + \theta) = -\,csc\,\theta$$

$$sec(180° + \theta) = -\sec\theta$$

$$cot(180° + \theta) = cot\,\theta$$

- Relasi sudut θ dengan sudut $(270° - \theta)$.

  Perhatikan gambar berikut



Gambar 14 Relasi sudut $\boldsymbol{\theta}$ dengan sudut $(\mathbf{270°} - \boldsymbol{\theta})$

Diketahui titik $A(a, b)$, dengan panjang $OA = r$, dan $\angle AOX = \theta$. Titik $A(a, b)$ dicerminkan terhadap garis $y = x$, kemudian dilanjutkan dengan rotasi sejauh 180°, diperoleh

i. Bayangan akhir titik A : $A''(-b, -a)$
ii. $\angle A''OX = (270° - \theta)$
iii. Panjang $A''O = A'O = AO = r$.

Selanjutnya berdasarkan gambar, diperoleh perbandingan trigonemetri sudut θ dan sudut $(270° - \theta)$.

Tabel 6

Untuk $A(a, b)$ dan sudut θ	Untuk $A'(-b, -a)$ dan sudut $(270° - \theta)$
$sin\ \theta° = \frac{b}{r}$	$sin(270° - \theta) = -\frac{a}{r}$
$cos\ \theta° = \frac{a}{r}$	$cos(270° - \theta) = -\frac{b}{r}$
$tan\ \theta° = \frac{b}{a}$	$tan(270° - \theta) = \frac{a}{b}$

$cot\ \theta° = \frac{a}{b}$ $sec\ \theta° = \frac{r}{a}$ $csc\ \theta° = \frac{r}{b}$	$cot(270° - \theta) = \frac{b}{a}$ $sec(270° - \theta) = -\frac{r}{b}$ $csc(270° - \theta) = -\frac{r}{a}$

Dari hasil diatas, dapat disimpulkan relasi antara sudut θ dengan sudut $(270° - \theta)$, yaitu

$$sin(270° - \theta) = -\ cos\ \theta$$

$$cos(270° - \theta) = -\sin\theta$$

$$tan(270° - \theta) = cot\ \theta$$

$$csc(270° - \theta) = -\ sec\ \theta$$

$$sec(270° - \theta) = -\ csc\ \theta$$

$$cot(270° - \theta) = tan\ \theta$$

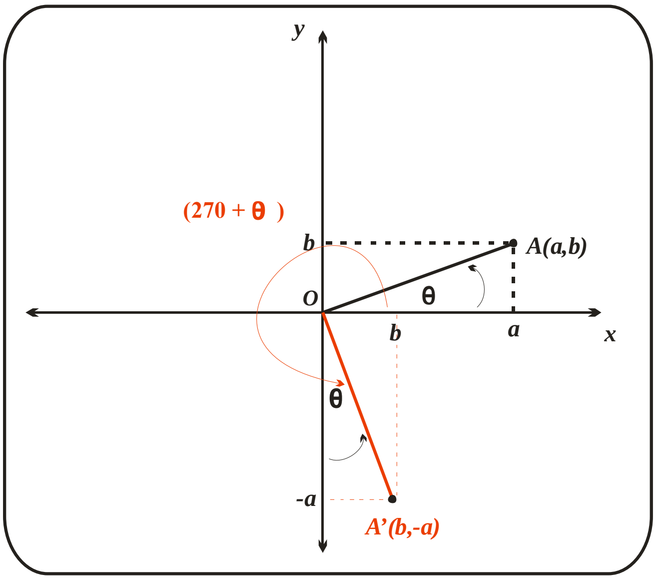
Diperhatikan bahwa, untuk sudut yang berelasi dengan $(270° - \theta)$, *sin* berubah menjadi *cos*, *cos* berubah menjadi *sin*, *tan* berubah menjadi *cot*, *cot* berubah menjadi *tan*, *sec* berubah menjadi *csc*, dan *csc* berubah menjadi *sec*. Selanjutnya karena $(270° - \theta)$ berada di kuadran III, maka *tan* dan *cot* bernilai positif, sedangkan yang lainnya bernilai negatif.

- Sudut berelasi di kuadran IV

  Relasi sudut-sudut dalam kuadran IV meliputi relasi antara sudut θ dengan$(270° + \theta)$, θ dengan $(360° - \theta)$, atau θ dengan $(-\theta)$ dengan $0 < \theta < 90°$.

- Relasi sudut θ dengan $(270° + \theta)$.

  Perhatikan gambar berikut



Gambar 15 Sudut berelasi di kuadran IV

Diketahui titik $A(a,b)$, dengan panjang $OA = r$, dan $\angle AOX = \theta$. Titik $A(a,b)$ diputar berlawanan arah jarum jam sejauh 270°, diperoleh

i. Bayangan titik A : $A'(b,-a)$
ii. $\angle A'OX = (270° + \theta)$
iii. Panjang $A'O = AO = r$.

Selanjutnya berdasarkan gambar, diperoleh perbandingan trigonemetri sudut θ dan $(270° + \theta)$.

Tabel 7

Untuk $A(a,b)$ dan sudut θ	Untuk $A'(b,-a)$ dan sudut $(270° + \theta)$
$sin\ \theta° = \frac{b}{r}$ $cos\ \theta° = \frac{a}{r}$ $tan\ \theta° = \frac{b}{a}$ $cot\ \theta° = \frac{a}{b}$	$sin(270° + \theta) = -\frac{a}{r}$ $cos(270° + \theta) = \frac{b}{r}$ $tan(270° + \theta) = -\frac{a}{b}$ $cot(270° + \theta) = -\frac{b}{a}$

$sec\,\theta° = \frac{r}{a}$ $csc\,\theta° = \frac{r}{b}$	$sec(270° + \theta) = \frac{r}{b}$ $csc(270° + \theta) = -\frac{r}{a}$

Dari hasil diatas, dapat disimpulkan relasi antara sudut θ

dengan sudut $(270° + \theta)$, yaitu :

$$sin(270° + \theta) = -\cos\theta$$

$$cos(270° + \theta) = sin\,\theta$$

$$tan(270° + \theta) = -\,cot\,\theta$$

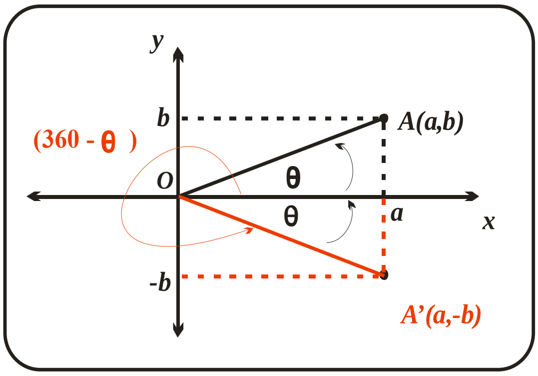
$$csc(270° + \theta) = -\,sec\,\theta$$

$$sec(270° + \theta) = csc\,\theta$$

$$cot(270° + \theta) = -\,tan\,\theta$$

Diperhatikan bahwa, untuk sudut yang berelasi dengan $(270° + \theta)$, *sin* berubah menjadi *cos*, *cos* berubah menjadi *sin*, *tan* berubah menjadi *cot*, *cot* berubah menjadi *tan*, *sec* berubah menjadi *csc*, dan *csc* berubah menjadi *sec*. Selanjutnya karena $(270° + \theta)$ berada di kuadran IV, maka *cos* dan *sec* bernilai positif, sedangkan yang lainnya bernilai negatif.

- Relasi sudut θ dengan sudut $(360° - \theta)$.
  Perhatikan gambar berikut



Gambar 16 Relasi sudut $\boldsymbol{\theta}$ dengan sudut $(\mathbf{360° - \theta})$

Diketahui titik $A(a, b)$, dengan panjang $OA = r$, dan sudut

$AOX = \theta$. Titik $A(a, b)$ dicerminkan terhadap sumbu X,

diperoleh :

i. Bayangan titik A : $A'(a, -b)$

ii. $\angle A'OX = (360° - \theta)$

iii. Panjang $A'O = AO = r$.

Selanjutnya berdasarkan gambar, diperoleh perbandingan trigonemetri sudut θ dan $(360° - \theta)$.

Tabel 8

Untuk $A(a, b)$ dan sudut θ	Untuk $A'(a, -b)$ dan sudut $(360° - \theta)$
$sin\ \theta° = \frac{b}{r}$	$sin(360° - \theta) = -\frac{b}{r}$
$cos\ \theta° = \frac{a}{r}$	$cos(360° - \theta) = \frac{a}{r}$
$tan\ \theta° = \frac{b}{a}$	$tan(360° - \theta) = -\frac{b}{a}$
$cot\ \theta° = \frac{a}{b}$	$cot(360° - \theta) = -\frac{a}{b}$
$sec\ \theta° = \frac{r}{a}$	$sec(360° - \theta) = \frac{r}{a}$
$csc\ \theta° = \frac{r}{b}$	$csc(360° - \theta) = -\frac{r}{b}$

Dari hasil diatas, dapat disimpulkan relasi antara sudut θ dengan sudut $(360° - \theta)$, yaitu

$$sin(360° - \theta) = -\,sin\,\theta$$

$$cos(360° - \theta) = cos\,\theta$$

$$tan(360° - \theta) = -\,tan\,\theta$$

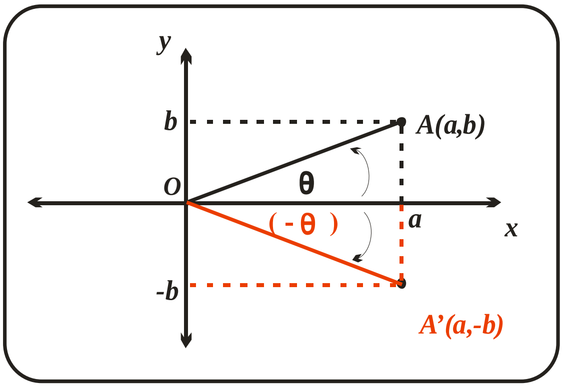
$$csc(360° - \theta) = -\,csc\,\theta$$

$$sec(360° - \theta) = sec\,\theta$$

$$cot(360° - \theta) = -\,cot\,\theta$$

- Relasi sudut θ dengan sudut $(-\theta)$.

  Perhatikan gambar berikut



Gambar 17 Relasi sudut $\boldsymbol{\theta}$ dengan sudut $(\boldsymbol{-\theta})$

Diketahui titik $A(a, b)$, dengan panjang $OA = r$, dan $\angle AOX = \theta$. Titik $A(a, b)$ dicerminkan terhadap sumbu X, diperoleh :

i. Bayangan titik A : $A'(a, -b)$

ii. $\angle A'OX = (-\,\theta)$

iii. Panjang $A'O = AO = r$.

Selanjutnya berdasarkan gambar, diperoleh perbandingan trigonemetri sudut θ dan $(-\theta)$.

Tabel 9

Untuk $A(a, b)$ dan sudut θ	Untuk $A'(a, -b)$ dan sudut $(-\theta)$
$sin\ \theta° = \frac{b}{r}$	$sin(-\theta) = -\frac{b}{r}$
$\cos\theta° = \frac{a}{r}$	$cos(-\theta) = \frac{a}{r}$
$tan\ \theta° = \frac{b}{a}$	$tan(-\theta) = -\frac{b}{a}$
$cot\ \theta° = \frac{a}{b}$	$cot(-\theta) = -\frac{a}{b}$
$sec\ \theta° = \frac{r}{a}$	$sec(-\theta) = \frac{r}{a}$
$csc\ \theta° = \frac{r}{b}$	$csc(-\theta) = -\frac{r}{b}$

Dari hasil diatas, dapat disimpulkan relasi antara sudut θ dengan sudut $(-\theta)$, yaitu :

$$sin(-\theta) = -\,sin\,\theta$$

$$cos(-\theta) = cos\,\theta$$

$$tan(-\theta) = -\,tan\,\theta$$

$$csc(-\theta) = -\,csc\,\theta$$

$$sec(-\theta) = sec\,\theta$$

$$cot(-\theta) = -\,cot\,\theta$$

- Sudut yang lebih besar dari 360°

  Perbandingan trigonometri untuk sudut $A > 360°$, dapat dilakukan dengan cara mengubah A menjadi $(k \cdot 360° + \theta)$, dengan k adalah bilangan asli. Nilai perbandingan trigonometri dari sudut yang lebih dari 360° mengikuti aturan berikut

$$sin(k \cdot 360° + \theta) = sin\,\theta$$
$$cos(k \cdot 360° + \theta) = cos\,\theta$$
$$tan(k \cdot 360° + \theta) = tan\,\theta$$

$$cot(k \cdot 360° + \theta) = cot\,\theta$$
$$sec(k \cdot 360° + \theta) = sec\,\theta$$
$$\csc(k \cdot 360° + \theta) = csc\,\theta$$

Tentukan nilai dari :

a. $sin\,135°$

b. $cos\,240°$

Jawab :

a. Untuk menentukan nilai dari $sin\,135\,°$ dapat dilakukan dengan beberapa cara

i. Cara I. $sin\,135° = sin(90° + 45°)$
$$= cos\,45°$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

ii. Cara II. $sin\,135° = sin(180° - 45°)$
$$= sin\,45°$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

b. Untuk menentukan nilai dari $cos\,240°$ dapat dilakukan dengan beberapa cara

i. Cara I. $cos\,240° = cos(180° + 60°)$
$$= -\,cos\,60°$$
$$= -\frac{1}{2}$$

ii. Cara II. $cos\,240° = cos(270° - 30°)$
$$= -\,sin\,30°$$
$$= -\frac{1}{2}$$

4. Invers fungsi trigonometri

Sebelumnya diingat kembali bahwa setiap fungsi pasti memiliki invers, namun tidak semua invers tersebut merupakan fungsi. Hanya fungsi yang

berkorespondensi satu – satu (bijektif) sajalah yang inversnya merupakan fungsi. Diberikan sebuah fungsi
$f : A \rightarrow B$. Fungsi invers dari fungsi f (dituliskan f^{-1}) adalah fungsi yang memenuhi, jika $f^{-1}(y) = x$, maka $f(x) = y$, untuk setiap $x \in A$ dan $y \in B$. Pernyataan tersebut ekuivalen dengan f^{-1} disebut fungsi invers dari fungsi f jika dan hanya jika $f\left(f^{-1}(y)\right) = y$ dan $f^{-1}\left(f(x)\right) = x$, untuk setiap $x \in A$, dan untuk setiap $y \in B$. Setiap fungsi trigonometri memiliki inversnya, namun tidak semua inversnya merupakan fungsi, mengingat bahwa fungsi trigonometri bersifat periodik. Untuk lebih jelasnya, perhatikan contoh berikut. Diberikan fungsi $f(x) = sin\, x$. Jelas bahwa $sin\, 30° = \frac{1}{2}$, dan $sin\, 150° = \frac{1}{2}$, diperoleh bahwa $sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 30°$ atau $sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 150°$. Dalam hal ini, invers dari $f(x) = sin\, x$ bukan merupakan fungsi. Namun jika domain dari $f(x)$ dibatasi maka invers fungsi tersebut bisa menjadi fungsi. Misalkan fungsi $f(x) = \sin x$ dengan domain $0° \leq x \leq 90°$. Invers dari fungsi $f(x) = \sin x$ merupakan fungsi. Selanjutnya didefinisikan fungsi invers dari fungsi trigonometri sebagai berikut :

Tabel 10

Fungsi	Invers dari	Domain	Range
$\sin^{-1} x$	$\sin x$	$[-1,1]$	$[-90°, 90°]$
$\cos^{-1} x$	$\cos x$	$[-1,1]$	$[0°, 180°]$
$\tan^{-1} x$	$\tan x$	$(-\infty, \infty)$	$(-90°, 90°)$

Catatan: $sin^{-1}\, x$ tidak sama dengan $\frac{1}{sin\, x}$.

Bentuk $sin^{-1}\, x$ bisa ditulis dengan arcsin x. Demikian juga untuk yang lainnya, $cos^{-1}\, x$ ditulis dengan $arccos\, x$ dan, $\tan^{-1} x$ ditulis dengan $arctan\, x$. Lebih lanjut penulisan pangkat "-1", diganti dengan "arc" didepan fungsi trigonometri.

Selanjutnya, misalkan $arccsc(y) = x$, maka $csc(x) = y$, sehingga diperoleh

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{csc(x)} = sin(x)$$

Akibatnya

$$arcsin\left(\frac{1}{y}\right) = x = arccsc(y)$$

atau

$$arccsc(y) = arcsin\left(\frac{1}{y}\right)$$

Analog dengan cara yang sama diperoleh

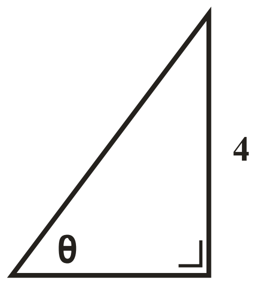
$$arcsec(y) = arccos\left(\frac{1}{y}\right)$$

dan

$$arccot(y) = arctan\left(\frac{1}{y}\right)$$

Contoh soal

Tentukan sudut θ pada gambar berikut.



Gambar 18 Segitiga Siku - siku

Jawab :

Dengan rumus perbandingan trigonometri (*tangen*) diperoleh

$$tan\,\theta = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

atau diperoleh

$$\theta = arctan(0{,}75) \approx 36{,}87°$$

Catatan : Untuk menentukan nilai "arctan" dan lainnya bisa menggunakan tabel trigonometri atau menggunakan kalkulator.

D. Aktivitas Pembelajaran

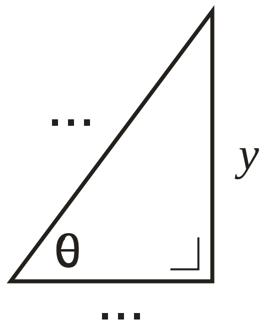
Untuk lebih memantapkan pemahaman peserta diklat atau pembaca tentang invers fungsi trigonometri, isilah titik – titik di bawah ini untuk menyederhanakan bentuk berikut ini.

$$cot\left(arccos\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right)$$

Untuk menyelesaikan permasalahan diatas dapat dilakukan dengan tahapaan berikut.

i. Dimisalkan $arccos\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \theta$, maka $cos(\theta) = \frac{\cdots}{\cdots}$

ii. Selanjutnya dari $cos(\theta) = \frac{\cdots}{\cdots}$ diperoleh gambar



iii. Langkah selanjutnya adalah dengan mencari nilai y. Dengan dalil Pythagoras diperoleh:

$$y = \sqrt{(\ldots..)^2 - (\ldots..)^2}$$
$$= \sqrt{(\quad \ldots.. \quad) - (\quad \ldots.. \quad)}$$
$$= \sqrt{\ldots.}$$
$$= \cdots\sqrt{\ldots}$$

iv. Selanjutnya dari gambar tersebut, dengan rumus perbandingan sudut diperoleh

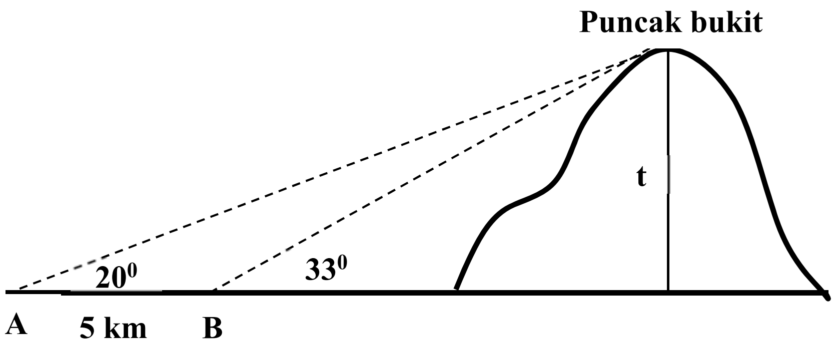
$$cot\,\theta = \frac{\ldots}{\ldots\sqrt{\ldots}}$$

Jadi,

$$cot\left(arccos\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right) = \frac{x-1}{2\sqrt{x}}$$

E. Latihan

1. Diketahui α adalah sudut lancip memenuhi $sin\,\alpha = -\frac{2}{5}$, tentukan nilai dari $tan\,\alpha$, $csc\,\alpha$, dan $sec\,\alpha$.
2. Dua buah theodolite diposisikan pada titik A dan B untuk mengukur tinggi sebuah bukit, sepeti tampak pada gambar berikut :



Diketahui jarak dari A ke B adalah 5 km. Berapakah tinggi bukit tersebut ?

3. Tentukan nilai-nilai dari $sin(-30°)$, $cos\,150°$, $tan\,225°$, $cot\,300°$, dan $sec\,1460°$.

4. Tentukan nilai dari $\frac{sin(70°)\cdot cos(280°)\cdot tan(135°)}{cot(225°)\cdot cos(340°)\cdot sin(190°)}$
5. Jika $\alpha + \beta = 270°$, buktikan bahwa $cos\,\alpha + sin\,\beta = 0$

6. Dalam segitiga ABC sebarang, buktikan bahwa

$$sin\frac{1}{2}(A+B) + cos\frac{1}{2}(A+C) + tan\frac{1}{2}(B+C) = sin\frac{1}{2}C + cos\frac{1}{2}B + cot\frac{1}{2}A$$

7. Buktikan bahwa untuk $x > 0$ berlaku $arctan(x) + tan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$

8. Buktikan bahwa $arccos(x) = 90° - arcsin(x)$

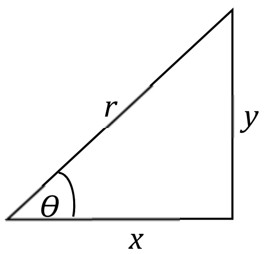
9. Tentukan nilai dari $sec\left(tan\left(arctan\left(arcsec\left(\frac{29}{3}\right)\right)\right)\right)$

10. Sederhanakan bentuk $cos\left(arctan\left(\frac{2x}{x^2-1}\right)\right)$ $untuk\ x > 1$

F. Rangkuman

1. Fungsi Trigonometri

   Perhatikan gambar segitiga siku – siku berikut.



Didefinisikan

$$\sin\theta = \frac{y}{r}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$\cot\theta = \frac{x}{y}$$

$$\sec\theta = \frac{r}{x}$$

$$\csc\theta = \frac{r}{y}$$

2. Sudut Istimewa

θ	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	Tak terdefinisi
$\cot\theta$	Tak terdefinisi	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0
$\sec\theta$	1	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	2	Tak terdefinisi
$\csc\theta$	Tak terdefinisi	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	1

3. Sudut Berelasi

Berikut beberapa contoh sudut berelasi

$$sin(90° - \theta) = cos\,\theta$$

$$sin(90° + \theta) = cos\,\theta$$

$$cos(90° + \theta) = -\,sin\,\theta$$

G. Umpan Balik dan Tindak Lanjut

Untuk mengetahui tingkat penguasaan anda, cocokkan jawaban dengan kunci jawaban pada bagian akhir kegiatan pembelajaran. Hitung jawaban benar anda, kemudian gunakan rumus di bawah ini untuk mengetahui tingkat penguasaan anda terhadap materi kegiatan pembelajaran ini.

Rumus

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah jawaban benar}}{10} \times 100\%$$

Kriteria

90% – 100% = baik sekali

80% – 89% = baik

70% – 79% = cukup

< 70% = kurang

H. Kunci Jawaban

1. $tan\,\alpha = -\frac{2}{21}\sqrt{21}, csc\,\alpha = -\frac{5}{2}, tan\,\alpha = \frac{5}{21}\sqrt{21}$
2. $\approx 4{,}72$
3. $sin(-30°) = -\frac{1}{2}, cos(150°) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}, tan(225°) = 1,$

   $cot(300°) = -\frac{1}{3}\sqrt{3}, sec(1460°) \approx 1{,}064$
4. 1
5. 0
6. Terbukti.
7. $\frac{\pi}{2}$
8. Terbukti
9. $\frac{29}{3}$
10. $\frac{x^2-1}{x^2+1}$

KB 3 : Identitas Trigonometri, Aturan Sinus dan Cosinus, serta Sifat Maksimum/Minimum Fungsi Trigonometri

A. Tujuan

- Menjelaskan identitas dasar trigonometri sebagai hubungan antara rasio trigonometri dan perannya dalam membuktikan identitas trigonometri lainnya
- Menjelaskan aturan sinus dan cosinus
- Menggunakan sifat maksimum/minimum fungsi untuk penyelesaian masalah

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

Peserta diklat atau pembaca dapat menjelaskan identitas dasar trigonometri sebagai hubungan antara rasio trigonometri dan perannya dalam membuktikan identitas trigonometri lainnya, dan dapat menjelaskan aturan sinus dan cosinus serta menggunakan sifat maksimum/minimum fungsi untuk penyelesaian masalah

C. Uraian Materi

1. Identitas Trigonometri

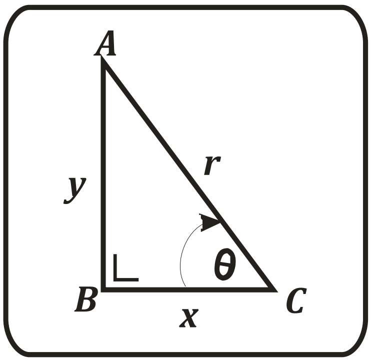
Seperti kita ketahui sebelumnya bahwa $sin\ 30° = \frac{1}{2}$, $cos\ 30° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $sin\ 45° = cos\ 45° = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Ini berakibat bahwa

$$sin^2\ 30° + cos^2\ 30° = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$$

$$sin^2\ 45° + cos^2\ 45° = \frac{2}{4} + \frac{2}{4} = 1$$

Selanjutnya yang menjadi pertanyaan adalah apakah bentuk di atas hanya berlaku untuk sudut – sudut tertentu atau berlaku untuk sebarang sudut?

Perhatikan gambar berikut.



Gambar 19 Segitiga siku – siku

Dari rumus perbandingan trigonometri diperoleh

$$sin(\theta) = \frac{y}{r}, cos(\theta) = \frac{x}{r}, tan(\theta) = \frac{y}{x}, cot(\theta) = \frac{x}{y}, sec(\theta) = \frac{r}{x}, csc(\theta)\frac{r}{y}$$

Akibatnya diperoleh,

$$sin(\theta) = \frac{y}{r} = \frac{1}{\left(\frac{r}{y}\right)} = \frac{1}{csc(\theta)}$$

Analog dengan cara yang sama diperoleh

$$cos(\theta) = \frac{1}{sec(\theta)}$$

dan

$$tan(\theta) = \frac{1}{cot(\theta)}$$

Selanjutnya diperhatikan,

$$tan(\theta) = \frac{y}{x} = \frac{\left(\frac{y}{r}\right)}{\left(\frac{x}{r}\right)} = \frac{sin(\theta)}{cos(\theta)}$$

Akibatnya diperoleh

$$cot(\theta) = \frac{cos(\theta)}{sin(\theta)}$$

Perhatikan Gambar 31, dengan Dalil Pythagoras diperoleh

$$sin^2(\theta) + cos^2(\theta) = \left(\frac{y}{r}\right)^2 + \left(\frac{x}{r}\right)^2 = \frac{y^2 + x^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1$$

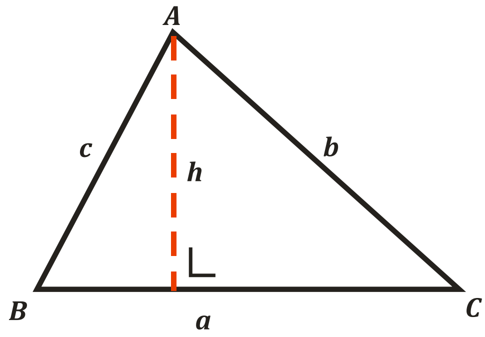
berakibat

$$sin^2(\theta) + cos^2(\theta) = 1$$

Bentuk di atas disebut identitas trigonometri.

2. Aturan Sinus pada Segitiga

Diperhatikan segitiga ABC berikut.



Gambar 20 Segitiga ABC dengan tinggi h

Dengan rumus perbandingan trigonometri untuk sudut B, diperoleh

$$\sin B = \frac{h}{c} \text{ atau } h = c \cdot \sin B$$

untuk sudut C diperoleh

$$\sin C = \frac{h}{b} \text{ atau } h = b \cdot \sin C$$

Akibatnya diperoleh hubungan,

$$c \cdot \sin B = b \cdot \sin C$$

atau

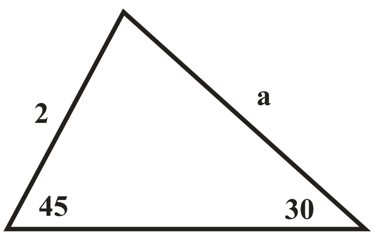
$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Analog dengan cara tersebut diperoleh aturan Sinus, yaitu

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Contoh

Tentukan nilai a.



Gambar 21 Segitiga lancip

Jawab :

Dengan aturan Sinus,

$$\frac{a}{sin\,45°} = \frac{2}{sin\,30°}$$

diperoleh,

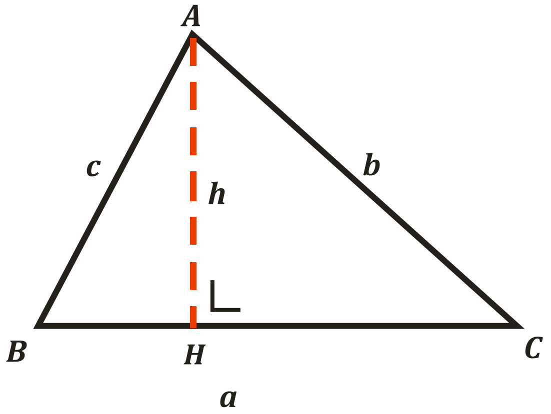
$$a = 2 \cdot \frac{sin\,45°}{sin\,30°}$$

$$= 2 \cdot \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{1}{2}}$$

$$= 2\sqrt{2}$$

3. Aturan Cosinus pada Segitiga

Diperhatikan gambar berikut



Gambar 22 Segitiga ABC dengan tinggi h

Dengan rumus perbadingan trigonometri pada segitiga ACH, diperoleh

$$sin\,C = \frac{h}{b} \text{ atau } h = b \cdot sin\,C$$

dan

$$cos\,C = \frac{HC}{b} \text{ atau } HC = b \cdot cos\,C$$

Selanjutnya, diperhatikan ΔABH, diperoleh panjang BH

$$BH = BC - HC = a - b \cdot cos\,C$$

dan panjang $AH = h = b \cdot sin\,C$.

Akibatnya, dengan Dalil Pythagoras diproleh

$$AB^2 = AH^2 + BH^2$$
$$c^2 = (b \cdot sin\, C)^2 + (a - b \cdot cos\, C)^2$$
$$= b^2 \cdot sin^2\, C + a^2 - 2 \cdot a \cdot b.cos\, C + b^2.cos^2\, C$$
$$= a^2 + b^2 \cdot \left(sin^2\, C + cos^2\, C\right) - 2 \cdot a \cdot b.cos\, C$$
$$= a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b.cos\, C$$

Akibatnya diperoleh aturan Cosinus

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b.cos\, C$$

Analog dengan cara yang sama diperoleh aturan Cosinus untuk sisi/sudut yang lainnya, yaitu

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot cos\, A\,, \text{ dan}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot cos\, B$$

Dari rumus aturan Cosinus diatas, kita dapat menentukan besar sudut suatu segitiga jika diketahui ketiga sisinya.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot cos\, A$$

$$2bc.cos\, A = b^2 + c^2 - a^2$$

$$cos\, A = \frac{(b^2 + c^2 - a^2)}{2bc}$$

Analog dengan cara yang sama diperoleh

$$cos\, B = \frac{(a^2 + c^2 - b^2)}{2ac}$$

$$cos\, C = \frac{(a^2 + b^2 - c^2)}{2ab}$$

Contoh soal

Diketahui segitiga ABC, dengan panjang $AB = 4$, $AC = 6$, dan $BC = 5$. Tentukan besar sudut A.

Jawab :

$$\cos A = \frac{(AB^2 + AC^2 - BC^2)}{2 \cdot AB \cdot AC}$$

$$= \frac{(4^2 + 6^2 - 5^2)}{2 \cdot 4 \cdot 6}$$

$$= \frac{27}{48}$$

Diperoleh

$$A = \arccos\left(\frac{27}{48}\right) \approx 55{,}77°$$

4. Luas Segitiga

- Diketahui dua sisi dan satu sudut pada sebuah segitiga)

  Perhatikan kembali Gambar 32. Panjang $h = b.\sin C$. Akibatnya,

$$L = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot h$$

$$= \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin C$$

Jadi, diperoleh luas segitiga

$$L = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin C$$

Catatan : sudut C merupakan sudut yang dibentuk oleh sisi – sisi yang panjangnya a dan b.

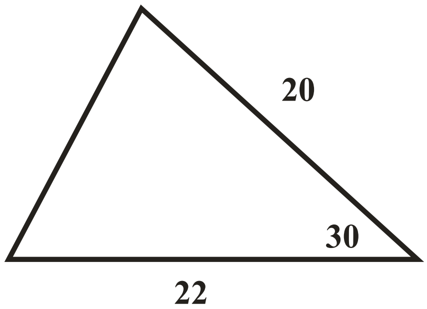
Selanjutnya analog dengan cara yang sama diperoleh rumus luas segitiga

$$L = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin B$$

$$L = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin A$$

Contoh soal

Tentukan luas segitiga berikut.



Gambar 23 Segitiga dengan salah satu sudutnya 30°

Jawab

Diperhatikan bahwa, diketahui dua sisi, dan satu sudut yang diapit oleh kedua sisi tersebut, maka,

$$L = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 22 \cdot \sin 30^\circ$$
$$= \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 22 \cdot \frac{1}{2}$$
$$= 110$$

Jadi, luas segitiga tersebut adalah 110 satuan luas.

- Diketahui satu sisi dan dua sudut

  Diperhatikan kembali Gambar 32. Dari rumus aturan Sinus

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

diperoleh,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \text{ atau } b = a \cdot \frac{\sin B}{\sin A}$$

dan

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \text{ atau } c = a \cdot \frac{\sin C}{\sin A}$$

Dengan rumus luas segitiga sebelumnya (yang diketahui dua sisi dan satu sudut) diperoleh

$$L = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin A$$
$$= \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{\sin B}{\sin A} \cdot a \cdot \frac{\sin C}{\sin A} \cdot \sin A$$
$$= \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \frac{\sin B \cdot \sin C}{\sin A}$$

$$= \frac{a^2 \cdot \sin B \cdot \sin C}{2\sin[180-(B+C)]}$$

$$= \frac{a^2 . \cdot \sin C}{2\sin(B+C)}$$

Jadi,

$$L = \frac{a^2 \cdot sin\, B \cdot sin\, C}{2 \cdot sin(B+C)}$$

Ingat kembali bahwa :

i. Jumlah sudut dalam segitiga *180°*, jadi $A + B + C = 180$. Akibatnya, $A = 180 - (B + C)$

ii. Dengan rumus sudut berelasi dengan *180°*.

Selanjutnya, analog dengan cara yang sama didapat rumus luas segitiga

$$L = \frac{c^2 \cdot sin\, A \cdot \sin B}{2 \cdot sin(A+B)}$$

dan

$$L = \frac{b^2 \cdot sin\, A \cdot \sin C}{2 \cdot \sin(A+C)}$$

Contoh soal

Tentukan luas segitiga ABC jika diketahui $\angle B = 60°, \angle\, C = 30°$, dan $a = 8\ cm$.

Jawab.

$$\begin{aligned} L &= \frac{a^2 \cdot sin\, B \cdot sin\, C}{2 \cdot \sin(B+C)} \\ &= \frac{8^2 \cdot sin\, 60° \cdot sin\, 30°}{2 \cdot sin(60° + 30°)} \\ &= \frac{64 \cdot sin\, 60° \cdot sin\, 30°}{2 \cdot sin(90°)} \\ &= \frac{64 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}}{2 \cdot 1} \\ &= 8\sqrt{2} \end{aligned}$$

Jadi luas segitiga ABC adalah $8\sqrt{2}\ cm^2$.

5. Formula Cosinus, Sinus, dan Tangent Sudut Rangkap

- Bentuk $sin\ 2\alpha$

  Dengan formula penjumlahan

  $$sin\ 2\alpha = sin(\alpha + \alpha)$$
  $$= sin\ \alpha \cdot cos\ \alpha + cos\ \alpha \cdot sin\ \alpha$$
  $$= 2\ sin\ \alpha \cdot cos\ \alpha$$

  Jadi,

  $$sin\ 2\alpha = 2\ sin\ \alpha \cdot cos\ \alpha$$

- Bentuk $cos\ 2\alpha$

  Dengan formula penjumlahan

  $$cos\ 2\alpha = cos(\alpha + \alpha)$$
  $$= cos\ \alpha \cdot cos\ \alpha - sin\ \alpha \cdot sin\ \alpha$$
  $$= cos^2\ \alpha - sin^2\ \alpha$$

  Jadi

  $$cos\ 2\alpha = cos^2\ \alpha - sin^2\ \alpha$$

  Selanjutnya, mengingat,

  $$sin^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1$$

  maka diperoleh

  $$cos\ 2\alpha = 2\ cos^2\ \alpha - 1$$

  dan

  $$cos\ 2\alpha = 1 - 2\ sin^2\ \alpha$$

- Bentuk tan 2α

  Dengan formula penjumlahan

  $$tan\ 2\alpha = tan(\alpha + \alpha)$$
  $$= \frac{tan\ \alpha + tan\ \alpha}{1 - tan\ \alpha\ tan\ \alpha}$$
  $$= \frac{2\ tan\ \alpha}{1 - tan^2\ \alpha}$$

Jadi

$$tan\, 2\alpha = \frac{2\, tan\, \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

Contoh soal

Jika $sin\, x - cos\, x = 0{,}5$, maka tentukan $sin\, 2x$.

Jawab.

Diketahui $sin\, x - cos\, x = 0{,}5$, maka

$$(sin\, x - \cos x)^2 = (0{,}5)^2$$

$$sin^2\, x - 2\, sin\, x \cdot cos\, x + cos^2\, x = 0{,}25$$

$$1 - sin\, 2x = 0{,}25$$

$$sin\, 2x = 0{,}75$$

Jadi, $sin\, 2x = 0{,}75$

6. Mengubah Bentuk Perkalian ke Penjumlahan atau Selisih

Dari rumus penjumlahan dua sudut yang telah dibahas, kita dapat menurunkan menjadi rumus baru. Diperhatikan

$$\begin{aligned} &cos(\alpha + \beta) + cos(\alpha - \beta) \\ &\quad = (cos\, \alpha \cdot cos\, \beta - sin\, \alpha \cdot sin\, \beta) \\ &\quad + (cos\, \alpha \cdot cos\, \beta + sin\, \alpha \cdot sin\, \beta) \\ &\quad = 2\, cos\, \alpha \cdot cos\, \beta \end{aligned}$$

Jadi diperoleh

$$cos\, \alpha \cdot cos\, \beta = \frac{1}{2} cos(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} cos(\alpha - \beta)$$

Selanjutnya, dengan cara yang sama diperoleh

$$sin\, \alpha \cdot sin\, \beta = \frac{1}{2} cos(\alpha - \beta) - \frac{1}{2} cos(\alpha + \beta)$$

$$sin\, \alpha \cdot cos\, \beta = \frac{1}{2} sin(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} sin(\alpha - \beta)$$

Contoh

Hitunglah $sin\, 75° \,.\, sin\, 15°$!

Jawab:

$$sin\, 75° \cdot sin\, 15° = \frac{1}{2} cos(75° - 15°) - \frac{1}{2} cos(75° + 15°)$$

$$= \frac{1}{2} cos\ 60° - \frac{1}{2} cos\ 90°$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot 0$$

$$= \frac{1}{4}$$

Jadi,

$$\sin 75° \cdot sin\ 15° = \frac{1}{4}$$

7. Nilai Maksimum atau Minimum pada Fungsi Trigonometri

Menurut identitas trigonometri jelas bahwa

$$sin^2\ x + cos^2\ x = 1$$

$$sin^2\ x = 1 - \ cos^2\ x\ \ \leq 1$$

$$sin^2\ x \leq 1$$

$$-1 \leq sin\ x \leq 1$$

Analog

$$-1 \leq cos\ x \leq 1$$

Contoh

Diberikan $f(x) = 4 \cdot sin\ x$, dengan $-180° \leq x \leq 180°$.

Karena

$$-1 \leq sin\ x \leq 1$$

maka

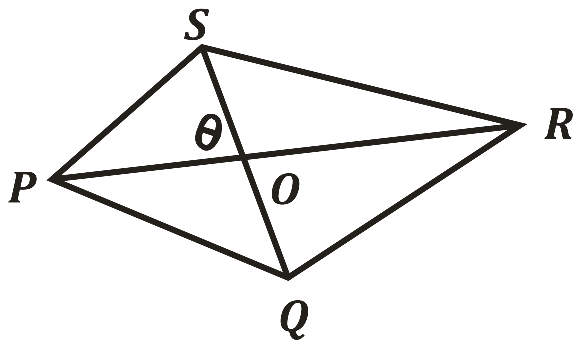
$$-4 \leq 4. sin\ x \leq 4$$

Dari sini dapat dikatakan bahwa nilai maksimum $f(x)$ adalah 4 untuk $x = 90°$ dan nilai minimum $f(x)$ adalah (– 4) untuk x = – 90° karena $-90°, 90° \in [-180°, 180°]$ dengan$[-180°, 180°]$ adalah domain dari fungsi.

D. Aktivitas Pembelajaran

Lengkapilah titik – titik di bawah ini!

Perhatikan segiempat $PQRS$ berikut.



Akan dibuktikan,jika $\angle POS = \theta$,maka Luas segiempat $PQRS$ adalah

$$\frac{1}{2} \cdot PR \cdot QS \cdot \sin\theta$$

Perhatikan segitiga PRS. Luas segitiga PRS sama dengan luas segitiga POS ditambah dengan luas segitiga ROS.

Mencari luas segitiga POS.

Dengan rumus luas segitiga (diketahui dua sisi dan satu sudut) terhadap sudut θ, diperoleh

$$L_{\Delta POS} = \cdots$$

Selanjutnya mencari luas segitiga ROS. Perhatikan bahwa sudut POS dan sudut ROS saling berpelurus, maka

$$\angle ROS = (\dots\dots\dots\dots...)$$

Dengan rumus luas segitiga (diketahui dua sisi dan satu sudut) terhadap sudut ROS, diperoleh

$$L_{\Delta ROS} = \cdots$$
$$= \cdots$$
$$= \cdots$$

Jadi,

$$L_{\Delta PRS} = L_{\Delta POS} + L_{\Delta ROS}$$
$$= \cdots$$
$$= \cdots$$

Ingat, bahwa$PO + OR = PR$, sehingga diperoleh

$$L_{\Delta PRS} = \cdots$$

Selanjutnya perhatikan segitiga PQR. Luas segitiga PQR sama dengan luas segitiga POQ ditambah dengan luas segitiga QOS.

Mencari luas segitiga POQ.

Perhatikan bahwa sudut POQ dan sudut ROS saling bertolak belakang, akibatnya

$$\angle POQ = (\dots\dots\dots\dots...)$$

Dengan rumus luas segitiga (diketahui dua sisi dan satu sudut) terhadap sudut POQ, diperoleh

$$\begin{aligned} L_{\Delta POQ} &= \cdots \\ &= \cdots \\ &= \cdots \end{aligned}$$

Mencari luas segitiga QOR.

Perhatikan bahwa sudut QOR dan sudut POS saling bertolak belakang, akibatnya

$$\angle QOR = \cdots$$

Dengan rumus luas segitiga (diketahui dua sisi dan satu sudut) terhadap sudut QOR, diperoleh

$$\begin{aligned} L_{\Delta QOR} &= \cdots \\ &= \cdots \\ &= \cdots \end{aligned}$$

Jadi,

$$\begin{aligned} L_{\Delta PQR} &= L_{\Delta POQ} + L_{\Delta QOR} \\ &= \cdots \\ &= \cdots \end{aligned}$$

Ingat, bahwa $PO + OR = PR$, sehingga diperoleh

$$L_{\Delta \mathrm{PQR}} = \cdots$$

Selanjutnya, perhatikan bahwa luas segieempat PQRS sama dengan luas segitiga PRS ditambah dengan luas segitiga PQR.

$$\begin{aligned} L_{\mathrm{PQRS}} &= L_{\Delta \mathrm{PRS}} + L_{\Delta \mathrm{PQR}} \\ &= \cdots \\ &= \cdots \end{aligned}$$

Diperhatikan bahwa $SQ = SO + OQ$, jadi

$$L_{\mathrm{PQRS}} = \cdots$$

E. Latihan

1. Jika $sin\,\theta + sin^2\,\theta = 1$, untuk $0 \leq \theta \leq 90°$, maka hitunglah
$$cos^4\,\theta + cos^2\,\theta$$

2. Jika $sin\,\theta + cos\,\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, untuk θ sudut lancip, maka tentukan nilai dari
   a. $sin^2\,\theta - cos^2\,\theta$
   b. $sin^3\,\theta + cos^3\,\theta$
   c. $tan\,\theta$

3. Pada segitiga XYZ, diketahui $\angle X = 30°$, $XY = 4\ cm$, dan $YZ = 6cm$. Hitunglah
   a. $\angle Z$
   b. $\angle Y$

4. Dua kapal R dan S berjarak 15 km. Kapal S letaknya pada arah 110° dari R dan kapal T, 170° dari R. Jika kapal T letaknya pada arah 245° dari S, maka tentukan jarak kapal T dari kapal S.

5. Hitunglah luas segitiga ABC jika diketahui $\angle A = 30°$, $b = 12\ cm$, dan $c = 14\ cm$.

6. Diberikan segitiga PQR dengan
$$(QR + PR) : (PQ + QR) : (PR + PQ) = 4 : 5 : 6$$
   Hitunglah $\cos P$.

7. Hitunglah nilai dari
$$sin^2\,1° + sin^2\,2° + \cdots + sin^2\,88° + sin^2\,89°$$

8. Diberikan fungsi $f(x) = 2 \cdot sin\,x + 3 \cdot cos\,x$ untuk $0° \leq x \leq 360°$. Tentukan nilai maksimum dan nilai minimum fungsi $f(x)$ tersebut.

9. Diberikan fungsi $f(x) = 1 - \sin x + 2 \cdot \cos x$ untuk $0° \leq x \leq 360°$.. Cari nilai maksimum dan nilai minimum fungsi $f(x)$ tersebut.

10. Diketahui fungsi $f(x) = \frac{1}{10+3.\sin x - 3.\cos x}$, untuk $0° \leq x \leq 360°$. Cari nilai maksimum dan nilai minimum dari fungsi $f(x)$ tersebut.

F. Rangkuman

- **Identitas Trigonmetri**

  1. $\sin(\theta) = \frac{1}{\csc(\theta)}$

  2. $\cos(\theta) = \frac{1}{\sec(\theta)}$

  3. $\tan(\theta) = \frac{1}{\cot(\theta)}$

  4. $\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$

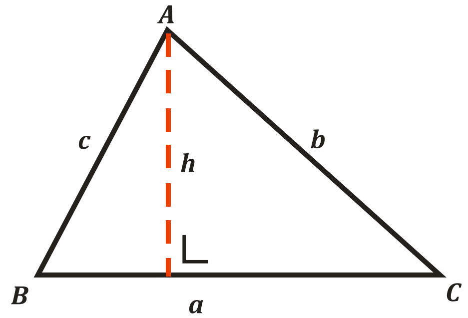
  5. $\cot(\theta) = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$

  6. $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$

  7. $\tan^2(\theta) + 1 = \sec^2(\theta)$

  8. $1 + \cot^2(\theta) = \csc^2(\theta)$

- **Aturan Sinus pada Segitiga**



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

- **Aturan Cosinus**

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$$

Sedangkan untuk menentukan besar sudut dalam segitiga

$$\cos A = \frac{(b^2 + c^2 - a^2)}{2bc}$$

$$\cos B = \frac{(a^2 + c^2 - b^2)}{2ac}$$

$$\cos C = \frac{(a^2 + b^2 - c^2)}{2ab}$$

- **Luas Segitiga**

1. Diketahui dua sisi dan satu sudut pada sebuah segitiga

$$L = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin C$$

Catatan : sudut C merupakan sudut yang dibentuk oleh sisi – sisi yang panjangnya a dan b.

$$L = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin B$$

$$L = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin A$$

2. Diketahui satu sisi dan satu sudut

$$L = \frac{a^2 \cdot \sin B \cdot \sin C}{2 \sin(B + C)}$$

$$L = \frac{c^2 \cdot \sin A \cdot \sin B}{2 \sin(A + B)}$$

$$L = \frac{b^2 \cdot \sin A \cdot \sin C}{2 \sin(A + C)}$$

- **Sifat Cosinus, Sinus, dan Tangen untuk Jumlah dan Selisih Dua Sudut**

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\beta}$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \cdot \tan\beta}$$

- **Formula Cosinus, Sinus dan Tangen SudutRangkap**

$$sin\,2\alpha = 2\,sin\,\alpha \cdot cos\,\alpha$$

$$cos\,2\alpha = cos^2\,\alpha - sin^2\,\alpha$$

$$= 1 - 2\,sin^2\,\alpha$$

$$= 2\,cos^2\,\alpha - 1$$

$$tan\,2\alpha = \frac{2\,tan\,\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$

- **Mengubah Bentuk Perkalian ke Penjumlahan**

$$cos\,\alpha\,.\,cos\,\beta = \frac{1}{2}cos(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}cos(\alpha-\beta)$$

$$sin\,\alpha\,.\,sin\,\beta = \frac{1}{2}cos(\alpha-\beta) - \frac{1}{2}cos(\alpha+\beta)$$

$$sin\,\alpha\,.\,cos\,\beta = \frac{1}{2}sin(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}sin(\alpha-\beta)$$

- **Mengubah Bentuk Penjumlahan dan Selisih ke Perkalian**

$$sin\,A + sin\,B = 2 \cdot sin\frac{1}{2}(A+B) \cdot cos\frac{1}{2}(A-B)$$

$$sin\,A - sin\,B = 2 \cdot cos\frac{1}{2}(A+B) \cdot sin\frac{1}{2}(A-B)$$

$$cos\,A + cos\,B = 2 \cdot cos\frac{1}{2}(A+B) \cdot cos\frac{1}{2}(A-B)$$

$$cos\,A - cos\,B = -2.\,sin\frac{1}{2}(A+B) \cdot cos\frac{1}{2}(A-B)$$

- **Nilai Maksimum dan Minimum pada Fungsi Trigonometri**

  Untuk setiap sudut x berlaku

$$-1 \leq sin\,x \leq 1$$

$$-1 \leq cos\,x \leq 1$$

Selanjutnya, diberikan

$$f(x) = a \cdot \cos x + b \cdot \sin x$$

pada suatu domain D. Misalkan α adalah suatu sudut dengan $0° \leq \alpha \leq 360°$ sehingga

$$sin\,\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

dan

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad .$$

Jika $\alpha + arccos(-1)$ dan $\alpha + arccos(1)$ termuat di dalam domain D maka nilai minimum dan nilai maksimum dari fungsi masing – masing adalah $\left(-\sqrt{a^2+b^2}\right)$ dan $\sqrt{a^2+b^2}$.

G. Umpan Balik dan Tindak Lanjut

Untuk mengetahui tingkat penguasaan anda, cocokkan jawaban dengan kunci jawaban pada bagian akhir kegiatan pembelajaran. Hitung jawaban benar anda, kemudian gunakan rumus di bawah ini untuk mengetahui tingkat penguasaan anda terhadap materi kegiatan pembelajaran ini.

Rumus

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah jawaban benar}}{10} \times 100\%$$

Kriteria

90% – 100% = baik sekali

80% – 89% = baik

70% – 79% = cukup

< 70% = kurang

H. Kunci Jawaban Latihan

1. 1
2. a. $\frac{\sqrt{15}}{16}$ b. $\frac{9}{16}\sqrt{3}$ c. $\frac{207+48\sqrt{5}}{177}$
3. a. $\approx 19{,}47°$ b. $\approx 130{,}53°$
4. $\frac{15(3\sqrt{2}-\sqrt{6})}{2}$
5. 42
6. $\frac{13}{14}$
7. 44,5
8. $f_{maks} = \sqrt{13}$ dan $f_{\min} = -\sqrt{13}$
9. $f_{maks} = 1+\sqrt{5}$ dan $f_{\min} = 1-\sqrt{5}$
10. $f_{maks} = \frac{5+\sqrt{3}}{44}$ dan $f_{\min} = \frac{5-\sqrt{3}}{44}$

Evaluasi

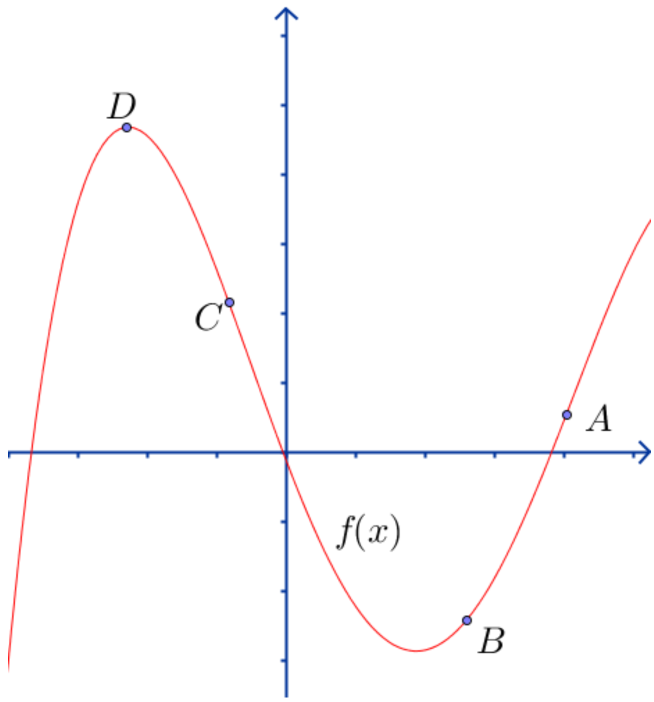
1. Pernyataan yang benar berkaitan dengan $\lim_{x \to a} f(x) = L$ adalah ....
   a. jika $f(x)$ mendekati L maka x mendekati a
   b. jika x mendekati a maka $f(x)$ mendekati L
   c. jika x tidak mendekati a maka $f(x)$ tidak mendekati L
   d. jika $f(x)$ tidak mendekati L maka x mendekati a
2. Hasil dari $\lim_{x \to 3} \frac{2x^3-54}{x^2-9}$ adalah ....
   a. 6
   b. 9
   c. 18
   d. ∞
3. Nilai $\lim_{x \to 0} \left[\frac{\sin x - \cos x}{x + \sin x}\right]$ adalah ....
   a. 0
   b. ½
   c. 1
   d. 2
4. Penulisan yang benar berkaitan dengan limit tak hingga adalah ....
   a. $\lim_{x \to 2} \frac{3}{x-2} = \infty$
   b. $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$ tidak terdefinisi
   c. $\lim_{x \to 2} \frac{1}{(2-x)^2}$ tidak terdefinisi
   d. $\lim_{x \to 0} \frac{2}{x^2} = \infty$
5. Hasil dari $\lim_{x \to \infty} \frac{x^3-3x^2+2}{x^3-3x+2}$ adalah
   a. 1
   b. 2
   c. 3
   d. ∞
6. Pernyataan yang benar berkaitan dengan turunan fungsi f adalah ....
   a. konsep turunan fungsi tidak ada hubungannya dengan konsep limit fungsi

b. gradien garis singgung tidak ada hubungannya dengan turunan suatu fungsi

c. dalam kaitannya dengan turunan $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ selalu ada jika $f(x)$ suatu fungsi kontinyu

d. gradien garis singgung di titi c adalah $m = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$ jika limitnya ada

7. Perhatikan grafik di bawah ini



Gradien garis singgung paling besar nilainya di titik ...

a. A

b. B

c. C

d. D

8. Hasil dari $\int x^3\sqrt{x^4+1}\,dx$ adalah ....

a. $\frac{1}{6}\sqrt{x^4+1}+c$

b. $\frac{2}{3}(x^3+1)\sqrt{x^4+1}+c$

c. $\frac{1}{6}(x^4+1)\sqrt{x^4+1}+c$

d. $\frac{2}{3}(x^4+1)+c$

9. Hasil dari $\int_0^{\pi} e^x \cos x \; dx$ adalah ....
   a. $1 + e^{\pi}$
   b. $\frac{1}{2}(e^{\pi} - 1)$
   c. $\frac{1}{2}(1 - e^{\pi})$
   d. $-\frac{1}{2}(1 + e^{\pi})$
10. Luas daerah yang dibatasi kurva $4 - x^2$ dan $x - 2$ adalah ....
    a. $\frac{125}{6}$
    b. 20
    c. $-\frac{125}{6}$
    d. -20
11. Hasil dari $sin\ 390°$ adalah ....
    a. $-0{,}5$
    b. 0
    c. 0,5
    d. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$
12. Bentuk $\frac{2-\sin^2 x}{\cos\ x}$ ekuivalen dengan bentuk ....
    a. $\sec x + \cos x$
    b. $2 \cos x$
    c. $3 - \cos^2 x$
    d. $2 \cos 2x$
13. Diketahui fungsi $f(x) = 3 \sin x + 2 \cos x$ untuk $0° \leq x \leq 360°$. Nilai minimum dan maksimum dari fungsi $f(x)$ adalah ....
    a. 0 dan 5
    b. -5 dan 5
    c. $-\sqrt{13}$ dan $\sqrt{13}$
    d. 2 dan 3
14. Diberikan segitiga ABC dengan $\angle A = 30°$, $b = 12\ cm$, dan $c = 14\ cm$. Luas segitiga tersebut adalah ....
    a. 12
    b. 16

c. 24

d. 42

15. Diketahui fungsi $f(x) = \frac{1}{10+3.sin\,x-3.cos\,x}$, untuk $0° \leq x \leq 360°$. Nilai minimum dari fungsi $f(x)$ tersebut adalah ....

a. 1

b. $\frac{1}{2}$

c. $\frac{5-\sqrt{3}}{44}$

d. $\frac{\sqrt{3}-5}{44}$

Penutup

Pengembangan keprofesian berkelanjutan (PKB) merupakan keniscayaan bagi guru karena telah diamanatkan dalam undang-undang. Oleh karena itu pemerintah wajib menyediakan sarana atau wahana bagi guru untuk mengembangkan keprofesian dirinya, disamping guru juga harus secara aktif mencari dan mungkin menciptakan kegiatan dalam rangaka pengembangan keprofesiannya. Harapannya, mdul ini dapat digunakan untuk keduanya yaitu sebagai sarana fasilitasi PKB guru maupun sebagai bahan yang dapat dimanfaatkan guru untuk belajar terus secara mandiri.

Penyempurnaan modul ini akan terus diupayakan. Oleh karena itu saran dan masukan dari berbagai pihak sangat diharapkan untuk perbaikan di masa mendatang.

Daftar Pustaka

[1] Andreescu, T., Gelca, M., 2009. *Mathematical Olympiad Challenges Second Edition*, Boston : Birkhauser

[2] Ayres, Frank Jr., dan Moyer, Robert E., 1999. *Schaum's Outline of Theory and Problem in Trigonometry*. New York : Mc-Graw Hill Inc

[3] Gelfand, I. M. , Saul, M. , 2001.*Trigonometry*. Boston : Birkhauser

[4] Larsson, R. , Hostetler, R., 2007. *Trigonometry 7th Edition*. Boston : Houghton Mifflin Company

[5] Paul A. Foerester. 2005. *Calculus: Concepts and Applications*, California: Key Curriculum Press

[6] Robert Wrede & Murray Spiegel. 2010. *Advanced Calculus 3rd*. New York: McGraw-Hill Companies

[7] Ron Larson. 2006. *Calculus 3rd*. California: Key Curriculum Press

[8] Ron Larson. 2006. *Discovering Advanced Algebra: An Investigation Approach*. California: Key Curriculum Press

[9] Silverman, R.A. 1985. *Calculus with Analytic Geometry*. New Jersey : Prentice – Hall Inc

[10] Sukino. 2007. *Matematika untuk SMA kelas X 1B*. Jakarta : Erlangga

[11] Sukino. 2007. *Matematika untuk SMA kelas XI 2A*. Jakarta : Erlangga

Glosarium

Bagian Kalkulus:

Definisi Formal

Definisi formal adalah definisi yang dalam penyajiannya menggunakan simbol dan ekspresi matematika

Fungsi Gradien Garis Singgung

Diberikan fungsi $f(x)$. Turunan dari $f(x)$ dilambangkan dengan $f'(x)$adalah hasil dari

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

jika limit tersebut ada. Karena $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ pada hakekatnya adalah suatu nilai gradien garis singgung fungsi di x, maka $f'(x)$dapat dipahami sebagai fungsi gradien garis singung dari f. Berkaitan dengan notasi, ada beberapa literatur menyajikan $f'(x)$ sebagai $[f(x)]'$ atau $(f(x))'$

Kontinyu

Dalam bahasa sederhana, kontinyu berarti tidak putus. Sedangkan pengertian dalam fungsi sebagai berikut. Fungsi $f(x)$ dikatakan kontinyu di c jika $\lim_{x \to c} f(x)$ dan $f(c)$ dua-duanya ada dan berlaku $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

Mendekati

Mendekati disini dimaknai menuju sampai sedekatnya tetapi tidak sampai sama dengan yang dituju.

Substitusi

Substitusi sama arti dengan menggantikan atau memasukkan. Misalnya substitusi $x = t + 1$ ke $y + x = 5$ berarti mengganti x dengan $t + 1$.

Bagian Trigonometri

Asimtot	:	Asimtot dari suatu fungsi $f: A \to B$ adalah garis yang tidak pernah dipotong oleh fungsi f
Derajat	:	Salah satu ukuran sudut yang dinotasikan dengan " ° " yang memenuhi $1° = \frac{1}{360}$ putaran
Fungsi bijektif	:	Diberikan fungsi $f: A \to B$. Fungsi f disebut fungsi bijektif jika memenuhi dua kondisi yaitu 1. Jika $f(a) = f(b)$ maka $a = b$ 2. Untuk setiap $b \in B$ maka terdapat $a \in A$ sedemikian sehingga $b = f(a)$
Fungsi periodik	:	Fungsi $f: A \to B$ disebut fungsi periodik jika terdapat bilangan real positif p sedemikian sehingga $f(x+p) = f(x)$, untuk setiap $x \in A$
Fungsi invers	:	Diberikan fungsi $f: A \to B$. Fungsi f^{-1} disebut fungsi invers dari fungsi f jika dan hanya jika $f\left(f^{-1}(y)\right) = y$ dan $f^{-1}\left(f(x)\right) = x$, untuk setiap $x \in A$, dan untuk setiap $y \in B$
Juring	:	Daerah pada lingkaran yang dibatasi oleh dua jari – jari dan sebuah busur
Sistem koordinat Cartesius	:	Suatu sistem koordinat yang menggunakan dua garis lurus yang saling tegak lurus dan berarah dalam menentukan kedudukan suatu titik pada bidang. Di mana dua garis yang dimaksud adalah sumbu x dan sumbu y, serta perpotongan kedua titik itu adalah titik asal. Sistem koordinat ini juga bisa digunakan untuk koordinat 3 dimensi (x, y, z)
Sistem koordinat polar	:	Sistem koordinat *polar* adalah sistem koordinat dua dimensi yang terdiri dari satu titik tetap O, yang disebut *titik asal* dan sebuah garis berarah yang bermula dari titik asal O, yang disebut *sumbu polar*
Radian	:	Salah satu ukuran sudut yang dinotasikan dengan " rad " dan memenuhi $1\ radian \approx 57{,}3°$
Sudut	:	Perputaran suatu garis tertentu ke garis tertentu lainnya terhadap pusat putaran.
Trigonometri	:	Salah satu cabang ilmu pengetahuan yang mengkaji tentang sudut dan fungsinya

Lampiran

Jawaban Evaluasi

1. b
2. b,
3. b,
4. d,
5. a,
6. d,
7. a,
8. c,
9. d,
10. a,
11. c,
12. a,
13. c,
14. d,
15. c

TUT WURI HANDAYANI