GURU PEMBELAJAR
MODUL MATEMATIKA SMA

KELOMPOK KOMPETENSI D

STRATEGI PEMBELAJARAN 1, GEOMETRI, DAN IRISAN KERUCUT

DIREKTORAT JENDERAL GURU DAN TENAGA KEPENDIDIKAN
KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
2016

KATA SAMBUTAN

Peran guru profesional dalam proses pembelajaran sangat penting sebagai kunci keberhasilan belajar siswa. Guru profesional adalah guru yang kompeten membangun proses pembelajaran yang baik sehingga dapat menghasilkan pendidikan yang berkualitas. Hal tersebut menjadikan guru sebagai komponen yang menjadi fokus perhatian pemerintah pusat maupun pemerintah daerah dalam peningkatan mutu pendidikan terutama menyangkut kompetensi guru.

Pengembangan profesionalitas guru melalui program Guru Pembelajar merupakan upaya peningkatan kompetensi untuk semua guru. Sejalan dengan hal tersebut, pemetaan kompetensi guru telah dilakukan melalui uji kompetensi guru (UKG) untuk kompetensi pedagogik profesional pada akhir tahun 2015. Hasil UKG menunjukkan peta kekuatan dan kelemahan kompetensi guru dalam penguasaan pengetahuan. Peta kompetensi guru tersebut dikelompokkan menjadi 10 (sepuluh) kelompok kompetensi. Tindak lanjut pelaksanaan UKG diwujudkan dalam bentuk pelatihan guru paska UKG melalui program Guru Pembelajar. Tujuannya untuk meningkatkan kompetensi guru sebagai agen perubahan dan sumber belajar utama bagi peserta didik. Program Guru Pembelajar dilaksanakan melalui pola tatap muka, daring penuh (*online*), dan daring kombinasi (*blended*) tatap muka dengan *online*.

Pusat Pengembangan dan Pemberdayaan Pendidik dan Tenaga Kependidikan (PPPPTK), Lembaga Pengembangan dan Pemberdayaan Pendidik dan Tenaga Kependidikan Kelautan Perikanan Teknologi Informasi dan Komunikasi (LP3TK KPTK) dan Lembaga Pengembangan dan Pemberdayaan Kepala Sekolah (LP2KS) merupakan Unit Pelaksanana Teknis di lingkungan Direktorat Jenderal Guru dan Tenaga Kependidikan yang bertanggung jawab dalam mengembangkan perangkat dan melaksanakan peningkatan kompetensi guru sesuai bidangnya. Adapun perangkat pembelajaran yang dikembangkan tersebut adalah modul untuk program Guru Pembelajar tatap muka dan Guru Pembelajar online untuk semua mata pelajaran dan kelompok kompetensi. Dengan modul ini diharapkan program Guru Pembelajar memberikan sumbangan yang sangat besar dalam peningkatan kualitas kompetensi guru.

Mari kita sukseskan program Guru Pembelajar ini untuk mewujudkan Guru Mulia Karena Karya.

Jakarta, Maret 2016

Direktur Jenderal,

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
DIREKTORAT JENDERAL GURU DAN TENAGA KEPENDIDIKAN

Sumarna Surapranata

NIP. 195908011985031002

GURU PEMBELAJAR

MODUL

MATEMATIKA SMA

KELOMPOK KOMPETENSI E

PEDAGOGIK

STRATEGI PEMBELAJARAN 1

DIREKTORAT JENDERAL GURU DAN TENAGA KEPENDIDIKAN

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN

2016

Penulis:
Amin Suyitno, 085865168227

Penelaah:
Rosnawati, 08164220779, rosnawati.slamet@gmail.com

Ilustrator:
Nur Hamid

KATA PENGANTAR

Peningkatan kualitas pendidikan saat ini menjadi prioritas, baik oleh pemerintah pusat maupun daerah. Salah satu komponen yang menjadi fokus perhatian adalah peningkatan kompetensi guru. Peran guru dalam pembelajaran di kelas merupakan kunci keberhasilan untuk mendukung keberhasilan belajar siswa. Guru yang profesional dituntut mampu membangun proses pembelajaran yang baik sehingga dapat menghasilkan *output* dan *outcome* pendidikan yang berkualitas.

Dalam rangka memetakan kompetensi guru, telah dilaksanakan Uji Kompetensi Guru (UKG) Tahun 2015. UKG tersebut dilaksanakan bagi semua guru, baik yang sudah bersertifikat maupun belum bersertifikat untuk memperoleh gambaran objektif kompetensi guru, baik profesional maupun pedagogik. Hasil UKG kemudian ditindaklanjuti melalui Program Guru Pembelajar sehingga diharapkan kompetensi guru yang masih belum optimal dapat ditingkatkan.

PPPPTK Matematika sebagai Unit Pelaksana Teknis Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan di bawah pembinaan Direktorat Jenderal Guru dan Tenaga Kependidikan mendapat tugas untuk menyusun modul guna mendukung pelaksanaan Guru Pembelajar. Modul ini diharapkan dapat menjadi sumber belajar bagi guru dalam meningkatkan kompetensinya sehingga mampu mengambil tanggung jawab profesi dengan sebaik-baiknya.

Yogyakarta, Maret 2016
Kepala PPPPTK Matematika,

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
PUSAT PENGEMBANGAN DAN PEMBERDAYAAN PENDIDIK DAN TENAGA KEPENDIDIKAN MATEMATIKA

Dr. Dra. Daswatia Astuty, M.Pd.
NIP. 196002241985032001

DAFTAR ISI

PENDAHULUAN

A. LATAR BELAKANG

Pendidik adalah tenaga kependidikan yang berkualifikasi sebagai guru, dosen, konselor, pamong belajar, widyaiswara, tutor, instruktur, fasilitator, dan sebutan lain yang sesuai dengan kekhususannya, serta berpartisipasi dalam menyelenggarakan pendidikan. Guru dan tenaga kependidikan wajib melaksanakan kegiatan pengembangan keprofesian secara berkelanjutan agar dapat melaksanakan tugas profesionalnya dan dengan muatan pedagogiknya. Program kegiatan Guru Pembelajar adalah pengembangan kompetensi Guru dan Tenaga Kependidikan yang dilaksanakan sesuai kebutuhan, bertahap, dan berkelanjutan untuk meningkatkan profesionalitasnya.

Program kegiatan Guru Pembelajar sebagai salah satu strategi pembinaan guru dan tenaga kependidikan diharapkan dapat menjamin guru dan tenaga kependidikan agar mampu secara terus menerus memelihara, meningkatkan, dan mengembangkan kompetensi sesuai dengan standar yang telah ditetapkan. Pelaksanaan kegiatan Guru Pembelajar akan mengurangi kesenjangan antara kompetensi yang dimiliki guru dan tenaga kependidikan dengan tuntutan profesional yang dipersyaratkan.

Guru dan tenaga kependidikan wajib melaksanakan program kegiatan Guru Pembelajar baik secara mandiri maupun kelompok. Penyelenggaraan program kegiatan Guru Pembelajar dilaksanakan oleh PPPPTK dan LPPPTK KPTK atau penyedia layanan diklat lainnya. Pelaksanaan program kegiatan tersebut memerlukan modul sebagai salah satu sumber belajar bagi peserta kegiatan. Modul merupakan bahan ajar yang dirancang untuk dapat dipelajari secara mandiri oleh peserta diklat berisi materi, metode, batasan-batasan, dan cara mengevaluasi yang disajikan secara sistematis dan menarik untuk mencapai tingkatan kompetensi yang diharapkan sesuai dengan tingkat kompleksitasnya.

Modul Guru Pembelajar bagi guru dan tenaga kependidikan ini merupakan acuan bagi peserta kegiatan dalam mengembangkan materi yang diperlukan guru dalam melaksanakan kegiatan Guru Pembelajar.

B. TUJUAN

Tujuan disusunnya modul Guru Pembelajar ini adalah memberikan pemahaman bagi peserta pelatihan tentang konsep dasar tentang Strategi Pembelajaran, dengan contoh-contoh penerapannya dalam pembelajaran matematika. Ada 2 modul yang disusun yaitu Strategi Pembelajaran I dan Strategi Pembelajaran 2. Secara khusus tujuan penyusunan Modul ini adalah sebagai berikut.

1. Memberikan Modul kepada peserta Guru Pembelajar.
2. Menjadi acuan bagi peserta Guru Pembelajar untuk mengembangkan modul yang diperlukan dalam kegiatan Guru Pembelajar di sekolah/madrasah.

C. PETA KOMPETENSI

Peta kompetensi untuk **Strategi Pembelajaran 1** bagi guru Matematka SMA adalah sebagai berikut.

Kegiatan Pembelajaran 1

1. Memahami pengertian belajar matematika dan implikasinya.
2. Memahami hakikat kompetensi pendidik.
3. Memahami terminologi dalam pembelajaran matematika dan aspeknya.

Kegiatan Pembelajaran 2

1. Memahami kegiatan pembelajaran matematika di SMA yang dilakukan dengan pendekatan ilmiah sesuai tuntutan Kurikulum 2013.
2. Memahami kegiatan pembelajaran matematika di SMA terkait dengan pendekatan-pendekatan lain dalam pembelajaran yang dapat diterapkan dalam mata pelajaran matematika.
3. Memahami kegiatan pembelajaran matematika di SMA terkait dengan model pembelajaran matematika yang berbasis PAKEM.

D. RUANG LINGKUP

Modul Strategi Pembelajaran 1 untuk kegiatan Guru Pembelajar ini berisi tujuan belajar matematika dan implikasinya, kompetensi yang harus dimiliki seorang pendidik/guru, khususnya dalam mata pelajaran matematika, berbagai termonologi dalam pembelajaran dan aspeknya, pendekatan ilmiah sesuai tuntutan Kurikulum 2013, pendekatan-pendekatan lain dalam pembelajaran yang dapat diterapkan dalam mata pelajaran matematika, dan model pembelajaran matematika yang berbasis PAKEM.

E. CARA PENGGUNAAN MODUL

Peserta program kegiatan Guru Pembelajar pemakai Modul ini diharapkan melakukan langkah-langkah belajar sebagai berikut.

1. Membaca dengan cermat isi Modul ini, tahap demi tahap sesuai dengan Kegiatan Pembelajarannya.
2. Mendengarkan dengan seksama penjelasan Tutor/Pelatih pada saat berlangsung kegiatan Guru Pembelajar.
3. Bertanya kepada Tutor jika belum jelas.
4. Mengerjakan semua tugas atau latihan soal yang ada pada Modul ini.
5. Mengembangkan sendiri materi Modul ini dengan jalan membaca dan mempelajari buku-buku yang relevan dengan isi Modul.
6. Saran, milikilah modul Strategi Pembelajaran 2 karena isinya layak untuk dipelajari para guru sebagai lanjutan modul Strategi Pembelajaran 1.

KEGIATAN PEMBELAJARAN 1
BELAJAR MATEMATIKA DAN KOMPETENSI GURU

A. TUJUAN

Kegiatan belajar ini bertujuan unuk memberikan pemahaman kepada peserta kegiatan atau pembaca berkaitan dengan tujuan belajar matematika dan implikasinya berupa kompetensi yang seharusnya dimiliki oleh guru. Untuk salah satu unsur dari berbagai kompetensi tersebut, guru diharapkan dapat menjelaskan dan membedakan berbagai terminologi berkaitan dengan pembelajaran matematika.

B. INDIKATOR PENCAPAIAN KOMPETENSI

Indikator pencapaian kompetensi setelah mempelajari kegiatan pembelajaran 1 ini adalah:

1. menyebutkan tujuan belajar matematika dan implikasinya;
2. menjelaskan kompetensi yang harus dimiliki seorang pendidik/guru, khususnya dalam mata pelajaran matematika;
3. menjelaskan dan membedakan berbagai terminologi dalam pembelajaran dan aspeknya.

C. URAIAN MATERI

1. Belajar Matematika dan Implikasinya

Sebagai seorang guru mata pelajaran matematika, maka guru perlu mengetahui tujuan para siswa (peserta didik) belajar matematika. Oleh karena itu maka uraian ini dibahas tentang tujuan belajar matematika dan implikasinya serta kompetensi yang harus dimiliki oleh seorang pendidik/guru. Dengan mempelajari materi ini, diharapkan para guru memiliki kesadaran tentang tugas berat yang diembannya sebagai seorang guru pada mata pelajaran matematika.

a. Tujuan Belajar Matematika

Matematika merupakan mata pelajaran yang sangat penting dalam kehidupan. Kemahiran matematika dipandang sangat bermanfaat bagi peserta didik untuk mengikuti pembelajaran pada jenjang lebih lanjut atau untuk mengatasi masalah dalam kehidupannya sehari-hari. Tujuan peserta didik belajar matematika adalah agar peserta didik mahir matematika. Namun demikian, selama ini hasil belajar dalam suatu pembelajaran matematika masih belum mampu menjadikan peserta didik mahir matematika.

Menurut *National Research Council* (2001) seorang peserta didik dikatakan mahir setelah belajar matematika bila pada diri peserta didik itu terdapat 5 komponen yang saling jalin-menjalin sebagai berikut:

1) pemahaman konsep: penguasaan terhadap konsep, operasi, dan relasi matematika;
2) kelancaran prosedur: keterampilan dalam menjalankan prosedur secara fleksibel, akurat, efisien, dan tepat;
3) penalaran adaptif: kemampuan merumuskan, menyajikan, dan memecahkan masalah matematika;
4) kompetensi strategis: kemampuan melakukan pemikiran logis, refleksi, menjelaskan, dan memberikan justifikasi;
5) disposisi positif: kecenderungan memandang matematika sebagai sesuatu yang masuk akal, bermanfaat, berharga, diiringi dengan kepercayaan tentang kemampuan diri dan perlunya ketekunan.

Di samping itu, kehidupan di abad ke-21 (abad teknologi) menuntut setiap peserta didik dan pendidiknya (gurunya) mahir dalam sedikitnya 4 hal berikut.

1) Mengikuti perkembangan teknologi.

Teknologi yang ada saat ini hampir selalu berubah, bahkan hanya dalam hitungan detik. Setiap saat manusia ditawari dengan teknologi baru yang menggiurkan dan membantu penyelesaian tugas secara lebih efektif dan efisien. Karena itu, pembelajaran matematika perlu membantu peserta didik memiliki kemampuan untuk mengikuti perkembangan teknologi yang ada.

2) Memiliki kemampuan memecahkan masalah.

Tidak semua tawaran tersebut sesuai dengan kondisi yang dimiliki seseorang. Ketidaksesuaian itu akan menjadi masalah yang harus dipecahkan. Pembelajaran matematika perlu berkontribusi untuk mengembangkan kemampuan memecahkan masalah.

3) Memiliki kemampuan berkomunikasi yang efektif.

Masalah yang muncul tidak dapat dipecahkan secara individual, namun diperlukan kerja sama pakar-pakar dari berbagai disiplin spesialisasi. Para pakar spesialis dituntut untuk saling bekerja sama dan berkomunikasi secara efektif agar masalah dapat terselesaikan secara komprehensif. Karena itu, pembelajaran matematika perlu menumbuhkembangkan kemampuan komunikasi.

4) Memiliki tingkat produktivitas tinggi.

Hanya dengan menghasilkan sesuatu yang baru dan bermanfaat sajalah seseorang bisa ikut mewarnai kehidupan. Tanpa itu orang tersebut hanya akan menjadi konsumen yang kebingungan. Karena itu, pembelajaran matematika perlu berkontribusi untuk pengembangan daya pikir kreatif dan inovatif.

b. Implikasi Belajar Matematika

Implikasi dari uraian di atas menunjukkan adanya beberapa hal yang perlu dikembangkan dalam pembelajaran matematika, yaitu:

1) penguasaan konsep matematika,
2) kemampuan memecahkan masalah,
3) kemampuan bernalar dan berkomunikasi, dan
4) kemampuan berpikir kreatif dan inovatif.

2. Kompetensi Pendidik

Guru mata pelajaran matematika khususnya di SMA adalah seorang pendidik. Sebagaimana diatur dalam PP Republik Indonesia Nomor 19 Tahun 2005 dalam BAB VI, *pendidik* harus memiliki kualifikasi akademik dan kompetensi sebagai agen pembelajaran, sehat jasmani dan rohani, serta memiliki kemampuan untuk mewujudkan tujuan pendidikan nasional. Yang dimaksud pendidik adalah tenaga kependidikan yang berkualifikasi dan berkompetensi sebagai guru, dosen, konselor, pamong, pamong belajar, widyaiswara, tutor, instruktur, fasitator, dan sebutan lain yang sesuai dengan kekhususannya serta berpartisipasi dalam menyelenggarakan pendidikan. Yang dimaksud dengan pendidik sebagai agen pembelajaran (*learning agent*) adalah peran pendidik antara lain sebagai fasilitator, motivator, pemacu, dan pemberi inspirasi belajar bagi peserta didik. Peserta didik, adalah anggota masyarakat yang berusaha mengembangkan potensi diri melalui proses pembelajaran yang tersedia pada jalur, jenjang, dan jenis pendidikan tertentu.

Guru/pendidik sebagai agen pembelajaran pada jenjang pendidikan dasar dan menengah, serta pendidikan peserta didik usia dini, perlu memiliki 4 kompetensi yang meliputi (1) kompetensi pedagogik, (2) kompetensi kepribadian, (3) kompetensi profesional, dan (4) kompetensi sosial.

1) Kompetensi pedagogik adalah kemampuan mengelola pembelajaran peserta didik yang meliputi pemahaman terhadap peserta didik, perancangan dan pelaksanaan pembelajaran, evaluasi hasil belajar, dan pengembangan peserta didik untuk mengaktualisasikan berbagai potensi yang dimilikinya.

2) Kompetensi kepribadian adalah kemampuan kepribadian yang mantap, stabil, dewasa, arif, dan berwibawa, menjadi teladan bagi peserta didik, dan berakhlak mulia.

3) Kompetensi profesional adalah kemampuan penguasaan materi pembelajaran secara luas dan mendalam yang memungkinkannya membimbing peserta didik memenuhi standar kompetensi yang ditetapkan dalam Standar Nasional Pendidikan.

4) Kompetensi sosial adalah kemampuan pendidik sebagai bagian dari masyarakat untuk berkomunikasi dan bergaul secara efektif dengan peserta didik, sesama pendidik, tenaga kependidikan, orang tua/wali murid (peserta didik), dan masyarakat sekitar.

Tugas

1) Seorang peserta didik dikatakan mahir dalam matematika bila pada diri peserta didik itu terdapat 5 komponen yang saling jalin-menjalin. Sebutkan ke-5 komponen tersebut.
2) Guru/pendidik sebagai agen pembelajaran pada jenjang pendidikan dasar dan menengah, serta pendidikan peserta didik usia dini, perlu memiliki 4 kompetensi yang meliputi (1) kompetensi pedagogik, (2) kompetensi kepribadian, (3) kompetensi profesional, dan (4) kompetensi sosial.

Jelaskan makna yang terkandung di setiap kompetensi tersebut.

3. Terminologi dalam Pembelajaran dan Aspeknya

a. Pembelajaran

Cukup banyak definisi/pengertian tentang pembelajaran. Salah satunya adalah sebagai berikut. Pembelajaran adalah upaya menciptakan iklim dan pelayanan terhadap kemampuan, potensi, minat, bakat, dan kebutuhan peserta didik yang beragam agar terjadi interaksi optimal antara guru dengan peserta didik serta antara peserta didik dengan peserta didik. Dalam Permendikbud No. 103 Tahun 2014, ditulis bahwa pembelajaran adalah proses interaksi antar peserta didik dan antara peserta didik dengan pendidik dan sumber belajar pada suatu lingkungan belajar.

Pembelajaran dilaksanakan berbasis aktivitas dengan karakteristik:

1) interaktif dan inspiratif;
2) menyenangkan, menantang, dan memotivasi peserta didik untuk berpartisipasi aktif;
3) kontekstual dan kolaboratif;
4) memberikan ruang yang cukup bagi prakarsa, kreativitas, dan kemandirian peserta didik;
5) sesuai dengan bakat, minat, kemampuan, dan perkembangan fisik serta psikologis peserta didik.

Pembelajaran merupakan suatu proses pengembangan potensi dan pembangunan karakter setiap peserta didik sebagai hasil dari sinergi antara pendidikan yang berlangsung di sekolah, keluarga dan masyarakat. Proses tersebut memberikan kesempatan kepada peserta didik untuk mengembangkan potensi mereka menjadi kemampuan yang semakin lama semakin meningkat dalam sikap (spiritual dan sosial), pengetahuan, dan keterampilan yang diperlukan dirinya untuk hidup dan untuk bermasyarakat, berbangsa, serta berkontribusi pada kesejahteraan hidup umat manusia.

Keluarga merupakan tempat pertama bersemainya bibit sikap (spiritual dan sosial), pengetahuan, dan keterampilan peserta didik. Oleh karena itu, peran keluarga tidak dapat sepenuhnya digantikan oleh sekolah. Sekolah merupakan tempat kedua pendidikan peserta didik yang dilakukan melalui program intrakurikuler, kokurikuler, dan ekstrakurikuler. Kegiatan intrakurikuler dilaksanakan melalui mata pelajaran. Kegiatan kokurikuler dilaksanakan melalui kegiatan-kegiatan di luar sekolah yang terkait langsung dengan mata pelajaran, misalnya tugas individu, tugas kelompok, dan pekerjaan rumah berbentuk projek atau bentuk lainnya.

Sedangkan kegiatan ekstrakurikuler dilaksanakan melalui berbagai kegiatan yang bersifat umum dan tidak terkait langsung dengan mata pelajaran, misalnya kepramukaan, palang merah remaja, festival seni, bazar, dan olahraga.

Masyarakat merupakan tempat pendidikan yang jenisnya beragam dan pada umumnya sulit diselaraskan antara satu sama lain, misalnya media massa, bisnis dan industri, organisasi kemasyarakatan, dan lembaga keagamaan. Untuk itu para tokoh masyarakat tersebut semestinya saling koordinasi dan sinkronisasi dalam memainkan perannya untuk mendukung proses pembelajaran.

Singkatnya, keterjalinan, keterpaduan, dan konsistensi antara keluarga, sekolah, dan masyarakat harus diupayakan dan diperjuangkan secara terus menerus karena tripusat pendidikan tersebut sekaligus menjadi sumber belajar yang saling menunjang. Sekolah merupakan bagian dari masyarakat yang memberikan pengalaman belajar terencana di mana peserta didik menerapkan apa yang dipelajari di sekolah ke masyarakat dan memanfaatkan masyarakat sebagai sumber belajar.

Peserta didik mengembangkan sikap, pengetahuan, dan keterampilan serta menerapkannya dalam berbagai situasi, di sekolah, keluarga, dan masyarakat. Proses tersebut berlangsung melalui kegiatan tatap muka di kelas, kegiatan terstruktur, dan kegiatan mandiri.

Terkait dengan hal tersebut, maka pembelajaran ditujukan untuk mengembangkan potensi peserta didik agar memiliki kemampuan hidup sebagai pribadi dan warga negara yang beriman, produktif, kreatif, inovatif, dan afektif, serta mampu berkontribusi pada kehidupan masyarakat, berbangsa, bernegara, dan berperadaban dunia. Peserta didik adalah subjek yang memiliki kemampuan untuk secara aktif mencari, mengolah, mengkonstruksi, dan menggunakan pengetahuan. Untuk itu pembelajaran harus berkenaan dengan kesempatan yang diberikan kepada peserta didik untuk mengkonstruksi pengetahuan dalam proses kognitifnya. Agar benar-benar memahami dan dapat menerapkan pengetahuan, peserta didik perlu didorong untuk bekerja memecahkan masalah, menemukan segala sesuatu untuk dirinya, dan berupaya keras mewujudkan ide-idenya.

b. Prinsip Pembelajaran

Untuk mencapai kualitas yang telah dirancang dalam dokumen kurikulum, kegiatan pembelajaran matematika di SMA perlu menggunakan prinsip sebagai berikut.

1) Peserta didik difasilitasi untuk mencari tahu, tapi hindarilah hal-hal yang dapat berakibat negatif bagi peserta didik. Sebagai contoh, pada saat menerapkan pembelajaran berbasis proyek (yang akan dibahas lebih lanjut dalam modul 2) di luar kelas/sekolah, jangan memberikan tugas kepada peserta didik yang dapat mengganggu keamanan peserta didik (yang dapat berdampak buruk/negatif).
2) Peserta didik belajar dari berbagai sumber belajar. Latihlah peserta didik agar mampu memilih sumber belajar yang sesuai untuk tujuan pembelajaran yang telah ditetapkan.
3) Proses pembelajaran menggunakan pendekatan ilmiah (akan dibahas dalam Kegiatan Pembelajaran 2 modul ini).
4) Pembelajaran berbasis kompetensi.
5) Pembelajaran terpadu. Kaitkanlah materi/soal matematika dengan topik-topik matematika sebelumnya, dengan mata pelajaran yang lain, dan kaitkan pula dengan kehidupan sehari-hari. Tindakan pembelajaran yang seperti ini akan meningkatkan kemampuan *koneksi matematika* peserta didik.
6) Pembelajaran yang menekankan pada jawaban divergen (*open ended problem*) yang memiliki kebenaran multi dimensi. Menurut Mann (2006), melatih peserta didik dengan memberikan soal-soal terbuka dalam pembelajaran matematika yang seperti ini dapat menumbuhkan kreativitas matematika (*mathematical creativity*) pada diri peserta didik
7) Pembelajaran berbasis keterampilan aplikatif.
8) Peningkatan keseimbangan, kesinambungan, dan keterkaitan antara *hard-skills* dan *soft-skills*.
9) Pembelajaran yang mengutamakan pembudayaan dan pemberdayaan peserta didik sebagai pembelajar sepanjang hayat.
10) Pembelajaran yang menerapkan nilai-nilai dengan memberi keteladanan (*ing ngarso sung tulodo*), membangun kemauan (*ing madyo mangun karso*), dan mengembangkan kreativitas peserta didik dalam proses pembelajaran (*tut wuri handayani*).

11) Pembelajaran yang berlangsung di rumah, di sekolah, dan di masyarakat.
12) Pemanfaatan teknologi informasi dan komunikasi untuk meningkatkan efisiensi dan efektivitas pembelajaran matematika. Ini juga melatih agar guru dan peserta didik tidak gagap teknologi.
13) Pengakuan atas perbedaan individual dan latar belakang budaya peserta didik.
14) Suasana belajar menyenangkan dan menantang. Guru perlu berkomunikasi secara empatik dan santun dengan peserta didik agar mau terlibat aktif dalam proses pembelajaran. Proses pembelajaran akan bermakna dan dapat meningkatkan hasil belajar belajarnya jika peserta didik terlibat aktif dalam proses pembelajaran.

c. Strategi Pembelajaran

Strategi pembelajaran merupakan langkah-langkah sistematik dan sistemik yang digunakan pendidik untuk menciptakan lingkungan pembelajaran yang memungkinkan terjadinya proses pembelajaran dan tercapainya kompetensi yang ditentukan. Strategi yang dikembangkan saat ini adalah Pembelajaran Aktif.

d. Metode Pembelajaran

Metode pembelajaran merupakan cara yang digunakan oleh pendidik untuk menyampaikan suatu materi pembelajaran. Contoh metodepembelajaran antara lain metode ceramah, tanya-jawab, diskusi, dan lain-lain.

Berikut ini, akan diuraikan beberapa metode yang dapat diterapkan guru pada saat mengajar atau menyampaikan suatu materi.

1) Metode Ceramah

Metode ceramah adalah cara penyampaian materi pelajaran (informasi) dengan lisan dari seseorang guru kepada peserta didik di dalam kelas. Kegiatan berpusat pada guru dan komunikasi yang terjadi searah dari guru kepada peserta didik. Guru hampir mendominasi seluruh kegiatan pembelajaran sedang peserta didik hanya mendengarkan, memperhatikan dan membuat catatan seperlunya.

Penerapannya dalam pembelajaran matematika sebagai berikut. Guru menerapkan seluruh isi pelajaran dan mendominasi kegiatan pembelajaran. Pengertian atau definisi, teorema, dan contoh soal diberikannya. Penurunan rumus atau pembuktiannya, contoh soal dilakukan sendiri oleh guru. Diberitahukannya apa yang harus dikerjakan dan bagaimana menyimpulkannya. Contoh-contoh soal diberikan dan dikerjakan sendiri oleh guru. Langkah-langkah guru diikuti dengan teliti oleh peserta didik. Mereka meniru cara kerja dan cara penyelesaian yang dilakukan oleh guru. Peserta didik mencatat dengan tertib.

Kekuatan.

a) Dapat menampung kelas yang besar.
b) Bahan pelajaran dapat disampaikan secara urut.
c) Guru dapat menekankan hal-hal yang dipandang penting.
d) Tuntutan kurikulum secara cepat dapat diselesaikan.
e) Kekurangan buku pelajaran dapat diatasi.

Kelemahan

a) Peserta didik pasif dan bisa membosankan peserta didik.
b) Padatnya materi dapat membuat peserta didik kurang menguasai materi pelajaran.
c) Pelajaran yang diperoleh mudah terlupakan.
d) Peserta didik cenderung "belajar menghafal" dan tidak menimbulkan adanya "pengertian".
e) Inisiatif dan kreativitas peserta didik kurang berkembang.
f) Jika suara guru kurang keras, maka suara guru tidak terdengar dari tempat duduk peserta didik yang ada di belakang.

2) Metode Demonstrasi

Metode demonstrasi adalah cara penyampaian pelajaran dari seorang guru kepada peserta didik di dalam kelas dengan menonjolkan suatu kemampuan. Kegiatan masih berpusat pada guru. Jadi, guru masih mendominasi kegiatan pembelajaran.

Penerapan dalam pembelajaran matematika sebagai berikut. Guru mendemonstrasikan kemampuannya dalam membuktikan suatu teorema, menurunkan rumus, atau memecahkan soal. Jika berhubungan dengan penggunaan alat, guru misalnya hanya mendemonstrasikan pemakaian sepasang penggaris segitiga untuk menggambarkan dua garis sejajar atau saling tegak lurus, menggunakan mistar hitung, kalkulator, pemakaian daftar logaritma, dan sebagainya.

Setelah demonstrasi selesai dilaksanakan, sebaiknya diikuti dengan mendiskusikan kegiatan demonstrasinya, terutama jika demonstrasi itu juga dilaksanakan oleh peserta didik.

Kekuatan dan kelemahan Metode Demonstrasi, sama dengan Metode Ceramah. Jika suara guru kurang keras, maka suara guru juga tidak terdengar dari tempat duduk peserta didik yang ada di belakang.

3) Metode Tanya-Jawab

Metode tanya-jawab adalah metode pembelajaran yang menggunakan tanya-jawab untuk menyampaikan materi pembelajaran. Sebelum pertanyaan diberikan, sebagai pengarahan diperlukan pula cara informatif. Bahan yang diajarkan masih terbatas pada hal-hal yang ditanyakan oleh guru. Inisiatif dimulai dari guru. Perlu diingat bahwa suatu proses pembelajaran yang melibatkan banyak tanya jawab belum tentu merupakan metode tanya-jawab. Tetapi, keterampilan bertanya baik dasar maupun lanjut sangat perlu dikuasai oleh guru dalam menerapkan metode tanya-jawab.

Langkahnya, guru harus dan perlu menyiapkan serangkaian pertanyaan-pertanyaan, sehingga secara keseluruhan, pertanyaan-pertanyaan tersebut akan terangkai dan dapat menggiring peserta didik ke arah materi pelajaran yang akan disampaikan guru.

Kekuatan.

a) Peserta didik aktif menjawab dan berpikir untuk mencari jawab yang benar.
b) Guru dapat menekankan hal-hal yang dipandang penting.
c) Tuntutan kurikulum secara cepat dapat diselesaikan.
d) Para peserta didik terbiasa membuat jawaban benar yang sesuai dengan pertanyaan.

Kelemahan

a) Suasana kelas bisa menegangkan bagi peserta didik.
b) Guru sulit menyusun pertanyaan yang urut sesuai dengan urutan materi, bergradasi, dan yang dapat menggiring peserta didik ke arah materi pelajaran yang akan disampaikan guru.
c) Pelajaran yang diperoleh mudah terlupakan.
d) Peserta didik cenderung "belajar menghafal" isi buku dan tidak menimbulkan adanya "pengertian".

e) Inisiatif dan kreativitas peserta didik kurang berkembang.
f) Bahan yang diajarkan bisa terbatas pada hal-hal yang ditanyakan oleh guru saja.

4) Metode Latihan

Metode latihan merupakan metode pembelajaran yang penerapannya lebih baik ditujukan agar peserta didik menjadi cepat dan cermat dalam menyelesaikan soal yang bervariasi. Metode latihan dikaitkan dengan upaya meningkatkan kemampuan peserta didik dalam algoritma berhitung atau prosedur matematika dan terampil menggunakannya. Algoritma adalah urutan langkah yang pasti, yang harus dilakukan dalam menghitung atau menyelesaikan suatu jenis soal. Jika algoritma ini dilakukan tanpa kesalahan, akan dihasilkan jawaban soal tersebut.

Jadi, tujuan metode latihan adalah hafalan algoritma dan prosedur matematika serta cepat dan cermat menggunakannya. Metode latihan harus diberikan tepat pada waktunya. Terlalu dini atau lambat akan menjadikannya kurang efesien.

Kekuatan

a) Peserta didik aktif dan berpikir untuk mencari penyelesaian soal yang benar.
b) Guru dapat memilih soal dengan menekankan hal-hal yang dipandang penting.
c) Peserta didik semakin menguasai materi pelajaran.
d) Para peserta didik terbiasa membuat jawaban benar yang sesuai dengan pertanyaan/soal.
e) Pelajaran yang diperoleh tak mudah terlupakan.

Kelemahann

a) Guru perlu banyak waktu untuk mengoreksi jawaban peserta didik.
b) Guru perlu memilih soal-soal yang berbeda cara penyelesaiannya, bergradasi, bervariasi, dan menyeluruh.
c) Jika para peserta didik menemui kesulitan, guru harus siap membantu peserta didik.
d) Guru mutlak harus menguasai materi pelajaran.

5) Metode *Drill*

Metode drill adalah metode pembelajaran yang lebih ditujukan agar peserta didik cepat dan cermat dalam menyelesaikan soal. Metode drill lebih dikaitkan dengan upaya meningkatkan kemampuan untuk cepat ingat dan kegiatan–kegiatan yang bersifat lisan yang memerlukan hafalan. Materinya menyangkut fakta dasar operasi hitung, definisi, teorema, sifat, serta aplikasi-aplikasinya dan hal-hal lain yang tidak memerlukan prosedur pengerjaan yang rumit. Bentuk tagihannya bisa berupa mencongak, kuis atau pertanyaan singkat.

Tujuan metode drill adalah agar peserta didik hafal dan cepat dalam fakta-fakta atau konsep dasar matematika. Kenyataannya, jika dalam pembelajaran matematika, peserta didik yang tidak/kurang hafal dengan fakta-fakta, tidak terampil dalam berhitung dasar, peserta didik akan kurang terampil menghitung 345×375. Bagaimana bisa menghitung secara cepat jika tidak hafal hasil perkalian dari 5×7, 4×5, dan 3×7?

Kekuatannya, anak-anak dengan kualitas sedang ke bawah menjadi terampil tetapi metode ini juga memiliki kelemahan yakni untuk anak-anak yang pandai justru malah bisa menjadi jenuh karena di "drill" dengan soal-soal yang sejenis dan terus-menerus.

6) Metode Penemuan

Kata penemuan sebagai metode pembelajaran merupakan "penemuan yang dilakukan oleh peserta didik" bukan ditemukan oleh guru. Dalam belajarnya peserta didik menemukan sendiri sesuatu yang baru. Ini tidak berarti yang ditemukannya itu benar-benar baru, sebab sudah diketahui oleh orang lain.

Metode penemuan terbimbing sering disebut diskoveri (*discovery method*), sedangkan penemuan tak terbimbing, para peserta didik diberi bimbingan singkat diawalnya untuk kemudian peserta didik berusaha menemukan sendiri jawabannya (*inquiry method*). Walaupun penemuan terbimbing, haruslah diusahakan agar jawaban atau hasil akhir itu *tetap* ditemukan sendiri oleh peserta didik.

Dalam metode penemuan tak terbimbing, para peserta didik secara mandiri harus melakukan terkaan, dugaan, perkiraan, coba-coba, atau usaha lain yang sesuai dengan pengetahan yang dimilikinya melalui berbagai cara. Biarkan peserta didik yang bersangkutan menemukannya sendiri.

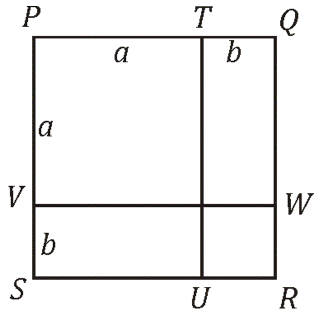
Contoh penemuan tak terbimbing.

Perhatikan gambar persegi $PQRS$ di bawah ini.

$$PT = PV = a$$

$$TQ = VS = b$$

Dapatkah kamu temukan hubungan antara a dan b?



Berdasarkan gambar di atas, diharapkan para peserta didik dapat menemukan sendiri rumus $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ melalui penggunaan rumus luas daerah persegi, tanpa bantuan apapun dari guru.

Perencanaan penggunaan metode penemuan adalah sebagai berikut:

a) Aktivitas peserta didik untuk belajar mandiri perlu ditingkatkan.
b) Hasil akhir harus ditemukan sendiri oleh peserta didik.
c) Materi prasyarat harus sudah dimiliki peserta didik.
d) Guru hanya sebagai pengarah/pembimbing/fasilitator.

Kelebihan metode penemuan antara lain sebagai berikut.

a) Peserta didik aktif dalam kegiatan belajar.
b) Peserta didik memahami benar bahan pelajaran.
c) Menimbulkan rasa puas bagi peserta didik.
d) Peserta didik akan dapat mentransfer pengetahuannya ke berbagai konteks.
e) Melatih peserta didik belajar mandiri.

Kelemahan metode penemuan antara lain sebagai berikut.

a) Menyita waktu banyak.
b) Menyita pekerjaan guru.
c) Tidak semua peserta didik mampu melakukan penemuan.
d) Tidak berlaku untuk semua topik.
e) Untuk kelas yang besar sangat merepotkan guru.

7) Metode Pemecahan Masalah

Metode pemecahan masalah dan metode penemuan tak terbimbing merupakan metode dengan cara penyampaian yang paling tinggi tingkatannya dan kompleks dibandingkan dengan jenis penggunaan metode lainnya. Suatu soal matematika akan menjadi bahan untuk penerapan metode Pemecahan Masalah bagi guru, jika para peserta didik kita:

a) memiliki pengetahuan/materi prasyarat untuk menyelesaikan soalnya;
b) diperkirakan memiliki kemampuan untuk menyelesaikan soal tersebut;
c) belum mempunyai cara/algoritma atau prosedur untuk menyelesaikannya;
d) punya keinginan untuk menyelesaikannya.

Jadi, jika guru akan menerapkan metode pemecahan masalah, maka dalam memilih butir-butir soal haruslah mengingat keempat syarat tersebut di atas. Kekuatan dan kelemahan metode pemecahan masalah, sama dengan kekuatan dan kelemahan pada penerapan metode penemuan.

e. Pendekatan Pembelajaran

Pendekatan pembelajaran merupakan cara pandang pendidik yang digunakan untuk menciptakan lingkungan pembelajaran yang memungkinkan terjadinya proses pembelajaran dan tercapainya kompetensi yang ditentukan.

Selanjutnya, pembahasan tentang pendekatan pembelajaran akan dibahas dalam Kegiatan Belajar 2.

D. AKTIVITAS PEMBELAJARAN

Dibentuk kelompok diskusi belajar yang berisi 4 sampai 5 peserta diklat di setiap kelompok/grup Diskusi Belajar.

1) Mendiskusikan untuk menjawab (a) tugas-tugas yang ada pada materi Modul, (b) mencari jawab dari pertanyaan-pertanyaan pada Latihan di akhir Modul ini, dan mencocokkan jawabannya.

2) Mencari tujuan pembelajaran matematika pada KTSP 2006, Kurikulum 2013, dan sumber yang lain serta mengidentifikasi kompetensi yang harus dikuasai guru agar tujuan pembelajaran matematika tercapai.

3) Selain yang ada di bahan bacaan, carilah informasi dari berbagai sumber penjelasan tentang metode, pendekatan, dan strategi pembelajaran.

E. LATIHAN/KASUS/TUGAS

1. Apakah yang dimaksud dengan pendidik? Siapa saja yang dapat dikategorikan sebagai pendidik?
2. Menurut *National Research Council* (2001) seorang peserta didik dikatakan mahir setelah belajar matematika bila pada diri peserta didik itu terdapat sejumlah komponen yang saling jalin-menjalin. Sebutkan komponen-komponen tersebut.
3. Pada bahan bacaan, seorang peserta didik dikatakan mahir setelah belajar matematika jika telah memiliki beberapa komponen yang salah satunya adalah penalaran adaptif. Apakah yang dimaksud dengan penalaran adaptif?
4. Kecenderungan memandang matematika sebagai sesuatu yang masuk akal, bermanfaat, berharga, diiringi dengan kepercayaan tentang kemampuan diri dan perlunya ketekunan, disebut ....
5. Cara yang digunakan oleh pendidik untuk menyampaikan suatu materi pembelajaran disebut ....
6. Diskusikan pertanyaan berikut dalam kelompok.
   a. Mengapa kompetensi pedagogik perlu dimiliki pendidik?
   b. Apa perbedaan metode pembelajaran dengan model pembelajaran? Berikan contoh penjelasannya.

F. RANGKUMAN

Rangkuman yang dapat kita lakukan adalah sebagai berikut.

1. Menurut *National Research Council* (2001) seorang peserta didik dikatakan mahir setelah belajar matematika bila pada diri peserta didik itu terdapat 5 komponen yang saling jalin-menjalin, yaitu: pemahaman konsep, kelancaran prosedur, penalaran adaptif, kompetensi strategis, dan disposisi positif.
2. Pembelajaran adalah upaya menciptakan iklim dan pelayanan terhadap kemampuan, potensi, minat, bakat, dan kebutuhan peserta didik yang beragam agar terjadi interaksi optimal antara guru dengan peserta didik serta antara peserta didik dengan peserta didik. Dalam Permendikbud No. 103 Tahun 2014, ditulis bahwa pembelajaran adalah proses interaksi antar

peserta didik dan antara peserta didik dengan pendidik dan sumber belajar pada suatu lingkungan belajar.

3. Guru/pendidik sebagai agen pembelajaran pada jenjang pendidikan dasar dan menengah, serta pendidikan peserta didik usia dini, perlu memiliki 4 kompetensi yang meliputi (1) kompetensi pedagogik, (2) kompetensi kepribadian, (3) kompetensi profesional, dan (4) kompetensi sosial.
4. Guru/pendidik perlu mengetahui arti istilah-istilah yang terkait dengan pembelajaran, misalnya:
   a. Strategi pembelajaran merupakan langkah-langkah sistematik dan sistemik yang digunakan pendidik untuk menciptakan lingkungan pembelajaran yang memungkinkan terjadinya proses pembelajaran dan tercapainya kompetensi yang ditentukan. Strategi yang dikembangkan saat ini adalah Pembelajaran Aktif.
   b. Metode pembelajaran merupakan cara yang digunakan oleh pendidik untuk menyampaikan suatu materi pembelajaran.

G. UMPAN BALIK DAN TINDAK LANJUT

Cocokkan jawaban Anda dengan Kunci Jawaban di bawah ini. Hitunglah banyaknya jawaban Anda yang benar. Kemudian gunakanlah rumus di bawah ini untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda dalam materi pada Modul ini.

Rumus:

Tingkat Penguasaan= $\frac{Banyaknya\ \ Jawaban\ Anda\ yang\ \ Benar}{5} \times 100\%$

Arti tingkat penguasaan:

80% - 100%	: Baik Sekali
60% - 79%	: Baik
< 60%	: Kurang

Sebaiknya, Anda harus berusaha agar tingkat penguasaan Anda minimal 60%. Tapi jika tingkat penguasaan Anda di bawah 60%, sebagai tindak lanjut maka Anda harus mengulangi belajar lagi, terutama di bagian yang belum Anda kuasai.

KEGIATAN PEMBELAJARAN 2
PENDEKATAN PEMBELAJARAN DAN
MODEL PEMBELAJARAN BERBASIS PAKEM

A. TUJUAN

Kegiatan pembelajaran 2 bertujuan untuk memberikan pemahaman kepada peserta diklat dalam hal menggunakan berbagai strategi, pendekatan, metode, dan teknik pembelajaran yang mendidik secara kreatif daam pembelajaran matematika. Setelah mempelajari bagian ini, diharapkan peserta diklat menguasai pendekatan yang sesuai dengan tuntutan kurikulum 2013, dan metode-metode yang berorientasi pada PAKEM.

B. INDIKATOR PENCAPAIAN KOMPETENSI

Indikator pencapaian kompetensi setelah mempelajari kegiatan pembelajaran 1 atau 2 ini adalah

1. menjelaskan pendekatan ilmiah sesuai tuntutan Kurikulum 2013;
2. menjelaskan pendekatan-pendekatan lain dalam pembelajaran yang dapat diterapkan dalam mata pelajaran matematika;
3. menjelaskan model pembelajaran matematika yang berbasis PAKEM.

C. URAIAN MATERI

1. Pendekatan Ilmiah dalam Kurikulum 2013

Pembelajaran pada Kurikulum 2013 menggunakan Pendekatan Ilmiah atau Pendekatan Saintifik (*Scientific Approach*). Pendekatan Saintifik dapat pula disebut dengan pendekatan berbasis proses keilmuan. Pendekatan saintifik dapat menggunakan beberapa strategi seperti pembelajaran kontekstual.

Kurikulum 2013 juga menggunakan modus pembelajaran langsung (*direct instructional*) dan tidak langsung (*indirect instructional*). Pembelajaran langsung adalah pembelajaran yang mengembangkan pengetahuan, kemampuan berpikir dan keterampilan menggunakan pengetahuan peserta didik melalui interaksi langsung dengan sumber belajar yang dirancang dalam silabus dan Rencana Pelaksanaan Pembelajaran (RPP).

Kurikulum apa pun yang sedang diberlakukan dan dilaksanakan oleh guru, materi pelajaran yang diberikan guru kepada para peserta didik, harus mengacu pada isi kurikulum. Jangan mengacu pada isi buku pelajaran matematika yang dipunyai/dibeli guru. Materi pelajaran yang diberikan juga **harus sinkron/sesuai** dengan tujuan pembelajaran. Tujuan pembelajaran yang memuat proses dan hasil pembelajaran ditulis secara operasional dalam RPP.

Dalam Kurikulum 2013, pada pembelajaran langsung, peserta didik melakukan kegiatan dengan pendekatan yang perlu ada tahapan mengamati, menanya, mengumpulkan informasi/mencoba, menalar/mengasosiasi, dan mengomunikasikan. Pendekatan seperti ini disebut dengan pendekatan ilmiah, pendekatan saintifik, atau *Scientific Approach*. Pembelajaran langsung menghasilkan pengetahuan dan keterampilan langsung, yang disebut dengan dampak pembelajaran (*instructional effect*).

Pembelajaran tidak langsung adalah pembelajaran yang terjadi selama proses pembelajaran langsung yang dikondisikan menghasilkan dampak pengiring (*nurturant effect*). Pembelajaran tidak langsung berkenaan dengan pengembangan nilai dan sikap yang terkandung dalam KI-1 dan KI-2. Hal ini berbeda dengan pengetahuan tentang nilai dan sikap yang dilakukan dalam proses pembelajaran langsung oleh mata pelajaran Pendidikan Agama dan Budi Pekerti serta Pendidikan Pancasila dan Kewarganegaraan. Pengembangan nilai dan sikap sebagai proses pengembangan moral dan perilaku, dilakukan oleh seluruh mata pelajaran dan dalam setiap kegiatan yang terjadi di kelas, sekolah, dan masyarakat.

Oleh karena itu, dalam proses pembelajaran Kurikulum 2013, semua kegiatan intrakurikuler, kokurikuler, dan ekstrakurikuler baik yang terjadi di kelas, sekolah, dan masyarakat (luar sekolah) dalam rangka mengembangkan moral dan perilaku yang terkait dengan nilai dan sikap.

Pendekatan saintifik meliputi lima pengalaman belajar sebagaimana tercantum dalam tabel berikut.

Tabel 1: Pendekatan Saintifik

Langkah Pembelajaran	Deskripsi Kegiatan	Bentuk Hasil Belajar
Mengamati (*observing*).	Mengamati dengan indra (membaca, mendengar, menyimak, melihat, menonton, dan sebagainya) dengan atau tanpa alat.	Perhatian pada waktu mengamati suatu objek/membaca suatu tulisan/mendengar suatu penjelasan, catatan yang dibuat tentang yang diamati, kesabaran, waktu (*on task*) yang digunakan untuk mengamati.
Menanya (*questioning*).	Membuat dan mengajukan pertanyaan, tanya jawab, berdiskusi tentang informasi yang belum dipahami, informasi tambahan yang ingin diketahui, atau sebagai klarifikasi.	Jenis, kualitas, dan jumlah pertanyaan yang diajukan peserta didik (pertanyaan faktual, konseptual, prosedural, dan hipotetik).
Mengumpulkan informasi/ mencoba (*experimenting*).	Mengeksplorasi, mencoba, berdiskusi, mendemonstrasikan, meniru bentuk/gerak, melakukan eksperimen, membaca sumber lain selain buku teks, mengumpulkan data dari narasumber melalui angket, wawancara, dan memodifikasi/menambahi/ mengembangkan.	Jumlah dan kualitas sumber yang dikaji/digunakan, kelengkapan informasi, validitas informasi yang dikumpulkan, dan instrumen/alat yang digunakan untuk mengumpulkan data.
Menalar/ Mengasosiasi (*associating*).	Mengolah informasi yang sudah dikumpulkan, menganalisis data dalam bentuk membuat kategori, mengasosiasi atau menghubungkan fenomena/informasi yang terkait dalam rangka menemukan suatu pola, dan menyimpulkan.	Mengembangkan interpretasi, argumentasi dan kesimpulan mengenai keterkaitan informasi dari dua fakta/konsep, interpretasi argumentasi dan kesimpulan mengenai keterkaitan lebih dari dua fakta/konsep/teori, menyintesis dan argumentasi serta kesimpulan keterkaitan antarberbagai jenis fakta/konsep/teori/pendapat; mengembangkan interpretasi, struktur baru, argumentasi, dan kesimpulan yang menunjukkan hubungan fakta/konsep/teori dari dua sumber atau lebih yang tidak bertentangan; mengembang-

Langkah Pembelajaran	Deskripsi Kegiatan	Bentuk Hasil Belajar
		kan interpretasi, struktur baru, argumentasi dan kesimpulan dari konsep/teori/pendapat yang berbeda dari berbagai jenis sumber.
Mengomunikasikan (*communicating*).	Menyajikan laporan dalam bentuk bagan, diagram, atau grafik; menyusun laporan tertulis; dan menyajikan laporan meliputi proses, hasil, dan kesimpulan secara lisan.	Menyajikan hasil kajian (dari mengamati sampai menalar) dalam bentuk tulisan, grafis, media elektronik, multi media dan lain-lain.

Contoh:

Perlu diberitahukan bahwa contoh di bawah ini **bukanlah** satu-satunya cara. Bapak/Ibu guru dapat mengembangkan sendiri cara menjelaskan suatu materi yang dilakukan dengan pendekatan saintifik.

Materi SMA Kelas X:

Kalimat disajikan dalam bentuk semi dialog antara guru dengan peserta didik.

Topik: Pangkat dan Bentuk Akar

Pada saat kalian di SMP atau M.Ts, kalian sudah mengenal bentuk perpangkatan.

Amati pernyataan: $2^3 = 8$.

Dari pernyataan tersebut, dapatkah kalian *menyusun pertanyaan* yang terkait dengan pernyataan : $2^3 = 8$ tersebut?

Bila peserta didik menemui kesulitan dalan menemukan pertanyaan, guru dapat membantu memberikan arahan, misalnya: Susunlah pertanyaan agar jawabannya *8*.

Dari pernyataan di atas, diharapkan dapat dibentuk pertanyaan isian sebagai berikut.

(1) $2^3 = \cdots$.

(2) $\ldots^3 = 8$

(3) $2^{\cdots} = 8$

Amatilah problem berikut lagi. Jika a bilangan real dan n bilangan positif, maka isilah titik-titik berikut:

(4) $a^1 = \cdots$ ..

(5) $a^n = \cdots$. (sebanyak *n* faktor)

Untuk menjawab apa yang kalian pertanyakan, diskusikanlah dengan teman di sampingmu atau di dekatmu. Bukalah bukumu dan cobalah *mengumpulkan berbagai informasi* agar pertanyaanmu dapat kalian temukan jawabannya.

Jawaban peserta didik yang diharapkan adalah sebagai berikut.

(1) $2^3 = \cdots$. (disebut pemangkatan).

(2) $\ldots^3 = 8$dapat ditulisdengan lambang akar, yakni: $\sqrt[3]{8} = \cdots$ (disebut penarikan akar).

(3) $2^{\cdots} = 8$dapat ditulis dengan lambang logaritma, yakni: ${}^2\log 8 = \cdots$(disebut penarikan logaritma).

Jika a bilangan real dan n bilangan positif, maka isinya:

(1) $a^1 = a$

(2) $a^n = a \times a \times a \times \ldots \times a$; ($n$ faktor)

Amati sifat-sifat berikut:

Jika a dan b bilangan real tidak nol, m, n, dan p bilangan real, maka:

(1) $a^m \times a^n = a^{m+n}$

(2) $a^m : a^n = a^{m-n}$

(3) $(a^m)^n = a^{mn}$

(4) $(a^m b^n)^p = a^{mp} b^{np}$

(5) $a^0 = 1$

(6) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

(7) $\left(\frac{a^m}{b^n}\right)^p = \frac{a^{mp}}{b^{np}}$

(8) $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Bilangan-bilangan berpangkat yang eksponennya 0, pecahan, atau bilangan negatif, sering disebut dengan **bilangan berpangkat tak sebenarnya**.

Soal Analisis:

Kerjakan soal di bawah ini dengan pendekatan ilmiah. Komunikasikanlah temuanmu di depan kelas.

1. Buktikan kebenaran sifat (1), (5), dan (6).

2. Analisislah, mengapa sifat-sifat di atas mensyaratkan a dan b bilangan real tidak nol?

3. Analisislah, mengapa (1) $25 \times 10^{-4} = 2{,}5 \times 10^{-3}$

   (2) $0{,}0037 \times 10^{-6} \times 10^{3} = 3{,}7 \times 10^{-2} \times 10^{-3}$

   $= 3{,}7 \times 10^{-5}$

Bilangan yang ditunjukkan pada ruas kanan di atas disebut *bentuk baku* atau disebut juga dengan bentuk **Notasi Ilmiah** (*The Scientific Notation*). Analisislah untuk mendeskripsikan pengertian Bentuk Baku.

Sifat:

Misalkan $a > 0$. Jika x dan y adalah bilangan real sedemikian rupa sehingga

$a^x = a^y$, maka $x = y$.

Soal Analisis:

1. Tunjukkan bahwa $8^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{4}$.
2. Jika $x = 4$ dan $y = \frac{1}{9}$, buktikan $\left(x^2 y^{-\frac{1}{2}}\right)^{-2} (x^{-3} y)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{96}$.
3. Dengan mengumpulkan informasi terkait dengan sifat yang akan kalian lakukan, asosiasikanlah untuk menunjukkan kebenaran dari:

   a. $-2^0 = -1$ d. $-3^{-1} = -\frac{1}{3}$

   b. $(-2)^2 = +4$ e. $-3^{-2} = -\frac{1}{9}$

   c. $-2^2 = -4$ f. $(-2)^{-2} = \frac{1}{9}$

Komunikasikanlah hasil pengerjaanmu di depan kelas.

Logaritma

Amati definisi logaritma berikut ini.

${}^{a}\log b = c$ jika dan hanya jika $b = a^c$, dengan $a > 0$, $b > 0$, dan $a \neq 1$.

a disebut bilangan pokok (*base number*) dan b disebut numerus (*numerous*).

Secara internasional, ${}^{a}\log b$ dapat ditulis dengan cara $\log_a b$.

Perhatikan definisi di atas!

1. Mengapa perlu persyaratan $a > 0$, $b > 0$, dan $a \neq 1$?

   Analisislah pernyataan ${}^{-2}\log(-8) = 3$. Benar atau salahkah?

Contoh:

Tentukan nilai x yang memenuhi ${}^{3}\log(2x-1)=2$

Jawab: ${}^{3}\log(2x-1)=2$

Berarti: $2x-1=3^2$

$2x=9+1$

$x=5$

Analisislah, mengapa 5 merupakan penyelesaian ${}^{3}\log(2x-1)=2$?

Kita akan menganalisis permasalahan-permasalahan berikut ini.

1) Perhatikan definisi logaritma di atas. Dalam definisi tersebut, disyaratkan bahwa bilangan pokok harus positif $(a>0)$. Mengapa?

   Jika bilangan pokoknya negatif, kita akan mengalami beberapa kendala. Sebagai contoh, ${}^{-3}\log(-3)=1$, tetapi ${}^{-3}\log(-9)$ tidak ada, karena tak ada pangkat dari -3, yang sama dengan -9. Begitu juga halnya dengan ${}^{-3}\log 27$, tetapi dengan ${}^{-3}\log 81$tidaklah demikian.

   Kasus lain, jika ${}^{-3}\log 10=x$, maka haruslah $(-3)^x=10$. Berapakah x?

2) Kini, jelaskanlah mengapa bilangan pokok 0 dan 1 juga tidak dapat dipakai?

3) Sekaranglah, amati bahwa bilangan pokok harus positif. Sebuah bilangan negatif, tidak mempunyai logaritma. Mengapa? Mari kita analisis.

   ${}^{a}\log(-b)=x$artinya $a^x=-b$. Dalam hal ini, $-b$ sebagai numerus.

   Jika $a$dan b positif, maka ruas kanan haruslah negatif dan ruas kiri adalah positif untuk setiap harga x.

   Jadi tak ada satupun harga x yang memenuhi $a^x=-b$.

2. Pendekatan-pendekatan lain dalam pembelajaran

a. Pendekatan Spiral

Pendekatan ini biasanya dipakai untuk mengajarkan konsep. Dengan pendekatan spiral, suatu konsep tidak diajarkan dari awal sampai selesai, tetapi diberikan dengan kedalaman secara bertahap/bergradasi dan dalam beberapa selang waktu yang berpisah-pisah.

Contoh, penyajian konsep fungsi yang diajarkan di SD, SMP, dan SMA diberikan secara bertingkat, dengan keluasan dan kedalaman materi yang berbeda.

Di SD:

Fungsi cukup dikenalkan melalui lambang-lambang tanpa didefinisikan atau diberikan pengertian fungsi. Contoh: $\Delta + O = 5$. Jika $\Delta = 2$, maka nilai $O = \ldots$..

Di SMP:

Pengertian Fungsi sudah diberikan dan juga contoh-contohnya.

Misalnya: $y = 2x - 3$. Untuk $x = -2$, tentukan nilai y.

Di SMA:

Pengertian Fungsi diulang dan soal-soal tentang fungsi lebih diperdalam dan diperluas bahkan sampai fungsi komposisi.

b. Pendekatan Induktif

Pendekatan induktif menggunakan penalaran induktif. Contoh-contoh diberikan terlebih dahulu, baru kemudian para peserta didik diajak untuk menarik suatu simpulan yang berkaitan dengan contoh-contoh yang sudah diberikan sebelumnya. Pendekatan ini sangat cocok untuk dilaksanakan dalam pembelajaran di Pendidikan Dasar.

c. Pendekatan Deduktif/Formal

Pendekatan deduktif menggunakan penalaran deduktif. Pengertian/ definisi diberikan terlebih dahulu, baru kemudian para peserta didik diajak untuk memberikan contoh-contoh yang sesuai dengan pengertian atau definisi yang sudah diberikan sebelumnya. Pendekatan ini lebih cocok untuk peserta didik SMA atau yang sederajat, atau untuk pembelajaran di kalangan Perguruan Tinggi.

Materi bahan ajar disusun dan disajikan sesuai dengan karakteristik matematika itu sendiri, yakni bersifat deduktif-aksiomatis formal. Pendekatan deduktif/formal biasanya dimulai dari istilah-istilah yang tidak didefinisikan, ditetapkan definisi-definisi, aksioma-aksioma, kemudian diikuti oleh teorema-teorema atau lemma yang harus dibuktikan. Dalam menyelesaiakn soalnya juga harus taat azas dengan keformalannya.

Contoh: Perkuliahan Analisis Real atau Struktur Ajabar di Jurusan Matematika.

d. Pendekatan Informal

Kalau pembahasan suatu bagian dari sebuah sistem formal tidak dilakukan secara dedutif-aksiomatis formal secara penuh dan ketat, maka dikatakan bahwa pembelajarannya menggunakan pendekatan informal (tidak formal). Sebagai contoh, misalnya mengenalkan suatu rumus dan menggunakannya untuk menyelesaikan soal-soal, tanpa membuktikan kebenaran rumusnya terlebih dahulu. Jadi, rumus tersebut langsung dipakai dan dianggap sudah benar. Pendekatan informal sering digunakan pada mata-mata pelajaran terapan atau kadang-kadang diterapkan guru di SMK.

e. Pendekatan Analitik

Pendekatan analitik adalah cara pamahaman di mana prosedur yang ditempuh didekati dari apa yang belum diketahui ke arah yang sudah diketahui. Dalam pendekatan analitik, masalah yang ingin diselesaikan perlu dipecah-pecah dahulu sehingga menjadi jelas hubungan antara bagian-bagian yang belum diketahui itu, sehingga sampai ke hal yang sudah di ketahui.

Contoh:

Diketahui $\cos a° = \frac{3}{5}$dan $0 < a < 90$. Hitunglah nilai $\tan a°$.

Penyelesaiannya perlu dicari $\sin a°$lebih dahulu, baru kemudian dicari nilai $\tan a°$.Pendekatan yang digunakan adalah pendekatan analitik, sebab dimulai dari yang tidak diketahui, yaitu $\sin a°$, baru kemudian$\tan a°$dicari dengan rumus$\tan a° = \frac{\sin a°}{\cos a°}$.

f. Pendekatan Sintetik

Pada pendekatan sintetik, pembahasan mulai dari hal-hal yang diketahui sampai kepada yang belum diketahui. Langkah-langkah secara berurutan ditempuh dengan mengaitkan hal yang diketahui dengan hal-hal lain yang diperlukan dan tidak diketahui dari soal, hingga akhirnya apa yang ingin dicari dapat ditemukan.

Contoh:

Diketahui $\cos a° = \frac{3}{5}$, $\tan a° = \frac{4}{3}$, dan $0 < a < 90$. Hitunglah nilai $\sin a°$.

Penyelesaiannya dimulai dari yang diketahui yakni nilai $\cos a°$dan $\tan a°$. Dari rumus$\tan a° = \frac{\sin a°}{\cos a°}$, $\cos a° = \frac{3}{5}$, dan $\tan a° = \frac{4}{3}$maka diperoleh $\frac{4}{3} = \frac{\sin a°}{\frac{3}{5}}$.

Selanjutnya akan diperoleh hasil, nilai $\sin a° = \frac{4}{5}$.

g. Pendekatan Intuitif

Pembelajaran matematika dengan pendekatan intuitif, peserta didik banyak diberi kesempatan untuk mencoba-coba sendiri berdasarkan intuisinya, menemukan dengan caranya sendiri tentang konsep atau materi yang akan diberikan guru. Tugas-tugas atau cara yang dipilih guru kepada peserta didiknya dapat berbentuk permainan, nyanyian, keadaan, atau persoalan sehari-hari yang menarik, yang memuat konsep matematika yang akan diajarkan. Pendekatan ini banyak dipakai dalam penerapan model pembelajaran *Realistic Mathematics Education* (RME).

h. Pendekatan berdasarkan Alat yang Dipakai Guru

Pendekatan Melalui Geometri

Untuk menjelaskan bahwa $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8}$ guru dapat saja melakukannya dengan menggambar di papan tulis sebuah bangun persegi. Kemudian gambar persegi tersebut diarsir separuh, seperempat, atau seperdelapan. Mungkin saja, cara ini dipandang oleh guru sebagai cara yang terdekat atau termudah untuk menjelaskan konsep pecahan-pecahan yang ekuivalen kepada para peserta didiknya. Karena persegi merupakan objek geometri, maka penggunaan gambar bangun geometri untuk menjelaskan konsep pecahan ini disebut dengan Pendekatan Geometri.

Pendekatan Melalui Benda Konkret

Untuk menjelaskan bahwa $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8}$ guru dapat saja melakukannya dengan membawa misalnya sebuah Apel (benda konkret) kemudian buah apel tersebut diiris separuh, seperempat, atau seperdelapan dengan pisau. Mungkin saja, cara ini dipandang oleh guru sebagai cara yang terdekat atau termudah untuk menjelaskan konsep pecahan-pecahan yang ekuivalen kepada para peserta didiknya. Karena buah apel merupakan objek konkret, maka penggunaan benda konkret untuk menjelaskan konsep pecahan ini disebut dengan Pendekatan Benda Konkret.

Pendekatan Melalui Garis Bilangan

Untuk menjelaskan bahwa $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8}$ guru dapat menggambarkannya melalui sebuah Garis Bilangan. Mungkin saja, cara ini dipandang oleh guru sebagai cara yang terdekat atau termudah untuk menjelaskan konsep pecahan-pecahan yang ekuivalen kepada para peserta didiknya. Karena Garis Bilangan dipakai guru untuk menjelaskan konsep pecahan ini maka pendekatan pembelajaran yang dipakai guru disebut dengan Pendekatan Garis Bilangan.

Pendekatan dengan Memanfaatkan Alat Peraga

Pendekatan dengan Alat Peraga sering dan dianjurkan untuk menjekaskan suatu konsep atau teorema untuk para peserta didik Pendidikan Dasar. Contoh: Untuk mengenalkan jenis-jenis segitiga/segiempat, guru dapat menggunakan Alat Peraga model segitiga/segiempat dari plastik sedotan yang didalamnya diisi benang untuk merangkai potongan-potongan sedotannya sehingga membentuk model segitiga/segiempat.

3. Model-model Pembelajaran Matematika Berorientasi PAKEM.

a. Pengertian Model dan PAKEM

Model pembelajaran merupakan kerangka konseptual dan operasional pembelajaran yang memiliki nama, ciri, urutan logis (sintaks), pengaturan, dan budaya. Pemilihan model pembelajaran menyangkut strategi, metode, juga pendekatan dalam pembelajaran. Sedangkan PAKEM merupakan singkatan dari: Pembelajaran Aktif, Kreatif, Efektif, dan Menyenangkan. Pembelajaran ini, juga dikenal sebagai *Joyful Learning*. PAKEM diberlakukan untuk semua pelajaran, termasuk dalam pelajaran matematika. Kajian lanjut tentang model-model pembelajaran akan kita bahas pada Modul Strategi Pembelajaran 2. Dalam modul ini, akan sedikit kita ulas sebagai pengantar.

Suatu kegiatan pembelajaran di kelas disebut model pembelajaran jika: (1) ada kajian ilmiah dari penemu atau ahlinya, (2) ada tujuan yang ingin dicapai, (3) ada urutan tingkah laku yang spesifik (ada sintaksnya), dan (4) ada lingkungan yang perlu diciptakan agar tindakan/kegiatan pembelajaran tersebut dapat berlangsung secara efektif.

Namun, ada hal-hal yang perlu kita sepakati.

1) Peserta didik SMA/MA/SMK diharapkan dapat masuk ke PT. Jadi, model pembelajaran apa pun yang diterapkan, sebaiknya perlu/harus diarahkan agar peserta didik mampu melanjutkan studinya ke jenjang yang lebih tinggi.
2) Setiap model pembelajaran pasti memiliki kelemahan dan kekuatan.

3) Kita dapat memilih salah satu model pembelajaran yang kita anggap sesuai dengan materi pelajaran kita; dan jika perlu kita dapat menggabungkan beberapa model pembelajaran.
4) Model apa pun yang kita terapkan, jika kita kurang menguasai materi dan tidak disenangi para peserta didik, maka hasil pembelajaran menjadi tidak efektif.
5) Oleh karena itu, komitmen kita adalah sebagai berikut.
   a) Kita perlu menguasai materi yang harus kita ajarkan, dapat mengajarkannya, dan terampil mengaitkannya dengan kehidupan sehari-hari.
   b) Kita berniat untuk memberikan yang kita punyai kepada para peserta didik dengan sepenuh hati, hangat, ramah, antusias, dan bertanggungjawab.
   c) Menjaga agar para peserta didik "mencintai" kita, menyenangi materi yang kita ajarkan, dengan tetap menjaga kredibilitas dan wibawa kita sebagai guru.
   d) Kita sebagai guru dapat mengembangkan model pembelajaran sendiri. Anggaplah seperti kita sedang melaksanakan Penelitian Tindakan Kelas.

b. Perlunya Pembelajaran Aktif dan Kreatif

Dalam Permendiknas No. 41 Tahun 2007 pada uraian tentang Rencana Pelaksanaan Pembelajaran diuraikan bahwa dalam proses pembelajaran harus berlangsung secara interaktif, memberikan ruang yang cukup bagi prakarsa/keaktifan dan kreativitas, menyenangkan dan memotivasi, serta mampu melatih kemandirian sesuai dengan bakat, minat, dan perkembangan fisik serta psikologis peserta didik. Pembelajaran aktif yang seperti itu dikenal dengan istilah PAKEM. (Pembelajaran Aktif, Kreatif, Efektif, dan Menyenangkan). Pembelajaran ini, juga dikenal sebagai *Joyful Learning*. PAKEM diberlakukan untuk semua pelajaran, termasuk dalam pelajaran matematika. Dalam pembelajaran matematika, peserta didik tidak boleh dianggap sebagai botol kosong yang harus diisi ilmu oleh guru, tetapi guru juga harus membuat suasana pembelajaran menjadi menyenangkan bagi guru dan peserta didik. Peserta didik dibuat aktif melalui berbuat dan berdialog, peserta didik perlu didorong daya kreativitasnya. Muaranya, daya serap peserta didik pada pelajaran matematika juga harus meningkat. Berarti, pembelajaran matematika di kelas menjadi semakin efektif. Banyak sekali tantangan di bidang pendidikan dasar dan menengah, di antaranya adalah:

1) krisis ekonomi dengan segala dampaknya menuntut pendidikan sebagai sebagai alat dalam *economic recovery*;
2) desentralisasi pendidikan menuntut pelayanan yang bermutu;
3) globalisasi membawa implikasi pada mutu yang kompetitif.

Dari tantangan tersebut, para guru pelajaran matematika dituntut untuk meningkatkan kualitas pendidikannya, khususnya pada mata pelajaran matematika. Strategi pembelajaran untuk mata pelajaran matematika adalah Pembelajaran Aktif (*Active Learning*) dan harus disajikan dalam suasana yang menyenangkan. Peserta didik-peserta didik SMP/SMA atau yang sederajat berada dalam tahap menjelang operasi berpikir formal. Oleh karena itu, tepatlah apabila pembelajaran berbasis PAKEM diterapkan sekolah/madrasah. PAKEM dikembangkan lagi dengan istilah PAIKEM, dengan I sebagai singkatan Inovatif. Hal ini amat dimungkinkan terjadi, akibat dari adanya perubahan paradigm (cara pandang dan berpikir yang mendasar) di bidang pendidikan, yaitu: (1) dari *Schooling* menjadi *Learning*, (2) dari *Instructive* menjadi *Facilitative*, (3) dari *Government role* menjadi *Community role*, dan (4) *Centralistic* menjadi *Decentralistic*. Dampak positifnya, guru mulai memperoleh kebebasan akademik untuk menentukan sendiri model-model pembelajaran yang dipandang cocok untuk diterapkan dalam proses pembelajaran di kelasnya.

Paradigma lain dalam pendidikan di Indonesia, adalah tuntutan agar produk yang dihasilkannya diperoleh melalui (1) *Learning to Know*, (2) *Learning to Do*, (3) *Learning to Be*, dan (4) *Learning to Live Together*. Ini dapat dicapai jika pembelajaran di kelas dilakukan dengan menerapkan model-model pembelajaran yang menuntut peserta didik aktif, kreatif, efektif, dan menyenangkan.

Kelebihan PAKEM/PAIKEM, di dalamnya dapat diterapkan penggunaan multi media, multi metode, praktik dan bekerja dalam tim, memanfaatkan lingkungan sekitar sebagai sumber belajar (alam takambang), serta dapat dilaksanakan baik di dalam kelas maupun di luar kelas.

c. Penerapan PAKEM/PAIKEM di SMA

PA dalam PAKEM adalah Pembelajaran Aktif. Penerapan *pembelajaran aktif*, berarti kita sebagai guru matematika harus melibatkan peserta didik dalam proses pembelajaran. Peserta didik tidak hanya mendengar dan mencatat, tetapi peserta didik juga terlibat dalam diskusi, belajar menjelaskan idenya (presentasi, misalnya), dan juga harus mampu melakukannya sendiri. Ada pandangan yang menganggap bahwa belajar adalah proses membangun makna/pemahaman oleh si pembelajar terhadap pengalaman dan informasi yang disaring dengan persepsi, pikiran (pengetahuan yang dimiliki), serta perasaan. Di lain pihak juga ada pandangan yang menganggap bahwa guru dalam mengajar adalah turut berperan serta dengan si pembelajar (peserta didik) dalam membangun makna dengan cara: (1) mempertanyakan kejelasan, (2) bersikap kritis, dan (3) melakukan pembenaran/justifikasi.

Kreatif dapat dimaknai peserta didik mampu menemukan, merancang, mengalami sendiri atau bermain peran, dan ikut mengamati kejadian langsung atau tiruannya. Agar pembelajaran menjadi *Efektif*, yakni adanya peningkatan hasil belajar, peserta didik perlu dilatih untuk bekerja secara mandiri (berdialog dengan diri sendiri) maupun bekerja dengan teman dalam kelompoknya (berdialog dengan orang/teman lain) dalam suasana yang *Menyenangkan*. Selanjutnya, *Inovatif* diartikan sebagai pembaharuan. Artinya, guru berani melakukan perubahan dalam proses pembelajarannya dengan model-model pembelajaan yang mutakhir dan baru bagi guru. Dan tentu saja, penerapan model pembelajaran yang inovatif harus dilaksanakan dengan penuh dedikasi dan tanggung jawab sebagai pendidik, khususnya sebagai guru yang mengajarkan matematika. Sebenarnya, kreatif sendiri haruslah di dalamnya sudah memuat kegiatan-kegiatan pembelajaran yang juga harus bersifat inovatif.

Penekanan dalam pembelajaran yang menerapkan PAKEM/PAIKEM pada pelajaran matematika di sekolah adalah tuntutan adanya keterlibatan peserta didik dalam pembelajaran. Peserta didik juga berbuat, tak hanya mengandalkan proses verbal (ceramah) dalam pembelajarannya. Ahli pendidikan mengatakan bahwa jika peserta didik belajar maka:

1) Hanya 10% materi akan terserap dari apa yang dibaca. Ini proses *verbal.*
2) Hanya 20% materi akan terserap dari apa yang didengar. Ini proses *verbal*.
3) Hanya 30% materi akan terserap dari apa yang dlihat, misalnya dari melihat gambar/diagram, video/film, atau melihat demonstrasi. Ini proses *visual*.
4) Hanya 50% materi akan terserap dari apa yang dilihat dan didengar, misalnya terlibat diskusi. Ini proses *terlibat*.
5) Bisa 70% materi akan terserap dari apa yang dikatakan, misalnya peserta didik mempresentasikan atau menjelaskan. Ini proses *terlibat.*

6) Bisa 90% materi akan terserap dari apa yang dikatakan dan dilakukan, misalnya peserta didik ikut bermain peran, melakukan simulasi, mengerjakan hal yang nyata. Ini proses *berbuat.*

Dalam proses pembelajaran, guru perlu bersikap dan berperilaku:

1) Mau mendengarkan dan berkomunikasi secara empati dan santun dengan peserta didik agar mau terlibat aktif dalam proses pembelajaran.
2) Mau menghargai peserta didik.
3) Siap mengembangkan rasa percaya diri peserta didik.
4) Bersedia memberikan tantangan kepada peserta didik.
5) Mendorong peserta didik untuk berani mengungkapkan gagasan.
6) Berani menciptakan rasatidak takut salah pada diri peserta didik.

   Mengapa? Karena jika peserta didik takut salah, maka peserta didik tidak akan berani coba hal-hal baru yang artinya kreativitas peserta didik tidak berkembang. Kreativitas yang tidak berkembang akan berakibat tidak akan ada penemuan baru (tak ada efektivitas dalam pembelajaran).

Oleh karena itu, jika guru pelajaran matematika akan menerapkan suatu model dalam pembelajaran matematika, maka carilah *model-model pembelajaran* yang mampu (1) mengaktifkan suasana pembelajaran, (2) mendorong peserta didik beranimengungkap gagasan/temuannya sendiri, (3) mendorong peserta didik untuk berpikir dengan cara lain atau berpikir kreatif, (4) menyenangkan, dan (5) efektif.

Contoh:

1) Soal $3xy^2 + 5xy^2 =$ ... dapat divariasikan menjadi $\ldots + \ldots = 8xy^2$.
2) Diketahui garis dengan persamaan $2x - 4y + 5 = 0$. Tentukan gradiennya. Dapat divariasi menjadi:

   Tulislah sebuah persamaan garis. Carilah gradien dari persamaan garis yang kalian tuliskan.

Dalam modul ini, akan diuraikan beberapa jenis model pembelajaran yang dipandang relevan, yangdiharapkan dapat meningkatkan hasil belajar serta aktivitas belajar para peserta didik.

Model pembelajaran tersebut antara lain sebagai berikut.

1) Model Pembelajaran Berbasis Masalah.
2) Model Pembelajaran Berbasis Penemuan.
3) Model Pembelajaran Berbasis Projek.
4) Model Pembelajaran Pengajuan Soal (*Problem Posing*).
5) Model Pembelajaran dengan Pendekatan Kontekstual (*Contextual Teaching and Learning* - CTL).
6) Model Pembelajaran RME (*Realistik Mathematics Education*).
7) Model Pembelajaran STAD (*Student Teams Achievement Divisions*)
8) Model Pembelajaran TAI (*Team Assisted Individualization*)
9) Model Pembelajaran *Jigsaw*.
10) Model Pembelajaran CIRC (*Cooperative Integrated Reading and Composition*)
11) Model Pembelajaran Ekspositori

Sebenarnya masih banyak lagi jenis model pembelajaran inovatif seperti model pembelajaran *Quantum Teaching*, *Reciprocal Teaching*, *Jigsaw 2*, *TGT* (*Teams Games Tournament*), *NHT* (*Numbered Heads Together*), *Make a Match*, *Picture to Picture*, *Debate*, *Savi*, *Hand-on Activity*, *Two Stay Two Stray*, *TPS* (*Think-Pair-Share*), dan sebagainya.

Mengingat banyaknya model-model pembelajaran inovatif yang dikembangkan oleh para pakar di bidang pendidikan, maka peserta diklat dapat mencari referensi lain, terkait dengan model-model pembelajaran inovatif tersebut beserta sintaksnya.

Pembahasan sintaks model-model pembelajaran dan penerapannya dalam pembelajaran matematika di SMA akan dibahas selanjutnya pada Modul Strategi Pembelajaran 2.

D. AKTIVITAS PEMBELAJARAN

Dibentuk kelompok diskusi belajar yang berisi 4 sampai 5 peserta diklat di setiap kelompok/grup Diskusi Belajar.

1) Pilihlah salah satu topik materi matematika SMA, kemudian susun langkah-langkah untuk merencanakan pembelajaran berbasis projek pada topik tersebut.

2) Carilah informasi dari berbagai sumber tentang langkah-langkah pembelajaran dengan metode STAD, TAI, Jigsaw, NHT, dan TPS.
3) Identifikasi kelebihan dan kekurangan model-model STAD, TAI, Jigsaw, NHT, dan TPS berdasarkan pengalaman Anda.

E. LATIHAN/KASUS/TUGAS

1. Apakah yang disebut dengan pembelajaran?
2. Jelaskan kekuatan dan kelemahan berbagai metode mengajar yang saudara ketahui?
3. Di manakah perbedaan antara metode latihan dan metode drill?
4. Berikan tahap-tahap pemecahan masalah matematika.
5. Apakah kita dapat meninggalkan metode ceramah? Mengapa?
6. Dalam kurikulum 2013, dikenal pendekatan ilmiah yang di dalamnya terkandung aktivitas 5M. Tuliskan aktivitas 5M tersebut secara urut.
7. Makna *Learning to Know* dalam paradigma lain dalam pendidikan di Indonesia, dimaknai sebagai ....
8. Pada materi sifat determinan matriks, guru melakukan langkah-langkah pembelajaran sebagai berikut:
   a. Guru memberikan pengantar
   b. Siswa dikelompokkan, tiap kelompok 4 anggota dan diberi nomor 1, 2, 3, 4.
   c. Guru menyediakan 4 permasalahan tentang hubungan determinan matriks $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dengan determinan matriks-matriks berikut
      a) $\begin{pmatrix} ka & kb \\ c & d \end{pmatrix}$
      b) $\begin{pmatrix} a & kb \\ c & kd \end{pmatrix}$
      c) $k\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
      d) $\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix}$ dan $\begin{pmatrix} a-c & b-d \\ c & d \end{pmatrix}$
   d. Guru meminta siswa dengan nomor yang sama berkumpul dalam kelompok yang baru. Masing-masing kelompok baru diberi permasalahan mengerjakan salah satu dari keempat problem di atas.

e. Setelah selesai diskusi, siswa kembali ke kelompok awal dan secara bergantian menyampaikan materi yang telah dikuasainya.
f. Guru memberikan evaluasi, penguatan, dan pekerjaan rumah.

Dari langkah-langkah di atas, guru telah menggunakan metode ...

9. Pada materi nilai fungsi trigonometri sudut-sudut berelasi, karena banyaknya rumus siswa akan kesulitan jika harus menghafal seluruhnya. Seorang guru ingin agar semua siswa tidak sekedar hafal rumus, tetapi juga paham proses untuk mendapatkan rumus-rumus tersebut. Untuk itu, ia menyusun langkah-langkah pembelajaran sebagai berikut:

a. Guru menyampaikan pengantar kasus nilai fungsi trigonometri untuk sudut negatif.
b. Dibentuk kelompok dengan anggota 4-5 siswa.Masing-masing siswa dalam satu kelompok diberi nomor berbeda.
c. Guru memberikan tugas, dengan distribusi sebagai berikut:

Kelompok	Tugas menurunkan rumus untuk
1	$\sin(90° - \alpha), \sin(90° + \alpha)$
2	$\sin(180° - \alpha), \sin(180° + \alpha)$
3	$\sin(270° - \alpha), \sin(270° + \alpha)$
4	$\cos(90° - \alpha), \cos(90° + \alpha)$
5	$\cos(180° - \alpha), \cos(180° + \alpha)$
6	$\cos(270° - \alpha), \cos(270° + \alpha)$

Dalam mengerjakan tugas, guru menginstruksikan bahwa setiap anggota kelompok harus benar-benar memahami prosesnya.

d. Guru memanggil salah satu nomor, anggota kelompok yang nomornya disebut guru melaporkan hasil kerja mereka. Siswa lain memberikan tanggapan.
e. Guru memfasilitasi siswa membuat kesimpulan.
f. Guru memberikan penguatan dan PR mencari rumus $\tan(90° \pm \alpha), \tan(180° \pm \alpha), \tan(270° \pm \alpha), \tan(-\alpha)$

Dari proses di atas, guru tersebut menggunakan metode ... .

10. Pada pendekatan saintifik, aktivitas-aktivitas seperti mengeksplorasi, mencoba, melakukan eksperimen, membaca sumber lain selain buku teks, menggali informasi dari nara sumber, merupakan kegiatan pembelajaran pada fase ... .

Jawablah soal berikut dalam kelompok.

1. Mengapa guru perlu mendengarkan dan berkomunikasi secara empati dan santun dengan peserta didik agar mau terlibat aktif dalam proses pembelajaran?
2. Mengapa dalam memilih dan menjelaskan suatu materi perlu sinkron/sesuai dengan tujuan pembelajaran?

F. RANGKUMAN

Rangkuman yang dapat kita lakukan adalah sebagai berikut.

1. Dalam Kurikulum 2013,pada pembelajaran langsung, peserta didik melakukan kegiatan dengan pendekatan yang perlu ada tahapan mengamati, menanya, mengumpulkan informasi/mencoba, menalar/mengasosiasi, dan mengomunikasikan. Pendekatan seperti ini disebut dengan pendekatan ilmiah, pendekatan saintifik, atau *Scientific Approach*.

2. Paradigma lain dalam pendidikan di Indonesia, adalah tuntutan agar produk yang dihasilkannya diperoleh melalui (1) *Learning to Know*, (2) *Learning to Do*, (3) *Learning to Be*, dan (4) *Learning to Live Together*. Ini dapat dicapai jika pembelajaran di kelas dilakukan dengan menerapkan model-model pembelajaran yang menuntut peserta didik aktif, kreatif, efektif, dan menyenangkan.

3. PAKEM merupakan singkatan dari: Pembelajaran Aktif, Kreatif, Efektif, dan Menyenangkan. Pembelajaran ini, juga dikenal sebagai *Joyful Learning*. PAKEM diberlakukan untuk semua pelajaran, termasuk dalam pelajaran matematika.

4. Dalam proses pembelajaran, guru perlu bersikap dan berperilaku:
   a. Mau mendengarkan dan berkomunikasi secara empati dan santun dengan peserta didik agar mau terlibat aktif dalam proses pembelajaran.
   b. Mau menghargai peserta didik.
   c. Siap mengembangkan rasa percaya diri peserta didik.

d. Bersedia memberikan tantangan kepada peserta didik.
e. Mendorong peserta didik untuk berani mengungkapkan gagasan.
f. Berani menciptakan rasatidak takut salah pada diri peserta didik.

5. Suatu kegiatan pembelajaran di kelas disebut model pembelajaran jika: (1) ada kajian ilmiah dari penemu atau ahlinya, (2) ada tujuan yang ingin dicapai, (3) ada urutan tingkah laku yang spesifik (ada sintaksnya), dan (4) ada lingkungan yang perlu diciptakan agar tindakan/kegiatan pembelajaran tersebut dapat berlangsung secara efektif.

G. UMPAN BALIK DAN TINDAK LANJUT

Cocokkan jawaban Anda dengan Kunci Jawaban di bawah ini. Hitunglah banyaknya jawaban Anda yang benar. Kemudian gunakanlah rumus di bawah ini untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda dalam materi pada Modul ini.

Rumus:

$$\text{Tingkat Penguasaan} = \frac{Banyaknya\ \ Jawaban\ Anda\ yang\ \ Benar}{5} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan:

80% - 100%	: Baik Sekali
60% - 79%	: Baik
< 60%	: Kurang

Sebaiknya, Anda harus berusaha agar tingkat penguasaan Anda minimal 60%. Tapi jika tingkat penguasaan Anda di bawah 60%, sebagai tindak lanjut maka Anda harus mengulangi belajar lagi, terutama di bagian yang belum Anda kuasai.

EVALUASI

Berilah tanda silang (X) pada huruf a, b, c, atau d di depan salah satu jawab yang paling tepat.

1. Menurut *National Research Council* (2001) seorang peserta didik dikatakan mahir setelah belajar matematika bila pada diri peserta didik itu terdapat 5 komponen yang saling jalin-menjalin. Salah satu komponen yang merupakan kemampuan melakukan pemikiran logis, refleksi, menjelaskan, dan memberikan justifikasi disebut ....

   A. kemampuanstrategis. C. penalaran koheren.
   B. penalaran adaptif. D. pemikiran asosiatif.

2. Menurut *National Research Council* (2001) seorang peserta didik dikatakan mahir setelah belajar matematika bila pada diri peserta didik itu terdapat 5 komponen yang saling jalin-menjalin. Salah satu komponen yang merupakan keterampilan dalam menjalankan prosedur secara fleksibel, akurat, efisien, dan tepat, disebut ....

   A. kelancaran prosedur C. keterampilan fleksibel
   B. kelancaran adaptif D. keterampilan adaptif

3. Menurut *National Research Council* (2001) seorang peserta didik dikatakan mahir setelah belajar matematika bila pada diri peserta didik itu terdapat 5 komponen yang saling jalin-menjalin. Salah satu komponen yang merupakan kecenderungan memandang matematika sebagai sesuatu yang masuk akal, bermanfaat, berharga, diiringi dengan kepercayaan tentang kemampuan diri dan perlunya ketekunan, disebut ....

   A. kelancaran proses C. keterampilan proses
   B. kelancaran adaptif D. disposisi positif

4. Seorang peserta didik dikatakan mahir setelah belajar matematika bila pada diri peserta didik itu terdapat 5 komponen yang saling jalin-menjalin. Salah satu komponen yang merupakan kemampuan untuk merumuskan, menyajikan, dan memecahkan masalah matematika, disebut ....

   A. kelancaran proses C. penalaran adaptif

B. kelancaran individual D. disposisi positif

5. Pak Nasution mengajar pelajaran matematika di SMA 1 Kota X. Kompetensi Pak Nasution yang punya kemampuan unuk mengelola pembelajaran peserta didik yang meliputi pemahaman terhadap peserta didik, perancangan dan pelaksanaan pembelajaran, evaluasi hasil belajar, dan pengembangan peserta didik untuk mengaktualisasikan berbagai potensi yang dimilikinya ini, disebut ....
   a. Kompetensi pedagogi.
   b. Kompetensi profesional.
   C. Kompetensi kepribadian.
   D. Kompetensi sosial.

6. Bu Hombing adalah merupakan guru pelajaran matematika yang disukai oleh para siswanya. Bu Hombing memiliki sikap yang mantap, stabil, dewasa, arif, dan berwibawa, menjadi teladan bagi peserta didik, dan berakhlak mulia. Kompetensi yang dimiliki Bu Hombing adalah ....
   A. Kompetensi pedagogi.
   B. Kompetensi profesional.
   C. Kompetensi kepribadian.
   D. Kompetensi sosial.

7. Pak Ali adalah guru pelajaran matematika di sebuah SMA. Pak Ali suka belajar terkait dengan matematika sekolah yang diajarnya. Pak Ali merasa bahwa penguasaan materi pembelajaran secara luas dan mendalam yang memungkinkannya membimbing peserta didik memenuhi standar kompetensi yang ditetapkan dalam Standar Nasional Pendidikan adalah perlu dan mutlak. Pak Ali memiliki ....
   A. Kompetensi pedagogi.
   B. Kompetensi profesional.
   C. Kompetensi kepribadian.
   D. Kompetensi sosial.

8. Sebagai pendidik, Pak Budi memiliki pemikiran bahwa sebagai pendidik dia merasa bagian dari masyarakat untuk berkomunikasi dan bergaul secara efektif dengan peserta didik, sesama pendidik, tenaga kependidikan, orang tua/wali murid (peserta didik), dan masyarakat sekitar. Ini berarti bahwa Pak Budi memiliki ....
   A. Kompetensi pedagogi.
   B. Kompetensi profesional.
   C. Kompetensi kepribadian.
   D. Kompetensi sosial.

9. Proses interaksi antar peserta didik dan antara peserta didik dengan pendidik dan sumber belajar pada suatu lingkungan belajar, dikenal dengan istilah…..
   A. model pembelajaran C. pembelajaran
   B. metode D. pendekatan

10. Metode pembelajaran yang lebih ditujukan agar peserta didik cepat dan cermat dalam menyelesaikan soal dan lebih dikaitkan dengan upaya untuk meningkatkan kemampuan agar cepat ingat terutama yang memerlukan hafalan, cocok jika memakai ....
    A. metode ceramah C. metode tanya-jawab
    B. metode drill . D. metode penemuan

11. Diberikan beberapa kondisi sebagai berikut:
    1) Suasana kelas bisa menegangkan bagi peserta didik.
    2) Guru sulit menyusun pertanyaan yang urut sesuai dengan urutan materi, bergradasi, dan yang dapat menggiring peserta didik ke arah materi pelajaran yang akan disampaikan guru.
    3) Pelajaran yang diperoleh mudah terlupakan.
    4) Inisiatif dan kreativitas peserta didik kurang berkembang.

    Di antara kondisi di atas, yang merupakan kelemahan penerapan metode tanya-jawab adalah:
    A. nomor (1), (2), dan (3) saja.
    B. nomor (1) dan (3) saja.
    C. nomor (2) dan (4) saja.
    D. nomor (1), (2), (3), dan (4).

12. Dalam pembelajaran matematika, salah satu prisipnya adalah pembelajaran yang menekankan pada jawaban divergen, artinya adalah ....
    A. mampu memunculkan pertanyaan atau masalah yang jawaban benarnya tidak tunggal.
    B. mampu memunculkan pertanyaan atau masalah yang jawaban benarnya tunggal.
    C. mampu memunculkan pertanyaan atau masalah yang jawaban benarnya tidak dapat ditentukan.

D. mampu memunculkan pertanyaan atau masalah yang jawaban benarnya diragukan.

13. Pendekatan pembelajaran matematika yang dilakukan dengan memberikan pengertian/definisi terlebih dahulu, baru kemudian para peserta didik diajak untuk memberikan contoh-contoh yang sesuai dengan pengertian atau definisi yang sudah diberikan sebelumnya, disebut dengan ....
    A. pendekatan teoretis
    B. pendekatan praktis .
    C. pendekatan deduktif
    D. pendekatan induktif

14. Dalam merencanakan pembelajaran, dalam hal pemilihan materi pembelajaran dan penentuan tujuan pembelajaran seharusnya ....
    A. tidak perlu ada kesesuaian.
    B. perlu ada kesesuaian.
    C. terserah kebijakan guru.
    D. D. tidak ada hubungannya.

15. Perhatikan pernyataan di bawah ini.
    (1) ada rasional teoretik yang logis atau kajian ilmiah yang disusun oleh penemunya atau ahlinya;
    (2) ada tujuan pembelajaran yang ingin dicapai melalui tindakan pembelajaran tersebut;
    (3) ada tingkah laku (sintaks) dalam mengajar-belajar yang khas yang diperlukan oleh guru dan peserta didik;
    (4) diperlukan lingkungan belajar yang spesifik, agar tindakan/kegiatan pembelajaran tersebut dapat berlangsung secara efektif.

    Yang merupakan ciri model pembelajaran adalah
    A. nomor (1), (2), dan (3) saja.
    B. nomor (1) dan (3) saja.
    C. nomor (2) dan (4) saja.
    D. nomor (1), (2), (3), dan (4).

LAMPIRAN

Kunci Jawaban/bantuan Latihan Kegiatan Pembelajaran 1

1. Baca kembali bahan bacaan dan UU no. 20 tahun 2003 tentang Sistem Pendidikan Nasional.
2. Lihat kembali di bahan bacaan.
3. Lihat kembeli di bahan bacaan.
4. Disposisi positif
5. Metode Pembelajaran

Kunci Jawaban/Bantuan Latihan Kegiatan Pembelajaran 2

1. Lihat permendikbud no. 104 tahun 2014 pasal 1, atau mencari di sumber lain.
2. Baca kembali bahan bacaan.
3. Baca kembali bahan bacaan.
4. Cari di sumber lain (misal di internet dengan kata kunci "pemecahan masalah matematika")
5. Diskusikan dengan teman sejawat dengan memperhatikan kondisi, kekuatan, dan kelemahan metode tersebut.
6. Mengamati, menanya, mengumpulkan informasi/mencoba, mengasosiasi/menalar, dan mengomunikasikan,
7. Belajar untuk mengetahui sesuatu.
8. *Jigsaw*
9. *Numbered Head Together (NHT)*
10. Mengumpulkan informasi

Kunci Jawaban Evaluasi

1. A	6. C	11. D
2. A	7. B	12. A
3. D	8. D	13. C
4. C	9. C	14. B
5. A	10. B	15. D

PENUTUP

Kami sangat berharap tingkat penguasaan Anda minimal 80%. Jika benar maka upaya Anda untuk mengikuti kegiatan Diklat ini telah berhasil. Semoga, Anda semakin sukses dalam membawa anak didik menjadi lebih baik lagi, berguna bagi nusa dan bangsa, dan dapat membawa nama harum Bangsa dan Negara Indonesia yang kita cintai ini.

GLOSARIUM

1. **Pembelajaran** adalah proses interaksi antar peserta didik dan antara peserta didik dengan pendidik dan sumber belajar pada suatu lingkungan belajar.
2. **Strategi pembelajaran** merupakan langkah-langkah sistematik dan sistemik yang digunakan pendidik untuk menciptakan lingkungan pembelajaran yang memungkinkan terjadinya proses pembelajaran dan tercapainya kompetensi yang ditentukan.
3. **Metode pembelajaran** merupakan cara yang digunakan oleh pendidik untuk menyampaikan suatu materi pembelajaran. Contoh metodepembelajaran antara lain metode ceramah, tanya-jawab, diskusi, dan lain-lain.
4. **Pendekatan pembelajaran** merupakan cara pandang pendidik yang digunakan untuk menciptakan lingkungan pembelajaran yang memungkinkan terjadinya proses pembelajaran dan tercapainya kompetensi yang ditentukan.
5. **Pendekatan saintifik** meliputi lima pengalaman belajar, yaitu: mengamati, menanya, mengumpulkan informasi, mengasosiasi, dan mengomunikasikan.
6. Kegiatan pembelajaran disebut **model pembelajaran**jika: (1) ada kajian ilmiah dari penemu atau ahlinya, (2) ada tujuan yang ingin dicapai, (3) ada urutan tingkah laku yang spesifik (ada sintaksnya), dan (4) ada lingkungan yang perlu diciptakan agar tindakan/kegiatan pembelajaran tersebut dapat berlangsung secara efektif.

DAFTAR PUSTAKA

DePorter, Bobbi dan Reardon, Mark. (1999). *Quantum Teaching – Orchestrating Student Success*. Boston : Allyn and Bacon.

Dirjen Dikdasmen. (2002). *Pendekatan Kontekstual (Contextual Teaching and Learning)*. Jakarta : Depdiknas.

Depdiknas. (2010). *Buku Panduan Pendidikan Karakter Bangsa* - Kementerian Pendidikan Nasional Direktorat Jenderal Manajemen Pendidikan Dasar dan Menengah: Jakarta.

English, Lyn D. (1997). *Promoting a Problem Posing Classroom – Teaching Children Mathematics*. Journal for Research in Mathematics Education. Volume 29. Number 1. November 1997, h 172-179.

Freudenthal. (1991). *Revisiting Mathematics Education*. China Lectures. Dordrecht Kluwer: Academic Publishers.

Johnson, Elaine B. (2002). *Contextual Teaching and Learning*. California : Corwin Press. Inc.

Karso. (1993). *Dasar-dasar Pendidikan MIPA*. Modul 1 – 6. Departemen Pendidikan dan Kebudayaan. Jakarta: Modul UT.

Mann, Eric L.(2006). Creativity : The Essence of Mathematics. *Journal for the Education of the Gifted*. Indiana: Vol.30 No.2, pp 236-260.

Nur, Mohamad. (1999). *Pengajaran Berpusat Kepada Peserta didik dan Pendekatan Konstruktivis dalam Pengajaran,* Terjemahan. Surabaya: Universitas Negeri Surabaya.

Pannen, Paulina. (2001). *Kontruktivisme dalam Pembelajaran – Bahan Penataran AA bagi Dosen.* Jakarta : Dirjen Dikti.

Permendikbud. (2014). Nomor 103. Tentang Pembelajaran pada Pendidikan Dasar dan Pendidikan Menengah.

Permendikbud. (2015). Nomor 23 Tentang Penumbuhan Budi Pekerti.

Slavin, Robert E. (1995). *Cooperative Learning – Theory, Research, and Practice.* Boston: Allyn and Bacon.

Sutan, Firmanawaty. (2003). *Mahir Matematika Melalui Permainan.* Bogor: Penerbit Puspa Swara.

Suyatno. (2009). *Menjelajah Pembelajaran Inovatif.* Sidoarjo: Masmedia Buana Pustaka.

Suyitno, Amin.(2012). *Dasar-Dasar dan Proses Pembelajaran Matematika.* Semarang: FMIPA UNNES

Wardani, I, G. A, dkk. (1985). *Delapan Keterampilan Dasar Mengajar*. Jakarta: Dirjen Dikti.

Wiederhold., Chuck W. (2001). *Higher-Level Thinking.* San Clemente: Kagan Cooperative Learning.

Zaini, Hisyam. (2002). *Strategi Pembelajaran di Perguruan Tinggi.* Yogyakarta : CTSD (Center for Teaching Staff Development).

GURU PEMBELAJAR

MODUL MATEMATIKA SMA

KELOMPOK KOMPETENSI D

PROFESIONAL

GEOMETRI DAN IRISAN KERUCUT

DIREKTORAT JENDERAL GURU DAN TENAGA KEPENDIDIKAN
KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
2016

Penulis:
1. Untung Trisna Suwaji , 081328047171, ontongts@yahoo.com
2. Himawati , 085643025501, himmawatipl@yahoo.com

Penelaah:
1. Abdul Azis, 085722165947
2. Sigit Tri Guntoro, 081328431558, sigittri92@yahoo.co.id

Ilustrator:
Nur Hamid

KATA PENGANTAR

Peningkatan kualitas pendidikan saat ini menjadi prioritas, baik oleh pemerintah pusat maupun daerah. Salah satu komponen yang menjadi fokus perhatian adalah peningkatan kompetensi guru. Peran guru dalam pembelajaran di kelas merupakan kunci keberhasilan untuk mendukung keberhasilan belajar siswa. Guru yang profesional dituntut mampu membangun proses pembelajaran yang baik sehingga dapat menghasilkan *output* dan *outcome* pendidikan yang berkualitas.

Dalam rangka memetakan kompetensi guru, telah dilaksanakan Uji Kompetensi Guru (UKG) Tahun 2015. UKG tersebut dilaksanakan bagi semua guru, baik yang sudah bersertifikat maupun belum bersertifikat untuk memperoleh gambaran objektif kompetensi guru, baik profesional maupun pedagogik. Hasil UKG kemudian ditindaklanjuti melalui Program Guru Pembelajar sehingga diharapkan kompetensi guru yang masih belum optimal dapat ditingkatkan.

PPPPTK Matematika sebagai Unit Pelaksana Teknis Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan di bawah pembinaan Direktorat Jenderal Guru dan Tenaga Kependidikan mendapat tugas untuk menyusun modul guna mendukung pelaksanaan Guru Pembelajar. Modul ini diharapkan dapat menjadi sumber belajar bagi guru dalam meningkatkan kompetensinya sehingga mampu mengambil tanggung jawab profesi dengan sebaik-baiknya.

Yogyakarta, Maret 2016

Kepala PPPPTK Matematika,

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN

PUSAT PENGEMBANGAN DAN PEMBERDAYAAN PENDIDIK DAN TENAGA KEPENDIDIKAN MATEMATIKA

Dr. Dra. Daswatia Astuty, M.Pd.

NIP. 196002241985032001

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

PENDAHULUAN

A. LATAR BELAKANG

Dengan diterbitkannya Peraturan Menteri Pendayagunaan Aparatur Negara dan Reformasi Birokrasi (Permenpan dan RB) Nomor 16 tahun 2009 tentang Jabatan Fungsional Guru dan Angka Kreditnya, guru dituntut melakukan pengembangan keprofesian berkelanjutan (PKB). Dengan melakukan PKB, diharapkan menjalankan tugas dan fungsinya secara profesional. Dalam Permenpan dan RB tersebut juga dijelaskan bahwa pengembangan keprofesian berkelanjutan meliputi kegiatan pengembangan diri yaitu diklat fungsional dan kegiatan kolektif guru serta publikasi ilmiah dan karya inovasi.

Sementara itu dalam Permendiknas nomor 16 tahun 2007 tentang Standar Kualifikasi Akademik dan Kompetensi Guru dinyatakan bahwa setiap guru wajib memenuhi standar kualifikasi akademik dan kompetensi guru yang berlaku secara nasional. Dijelaskan bahwa guru SMA/sederajat harus memiliki kualifikasi akademik pendidikan minimum D-IV atau S1 program studi yang sesuai dengan mata pelajaran yang diampu dan diperoleh dari program studi yang terakreditasi. Lebih lanjut, guru mata pelajaran Matematika juga harus memiliki sejumlah kompetensi profesional. Khusus di bidang geometri, dinyatakan bahwa guru diharuskan memiliki kompetensi menggunakan konsep-konsep geometri, dan geometri analitik.

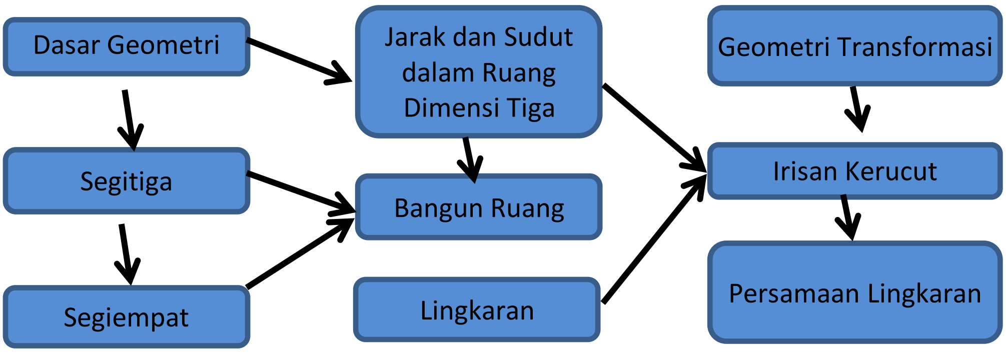
Berkaitan dengan dua hal di atas, Kementrian Pendidikan dan Kebudayaan juga telah melaksanakan Uji Kompetensi Guru (UKG). Dari hasil UKG dapat diperoleh data kompetensi masing-masing guru yang perlu ditingkatkan. Disamping harus meningkatkan kompetensi secara mandiri, pemerintah juga berencana memfasilitasinya melalui diklat PKB berdasarkan capaian hasil uji kompetensi guru.

Modul ini disusun sebagai bahan belajar guru dalam mengeksplorasi prinsip-prinsip geometri, berlatih menggunakan penalaran induktif dan deduktif, dan menerapkan geometri baik untuk keperluan geometri sendiri maupun kehidupan nyata. Materi terdiri dari sembilan bahan pembelajaran yang meliputi dasar-dasar geometri, segitiga, segi empat, lingkaran, geometri transformasi, bangun ruang, jarak dan sudut dalam dimensi tiga, irisan kerucut, dan persamaan lingkaran.

B. TUJUAN

Tujuan disusunnya modul ini adalah untuk memfasilitasi guru dalam rangka pengembangan keprofesian berkelanjutan (PKB) terutama dalam peningkatan kompetensi menggunakan konsep-konsep geometri. Setelah mempelajari modul, diharapkan guru menguasai konsep-konsep esensial geometri baik untuk pengembangan keilmuan maupun penerapannya, membelaajarkan geometri kepada siswa, memahami langkah-langkah bernalar baik induktif maupun deduktif, dan menyelesaikan permasalahan terkait dengan geometri.

C. PETA KOMPETENSI



D. RUANG LINGKUP

Dalam modul ini dipaparkan hal-hal yang berkaitan dengan geometri yang terbagi dalam 9 kegiatan pembelajaran (KB).

- KB 1 membahas tentang dasar geometri yang berisi tentang pengertian pangkal (*undefined term*), aksioma, definisi, dan teorema, sudut, dan transversal
- KB 2 membahas tentang segitiga, kekongurenan, sifat-sifat, dan garis-garis istimewa pada segitiga, kesebangunan, dan teorema Pythagoras.
- KB 3 membahas tentang segiempat yang berisi konsep, sifat, dan luas jajargenjang, trapesium, layang-layang.
- KB 4 membahas tentang lingkaran, yang meliputi bagian-bagian lingkaran, nilai π, luas lingkaran, hubungan sudut keliling dan sudut pusat, garis sekan dan garis singgung, dan mengkonstruksi garis singgung pada lingkaran.
- KB 5 membahas tentang geometri transformasi yang meliputi translasi, rotasi, refleksi, dan dilatasi.

- KB 6 membahas tentang bangun ruang, yang meliputi balok, prisma, limas, bola, tabung, dan kerucut.
- KB 7 membahas tentang jarak dan sudut dalam ruang berdimensi tiga.
- KB 8 membahas pengertian irisan kerucut, persamaan parabola, persamaan ellips, dan persamaan hiperbola.
- KB 9 membahas tentang persamaan lingkaran dan garis singgung lingkaran.

E. SARAN CARA PENGGUNAAN MODUL

Modul ini didesain untuk dapat digunakan dalam kegiatan diklat maupun belajar mandiri. Untuk keperluan diklat, fasilitator perlu menyiapkan poin-poin penting dan skenario pembelajaran menyesuaikan alokasi waktu yang tersedia. Salah satu alternatif pembelajaran adalah fasilitator menyampaikan garis besar materi, kemudian peserta mencermati uraian materi, melaksanakan instruksi dalam kegiatan pembelajaran, dan dilanjutkan dengan latihan. Selama peserta menjalankan aktivitas, fasilitator berkeliling memberikan pendampingan. Sangat dianjurkan kepada fasilitator maupun peserta untuk membaca juga referensi/sumber belajar lain.

Untuk kegiatan belajar mandiri, pembaca dapat memulainya secara berurutan dari kegiatan pembelajaran pertama sampai bagian akhir, atau mengikuti alur peta konsep. Dapat juga dipelajari dengan cara jalan mundur. Pembaca langsung ke topik yang akan dikehendaki, seandainya pada topik tersebut ada materi yang membutuhkan topik sebelumnya, maka pembaca bergerak mundur untuk mempelajari topik yang diperlukan tersebut. Sangat disarankan pembaca untuk melaksanakan aktivitas kegiatan pembelajaran, dan mengerjakan semua latihan yang diberikan.

KEGIATAN PEMBELAJARAN 1
DASAR GEOMETRI

A. TUJUAN

Tujuan Kegiatan Pembelajaran 1 adalah untuk memberikan pemahaman kepada pembaca terkait dengan dasar-dasar geometri yang meliputi pengertian pangkal, aksioma, definisi, dan teorema. Dengan mempelajari keempat pengertian tersebut diharapkan pembaca memahami sistim deduktif aksiomatis dalam geometri. Selain hal tersebut, pembaca juga mempelajari tentang sudut, transversal dan kesejajaran.

B. INDIKATOR PENCAPAIAN KOMPETENSI

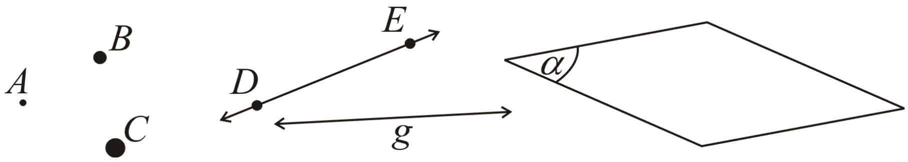
Setelah membaca dan mengikuti serangkaian kegiatan pada modul ini, pembaca diharapkan mampu

1. Memahami makna tentang pengertian pangkal (titik, garis, dan bidang), aksioma, definisi, dan teorema.
2. Memahami kedudukan pengertian pangkal, aksioma, definisi, dan teorema dalam sistem deduktif aksiomatis.
3. Memahami pengertian sudut, pengukuran sudut, relasi antar dua sudut.
4. Memahami konsep transversal dan sifat-sifatnya.

C. URAIAN MATERI

1. Pengertian Pangkal

Titik, garis, dan bidang merupakan pengertian pangkal yang tidak didefinisikan (*undefined term*). Beberapa istilah lain dalam geometri juga cukup diterima secara intuitif, tetapi tidak didefinisikan, seperti “terletak”, “di luar”, “kelurusan” suatu garis, atau “datarnya” bidang.



Gambar 1. Titik, Garis, dan Bidang

Titik dapat dibayangkan seperti bola yang semakin mengecil sehingga jari-jarinya nol. Karena tidak memiliki ukuran, maka titik dikatakan berdimensi nol. Titik dapat ditentukan letaknya. Titik biasa direpresentasikan sebagai noktah dan dinotasikan dengan huruf kapital (misal: A, B, T). Garis dapat dibayangkan sebagai jejak titik yang bergerak lurus. Garis memanjang ke dua arah. Akibat dari hal ini adalah, jarak dua titik pada suatu garis dapat ditentukan ukurannya. Garis dinotasikan dengan huruf non kapital (misal garis l, h, g) atau dengan menyebutkan dua titik yang dilalui (misal $\overleftrightarrow{AB}$). Bidang dapat dibayangkan sebagai jejak garis yang bergerak menyamping tanpa mengubah arah garis. Bidang meluas ke segala arah tanpa batas. Dalam lukisan geometris, bidang dapat dilukiskan sebagiannya dalam bentuk jajargenjang. Bidang dinotasikan dengan huruf Yunani, atau tiga titik yang dilaluinya (misal bidang α, bidang β, bidang ABC).

2. Definisi, Aksioma, dan Teorema

Setelah mengenal *undefined term* titik, garis, dan bidang, diperlukan pernyataan-pernyataan yang menjelaskan suatu istilah. Pernyataan ini disebut sebagai definisi. Dalam mendefinisikan sesuatu, hanya boleh menggunakan *undefined term*, atau istilah-istilah yang telah dikenal sebelumnya. Berikut ini beberapa contoh definisi dalam geometri setelah dikenalkan titik, garis, dan bidang.

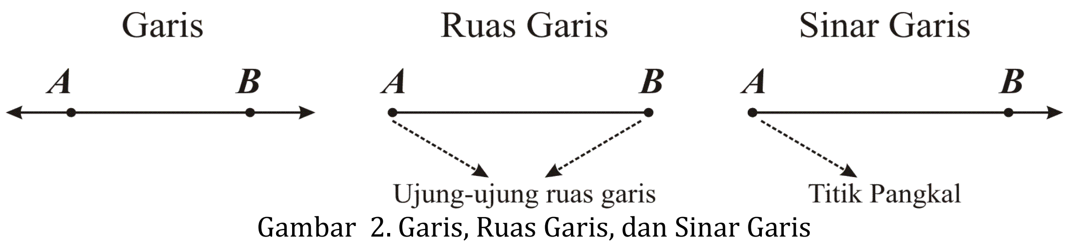
a. Kolinear (segaris):

Tiga titik dikatakan kolinear (segaris) jika semua titik tersebut terletak pada garis yang sama.

b. Ruas garis (segmen):

Ruas garis AB (dilambangkan dengan $\overline{AB}$) merupakan himpunan titik A, B dan semua titik di antara A dan B yang kolinear dengan garis melalui kedua titik tersebut. Titik A dan B dalam hal ini disebut sebagai ujung-ujung ruas garis. Dalam penulisan berikutnya, $\overline{AB}$ dapat diartikan sebagai ruas garis AB, dapat juga diartikan sebagai panjang ruas garis AB tergantung pada konteksnya. Selanjutnya dalam modul ini, panjang $\overline{AB}$ dapat dinyatakan sebagai AB.

c. Sinar Garis (*Ray*):



Gambar 2. Garis, Ruas Garis, dan Sinar Garis

Sinar AB (ditulis $\overrightarrow{AB}$) merupakan bagian dari $\overleftrightarrow{AB}$ yang terdiri atas $\overline{AB}$ dan semua titik X pada $\overleftrightarrow{AB}$ sedemikian hingga B terletak di antara A dan X. Selanjutnya titik A ini dinamakan sebagai titik pangkal.

Harap dicatat bahwa $\overrightarrow{AB}$ dan $\overrightarrow{BA}$ merupakan sinar yang berbeda.

Sebagai catatan, definisi yang baik menyajikan hal-hal berikut:

1. Nama atau istilah yang akan didefinisikan.
2. Posisi istilah tersebut dalam himpunan atau kategori.
3. Dapat membedakan istilah yang didefinisikan dengan istilah lain tanpa memberikan fakta-fakta yang tidak diperlukan.
4. Berlaku bolak-balik.

Contoh definisi: Segitiga samakaki adalah segitiga yang memiliki dua sisi yang kongruen.

Perhatikan bahwa: (1) Istilah yang didefinisikan adalah "segitiga samakaki". (2) Posisi segitiga samakakai termasuk dalam himpunan "segitiga". (3) Hal yang membedakan segitiga samakaki dengan segitiga yang lain adalah "memiliki dua sisi yang kongruen". (4) berlaku bolak balik, dimaksudkan sebagai berikut:

1. "Jika suatu segitiga itu samakaki, maka ia memiliki dua kaki yang kongruen"
2. "Jika suatu segitiga memiliki dua sisi yang kongruen, maka ia merupakan segitiga samakaki".

Selain *undefined term* dan definisi, untuk membangun geometri juga dibutuhkan sekumpulan aksioma atau postulat. Aksioma merupakan pernyataan pangkal yang secara intuitif mudah dipahami, sehingga diterima kebenarannya tanpa bukti. Beberapa aksioma dalam geometri di antaranya:

Aksioma 1.	Melalui dua titik berbeda, dapat dibuat tepat satu garis.
Aksioma 2.	Jika dua titik pada suatu garis terletak pada suatu bidang, maka titik-titik pada garis tersebut seluruhnya terletak pada bidang.
Aksioma 3.	Melalui tiga titik tidak segaris dapat dibuat tepat satu bidang.

Dengan menggunakan kaidah-kaidah logika berdasarkan suatu pernyataan dapat ditentukan benar dan salahnya. Dalam matematika pernyataan yang dapat dibuktikan kebenarannya dengan menggunakan penalaran deduktif dinamakan sebagai teorema. Dalam membuktikan suatu teorema hanya boleh menggunakan aksioma, definisi, dan teorema sebelumnya yang telah terbukti kebenarannya. Pernyataan yang belum dibuktikan kebenarannya dinamakan sebagai konjektur (*conjecture*) atau dugaan.

Teorema 1.	Melalui satu garis dan sebuah titik di luar garis hanya dapat dibuat satu bidang.

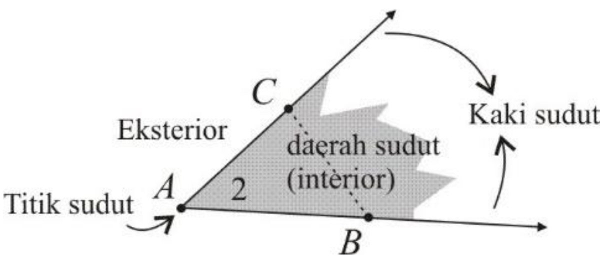
Bukti: Misalkan diberikan garis l, maka dapat ditentukan dua titik berbeda A dan B yang terletak pada garis l. Karena bidang melalui l maka seluruh titik pada garis itu terletak pada bidang (Aksioma 1). Sementara itu masih ada satu titik lagi di luar garis, sehingga terdapat tiga titik yang tidak segaris. Menurut aksioma 3, maka dapat dibuat tepat satu bidang. Jadi melalui satu garis dan sebuah titik di luar garis hanya dapat dibuat satu bidang.

Teorema 2.	Melalui dua garis berpotongan hanya dapat dibuat satu bidang.

Bukti: misal dibarikan garis k dan l berpotongan di titik S. Tanpa mengurangi keumuman, pandang garis k, dan ambil titik $L \neq S$ di garis l. Menurut teorema 1, dapat dibuat satu bidang. Jadi melalui dua garis berpotongan hanya dapat dibuat satu bidang.

3. Sudut

Sudut adalah gabungan dua sinar yang bersekutu di titik pangkalnya. Dua sinar ini dinamakan kaki sudut, sedangkan titik pangkal persekutuan dinamakan sebagai titik sudut. Kedua kaki sudut memisahkan bidang menjadi dua bagian yaitu daerah sudut (interior) dan eksterior sudut. Pada gambar, ruas garis BC berada di interior. Sudut pada gambar di atas dapat dinotasikan dengan $\angle BAC$, $\angle CAB$, $\angle A$, atau $\angle 2$. Dalam trigonometri, sudut dapat dipandang sebagai bukaan (putaran) dari sinar yang berimpit pada pangkalnya.



Gambar 3. Sudut

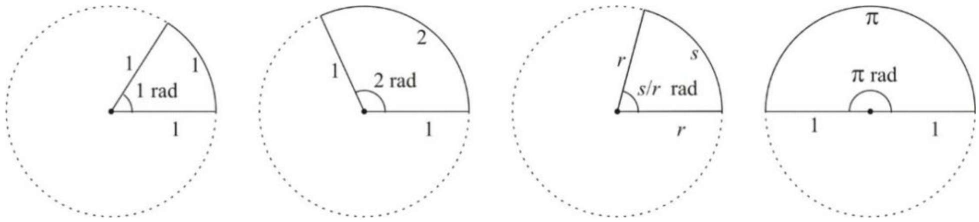
a. Satuan Pengukuran Sudut

1) Besar Sudut dalam Derajat

Dalam satuan derajat, jika $\angle AOB$ membentuk garis lurus maka besar $\angle AOB$ adalah 180 derajat (dilambangkan dengan 180°). Dengan demikian 1° merupakan besar sudut yang besarnya $\frac{1}{180}$ sudut lurus (dikatakan sudut lurus jika kedua sinar pembentuknya terletak segaris). Untuk ukuran sudut yang lebih kecil, 1° terdiri atas 60 menit (60’), dan 1’ terdiri atas 60”. Dalam satuan ini, sudut yang dibentuk oleh satu putaran penuh adalah 360°.

2) Besar Sudut dalam Radian

Jika s menyatakan panjang busur AB, dan r menyatakan jari-jari, maka maka besar sudut dalam radian didefinisikan sebagai $\alpha = s/r$. Dengan satuan ini, sudut setengah putaran (sudut yang membentuk garis lurus) memiliki ukuran π radian.



Gambar 4. Satuan sudut dalam Radian

Catatan: Besar sudut dalam radian berupa bilangan real sehingga jika besar suatu sudut tidak disebutkan satuannya, maka yang dimaksudkan adalah besar sudut dalam radian.

3) Besar Sudut dalam satuan yang lain.

Di Perancis dan Inggris secara terpisah pada sekitar tahun 1900, diciptakan sistim baru satuan sudut. Mereka membagi 1 lingkaran ke dalam 400 grade (dilambangkan dengan 400^g). Istilah lain untuk grade adalah gradian, gon, atau Neugrad (new degree). Di dunia militer, dikenal satuan angular mil. Lebih lanjut tentang satuan ini dapat dibaca di http://en.wikipedia.org/wiki/Angular_mil atau sumber-sumber lainnya.

b. Macam Sudut, Hubungan antar Sudut dan Garis dengan Sudut

1) Macam-macam Sudut Menurut Besarnya

Sudut lancip	$0° < \angle AOB < 90°$
Sudut siku-siku	$\angle AOC = 90°$
Sudut tumpul	$90° < \angle AOD < 180°$

Catatan: Terdapat perbedaan pendapat dalam menuliskan notasi ukuran sudut yaitu:

a. $\angle PQR$ sebagai notasi sudut, dan $m\angle PQR$ menyatakan ukuran sudut.

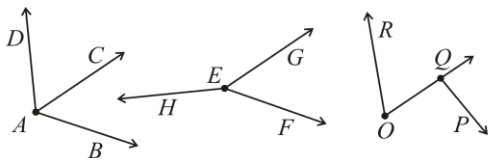
b. Notasi $\angle PQR$ digunakan sekaligus untuk sudut dan besar sudut.

Dalam bahan belajar ini, digunakan pilihan b.

2) Hubungan antara sudut-sudut

a) Sudut yang berdekatan/berdampingan

Sudut yang berdekatan adalah dua sudut yang memiliki titik sudut yang sama, sebuah kaki sudut yang sama, tetapi tidak memiliki titik-titik interior yang sama.



Gambar 5. Hubungan antar Sudut

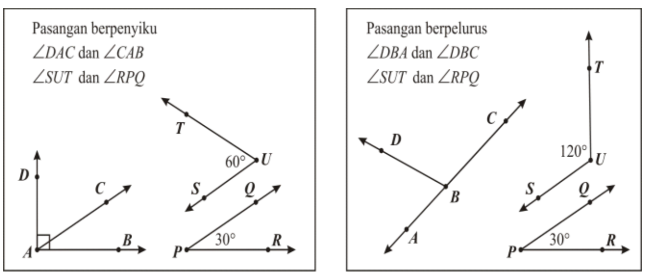
Contoh pasangan sudut berdekatan: $\angle DAC$ dengan $\angle CAB$, dan $\angle HEF$ dengan $\angle FEG$. Contoh pasangan sudut tidak berdekatan: $\angle BAC$ dengan $\angle BAD$ (interior bersama), dan $\angle ROQ$ dengan $\angle OQP$ (titik sudut berbeda).

b) Sudut-sudut berpenyiku

Dua sudut dikatakan berpenyiku jika jumlah besar kedua sudut 90°. Satu sudut merupakan penyiku (komplemen) bagi sudut yang lain.

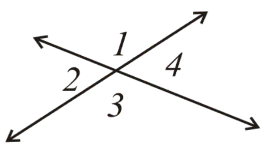
c) Sudut-sudut berpelurus

Dua sudut dikatakan berpelurus jika jumlah besar kedua sudut 180°. Satu sudut merupakan pelurus (suplemen) bagi sudut yang lain.



Gambar 6. Sudut Berpenyiku dan Berpelurus

d) Dua sudut bertolak belakang



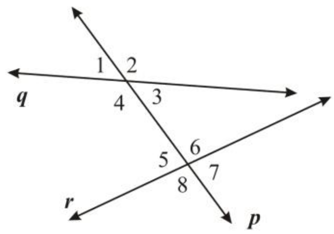
Gambar 7. Sudut bertolak belakang

Sudut bertolak belakang terbentuk dari dua garis yang saling berpotongan. Setiap dua sudut yang tidak berdampingan dari keempat sudut disebut sudut bertolak belakang. Pasangan sudut bertolak belakang pada Gambar 8 **Error! Reference ource not found.**adalah$\angle 1$ dan $\angle 3$, $\angle 2$ dan $\angle 4$.

4. Transversal dan Kesejajaran

a. Transversal (melintang)

Jika dua garis q dan r dipotong oleh garis p, seperti pada gambar, maka dikatakan transversal p memotong garis q dan r.

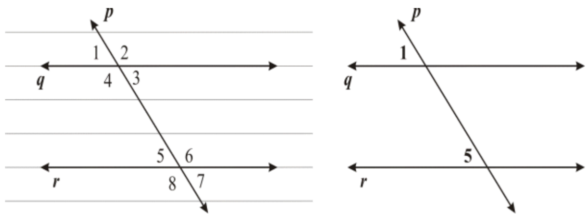
Gambar	Sudut	Nama
 Transversal p memotong garis q dan r Gambar 8. Transversal	$\angle 3, \angle 4, \angle 5, \angle 6$	Sudut-sudut dalam.
	$\angle 1, \angle 2, \angle 7, \angle 8$	Sudut-sudut.
	$\angle 1, \angle 4, \angle 5, \angle 8$	Sudut-sudut sepihak.
	$\angle 1, \angle 5$	Sudut-sudut sehadap
	$\angle 1, \angle 4, \angle 5, \angle 8$ dengan $\angle 2, \angle 3, \angle 6, \angle 7$	Sudut-sudut berlainan pihak/ berseberangan.
	$\angle 1, \ \angle 7$	Sudut luar berseberangan

b. Postulat Kesejajaran

Dua garis dikatakan sejajar jika kedua garis tersebut terletak pada bidang yang sama dan tidak memiliki titik persekutuan.

Postulat 1 Garis Sejajar:

Jika dua garis sejajar dipotong oleh sebuah garis melintang, maka masing-masing pasangan sudut sehadap sama besar.



Gambar 9. Postulat 1 garis sejajar

Sehingga, pada gambar di atas, garis r sejajar q dipotong garis p, maka berlaku:

$$\angle 1 = \angle 5\,, \qquad \angle 2 = \angle 6, \qquad \angle 3 = \angle 7, \qquad \text{dan} \angle 4 = \angle 8$$

Akibat-akibat yang muncul dari postulat sejajar adalah:

Jika dua garis sejajar dipotong oleh garis melintang, maka:

1) Sudut luar berseberangan sama besar.
2) Sudut dalam berseberangan sama besar.
3) Sudut-sudut dalam sepihak saling berpelurus.

4) Sudut luar sepihak saling berpelurus.

Postulat 2 garis sejajar.

Jika dua garis dipotong oleh garis melintang membentuk sudut sehadap yang sama besar, maka dua garis tersebut sejajar.

Dengan postulat 2 kesejajaran, dapat diturunkan teorema-teorema berikut.

a. Jika dua garis dipotong oleh garis melintang sehingga sudut dalam berseberangan sama besar maka kedua garis tersebut sejajar.

b. Jika dua garis dipotong oleh garis melintang sehingga sudut luar berseberangan sama besar maka kedua garis tersebut sejajar.

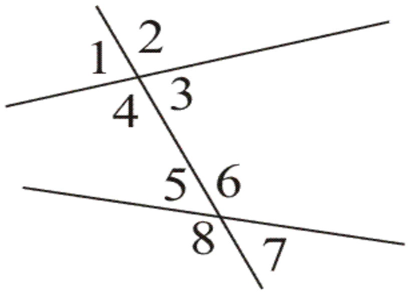
c. Jika dua garis dipotong oleh garis melintang sehingga sudut dalam sepihak saling berpelurus maka kedua garis tersebut sejajar.

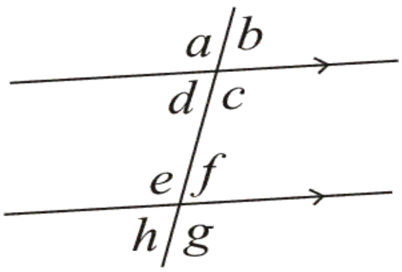
D. AKTIVITAS PEMBELAJARAN

1. Diskusikan, dapatkah didefinisikan “garis adalah himpunan titik-titik”?

2. Pada modul ini telah diperkenalkan satuan pengukuran sudut derajat, radian, grade, dan mil. Pelajari dan buatlah rangkuman satuan sudut yang lain di laman https://en.wikipedia.org/wiki/Angle.

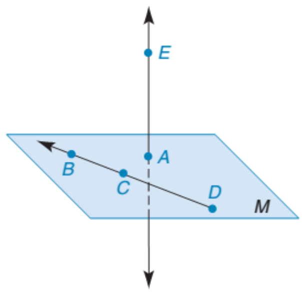
3. Dari masing-masing gambar di bawah, buatlah daftar pasangan sudut sehadap jika ada.



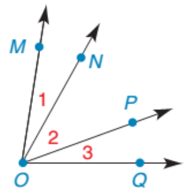


Bandingkan jawaban Anda dengan definisi sudut sehadap dari berbagai sumber di internet. Gunakan kata kunci pencarian “sudut sehadap” untuk bahasa Indonesia, dan “*corresponding angle*” untuk bahasa Inggris.

E. LATIHAN



1. Titik A, B, C, dan D koplanar di bidang M; B, C, dan D kolinear; E di luar bidang M. Berapa banyak bidang yang memuat
   a. Titik A, B, dan C?
   b. Titik B, C, dan D?
   c. Titik A, B, C, dan D?
   d. Titik A, B, C, dan E?
2. Apakah setiap dua titik selalu kolinear? Dapatkah tiga atau lebih titik menjadi kolinear? Berikan penjelasannya.



3. Pada gambar di samping, diberikan $\angle 1 = \angle 3$. Lengkapi alasan pada pembuktian di bawah untuk membuktikan bahwa $\angle MOP = \angle NOP$.

   Bukti:

Pernyataan	Alasan
$\angle 1 = \angle 3$	a. ?
$\angle 1 + \angle 2 = \angle 3 + \angle 2$	b. ?
$\angle MOP = \angle NOQ$ *(terbukti)*	c. ?

4. Diberikan pernyataan "jika dua garis dipotong oleh sebuah garis lain, maka sudut dalam berseberangan sama besar". Benarkah pernyataan tersebut? Berikan penjelasannya.
5. Buktikan bahwa melalui sebuah titik T di luar garis g dapat dibuat sebuah bidang.

F. RANGKUMAN

Titik, garis, dan bidang dalam geometri merupakan pengertian pangkal yang tidak didefinisikan (*undefined term*).

Definisi merupakan pernyataan untuk menjelaskan suatu istilah. Selain pengertian pangkal dan definisi, untuk melengkapi sistim deduktif aksiomatis, diperlukan juga aksioma yaitu pernyataan yang secara intuitif mudah dipahami sehingga diterima kebenarannya tanpa bukti. Berdasarkan ketiga unsur di atas, selanjutnya dapat disusun teorema, yaitu pernyataan yang kebenarannya dapat dibuktikan.

Unsur-unsur geometri yang dapat didefinisikan setelah dikenal pengertian pangkal antara lain ruas garis, sinar garis, sudut, kaki sudut, dan sebagainya.

Satuan pengukuran sudut yang antara lain derajat, radian, dan grade. Dalam dunia militer, dikenal juga satuan angular mil yang berbeda untuk tiap-tiap negara.

Macam sudut dapat dibedakan menurut besarnya, meliputi sudut lancip, siku-siku, tumpul, dan refleks. Dalam kaitannya hubungan antara dua sudut, dikenal berbagai istilah, diantaranya sudut berdekatan, bertolak belakang, berpenyiku, dan berpelurus.

Jika dua garis berbeda dipotong oleh garis lain, maka terbentuk 4 sudut. Istilah-istilah sudut sehadap, berseberangan, sepihak,sudut dalam, dan sudut luar dikenal dalam kasus ini meskipun kedua garis tidak sejajar. Dalam hal dua garis sejajar dipotong oleh garis lain, maka berlaku sudut sehadap sama besar.

G. UMPAN BALIK

Anda telah mempelajari dasar-dasar geometri tentang pengertian pangkal, definisi, aksioma, dan beberapa teorema yang mendasar. Sebelum melanjutkan ke materi berikutnya, ada baiknya Anda mengerjaan soal latihan terlebih dahulu baru kemudian mencocokkan jawaban dengan kunci yang tersedia. Dari sini Anda dapat menilai kemampuan diri, jika lebih dari 80% jawaban sudah benar, maka dipersilakan untuk mempelajari materi berikutnya dengan tetap memperhatikan materi yang belum dikuasai. Namun demikian jika dirasakan masih belum menguasai materi, anda dapat mempelajari kembali.

KEGIATAN PEMBELAJARAN 2
SEGITIGA

A. TUJUAN

Tujuan kegiatan pembelajaran ini adalah untuk memberikan pemahaman kepada pembaca terkait dengan segitiga, jenis-jenis segitiga, kekongruenan segitiga, sifat-sifat, garis-garis istimewa, kesebangunan, dan Teorema Pythagoras.

B. INDIKATOR PENCAPAIAN KOMPETENSI

Setelah membaca dan mengikuti serangkaian kegiatan pada bagian ini, pembaca diharapkan mampu

1. Mengklasifikasi jenis segitiga berdasarkan besar sudut maupun panjang sisi.
2. Menggunakan kekongruenan untuk menyelesaikan permasalahan.
3. Menjelaskan sifat-sifat segitiga.
4. Menggunakan kesebangunan untuk menyelesaikan permasalahan
5. Menggunakan Teorema Pythagoras untuk menyelesaikan permasalahan.

C. URAIAN MATERI

Sebagian besar konstruksi kuda-kuda rumah tersusun atas segitiga-segitiga. Hal ini dikarenakan segitiga memiliki struktur yang "kaku".

Gambar 10. Konstruksi Kerangka

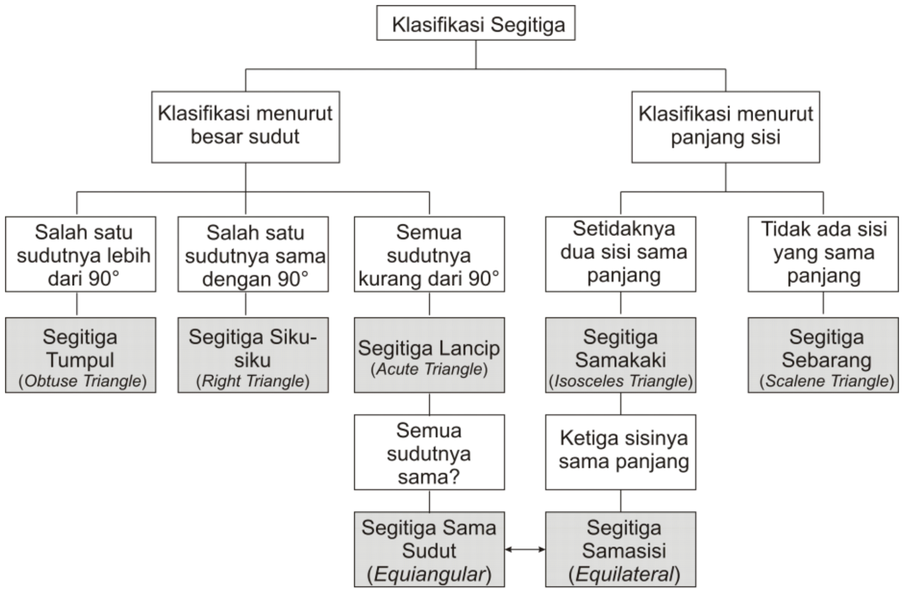
1. Pengertian, Jenis dan Sifat-sifat Segitiga

Segitiga (dilambangkan dengan Δ) merupakan gabungan tiga ruas garis yang ujung-ujungnya ditentukan oleh tiga titik tidak segaris. Ruas-ruas garis tersebut dinamakan sebagai sisi, sendangkan ketiga ujungnya dinamakan sebagai titik sudut.

Terdapat 3 jenis segitiga bardasarkan besar sudutnya, yaitu segitiga lancip (segitiga yang semua sudutnya kurang dari 90°), segitiga siku-siku (segitiga yang salah satu sudutnya 90°), dan segitiga tumpul (segitiga yang salah satu sudutnya lebih dari 90°).

Berdasarkan panjang sisinya, segitiga dibedakan menjadi segitiga sembarang, segitiga samakaki, dan segitiga samasisi. Segitiga sebarang, segitiga yang sisi-sisinya tidak ada yang sama panjang. Segitiga samakaki, segitiga yang dua sisinya sama panjang. Sisi yang sama panjang disebut sebagai *kaki*, sedangkan sisi lainnya sebagai *alas*. Sudut yang terletak pada pertemuan kedua kaki segitiga disebut sebagai *sudut puncak*, sedangkan sudut lainnya disebut sebagai *sudut alas*. Segitiga samasisi, segitiga yang semua sisinya sama panjang. Dengan memandang segitiga sama sisi sebagai segitiga samakaki (dua sisi sebagai kaki, dan satu sisi lainnya sebagai alas), maka dapat ditunjukkan bahwa segitiga samasisi memiliki tiga sumbu simetri.

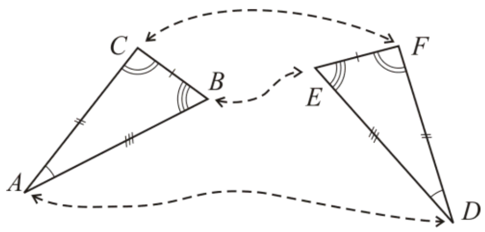
Jenis-jenis segitiga diatas dapat dinyatakan dalam skema klasifikasi segitiga berikut.



Gambar 11 Bagan Jenis-jenis Segitiga

2. Kekongruenan Dua Segitiga.

Dua segitiga dikatakan kongruen (dilambangkan dengan $\cong$) jika segitiga yang satu dapat dihimpitkan dengan yang lain dengan tepat. Pada gambar di bawah, $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ jika kondisi berikut dipenuhi



$$\angle A = \angle D, \quad \angle B = \angle E, \quad \angle C = \angle F,$$

$$\overline{AB} = \overline{DE}, \quad \overline{AB} = \overline{DE}, \quad \overline{AB} = \overline{DE}$$

Gambar 12. Dua Segitiga Kongruen

Dapat juga dikatakan, dua segitiga kongruen jika keenam unsur segitiga pertama kongruen dengan enam unsur yang bersesuaian pada segitiga yang kedua.

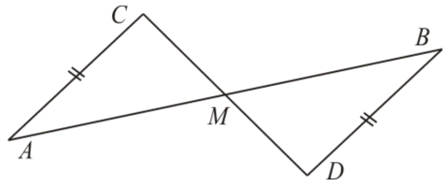
Dalam penulisannya, harus diperhatikan urutan titik sudut dalam menyebutkan kekongruenan dua segitiga. Sebagai contoh pada kasus di atas, tidak dianjurkan menuliskan dalam bentuk $\Delta ABC \cong \Delta EFD$, karena ini berarti $\angle A = \angle E$, $\angle B = \angle F$, dan $\angle C = \angle G$.

Postulat I Kekongruenan.

Dua segitiga kongruen jika ketiga sisi yang bersesuaian sama panjang (ss-ss-ss).

Contoh:

Pada gambar berikut, $\overline{AB}$ dan $\overline{CD}$ saling membagi dua sama panjang di titik M. Jika $\overline{AC} = \overline{DB}$, buktikan bahwa $\Delta AMC \cong \Delta BMD$



Bukti:

Diberikan $\overline{AB}$ dan $\overline{CD}$ saling membagi dua sama panjang di M. Akibatnya $\overline{AM} = \overline{BM}$ dan $\overline{CM} = \overline{DM}$. Sementara itu diketahui bahwa $\overline{AC} = \overline{BD}$. Dengan demikian

$$\overline{AM} = \overline{BM},\ \ \overline{MC} = \overline{MD},\ \ \overline{CA} = \overline{DB}$$

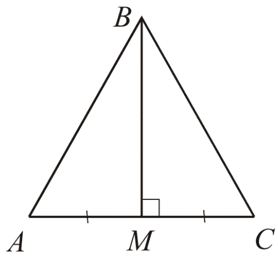
Berdasarkan postulat I kekongruenan, maka $\Delta ACM \cong \Delta BDM$. Terbukti.

Postulat II Kekongruenan (ss-sd-ss)

Jika dua sisi dan sebuah sudut di antara keduanya pada suatu segitiga sama dengan dua sisi dan sudut di antaranya pada segitiga yang lain, maka kedua segitiga tersebut kongruen.

Contoh:

Diberikan segitiga ABC, $BM \perp AC$, dan M titik tengah AC. Buktikan bahwa $\Delta ABM \cong \Delta CBM$.



Bukti:

Diketahui M titik tengah AC, sehingga $AM = CM$. $BM \perp AC$, sehingga $\angle BMC = \angle BMA = 90°$. Perhatikan segitiga $AM\omega$ dan CMB, sisi MB digunakan pada kedua segitiga, sehingga $MB = MB$. Dari kedua segitiga di atas dipenuhi $AM = CM$, $\angle BMC = \angle BMA$, dan $MB = MB$ sehingga, menurut kekongruenan ss-sd-ss, $\Delta AMB \cong \Delta CMB$. Terbukti.

Postulat III Kekongruenan

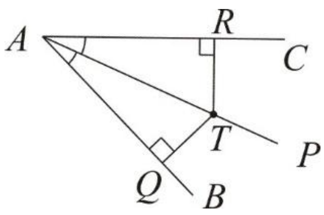
Jika dua sudut dan sisi di antara dua sudut pada suatu segitiga kongruen dengan dua sudut dan satu sisi di antara dua sudut pada segitiga yang lain, maka kedua segitiga tersebut kongruen.

Contoh Soal:

Jarak titik T ke garis g didefinisikan sebagai panjang ruas garis TQ dengan Q pada g dan $TQ \perp g$.

Buktikan bahwa garis bagi sudut merupakan tempat kedudukan titik-titik yang berjarak sama terhadap kedua kaki sudut tersebut.

Bukti:



Diberikan $\angle BAC$, AP garis bagi $\angle BAC$.

Ambil sebarang titik T pada garis AP, dibuat garis $TQ \perp AB$ dan $TR \perp AC$ dengan Q pada AB dan R pada AC. Akan ditunjukkan bahwa $TQ = TR$.

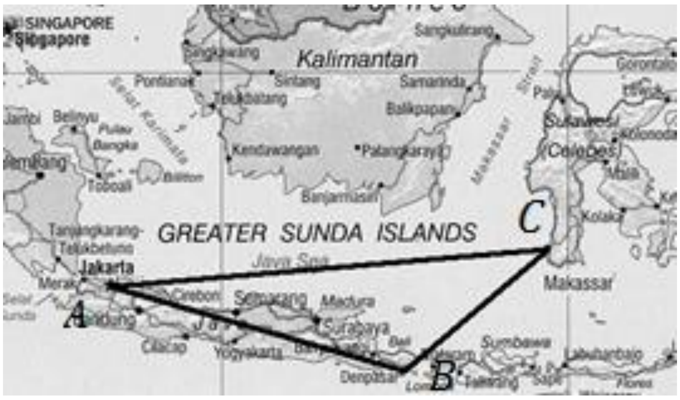
Pernyataan	Alasan
1. $\angle QAT = \angle RAT$	AP garis bagi $\angle BAC$
2. $\angle AQT = \angle ART$	Definisi jarak titik ke garis
3. $\angle ATQ = 180° - \angle AQT - \angle TAQ$	Sifat jumlah sudut segitiga
4. $\angle ATQ = 180° - \angle RAT - \angle ART = \angle ATR$	1 dan 2 disubstitusikan
5. $AT = AT$	Garis bersekutu
6. $\Delta ATQ \cong \Delta ATR$	Dari 1, 5, dan 4 dipenuhi kesebangunan sd-ss-sd.
7. $TQ = TR$	Sifat dua segitiga sebangun

Untuk sebarang titik T pada garis bagi sudut, ternyata dipenuhi jarak T ke garis AB sama dengan jarak T ke garis AC. Dengan demikian garis bagi sudut merupakan tempat kedudukan titik-titik yang berjarak sama ke kedua kaki sudut. Terbukti.

3. Sifat-sifat Segitiga

a. Ketaksamaan Segitiga

Jika Anda ingin bepergian dari Makassar ke Jakarta, tentunya jalur yang terpendek adalah Makassar-Jakarta bukan Makassar-Denpasar-Jakarta. Pada segitiga ABC, panjang AC merupakan jarak terpendek dari A ke C. Dengan demikian $AC < AB + BC$. Dengan alasan yang sama, $BC < BA + AC$, dan $AB < AC + CB$. Akibatnya dalam suatu segitiga berlaku jumlah panjang dua sisi segitiga selalu lebih panjang dari sisi yang lain.

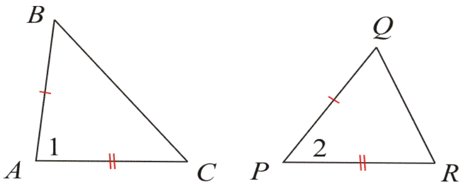


Gambar 13 Sifat Segitiga

Dengan ketentuan ini, tidak mungkin membentuk segitiga yang panjang sisinya 4, 5, dan 10 karena ada satu syarat yang tidak dipenuhi karena $4 + 5 < 10$.

b. Ketaksamaan sisi-sudut-sisi

Diberikan dua sisi dari suatu segitiga pertama sama panjang dengan dua sisi segitiga kedua. Jika sudut apit segitiga pertama lebih besar daripada sudut apit segitiga kedua, maka sisi ketiga pada segitiga pertama lebih besar daripada sisi ketiga pada segitiga kedua.



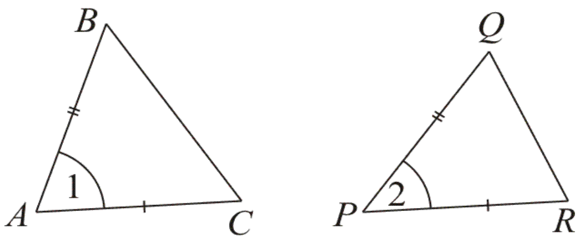
Gambar 14. Ketaksamaan sisi-sudut-sisi

Pada gambar, diberikan $\overline{AB} = \overline{PQ}, \overline{AC} = \overline{PR}$. Jika $\angle 1 > \angle 2$ maka $\overline{BC} > \overline{QR}$.

c. Ketaksamaan sisi-sisi-sisi

Jika dua sisi suatu segitiga sama panjang dengan dua sisi pada segitiga kedua, dan sisi ketiga segitiga pertama lebih panjang dari sisi ketiga segitiga kedua, maka sudut yang diapit oleh kedua sisi pada segitiga pertama lebih besar daripada sudut yang diapit kedua sisi pada segitiga kedua.

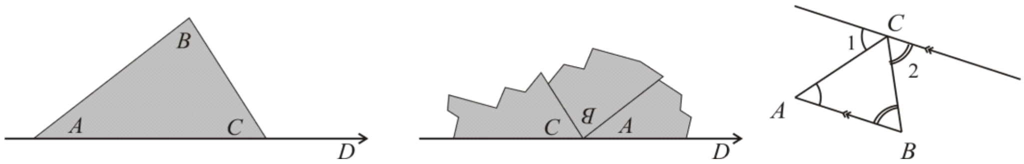
Pada gambar, diberikan dua ΔABC dan ΔPQR dengan $AB = PQ$, dan $AC = PR$. Jika $BC > QR$, maka $\angle BAC > \angle QPR$.



Gambar 15. Ketaksamaan sisi-sisi-sisi

d. Jumlah sudut dalam satu segitiga

Untuk sekedar memperlihatkan jumlah sudut segitiga, siswa SD atau SMP biasa menggunakan segitiga dari kertas kemudian dipotong ketiga sudutnya dan gabungkan seperti pada gambar.Gabungan ketiga potongan tersebut akan membentuk garis lurus. Aktivitas ini tidak dapat digunakan sebagai bukti secara formal. Dapatkah dijamin benar-benar terbentuk garis lurus?



Gambar 16. Menunjukkan Jumlah Sudut Segitiga dan Ilustrasi Bukti

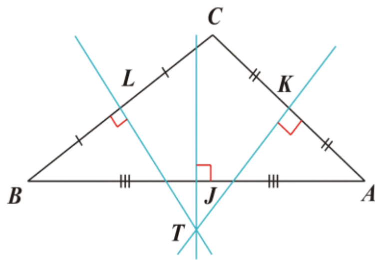
Berikut salah satu bukti formal jumlah sudut dalam segitiga. Pada ΔABC, tarik garis melalui C sejajar AB. Melalui dua garis sejajar dipotong oleh garis lain diperoleh $\angle A = \angle 1$ dan $\angle B = \angle 2$ (sifat garis sejajar). Dengan demikian $\angle A + \angle B + \angle C = \angle 1 + \angle 2 + \angle C = 180°$.

4. Garis-garis Istimewa dalam Segitiga

a. Garis sumbu segitiga

Garis sumbu segitiga merupakan garis bagi tegak lurus setiap sisi segitiga tersebut.

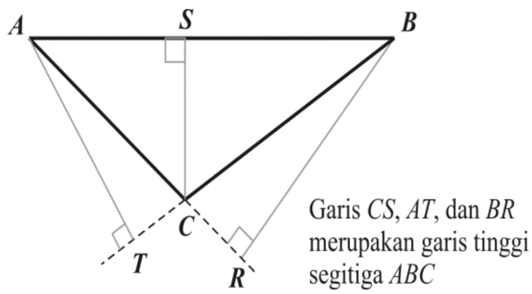
Ketiga garis sumbu berpotongan di satu titik.



Gambar 17. Garis Sumbu Segitiga

b. Garis tinggi

Garis tinggi suatu segitiga merupakan garis yang melalui suatu titik sudut dan tegak lurus terhadap garis yang memuat sisi di depan sudut tersebut.

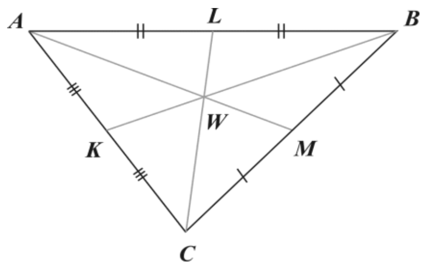


Gambar 18. Garis Tinggi Segitiga

Karena segitiga memiliki tiga titik sudut yang dapat dianggap sebagai puncak maka garis tinggi segitiga ada tiga buah. Garis-garis tinggi suatu segitiga berpotongan di satu titik, yang disebut sebagai orthocenter.

c. Garis berat

Garis berat adalah garis yang melalui titik sudut segitiga dan titik tengah sisi di depannya. Karena segitiga memiliki tiga sudut, maka

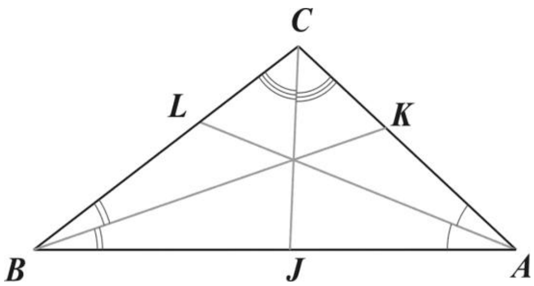


Gambar 19. Garis Berat Segitiga

terdapat tiga garis berat dalam sebuah segitiga. Ketiga garis berat ini berpotongan di satu titik yang disebut sebagai titik berat (centroid). Titik berat ini merupakan pusat kesetimbangan segitiga. Jika sebuah segitiga digantungkan tepat pada titik beratnya, maka segitiga tersebut akan berada pada posisi horisontal.

d. Garis bagi sudut suatu segitiga

Garis bagi sudut segitiga adalah garis yang membagi sudut dalam suatu segitiga sehingga menjadi dua bagian yang sama besar.



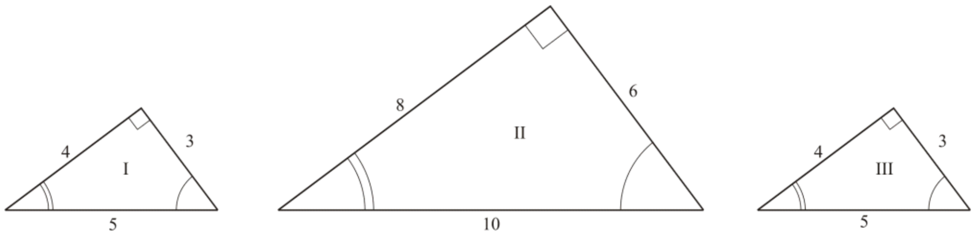
Gambar 20. Garis Bagi Sudut Segitiga

Terdapat tiga garis bagi sudut suatu segitiga. Garis bagi sudut segitiga berpotongan di satu titik yang disebut *incenter* segitiga. Titik ini merupakan titik pusat lingkaran dalam segitiga (lingkaran di dalam segitiga yang menyinggung semua sisinya).

5. Kesebangunan Dua Segitiga

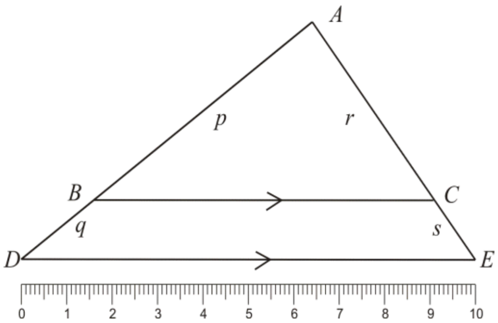
Bandingkan segitiga I, II, dan III pada gambar bawah. Segitiga I dan III tepat sama ukuran dan bentuknya. Segitiga I dan II kongruen. Segitiga II dan III memiliki tiga pasang sudut bersesuaian yang sama, tetapi setiap sisi segitiga II dua kali panjang sisi yang bersesuaian di segitiga III. Akibatnya, segitiga II dan III memiliki bentuk yang sama, tetapi tidak untuk ukurannya.

Secara umum, dua poligon dikatakan sebangun jika sudut-sudut yang bersesuaian sama besar, dan perbandingan panjang sisi-sisi yang bersesuaian sama besar. Dua segitiga ABC sebangun dengan PQR dinotasikan dengan $\Delta ABC \sim \Delta PQR$. Perhatikan bahwa urutan penulisan titik-titik sudut bersesesuaian. Pada contoh di atas, maka $\angle A = \angle P,\ \angle B = \angle Q,\ \angle C = \angle R$.



Gambar 21. Kesebangunan

Suatu konsep yang berkaitan erat dengan kesebangunan adalah proporsi. Pada sebuah ΔADE, ditarik garis BC sejajar alas. Jika garis BC membagi AD dan AE sehingga panjang ruas garis yang bersesuaian pada setiap sisi memiliki perbandingan yang sama yakni:



Gambar 22. Proporsi

$$\frac{p}{q} = \frac{r}{s} \quad \text{atau} \quad \frac{D}{AD} = \frac{r}{AE} \quad \text{atau} \quad \frac{q}{AD} = \frac{s}{AD}$$

maka dikatakan bahwa ruas-ruas garis tersebut terbagi secara proporsional/sebanding.

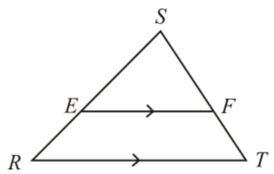
Suatu garis yang sejajar salah satu sisi segitiga dan memotong dua sisi yang lain membagi sisi-sisi tersebut secara proporsional.

Demikian pula konvers dari pernyatan di atas juga berlaku.

Suatu garis yang membagi dua sisi sebuah segitiga secara proporsional, maka garis itu sejajar dengan sisi ketiga segitiga tersebut.

Contoh:

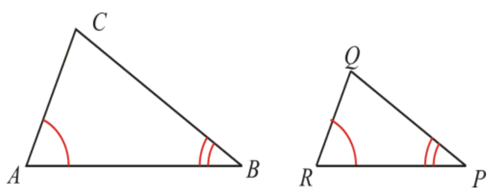
Pada segitiga RST, $\overline{EF}$ sejajar $\overline{RT}$. Jika $E = 8$, $ER = 6$, $FT = 15$, tentukan panjang SF.

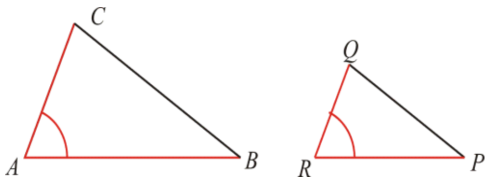


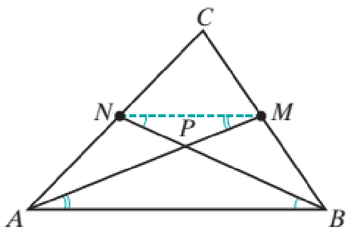
Penyelesaian:

Karena EF sejajar RT, maka $\frac{ES}{ER} = \frac{FS}{FT}$. Akibatnya $\frac{8}{6} = \frac{SF}{15}$, sehingga $SF = \frac{8 \cdot 15}{6} = 20$.

Untuk membuktikan apakah kedua segitiga sebangun, tidak perlu membuktikan kesamaan seluruh sudut bersesuaian dan kesamaan proporsi sisi-sisi yang bersesuaian. Teorema-teorema berikut dapat digunakan untuk menunjukkan kesebangunan dua segitiga.

	Sudut-sudut Pada segitiga ABC dan PQR, jika $\angle A = \angle R$ $\angle B = \angle P$ Maka $\Delta ABC \sim \Delta RPQ$

	Sisi-sudut-sisi Pada segitiga ABC dan PQR, jika $\frac{AC}{RQ} = \frac{AB}{RP}$ $\angle A = \angle R$ Maka $\Delta ABC \sim \Delta RPQ$



Contoh soal:

Dua garis berat pada suatu segitiga berpotongan di suatu titik yang membagi masing-masing garis berat dengan perbandingan 2:1.

Bukti:

Diberikan ΔABC dengan AM dan BN garis berat yang berpotongan di P. Akan dibuktikan bahwa $AP: MP = BP: NP = 2: 1$.

Pernyataan	Alasan
1. M titik tengah BC, dan N titik tengah AC	Diberikan
2. $MN \parallel AB$	Garis yang menghubungkan titik tengah dua sisi segitiga sejajar dengan sisi yang ketiga.
3. $\angle CNM = \angle CAB, \angle CMN = \angle CBA$, sehingga $\Delta CMN \sim \Delta CBA$	Kesebangunan dua segitiga (sudut-sudut)
4. $MN = \frac{1}{2} AB$	Sifat dua segitiga sebangun
5. $\angle MNB = \angle NBA, \quad \angle NMA = \angle MAB$ sehingga $\Delta MNP \sim \Delta ABP$	Kesebangunan dua segitiga (sudut-sudut)
6. $AP: PM = BP: PN = AB: MN = 2: 1$	Sifat dua segitiga sebangun
7. $BP: PN = 2: 1$	Terbukti

6. Teorema Pythagoras dan Konversnya

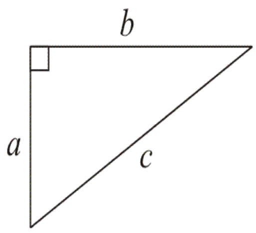
Pada segitiga siku-siku berlaku hubungan :

Kuadrat sisi miring suatu segitiga siku-siku sama dengan jumlah kuadrat sisi-sisi yang lain.

Atau,

Pada segitiga siku-siku dengan sisi miring c dan sisi siku-siku a dan b, berlaku

$$a^2 + b^2 = c^2.$$



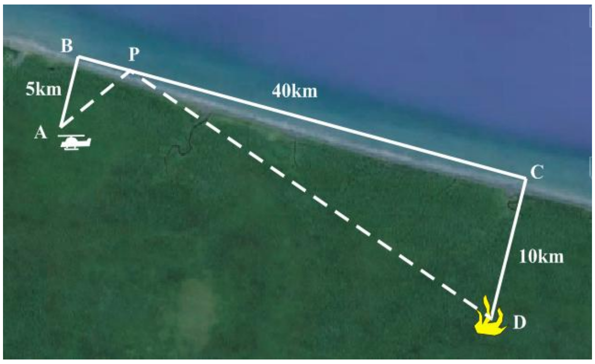
Gambar 23. Teorema Pythagoras

Pythagoras (sekitar 580 – 500 SM) berhasil membuktikan pernyataan di atas, sehingga kemudian dikenal sebagai Teorema Pythagoras. Berikut adalah konvers dari Teorema Pythagoras.

Diberikan ΔABC dengan panjang sisi a, b, dan sisi terpanjang c. Jika $c^2 = a^2 + b^2$ maka ΔABC adalah segitiga siku-siku.

D. AKTIVITAS PEMBELAJARAN

1. Carilah dari berbagai sumber tentang “Garis Euler” atau “Euler Line”. Gunakan perangkat lunak (seperti GeoGebra) untuk menyelidiki fenomena “Euler Line”. Susunlah sebuah dugaan/konjektur tentang posisi ketiga titik ini.
2. Pada karton yang cukup tebal dan rata, lukis segitiga beserta dengan titik beratnya. Potong segitiga tersebut dan lubangi titik berat untuk menggantung segitiga dengan benang pada lubang tersebut. Jika dilakukan dengan tepat, maka segitiga akan tergantung dengan posisi horisontal. Mengapa bisa demikian?
3. Pada tahun 1927 telah diterbitkan buku *The Pythagorean Proposition* karya Elisha Scott Loomis yang memuat ratusan bukti teorema Pythagoras, termasuk bukti dari Pythagoras sendiri, Euclid, Leonardo da Vinci, dan Presiden Amerika Serikat James Garfield. Cobalah Anda mencari beberapa bukti teorema Pythagoras yang berbeda.
4. Di titik A terdapat pangkalan helikopter pemadam api yang berjarak 5 km ke pantai. Dari menara pengawas terlihat titik api yang berada di titik D. Untuk pemadaman pertama, helikopter harus terbang ke pinggir pantai mengambil air, kemudian bergerak menuju titik D untuk menumpahkannya di atas api. Sementara itu untuk pemadaman kedua dan seterusnya, cukup mengambil air di C karena titik ini merupakan jarak terdekat dari D. Untuk pemadaman pertama.

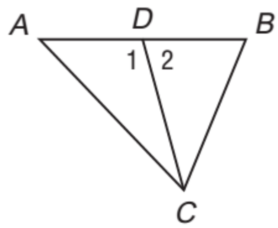


   a) Buatlah tabel dengan kepala tabel BP, AP, PD, dan $AP + PD$. Masukkan nilai BP bervariasi 0, 5, 10, 15, ... dan seterusnya sampai 40 (gunakan kalkulator). Untuk nilai BP berapa diperoleh $AP + PD$ minimum?

b) Persempitlah pencarian untuk interval 1 km untuk mendapatkan $AP + PD$ terpendek.

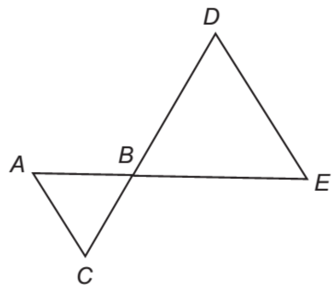
E. LATIHAN

1. Sebuah segitiga diberi nama dengan ΔABC. Dapatkah segitiga tersebut diberi nama dengan ΔBAC atau ΔBCA?
2. Dalam ΔPQR, $PQ = 3$, $PR = 4$, dan $QR = 5$. Tuliskan semua sudut dalam segitiga tersebut, diurutkan dari sudut terkecil.
3. Diketahui besar sudut-sudut sebuah segitiga dalam x yaitu $(3x - 7)°$, $(2x + 7)°$ dan $(5x)°$. Apakah jenis segitiga tersebut?
4. Suatu segitiga memiliki panjang sisi 25, n, dan $2n$ dengan n bilangan asli. Tentukan nilai-nilai n yang mungkin.
5. Jika DC merupakan garis berat ΔABC dan $\angle 1 > \angle 2$, manakah pernyataan berikut yang tidak benar?



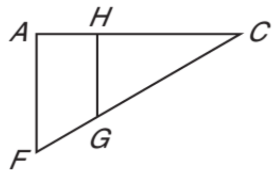
   a. $AD = BD$
   b. $\angle ADC = \angle BDC$
   c. $AC > BC$
   d. $\angle 1 > \angle 2$
6. Untuk setiap pernyataan berkaitan dengan suatu segitiga di bawah, nyatakan *selalu benar*, *bisa benar bisa salah*, atau *tidak pernah benar*.
   a. Garis-garis berat berpotongan pada salah satu sudut segitiga.
   b. Garis-garis bagi sudut berpotongan di titik yang terletak di dalam segitiga.
   c. Garis-garis tinggi berpotongan pada salah satu titik di luar segitiga.
   d. Garis-garis bagi tegak lurus berpotongan pada titik di sisi segitiga.
7. Manakah di antara segitiga berikut yang sebangun?
   a. Dua segitiga siku-siku, salah satu sudut kedua segitiga tersebut 30°.
   b. Dua segitiga siku-siku, salah satu sudut kedua segitiga tersebut 45°.
   c. Dua segitiga sama kaki.
   d. Dua segitiga sama sisi.

8. Fakta manakah yang harus ditambahkan agar dapat dibuktikan bahwa ΔABC sebangun dengan ΔEBD?



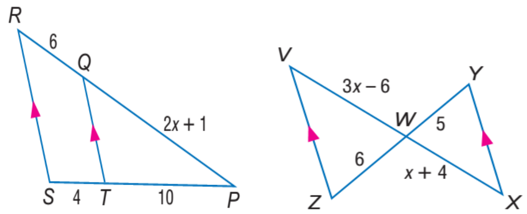
   a. $AB = EB$
   b. $\overline{AC} \parallel \overline{DE}$
   c. $CB = BD$
   d. $\angle D = \angle E$

9. Manakah fakta berikut ini yang *tidak diperlukan* agar ΔACF dan ΔHCG sebangun?



   a. $\overline{AF} \parallel \overline{HG}$
   b. $\frac{AC}{HC} = \frac{FC}{GC}$
   c. $\frac{CG}{CF} = \frac{1}{2}$
   d. $\angle FAH$ dan $\angle CHG$ siku-siku.

10. Pada kedua gambar berikut, identifikasi segitiga-segitiga yang sebangun, kemudian tentukan panjang VW dan WX.



F. RANGKUMAN

Berdasarkan panjang sisi, suatu segitiga dapat dibedakan menjadi segitiga sama sisi, segitiga sama kaki, dan segitiga sebarang. Berdasarkan besar sudutnya, segitiga dibedakan menjadi segitiga lancip, segitiga siku-siku, dan segitiga tumpul.

Dua segitiga dikatakan kongruen jika kedua segitiga tersebut dapat dihimpitkan dengan tepat. Untuk memeriksa kekungruenan dua segitiga tidak harus diperiksa kesamaan ketiga sudut dan ketiga sisi bersesuaian. Dua segitiga akan kongruen jika dipenuhi kesamaan sisi-sisi-sisi, sisi-sudut-sisi, dan sudut-sisi-sudutnya.

Segitiga memiliki sifat jumlah panjang dua sisi segitiga selalu lebih panjang daripada sisi yang ketiga. Untuk dua segitiga, berlaku juga sifat ketaksamaan sisi-sudut-sisi dan ketaksamaan sisi-sisi-sisi. Jumlah suatu segitiga adalah 180°.

Garis-garis istimewa pada segitiga di antaranya garis tinggi, garis bagi sudut, garis bagi tegak lurus (garis sumbu), dan garis berat. Masing-masing garis istimewa berpotongan di satu titik. Untuk urutan di atas, titik potong garis-garis di atas dinamakan orthocenter, incenter (pusat lingkaran dalam), circumcenter (pusat lingkaran luar), dan titik berat.

Jika pada sebuah segitiga, garis sejajar alas memotong dua sisi yang lain, maka kedua sisi tersebut terbagi secara proporsional. Konvers pernyataan ini juga berlaku, jika suatu garis membagi dua sisi sebuah segitiga secara proporsional, maka garis tersebut sejajar dengan sisi ketiga segitiga tersebut.

Dua segitiga dikatakan sebangun jika sudut-sudut yang bersesuaian sama besar, dan perbandingan panjang sisi-sisi yang bersesuaian sama besar.

Segitiga siku-siku memiliki sifat-sifat khusus, salah satunya adalah teorema Pythagoras yang menyatakan bahwa kuadrat sisi miring suatu segitiga siku-siku sama dengan jumlah kuadrat sisi-sisi yang lain. Konvers dari pernyataan tersebut juga berlaku, yaitu pada segitiga siku-siku dengan sisi miring c dan sisi siku-siku a dan b, berlaku $a^2 + b^2 = c^2$.

G. UMPAN BALIK

Anda telah mempelajari materi segitiga, melaksanakan aktivitas pembelajaran, dan mengerjakan latihan. Dari sini Anda dapat menilai kemampuan diri, jika jawaban benar lebih dari 80% maka dipersilakan untuk mempelajari materi berikutnya dengan catatan tetap mempelajari materi yang masih kurang. Namun demikian jika dirasakan masih belum menguasai materi, anda dapat mempelajari kembali.

KEGIATAN PEMBELAJARAN 3
SEGIEMPAT

A. TUJUAN

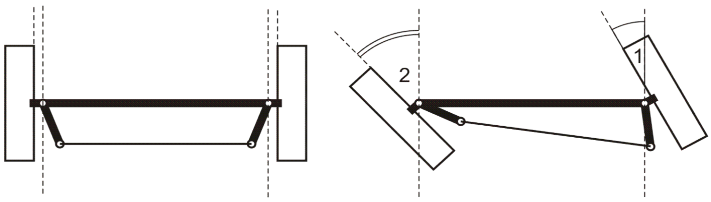
Tujuan Kegiatan Pembelajaran 3 adalah untuk memberikan pemahaman kepada pembaca terkait dengan segiempat, sifat-sifat, termasuk aplikasi segiempat dalam kehidupan sehari-hari.

B. INDIKATOR PENCAPAIAN KOMPETENSI

Setelah membaca dan mengikuti serangkaian kegiatan pada bagian ini, pembaca diharapkan mampu

1. Menjelaskan konsep jajargenjang, persegipanjang, persegi, belah ketupat beserta sifat-sifatnya.
2. Menjelaskan konsep trapesium dan sifat-sifatnya.
3. Menjelaskan konsep layang-layang beserta sifat-sifatnya.
4. Memahami perbedaan definisi beberapa segiempat dari berbagai sumber yang berbeda.
5. Mengklasifikasi kedudukan segiempat berdasarkan definisi yang telah ditentukan.
6. Memberikan contoh aplikasi segiempat dalam kehidupan sehari-hari.

C. URAIAN MATERI



Gambar 24. Ackermann Steering Geometry

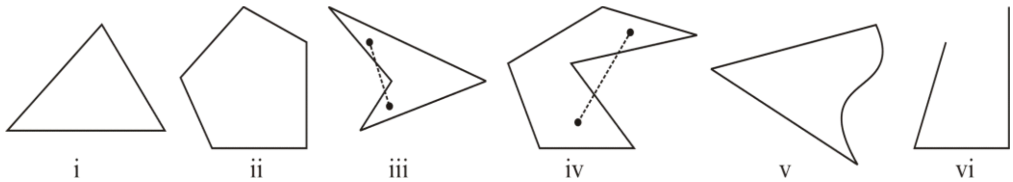

Gambar 25. Bike Lift

Pada sebuah mobil, ketika berbelok ke kiri maka sudut yang dibentuk oleh roda kiri harus lebih besar daripada roda kanan. Demikian pula sebaliknya. Sistim kemudi *Ackermann Steering Geometry* memanfaatkan sifat-sifat trapesium untuk menyelesaikan masalah di atas. Pada bengkel-bengkel sepeda motor, digunakan peralatan yang bernama *bike lift* yang menggunakan sifat jajargenjang. Dengan peralatan ini, mekanik dapat mengatur ketinggian sepeda motor dengan tetap pada posisi datar.

Setiap segiempat memiliki sifat dan aplikasi yang berbeda. Beberapa sifat segiempat akan dipelajari pada bagian berikut.

1. Pengertian Segi Empat

Poligon/segibanyak merupakan bangun datar tertutup yang sisi-sisinya berupa ruas garis, dan setiap ruas garis hanya berpotongan pada ujung-ujungnya.



Gambar 26. Poligon dan Bukan Poligon

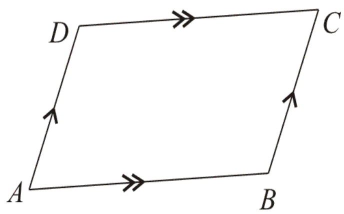
Pada ilustrasi di atas, gambar i, ii, iii, iv merupakan poligon. Gambar i dan ii disebut poligon konveks. Suatu bangun geometri dikatakan konveks jika setiap mengambil dua titik di dalamnya tersebut, maka seluruh ruas garis yang menghubungkannya berada di dalam bangun tersebut. Sementara itu gambar iii dan iv merupakan poligon konkaf. Dikatakan konkaf jika ada dua titik di dalam bangun, yang jika dihubungkan, maka terdapat bagian ruas garis yang berada di luar bangun. Gambar v dan vi bukan poligon karena memiliki sisi yang bukan ruas garis (gambar v) dan tidak tertutup (gambar vi).

Melalui pengertian poligon ini, maka segiempat dapat didefinisikan sebagai poligon dengan empat sisi.

2. Macam-macam segi empat dan sifat-sifatnya.

a. Jajar genjang (*parallelogram*)

Jajar genjang merupakan segi empat yang dua pasang sisi-sisi berhadapannya sejajar. Segi empat $ABCD$ di samping merupakan jajar genjang karena $AD \parallel BC$ dan $DC \parallel AB$.



Gambar 27. Jajargenjang

Pada jajar genjang $ABCD$, jika sisi AD dianggap sebagai alas, maka tinggi jajar genjang adalah jarak suatu titik pada sisi AD ke garis yang memuat sisi BC. Seperti halnya dalam segitiga, tinggi suatu jajar genjang tidak selalu harus dalam posisi vertikal.

Jajar genjang memiliki sifat-sifat:

1) Sisi-sisi yang berhadapan saling sejajar.
2) Diagonal membagi jajar genjang menjadi dua segitiga kongruen
3) Sudut-sudut yang berhadapan sama besar.
4) Sisi-sisi yang berhadapan sama panjang.
5) Sudut-sudut yang berdekatan saling berpelurus.
6) Diagonal-diagonalnya saling membagi dua sama panjang.

b. Persegi panjang

Persegi panjang adalah jajar genjang yang satu sudutnya siku-siku.

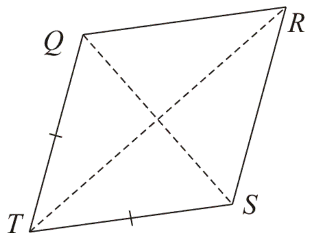
Berikut sifat-sifat persegi panjang:

1) Karena persegi panjang merupakan jajar genjang, maka semua sifat jajar genjang dimiliki oleh persegi panjang.
2) Keempat sudutnya sama besar (*equiangular*) dan berupa sudut siku-siku.
3) Diagonal persegi panjang sama panjang.

c. Belah ketupat (*rhombus*)

Belah ketupat merupakan jajar genjang yang dua sisi berdekatannya sama panjang.

Karena belah ketupat merupakan jajar genjang, maka semua sifat jajar genjang menjadi sifat belah ketupat. Berikut ini beberapa sifat khusus belah ketupat.

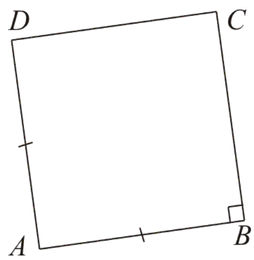


Gambar 28. Belah ketupat

1) Belah ketupat memiliki semua sifat jajar genjang.
2) Semua sisi belah ketupat mempunyai panjang yang sama (equilateral).
3) Diagonal-diagonal belah ketupat saling tegak lurus.
4) Diagonal-diagonal belah ketupat membagi dua sama besar sudut belah ketupat.

d. Persegi (*square*)

Persegi merupakan persegi panjang yang dua sisi berdekatannya sama panjang.



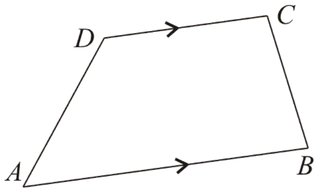
Gambar 29. Persegi

Karena persegi merupakan kasus khusus dari persegi panjang dan persegi panjang merupakan kasus khusus dari jajar genjang maka persegi memiliki semua sifat persegi panjang dan sekaligus memiliki semua sifat jajar genjang. Karena persegi memiliki dua sisi berdekatan yang sama panjang, maka persegi merupakan belah ketupat sehingga semua sifat belah ketupat juga dimiliki oleh persegi.

Persegi memiliki semua sifat jajargenjang, persegi panjang, dan belah ketupat.

e. Trapesium (*trapezoid/trapezium*)

Terdapat beberapa perbedaan dari beberapa sumber tentang definisi trapesium. Sebagai contoh, bukalah halaman situs http://www.mathwords.com/t/trapezoid.htm.



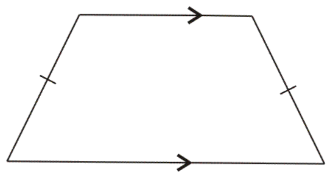
Gambar 30. Trapesium

Untuk keperluan pembelajaran pada modul ini, digunakan definisi trapesium sebagai segi empat yang mempunyai tepat sepasang sisi yang sejajar.

Jika $AB \parallel CD$ dan $AD \nparallel BC$, maka segi empat $ABCD$ merupakan trapesium. Sisi AB dan CD disebut sisi-sisi sejajar atau sering juga disebut sisi alas (*bases*). Pasangan sisi yang tidak sejajar, AD dan BC dinamakan kaki-kaki trapesium. Pasangan sudut yang menggunakan satu sisi sejajar sebagai kaki sudut bersama dinamakan pasangan sudut alas.

f. Trapesium samakaki dan sifat-sifatnya

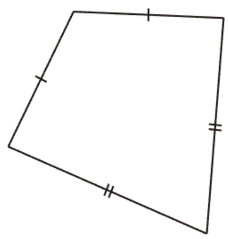
Trapesium sama kaki adalah trapesium yang kaki-kakinya sama panjang.


Gambar 31. Trapesium sama kaki

Sifat-sifat trapesium:

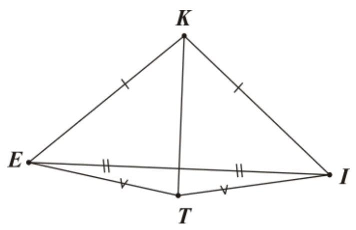
1) Masing-masing pasangan sudut berdekatan di antara dua sisi sejajar suatu trapesium saling berpelurus.
2) Pasangan sudut alas suatu trapesium samakaki sama besar.
3) Diagonal-diagonal trapesium sama kakisama panjang.

g. Layang-layang (*kite*)


Gambar 32. Layang-layang

Terdapat beberapa definisi layang-layang. Sebagai contoh lihat di halaman situs http://mathworld.wolfram.com/Kite.html dan http://amsi.org.au/teacher_modules/Rhombuses_Kites_and_Trapezia.html.

Layang-layang adalah segi empat konveks yang memiliki dua pasang sisi berdekatan yang kongruen, pasangan sisi kongruen yang satu berbeda dengan pasangan sisi kongruen yang lain



Gambar 33. Diagonal Layang-layang

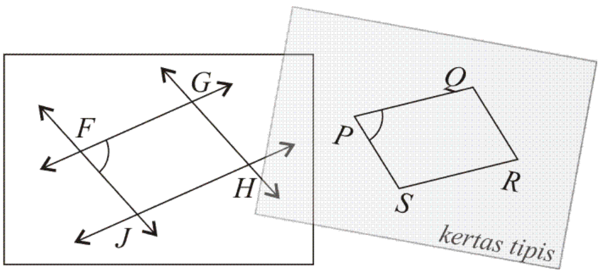
Pada layang-layang $KITE$ di samping, diagonal KT membagi layang-layang menjadi dua segitiga yang kongruen. Diagonal IE membagi layang-layang menjadi dua segitiga samakaki yang tidak kongruen. Sudut yang dibentuk oleh dua sisi yang kongruen dinamakan sebagai sudut puncak (*vertex angles*) sedangkan sudut yang lain sudut bukan puncak (*non vertex angles*).

Layang-layang memiliki sifat:

1) Kedua sudut *bukan puncak* suatu layang-layang besarnya *sama*.
2) Diagonal-diagonal layang-layang *saling tegak lurus*.
3) Salah satu diagonal merupakan *garis bagi* diagonal yang lain.
4) *Sudut puncak* suatu layang-layang dibagi dua sama besar oleh *diagonal yang melalui titik puncak*.

D. AKTIVITAS PEMBELAJARAN

1. Lukis dua pasang garis sejajar sehingga terbentuk jajargenjang $FGHJ$, jiplak jajargenjang tersebut dengan menggunakan kertas tipis di atasnya, sehingga diperoleh jajargenjang $PQRS$. Beri label untuk menandai bahwa $\angle F$ dan $\angle P$ sama besar. Putar jajargenjang $PQRS$ sebesar 180° dan himpitkan kembali ke jajargenjang $FGHJ$.



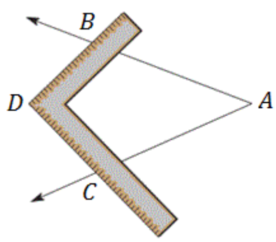
   Berdasarkan aktivitas di atas,
   a. Susunlah daftar ruas-ruas garis yang sama panjang.
   b. Susunlah daftar sudut-sudut yang sama besar.
   c. Susunlah dugaan/konjektur tentang hubungan antar sudut jajargenjang.
   d. Buktikan kebenaran dugaan tersebut.

2. Pada sepeda gunung atau sepeda balap, terdapat komponen pemindah yang dinamakan *rear derailleur*. Fungsi alat ini adalah untuk memindahkan rantai ke roda gigi (gir) yang dikehendaki. Carilah informasi tentang komponen ini dan sifat bangun segiempat apa yang digunakan.

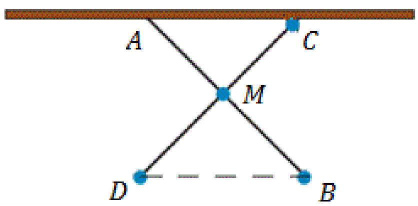
3. Bukalah tautan yang memuat definisi layang-layang (*kite*) berikut
   http://mathworld.wolfram.com/Kite.html dan
   http://amsi.org.au/teacher_modules/Rhombuses_Kites_and_Trapezia.html.
   Apakah perbedaan mendasar yang membedakan kedua definisi tersebut?
   Diskusikan dengan teman sejawat, bagaimana sikap kita dengan adanya perbedaan tersebut?
4. Perhatikan definisi trapesium (versi Amerika: *trapezoid*, versi Inggris: *Trapezium*) di laman http://mathworld.wolfram.com/Trapezoid.html. Diskusikan dengan teman sejawat, berdasarkan definisi tersebut apakah jajargenjang termasuk bagian dari trapesium?
   Bandingkan dengan definisi di laman
   http://www.cut-the-not.org/Curriculum/Geometry/Quadrilaterals.shtml
   "In a square, rectangle, or rhombus, the opposite side lines are parallel. A quadrilateral with the opposite side lines parallel is known as aparallelogram. If only one pair of opposite sides is required to be parallel, the shape is atrapezoid."
   Berdasarkan definisi ini apakah jajargenjang termasuk bagian dari trapesium?

E. LATIHAN

1. Diberikan segiempat $MNPQ$. Dapatkah segiempat tersebut diberi nama $PQMN$ atau $MNQP$?



2. Seorang tukang kayu meletakkan penggaris siku pada sebuah sudut sehingga dipenuhi $\overline{AB} = \overline{AC}$ dan $\overline{BD} = \overline{CD}$. Apa yang dapat disimpulkan tentang posisi titik D dan bentuk bangun $ABCD$? Berikan penjelasannya.



3. Untuk memudahkan penyimpanan, sebuah meja setrika dibuat dengan konstruksi seperti pada gambar. Titik C menempel pada meja dan

diberi engsel, sedangkan titik A dapat bergeser sepanjang sisi bawah meja. Kaki-kaki AB dan CD sama panjang, dengan engsel M yang berada di titik tengah kedua tiang. Sebuah tali diikat di antara titik B dan D. Dengan konstruksi bangun apakah $ADBC$? Berikan penjelasannya.

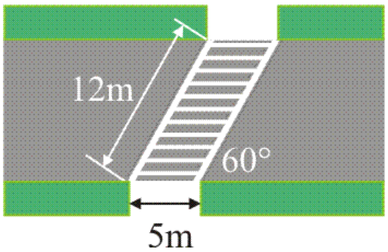
4. Jika diagonal suatu trapesium sama panjang, maka apa yang dapat Anda simpulkan tentang trapesium tersebut?

5. Fitri mengungkapkan bahwa diagonal jajargenjang membagi dua sama besar sudut-sudut jajargenjang. Benar atau salahkah pendapat Fitri? Buktikan jika benar, atau contoh kontra-nya jika salah.

6. Gani dan Eka mendeskripsikan cara untuk menunjukkan bahwa suatu segiempat adalah jajar genjang. Manakah yang benar? Berikan alasannya.

   Gani: Suatu segi empat merupakan jajargenjang jika sepasang sisinya sama panjang dan sepasang sisi yang lain saling sejajar.
   Eka: Suatu segi empat merupakan jajargenjang jika sepasang sisi yang berhadapan sama panjang dan sejajar.

7. Sebuah *zebra cross* dibuat miring membentuk 60° terhadap sisi jalan dengan ukuran seperti pada gambar. Tentukan jarak tegak lurus antara kedua sisi *zebra cross*.



8. Diberikan sebuah pernyataan "Jika semua sudut suatu segi empat adalah siku-siku, maka segi empat tersebut adalah persegi". Benar atau salahkan pernyataan tersebut? Berikan penjelasan jika benar, dan contoh kontra jika salah.

9. Buktikan bahwa jumlah sudut segiempat adalah 360°.

10. Tina menyatakan: "Jika semua sudut suatu segiempat adalah siku-siku, maka segiempat tersebut adalah persegi". Benar atau salahkah pernyataan Tina? Berikan penjelasan jika benar, dan berikan contoh kontra jika salah.

F. RANGKUMAN

Poligon merupakan bangun datar tertutup yang sisi-sisinya berupa ruas garis, dan setiap ruas garis hanya berpotongan pada ujung-ujungnya. Melalui definisi poligon, maka segiempat didefinisikans sebagai poligon yang bersisi empat. Beberapa segiempat memiliki nama khusus, seperti jajar genjang, persegi panjang, belah ketupat, persegi, trapesium, dan layang-layang.

G. UMPAN BALIK

Anda telah mempelajari materi segiempat, melaksanakan aktivitas pembelajaran, dan mengerjakan latihan. Pada bagian aktivitas pembelajaran, Anda mendapatkan berbagai macam pendefinisian beberapa segiempat yang berbeda tergantung dari sumber yang digunakan. Untuk itu, sebagai guru diharapkan mencermati struktur definisi yang akan digunakan untuk pembelajaran di kelas. Dari latihan, Anda dapat menilai kemampuan diri, jika jawaban benar lebih dari 85% maka dipersilakan untuk mempelajari materi berikutnya dengan catatan tetap mempelajari materi yang masih kurang. Namun demikian jika dirasakan masih belum menguasai materi, anda dapat mempelajari kembali.

KEGIATAN PEMBELAJARAN 4
LINGKARAN

A. TUJUAN

Tujuan Kegiatan Pembelajaran 4 adalah untuk memberikan pemahaman kepada pembaca terkait dengan lingkaran yang meliputi lingkaran dan bagian-bagiannya, nilai π, keliling, luas, dan garis singgung.

B. INDIKATOR PENCAPAIAN KOMPETENSI

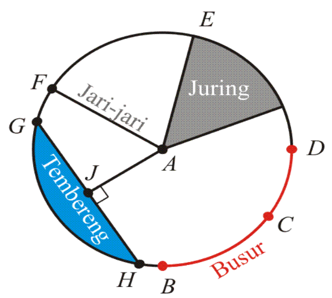
Setelah membaca dan mengikuti serangkaian kegiatan pada bagian ini, pembaca diharapkan mampu

1. Menjelaskan bagian-bagian lingkaran.
2. Menjelaskan kaitan keliling lingkaran dengan nilai π dan berbagai cara mendapatkan nilai pendekatannya.
3. Menurunkan rumus luas lingkaran.
4. Menjelaskan hubungan antara sudut keliling dan sudut pusat.
5. Menjelaskan konsep garis potong dan garis singgung.
6. Melukis garis singgung lingkaran untuk berbagai kondisi.
7. Menggunakan sifat-sifat lingkaran dalam penyelesaian masalah.

C. URAIAN MATERI

1. Lingkaran dan bagian-bagiannya

Lingkaran merupakan himpunan semua titik pada bidang yang berjarak sama terhadap suatu titik tertentu. Titik tertentu ini disebut sebagai pusat lingkaran. Ruas garis yang menghubungkan suatu titik pada lingkaran ke pusat dinamakan jari-jari. Istilah jari-jari juga dapat digunakan untuk menyatakan panjang ruas garis yang menghubungkan pusat lingkaran dengan titik pada lingkaran.



Gambar 34. Lingkaran dan bagian-bagiannya

Pada gambar di atas, garis lengkung BCD disebut busur pendek atau busur kecil, sedangkan garis lengkung BGD disebut busur panjang atau busur besar. Selanjutnya jika disebutkan busur BD maka yang dimaksud adalah busur pendek. Tali busur merupakan ruas garis yang menghubungkan dua titik pada lingkaran. Pada gambar, GH merupakan tali busur. Talibusur yang melalui pusat lingkaran dinamakan diameter.

Apotema suatu lingkaran merupakan ruas garis yang menghubungkan pusat lingkaran ke titik tengah tali busur. Istilah apotema dapat digunakan untuk menyatakan panjangnya. Sebagai contoh pada gambar di atas, ruas garis AJ, ataupun panjang AJ dapat disebut sebagai apotema. Apotema tegak lurus tali busur yang bersesuaian.

Tembereng merupakan daerah yang dibatasi oleh tali busur dan busurnya. Juring lingkaran merupakan daerah yang dibatasi oleh dua jari-jari dan busur. Perhatikan pada gambar di atas, bagian yang diarsir merupakan juring kecil APB, dan bagian yang tidak diarsir merupakan juring besar AP.

2. Keliling Lingkaran dan π

a. Menentukan nilai π dan keliling lingkaran

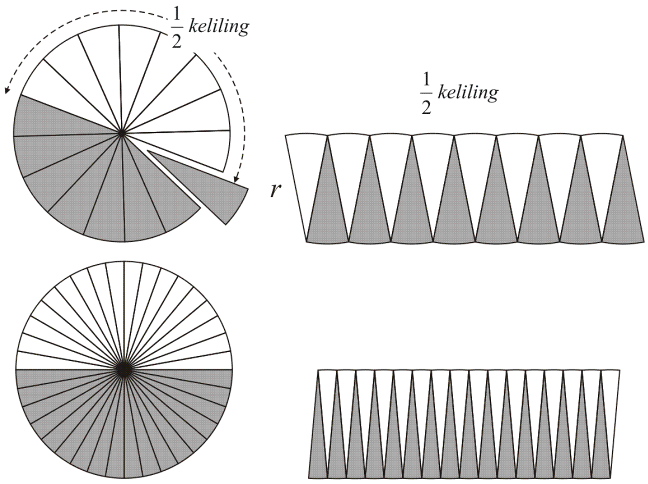
Untuk setiap lingkaran perbandingan dari keliling dan diameter, yaitu K/d bernilai tetap yaitu mendekati 3,14. Nilai ini disebut sebagai π (dibaca "pi").

Dengan demikian $\frac{K}{d} = \pi$, sehingga $K = \pi d$. Karena $d = 2r$, maka $K = 2\pi r$.

Di abad pertengahan matematikawan Eropa menemukan cara untuk menentukan nilai π melalui deret. Franscois Viete (1598) menemukan $\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdot \cdots$. Leibniz (1646-1716) menemukan $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots$. Nama lain untuk deret ini adalah deret Gregory-Leibniz atau Madhava-Leibniz. Madhava (1340-1425), matematikawan India ternyata telah menemukan deret tersebut lebih awal.

3. Luas daerah Lingkaran dan Juring

Ilustrasi berikut menunjukkan proses mendapatkan luas daerah lingkaran. Daerah lingkaran dipotong-potong kemudian disusun kembali menjadi bentuk menyerupai jajargenjang. Jika sudut pusat juring mendekati nol, maka bangun yang dibentuk akan semakin mendekati jajargenjang.



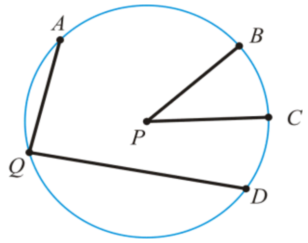
Gambar 35. Luas Lingkaran

Dari aktivitas di atas, luas lingkaran berjari-jari r sama dengan luas jajargenjang dengan tinggi$r$ dan panjang setengah keliling lingkaran, sehingga

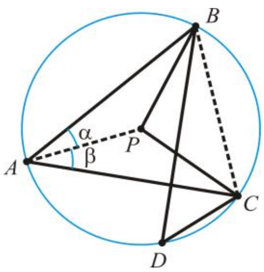
$$\text{Luas lingkaran} = r \times \frac{1}{2} \times 2\pi r = 2\pi r^2$$

4. Sudut Pusat dan Sudut Keliling

Pada gambar di samping P pusat lingkaran, A, B, C, D, dan Q pada lingkaran. $\angle BPC$ dan $\angle AQD$ berturut-turut disebut sebagai sudut pusat dan sudut keliling.



Gambar 36. Sudut Pusat dan Sudut



Gambar 37. Hubungan Sudut Pusat dan Sudut Keliling

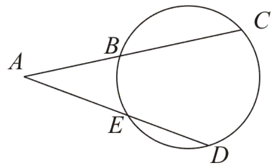
Perhatikan gambar, $\angle BPC$ merupakan sudut pusat, dan $\angle BAC$ sudut keliling yang menghadap busur yang sama (busur BC). Panjang $AP = PB = PC$ sehingga ΔAPB dan APC sama kaki serta berlaku $\angle BAP = \angle ABP$ dan $\angle CAP = \angle ACP$. Karena jumlah sudut segitiga 180° maka pada ΔAPB berlaku $\angle BPA = 180° - 2\angle BAP$ dan pada ΔAPC berlaku $\angle APC = 180° - 2\angle CAP$. Perhatikan sudut BPC,

$$\begin{aligned}\angle BPC &= 360° - \angle BPA - \angle AP \\ &= 360° - (180° - 2\angle BAP) - (180° - 2\angle CAP) \\ &= 2(\angle BAP + \angle CAP) = 2\angle BAC\end{aligned}$$

Jadi besar sudut pusat sama dengan dua kali besar sudut keliling yang menghadap busur yang sama.

Contoh Soal:

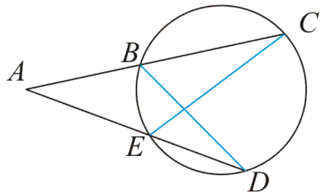
Diberikan sebuah lingkaran dan dua buah garis seperti ilustrasi pada gambar di samping. Buktikan bahwa $AB \cdot AC = AE \cdot AD$.



Bukti:

$\angle ACE = \angle ADB$ (menghadap busur BE)

$\angle C\_D = \angle CED$ (menghadap busur CD), akibatnya $\angle ABD = \angle AED$.

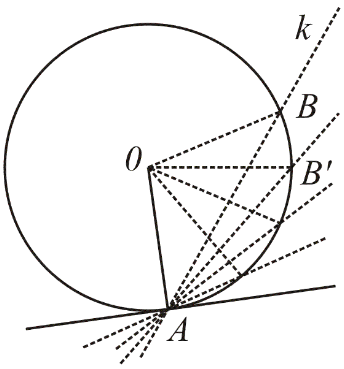


Perhatikan ΔABD dan ΔAEC, ketiga sudut segitiga ini sama, sehingga ΔABD sebangun dengan ΔAEC. Dengan demikian berlaku $\frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AC}$. Jika kedua ruas dikalikan $AD \cdot AC$ maka diperoleh $AB \cdot AC = AE \cdot AD$. Terbukti.

5. Garis singgung

a. Pengertian garis singgung (*tangent*)

Perhatikan gambar di samping. Misal diberikan dua titik berbeda pada lingkaran A dan B, garis yang melalui A dan B memotong lingkaran di dua titik. Garis yang memotong lingkaran di dua titik dinamakan sebagai garis potong atau sekan (*secant*). Bayangkan titik B bergerak sepanjang lingkaran ke arah titik A. Ketika kedua titik A dan B menyatu maka garis melalui A dan B akan memotong lingkaran di satu titik saja. Garis yang demikian dinamakan sebagai garis singgung lingkaran (*tangent*).



Gambar 38.
Garis Singgung

Garis singgung lingkaran adalah garis yang memotong lingkaran tepat di satu titik..

Pada gambar di atas, karena $OA = OB$, maka ΔAOB sama kaki dan $\angle OAB = \angle OBA$. Karena jumlah besar sudut suatu segitiga adalah 180°, maka berlaku

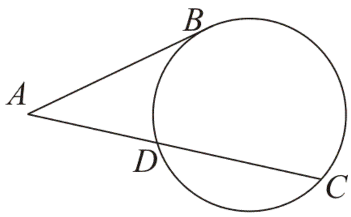
$$\angle OAB = \frac{1}{2}(180° - \angle AOB)$$

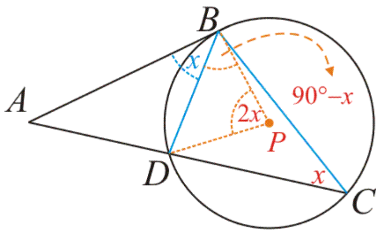
Perhatikan jika titik B bergerak mendekati A, maka besar $\angle AOB$ semakin kecil. Sehingga ketika B berhimpit dengan A dan garis AB berubah menjadi garis singgung di titik A, akibatnya besar $\angle AOB = 0°$. Dengan demikian besar sudut antara garis singgung di titik A dengan jari-jari yang melalui A adalah $90°$.

Garis singgung lingkaran tegak lurus jari-jari yang melalui titik singgungnya.

Contoh Soal:

Pada gambar di samping, diberikan AB garis singgung lingkaran, buktikan bahwa $AB^2 = AD \cdot AC$.





Bukti:

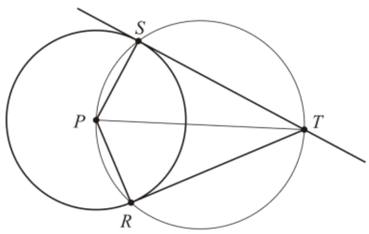
Akan ditunjukkan terlebih dahulu bahwa ΔABC dan ΔACB sebangun.

Misalkan $\angle BCA = x$, karena menghadap busur yang sama dan P pusat lingkaran, maka $\angle BPD = 2x$. Perhatikan bahwa ΔBPD sama kaki, akibatnya $\angle PBD = \angle BDP = 90° - x$. $\overline{AB}$ merupakan garis singgung maka $\overline{AB} \perp \overline{BP}$. Akibatnya $\angle DBA = x = \angle BCA$.

Perhatikan ΔABD dan ΔACB, dipenuhi $\angle A = \angle A$ dan $\angle ACB = \angle ABD$. Dengan kesamaan dua sudut ini, maka sudut ketiga dijamin sama. Akibatnya $\Delta ABC \sim \Delta ADB$. Dengan kesebangunan, maka berlaku $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AB}$. Jika kedua ruas dikalikan dengan $AC \cdot AB$ maka diperoleh $AB^2 = AC \cdot AD$. Terbukti.

b. Panjang ruas garis singgung

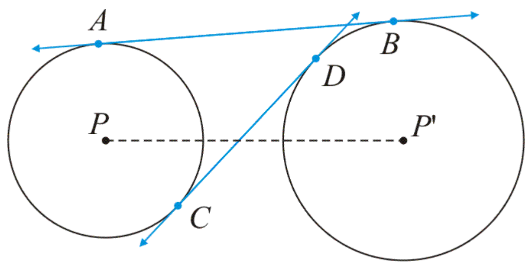
Pada gambar di samping, $\overline{ST}$ dan $\overline{TR}$ dinamakan ruas garis singgung. Dengan memahami cara melukis garis singgung, Anda dapat menentukan rumus panjang ruas garis singgung lingkaran. Gunakan Teorema Pythagoras.



Gambar 39. Ruas Garis Singgung

c. Garis singgung persekutuan dua lingkaran

Garis singgung persekutuan dua lingkaran adalah garis yang menyinggung kedua lingkaran.Pada diagram di atas, garis AB menyinggung kedua lingkaran berturut-

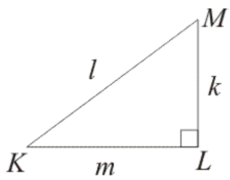


Gambar 40. Garis Singgung Persekutuan

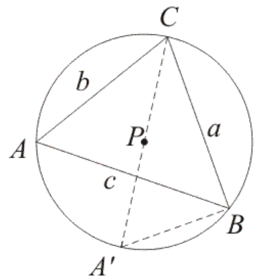
turut di A dan B. Garis singgung AB disebut garis singgung persekutuan luar karena garis tersebut tidak memotong ruas garis yang menghubungkan pusat kedua lingkaran. Sementara itu, garis CD menyinggung kedua lingkaran dan memotong ruas garis yang menghubungkan kedua titik pusat lingkaran. Garis singgung CD disebut garis singgung persekutuan dalam.

D. AKTIVITAS PEMBELAJARAN

1. Dalam materi trigonometri, jika diberikan segitiga siku-siku KLM, siku-siku di L, maka didefinisikan $\sin K = \frac{k}{l}$. Dengan menggunakan sifat sudut keliling, tunjukkan bahwa $\frac{a}{\sin A} = 2R$, dengan R jari-jari lingkaran luar segitiga ABC.



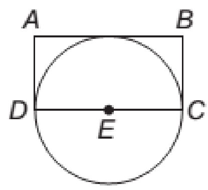
$\sin K = \frac{k}{l}$



2. Archimedes dalam buku *Book of Lemmas* telah menyelidiki suatu bangun yang dinamakan *Salinon*. Carilah informasi dari berbagai sumber, dan sifat unik apa yang terdapat pada *salinon*?
3. Eratosthenes (276-194 SM) berhasil mengukur keliling bumi dengan tingkat kesalahan kurang dari 2% dengan ukuran sebenarnya. Carilah informasi dari berbagai sumber tentang bagaimana cara Erastothenes melakukannya.
4. Carilah beberapa referensi tentang sejarah penemuan nilai π.

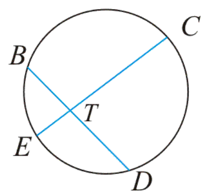
E. LATIHAN

1. Bandingkan keliling lingkaran berpusat di E dan keliling persegi panjang $ABCD$ pada gambar. Manakah pernyataan berikut yang benar?

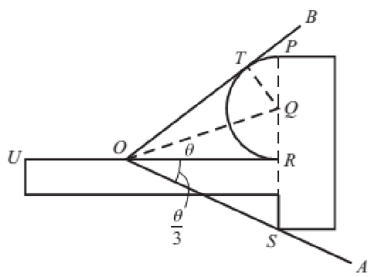


   a. Keliling $ABCD$ lebih besar daripada keliling lingkaran.
   b. Keliling lingkaran lebih besar daripada keliling $ABCD$.
   c. Keliling lingkaran sama dengan keliling $ABCD$.
   d. Informasi yang diberikan tidak cukup untuk membandingkan keliling lingkaran dan persegi panjang $ABCD$.

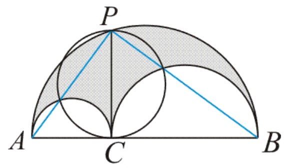
2. Untuk setiap pernyataan berikut, tentukan apakah *selalu benar*, *bisa benar bisa salah*, atau *tidak pernah benar*.
   a. Sudut pusat yang menghadap busur kecil merupakan sudut lancip.
   b. Dua buah setengah lingkaran selalu kongruen.
   c. Besar sudut pusat tergantung pada panjang jari-jari.
   d. Pada sebuah lingkaran, dua talibusur yang panjangnya sama memiliki jarak yang sama ke pusat lingkaran.
   e. Jika titik-titik sudut segitiga terletak pada sebuah lingkaran dan salah satu sisinya merupakan diameter, maka segitiga tersebut samakaki.
   f. Jika diberikan dua lingkaran yang konsentris (memiliki titik pusat yang sama) maka setidaknya kedua lingkaran tersebut memiliki satu titik persekutuan.
   g. Jika diberikan dua buah lingkaran tidak sepusat dapat dibuat garis singgung terhadap kedua lingkaran tersebut.
3. Diberikan lingkaran, $\overline{BD}$ dan $\overline{EC}$ berpotongan di T. Buktikan bahwa $BT \cdot TD = ET \cdot TC$.



4. Sebuah pesawat penumpang terbang dengan ketinggian 10 km di atas permukaan bumi. Misalkan seorang penumpang membawa teropong, dengan asumsi jari-jari bumi adalah 6000 km, berapakah jarak pesawat terhadap obyek terjauh di permukaan bumi yang dapat dilihat penumpang? (gunakan kalkulator).
5. Semua sisi segi empat $ABCD$ menyinggung lingkaran berpusat di O. Buktikan bahwa $AB + CD = AD + BC$.
6. Suatu alat berbentuk seperti kapak di berikut ini dapat digunakan untuk membagi sebarang sudut menjadi tiga bagian sama besar. Konstruksi dasar alat ini adalah setengah lingkaran berpusat di Q, $PQ = QR = RS$, $UR \perp PR$. Untuk membagi sebarang sudut (misal $\angle AOB$) menjadi tiga sama besar, letakkan alat pada sudut sedemikian sehingga S pada kaki sudut pertama, O pada garis RU, dan busur lingkaran menyinggung kaki sudut kedua (titik T). Dengan konstruksi alat dan prosedur seperti di atas, buktikan bahwa $\angle AOR = \frac{1}{3}\angle AOB$.



7. Dalam *Book of Lemmas*, Archimedes memperkenalkan bentuk yang dinamakan arbelos seperti tampak pada gambar yang diarsir. Ruas garis AB terdapat titik C, kemudian dibuat setengah lingkaran dengan diameter AC, AB, dan CB. Titik P pada busur AB sehingga PC tegak lurus AB. Buktikan bahwa luas daerah arbelos sama dengan luas daerah lingkaran berdiameter PC.



8. Archimedes (287 – 212 SM) menyatakan bahwa luas suatu lingkaran sama dengan luas segitiga yang panjang sisi siku-sikunya sama dengan jari-jari dan keliling lingkaran. Benarkah pernyataan ini? Berikan penjelasannya.
9. Selidikilah kemungkinan banyak garis singgung persekutuan dua lingkaran.

F. RANGKUMAN

Lingkaran merupakan tempat kedudukan titik-titik pada bidang yang berjarak sama terhadap satu titik tertentu. Istilah-istilah untuk menamai bagian/unsur-unsurnya, antara lain titik pusat, jari-jari, diameter, busur, tali busur, tembereng, juring, apotema.

Untuk sebarang lingkaran, perbandingan antara keliling dan diameter bernilai konstan yang kemudian disimbolkan dengan π (dibaca "pi"). Luas lingkaran dapat dicari dengan memotong lingkaran menjadi juring-juring dan menyusunnya kembali menjadi bentuk "jajargenjang" sehingga diperoleh $L = \pi r^2$. Misalkan α sudut keliling lingkaran, maka besar sudut pusat lingkaran yang menghadap busur yang sama adalah 2α.

Garis singgung lingkaran memotong lingkaran tepat di satu titik dan tegak lurus jari-jari yang melalui titik potong. Dua ruas garis singgung pada lingkaran yang melalui titik di luar lingkaran memiliki panjang yang sama.

G. UMPAN BALIK

Anda telah mempelajari materi lingkaran, melaksanakan aktivitas pembelajaran dan latihan telah disisipkan problem-problem yang diangkat dari topik sejarah matematika. Topik ini diharapkan dapat menginspirasi guru untuk meningkatkan motivasi belajar siswa. Dari latihan, Anda dapat menilai kemampuan diri, jika jawaban benar lebih dari 85% maka dipersilakan untuk mempelajari materi berikutnya dengan catatan tetap mempelajari materi yang masih kurang. Namun demikian jika dirasakan masih belum menguasai materi, anda dapat mempelajari kembali.

KEGIATAN PEMBELAJARAN 5
GEOMETRI TRANSFORMASI

A. TUJUAN

Tujuan Kegiatan Pembelajaran 5 adalah untuk memberikan pemahaman kepada pembaca terkait dengan transformasi geometri yang meliputi transformasi isometri (translasi, releksi, dan rotasi) dan salah satu transformasi yang termasuk non isometri yaitu dilatasi.

B. INDIKATOR PENCAPAIAN KOMPETENSI

Setelah membaca dan mengikuti serangkaian kegiatan pada bagian ini, pembaca diharapkan mampu:

1. Menjelaskan konsep transformasi geometri.
2. Menjelaskan konsep translasi.
3. Menjelaskan konsep rotasi.
4. Menjelaskan konsep refleksi terhadap garis.
5. Menjelaskan konsep refleksi terhadap titik.
6. Menjelaskan konsep dilatasi.
7. Menggunakan konsep transformasi untuk menyelesaikan permasalahan.

C. URAIAN MATERI

Gambar 41. Transformasi Tidak Merubah Bentuk

Sumber: http://jafhaning.files.wordpress.com

Gambar 42. Transformasi Merubah Bentu

Sumber: http://www.memobee.com/

Seorang anak mendorong meja, maka seluruh titik pada meja tersebut akan berubah posisinya tanpa mengubah bentuk meja. Sebuah balon ditiup, maka setiap titik pada balon tersebut berpindah posisinya ke tempat yang baru, bentuk balon akan berubah. Ilustrasi di atas merupakan contoh transformasi.

Jika seluruh titik suatu obyek geometri dipindahkan menurut suatu aturan, akan didapatkan **bayangan** dari gambar asli. Proses ini dinamakan **transformasi**. Setiap titik pada obyek asli memiliki pasangan dengan titik pada bayangannya. Dalam geometri, transformasi merupakan prosedur yang spesifik yang memindahkan titik-titik pada bidang ke titik-titik yang berbeda.

Suatu **transformasi** merupakan sebuah korespondensi satu-satu antara dua himpunan S dan S', sedemikian sehingga setiap titik di himpunan S berkorespondensi dengan satu dan hanya satu titik di himpunan S', yang disebut sebagai **peta** (**bayangan**), serta setiap titik di S' merupakan peta dari satu dan hanya satu titik di S, yang dinamakan sebagai prapeta.

Transformasi yang tidak mengubah bentuk dinamakan isometri. Pada isometri, jarak setiap dua titik pada bangun bayangan sama dengan jarak dua titik pada bangun asalnya, sehingga bangun yang dihasilkan kongruen dengan bangun aslinya. Transformasi isometri di antaranya adalah transformasi identitas (peta dan prapeta berimpit), pergeseran (translasi), perputaran (rotasi) dan pencerminan (refleksi).

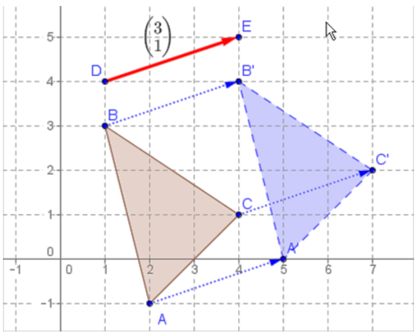
Transformasi yang merubah jarak atau merubah bentuk dinamakan transformasi non isometri atau transformasi yang mengubah bentuk. Salah satu transformasi yang mengubah bentuk adalah perbesaran atau dilatasi.

1. Transformasi Isometri

a. Translasi

Translasi merupakan transformasi yang memindahkan titik-titik pada bidang dengan arah yang sama dan jarak yang sama pula.

Jika $\Delta A'B'C'$ merupakan bayangan dari ΔABC pada suatu translasi, maka $AA' = BB' = CC'$. Pada suatu translasi, diperlukan ruas garis berarah yang dinamakan sebagai vektor translasi. Pada sistim koordinat Kartesius, gerakan mendatar sejauh a, dan vertikal sejauh b dinyatakan dengan vektor $\binom{a}{b}$.



Gambar 43 Translasi

Sebagai ilustrasi pada gambar di atas, vektor translasi $\overline{v} = \binom{3}{1}$ mentranslasikan obyek dengan arah pergeseran 3 satuan ke kanan dan 1 satuan ke atas. Pada vektor translasi pergeseran vertikal naik atau horisontal ke kanan dinyatakan dengan bilangan positif, sedangkan gerakan vertikal turun atau horisontal kiri dinyatakan dengan bilangan negatif.

Translasi dengan vektor translasi $\binom{a}{b}$ dapat dipandang sebagai suatu fungsi $f(A) = A'$ dengan

$$f\binom{x}{y} = \binom{x}{y} + \binom{a}{b}$$

Catatan: Notasi yang dapat digunakan di antaranya

$T: (x, y) \mapsto (x + a, y + b)$	$T(x, y) = (x + a, y + b)$
$T_{\overline{v}}(x, y) = (x + a, y + b)$	$(x, y) \xrightarrow{T=\binom{a}{b}} (x + a, y + b)$

Secara umum, jika titik P(x, y)ditranslasikan oleh $\overline{v}$= $\binom{a}{b}$ ke $P'(x', y')$, maka diperoleh hubungan

$$x' = x + a$$
$$y' = y + b$$

Dalam bentuk matriks, persamaan di atas dapat dinyatakan sebagai

$$\binom{x'}{y'} = \binom{x}{y} + \binom{a}{b}$$

Contoh soal:

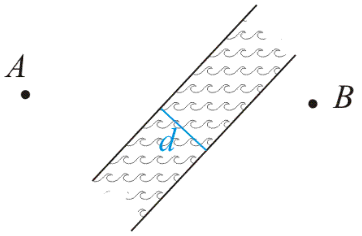
Tentukan persamaan bayangan kurva $y = x^2 + x - 1$ oleh translasi $\binom{1}{-2}$.

Alternatif penyelesaian (bantuan):

Misalkan $T(x, y)$ pada kurva $y = x^2 + x - 1$, titik T akan dipetakan ke $T'(x', y')$ dengan persamaan $x' = x + 1$ dan $y' = y + (-2)$. Bentuk dapat diubah menjadi $x = x' - 1$ dan $y = y' + 2$. Substitusikan kedua persamaan ini ke $y = x^2 + x - 1$, diperoleh bentuk $y' + 2 = (x' - 1)^2 + (x - 1) - 1$. Jika disederhanakan diperoleh $y' = x'^2 - x' - 3$. Karena (x', y') tempat kedudukan titik-titik pada bayangan, maka persamaan bayangan yang dimaksud adalah $y = x^2 - x - 3$.

Contoh Soal:

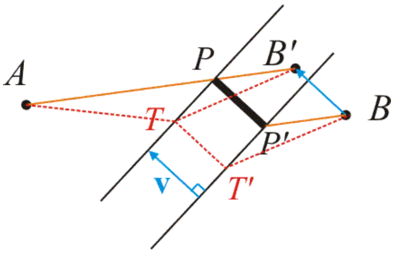
Suatu jalur jalan dan jembatan yang arahnya tegak lurus sungai harus dibangun untuk menghubungkan kota A ke kota B dengan posisi seperti pada gambar. Tentukan posisi



jembatan agar diperoleh total jarak yang harus dilalui dari kota A ke B menjadi minimum.

Penyelesaian

Buat vektor $\overline{v}$ dengan panjang sama dengan lebar sungai dan tegak lurus sisi sungai. Translasikan B dengan vektor translasi $\overline{v}$ sehingga diperoleh B'. $\overline{AB'}$ memotong sisi sungai di P. Di titik P inilah jembatan PP' dibangun.



Untuk menunjukkan bahwa $AP + PP' + P'B$ minimum, digunakan sifat segitiga. Untuk T tidak sama dengan P,

$AB' < AT + TB'$ (sifat segitiga)
$AP + PB' < AT + TB'$ (penjumlahan ruas garis)
$AP + PB' < AT + T'B$ (sifat jajargenjang $PB' = P'B$ dan $TB' = T'B$)
$AP + P'B + PP' < AT + T'B + TT'$ ($PP' = TT'$)
$AP + PP' + P'B < AT + TT' + T'B$ (sifat komutatif penjumlahan)

Jarak total dari A ke B melalui P kurang dari jarak total dari A ke B melalui T.

b. Rotasi (Perputaran)

1) Rotasi dengan pusat $O(0,0)$

Rotasi dengan pusat $O(0,0)$, dengan sudut rotasi α dinotasikan sebagai $R_{O,\alpha}$.

Rotasi dengan pusat P sudut rotasi α merupakan suatu transformasi yang memenuhi:

i. Untuk setiap titik $A \neq P$, maka $PA = PA'$ dan $\angle APA' = \alpha$.
ii. Bayangan pusat rotasi P adalah P sendiri.

Misalkan sudut antara sumbu-x positif dan OA adalah θ, maka pada titik A berlaku hubungan

$$x = OA \cdot \cos\theta \text{ dan}$$
$$y = OA \cdot \sin\theta \quad \text{....... *)}$$

Pada rotasi dengan pusat $O(0,0)$ dan sudut rotasi α bayangan titik A adalah $A'(x', y')$ dangan $x' = OA \cdot \cos(\theta + \alpha)$ dan $y' = OA \cdot \sin(\theta + \alpha)$. Akibatnya,

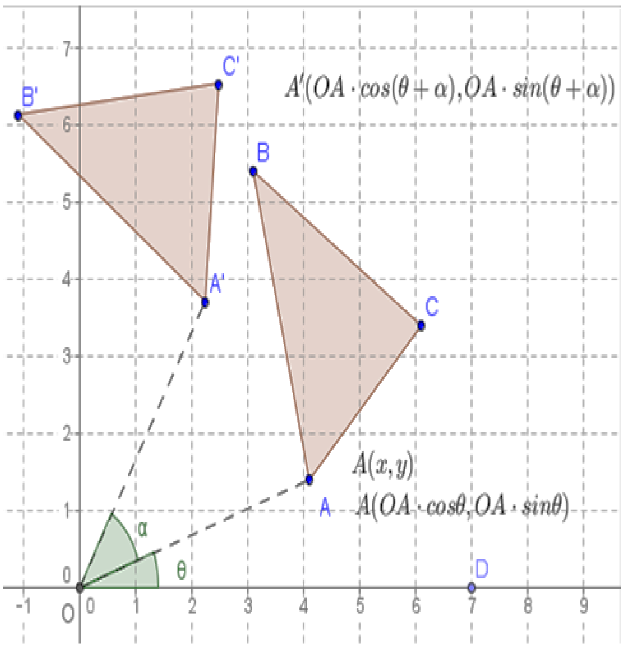
$$x' = OA \cdot \cos\theta \cos\alpha - OA \cdot \sin\theta \sin\alpha$$
$$y' = OA \cdot \sin\theta \cos\alpha + OA \cdot \cos\theta \sin\alpha$$

Dengan mensubstitusikan *) ke persamaan di atas, diperoleh

$$x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha$$
$$y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha$$

Dalam bentuk matriks, dapat dituliskan sebagai

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



Gambar 44. Rotasi berpusat di (0, 0)

Contoh:

Tentukan persamaan bayangan garis $y = 2x + 1$ oleh rotasi 45° dengan pusat (0,0).

Alternatif penyelesaian:

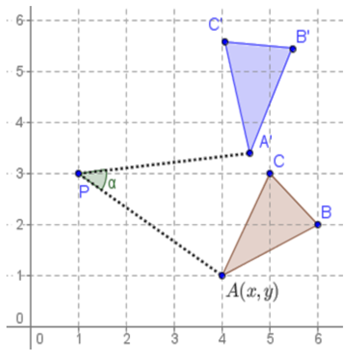
Misalkan titik $T(x, y)$ titik pada garis $y = 2x + 1$. Titik ini akan dipetakan ke $T'(x', y')$ dengan persamaan $x' = x\cos 45° - y\sin 45°$ dan $y' = x\sin 45° + y\cos 45°$

Jika disederhanakan diperoleh $x' = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot x - \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot y$ dan $y' = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot x + \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot y$.

Dengan cara eliminasi atau substitusi diperoleh $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}(x' + y')$ dan $y = -\frac{1}{2}\sqrt{2}(x' - y')$. Selanjutnya kedua persamaan ini disubstitusikan ke $y = 2x + 1$, diperoleh $y' = -3x' - \sqrt{2}$. Karena (x', y') bayangan titik $T(x, y)$, maka persamaan bayangan yang dimaksud adalah $y = -3x - \sqrt{2}$.

2) Rotasi dengan pusat $P(a, b)$

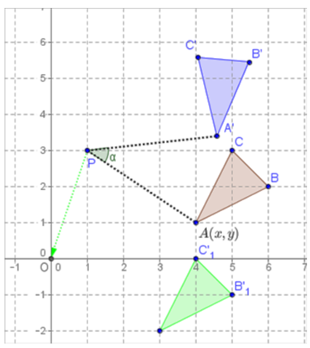
Ilustrasi berikut merupakan rotasi $R_{P,\alpha}$. Perhatikan bahwa langkah-langkah berikut akan menghasilkan bayangan yang sama dengan gambar di atas.



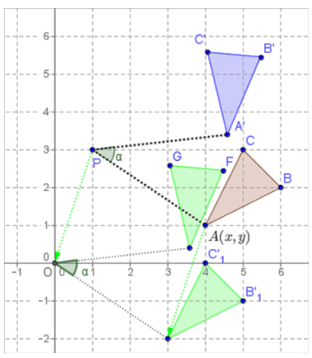
Gambar 45. Rotasi Berpusat di P

1) Translasikan obyek dengan vektor translasi $PO = \begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix}$ sehingga diperoleh bayangan

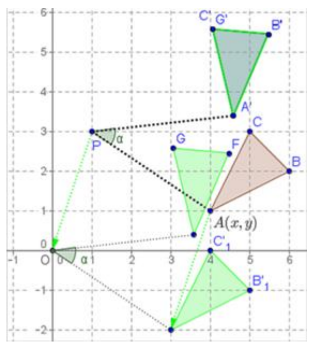
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix}$$



Gambar 46. Translasi ke O



Gambar 47. Rotasi $R_{O,á}$



Gambar 48. Translasi kembali ke P

2) Rotasikan bayangan di atas dengan pusat O, sudut rotasi α.

Diperoleh bayangan

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix}.$$

3) Translasikan bayangan di atas dengan vektor translasi OP.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

c. Refleksi

Gambar 49. Refleksi

Foto: Eko W. http://bulbr.wordpress.com/

Refleksi terhadap garis k merupakan transformasi pada bidang sedemikian sehingga:

i. Jika titik P tidak pada k, maka bayangan dari P, yaitu P' dengan k sebagai garis bagi tegak lurus $\overline{PP'}$.

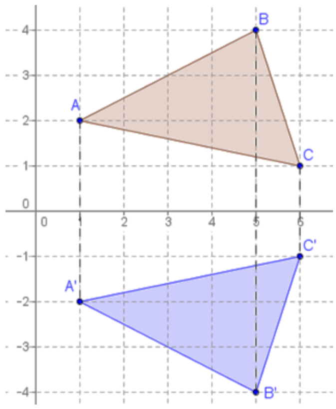
ii. Jika titik P pada k, maka bayangan P adalah dirinya sendiri.

a. Refleksi terhadap sumbu-x

Misalkan (x', y') merupakan bayangan dari (x, y), dari gambar di atas didapat hubungan: $x' = x$ dan $y' = y$, sehingga:

$$x' = x \Leftrightarrow x' = 1 \cdot x + 0 \cdot y$$
$$y' = -y \Leftrightarrow y' = 0 \cdot x - 1 \cdot y$$

Jika diubah ke bentuk persamaan matriks, diperoleh bentuk: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Matriks $M_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ dinamakan sebagai matriks pencerminan terhadap sumbu-x.



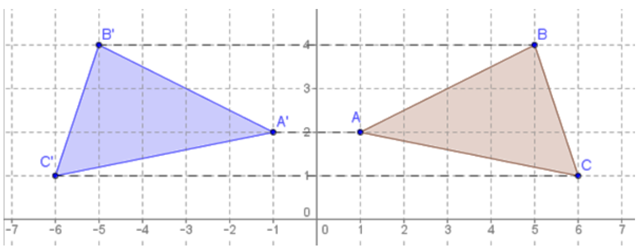
Gambar 50. Refleksi terhadap Sumbu-x

b. Refleksi terhadap sumbu-y

Misalkan (x', y') merupakan bayangan dari (x, y), dari gambar di atas didapat hubungan: $x' = -x$ dan $y' = y$, sehingga

$$x' = -x \Leftrightarrow x = -1.x + 0.y$$
$$y' = y \Leftrightarrow y' = 0.x + 1.y.$$

Dalam bentuk persamaan matriks persamaan di atas dapat dinyatakan sebagai:



Gambar 51. Refleksi sumbu-y

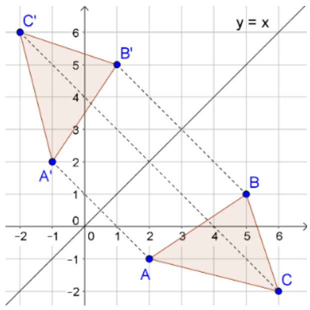
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Selanjutnya, $M_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ disebut matriks pencerminan terhadap sumbu-y.

c. Refleksi terhadap garis $y = x$

Misalkan (x', y') merupakan bayangan dari (x, y), dari gambar di atas didapat hubungan: $x' = y$ dan $y' = x$, sehingga

$$x' = y \Leftrightarrow x = 0 \cdot x + 1 \cdot y$$
$$y' = x \Leftrightarrow y = 1 \cdot x + 0 \cdot y.$$



Gambar 52. Refleksi $y = x$

Dalam bentuk persamaan matriks persamaan di atas dapat dinyatakan sebagai

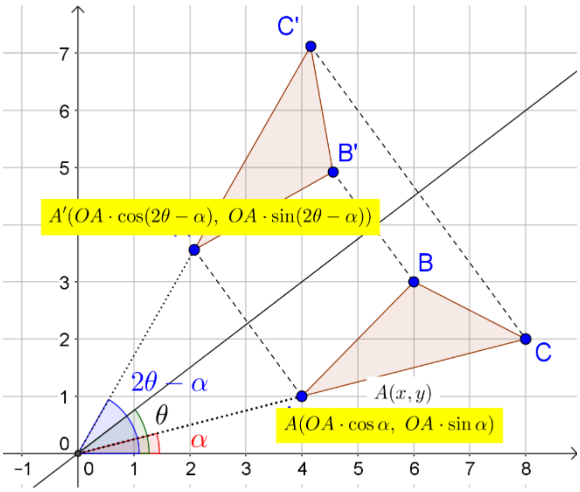
$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Matriks $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ merupakan matriks pencerminan terhadap garis $y = x$.

d. Refleksi terhadap garis $y = mx$

Perhatikan gambar di bawah, titik $A(x, y)$ direfleksikan terhadap garis $y = mx$, dengan $m = \tan \alpha$. Misalkan sudut yang dibentuk oleh OA dengan sumbu-x positif adalah α, maka

$$x = OA \cdot \cos \alpha \text{ dan } y = OA \cdot \sin \alpha \text{ ...... **)}.$$

Sudut yang dibentuk oleh sumbu-x positif dengan OA' adalah $2\theta - \alpha$ (mengapa?).



Gambar 53. Refleksi terhadap $y = mx$

Misalkan bayangan A adalah $A'(x', y')$, maka

$$x' = OA \cdot \cos(2\theta - \alpha) = OA\cos 2\theta\cos\alpha + OA\sin 2\theta\sin\alpha$$
$$y' = OA \cdot \sin(2\theta - \alpha) = OA\sin 2\theta\cos\alpha - OA\cos 2\theta\sin\alpha.$$

Dengan mensubstitusi **) ke kedua persamaan di atas, diperoleh

$$x' = x\cos 2\theta + y\sin 2\theta$$
$$y' = x\sin 2\theta - y\cos 2\theta.$$

Dalam bentuk matriks, dapat dituliskan sebagai

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

e. Refleksi terhadap garis $y = mx + c$

Serupa dengan rotasi dengan pusat (a, b), refleksi terhadap garis $y = mx + c$ dapat dilakukan dengan sedikit manipulasi.

1) Translasikan obyek dengan suatu vektor translasi $\overline{v}$ dimana $\overline{v}$ suatu vektor yang mentranslasikan $y = mx + c$ berimpit dengan garis $y = mx$. Sebagai latihan, silakan dicari vektor $\overline{v}$.
2) Refleksikan bayangan yang terjadi terhadap garis $y = mx$.
3) Translasikan bayangan yang terjadi dengan vektor translasi $-\overline{v}$.

Contoh:

Tentukan persamaan bayangan kurva $y = x^2$ yang direfleksikan terhadap garis $y = \sqrt{3}x + 1$.

Alternatif Penyelesaian (bantuan):

Langkah 1: Garis dan parabola ditranslasikan dengan vektor translasi $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ agar garis melalui (0, 0). Persamaan garis dan parabola hasil translasi berturut-turut $y = \sqrt{3}x$ ... (1) dan $y + 1 = x^2$ ... (2).

Langkah 2: Parabola (2) direfleksikan terhadap garis (1) dengan $m = \tan\theta = \sqrt{3}$, $\theta = 60°$. Misal (x', y') bayangan titik (x, y) pada parabola (2), maka dipenuhi $x' = x\cos 2\theta + y\sin 2\theta$ dan $y' = x\sin 2\theta - y\cos 2\theta$. Dengan substitusi nilai θ diperoleh $x = -\frac{x}{2} + \frac{y\sqrt{3}}{2}$ ... (4) dan $y' = \frac{x\sqrt{3}}{2} + \frac{y}{2}$ ... (5). Dari kedua persamaan terakhir diperoleh

$$x = -\frac{x'}{2} + \frac{\sqrt{3}y'}{2} \text{ dan } y = \frac{y'}{2} + \frac{\sqrt{3}x'}{2}$$

Substitusikan hasil terakhir ke persamaan 2, diperoleh

$$\frac{1}{2}y' + \frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot x' + 1 \ = \frac{1}{4}\cdot x'^2 - \frac{1}{2}\cdot x'\sqrt{3}\cdot y' + \frac{3}{4}\cdot y'^2.$$

Dari sini diperoleh persamaan hasil refleksi terhadap garis (1)

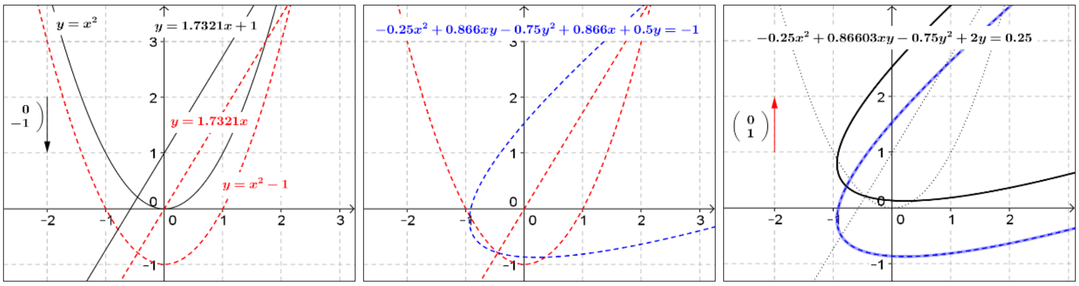
$$\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot x + 1 \ = \frac{1}{4}\cdot x^2 - \frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot xy + \frac{3}{4}y^2.$$

Langkah 3: translasikan kembali dengan vektor translasi $\binom{0}{1}$, diperoleh

$$\frac{1}{2}(y-1) + \frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot x + 1 \ = \frac{1}{4}\cdot x^2 - \frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot x(y-1) + \frac{3}{4}(y-1)^2.$$

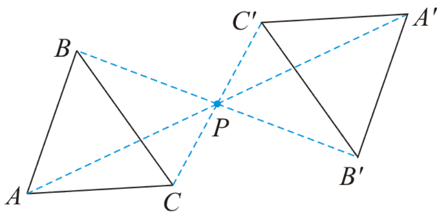
Jika disederhanakan, diperoleh hasil refleksi $y = x^2$ terhadap garis $y = \sqrt{3}x + 1$ adalah

$$\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot xy + \frac{3}{4}y^2 - 2y + \frac{1}{4} = 0.$$



f. Refleksi terhadap titik

Pada gambar di samping, diberikan ilustrasi jenis lain dari pencerminan, yaitu pencerminan terhadap sebuah titik. Segitiga $A'B'C'$ merupakan bayangan segitiga ABC pada perncerminan terhadap titik P. Perhatikan bahwa P merupakan titik tengah ruas garis AA', BB' dan CC'.



Gambar 54. Refleksi Terhadap Titik

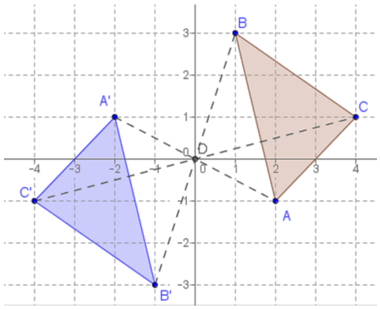
Refleksi terhadap titik P merupakan transformasi pada bidang yang memenuhi:

i. Jika titik A tidak berimpit dengan P, maka bayangan A adalah A' sehingga P merupakan titik tengah $\overline{AA'}$.

ii. Titik P merupakan bayangan dari dirinya sendiri.

Misalkan (x', y') merupakan bayangan dari (x, y), dari ilustrasi didapat hubungan: $x' = -x$ dan $y' = -y$, sehingga

$$x' = -x \Leftrightarrow x = -1 \cdot x + 0 \cdot y$$
$$y' = x \Leftrightarrow y = 0 \cdot x - 1 \cdot y.$$

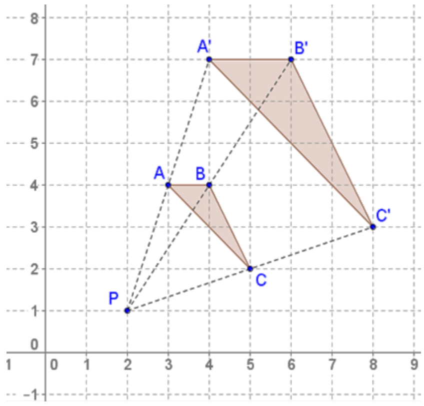


Gambar 55. Refleksi Terhadap Titik O

Dalam bentuk persamaan matriks persamaan di atas dapat dinyatakan sebagai $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Matriks $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ adalah matriks yang bersesuaian dengan pencerminan terhadap titik (0, 0).

2. Transformasi Non Isometri

Terdapat beberapa bentuk transformasi non isometri. Pada modul ini hanya akan dibahas salah satu jenis yaitu dilatasi (buku lain menggunakan istilah dilasi).



Gambar 56. Dilatasi

Segitiga $A'B'C'$ di atas merupakan peta dari segitiga ABC pada dilatasi dengan pusat dilatasi titik $P(2, 1)$ dan faktor dilatasi 2 . Pada gambar di samping, kedua segitiga sebangun dan berlaku $\frac{PA'}{PA} = \frac{PB'}{PB} = \frac{PC'}{PC} = 2$. Nilai ini dinamakan sebagai faktor dilatasi, sedangkan P disebut pusat dilatasi.

Definisi: Dilatasi dengan faktor dilatasi k dan pusat P, merupakan transformasi pada bidang sedemikian sehingga:

i. Bayangan titik P, pusat dilatasi, adalah P sendiri.

ii. Jika k positif dan bayangan A adalah A', maka $\overrightarrow{OA}$ dan $\overrightarrow{OA'}$ terletak pada sinar yang sama sehingga $OA' = k \cdot OA.$

iii. Jika k negatif, bayangan A adalah A', maka $\overrightarrow{OA}$ dan $\overrightarrow{OA'}$merupakan dua sinar yang bertolak belakang, dan $OA' = -k \cdot OA$.

a. Dilatasi dengan pusat dilatasi titik $O(0,0)$

Dilatasi dengan pusat O, faktor dilatasi k, maka

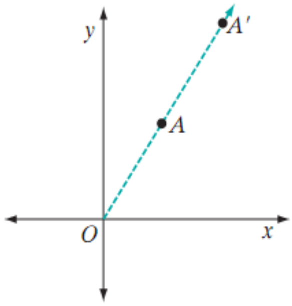
$$x' = kx \quad \text{dan } y' = ky.$$

Dalam bentuk matriks,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot x + 0 \cdot y \\ 0 \cdot x + k \cdot y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$



Gambar 57.
Dilatasi Berpusat di O

b. Dilatasi dengan pusat $P(a, b)$, faktor dilatasi k

Untuk menentukan persamaan matriks dilatasi yang pusatnya bukan O langkah-langkah yang diperlukan adalah:

1) Translasikan obyek dengan vektor translasi $\begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix}$ sehingga peta pusat dilatasi berimpit di titik O dan peta (x, y) menjadi (x_1, y_1) dengan

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix}.$$

2) Dilatasikan (x_1, y_1) dengan pusat O, faktor dilatasi k

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix}.$$

3) Translasikan kembali obyek (x_2, R_2) dengan vektor translasi $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

D. AKTIVITAS PEMBELAJARAN

Gunakan Aplikasi Geometri (misal GeoGebra) untuk menyelidiki sifat transformasi berikut.

1. Segitiga ABC ditranslasikan dengan vektor $\overline{v} \neq 0$, dan $\overline{u} = 0$.
   a. Adakah titik yang tidak berpindah tempat (invarian)?
   b. Apakah $AB = A'B', AC = A'C', BC = B'C'$?
   c. Apakah arah garis AB berbeda dengan bayangannya?
   d. Komposisikan translasi $\overline{v}$ dengan $\overline{w}$. Apakah hasilnya juga translasi?
2. Selidiki sifat translasi dan buatlah kesimpulannya.

a. Adakah titik-titik yang tidak berpindah ketika direfleksikan? Di manakah posisi titik-titik tersebut?

b. Misalkan ΔABC direfleksikan terhadap garis g, apakah $AB = A'B'$?

c. Apakah arah garis AB sama dengan arah garis $A'B'$?

d. Garis $g \parallel l$. Transformasi apakah hasil dari refleksi terhadap g dilanjutkan dengan refleksi terhadap l?

e. Garis g dan l berpotongan di P. Transformasi apakah hasil refleksi g dilanjutkan dengan refleksi terhadap l?

3. Gambar di samping merupakan salah satu bentuk pengubinan karya MC. Escher yang berjudul "Sea Horse". Pola tersebut dibuat menggunakan transformasi geometri. Pola-pola yang lain karya beliau dapat dilihat di http://www.mcescher.com/ . Carilah di berbagai sumber teknik-teknik untuk membuat pola ubin dengan memanfaatkan transformasi geometri.

E. LATIHAN

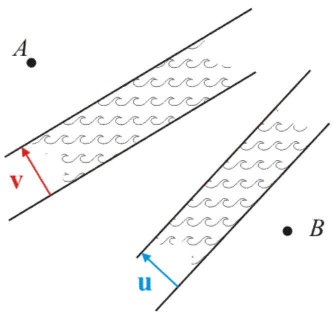
1. Apakah korespondensi $(x, y) \rightarrow (2, y)$ merupakan transformasi? Jelaskan.

2. Titik invarian merupakan titik yang tidak berpindah ketika dikenai suatu transformasi. Di manakah posisi titik-titik invarian pada translasi, rotasi, refleksi, dan dilatasi.

3. Tentukan persamaan bayangan garis $y = 2x + 1$ yang dicerminkan terhadap garis $y = x$.

4. Tentukan persamaan bayangan parabola $y = x^2$ terhadap rotasi dengan pusat (1,3), sudut rotasi 45°.

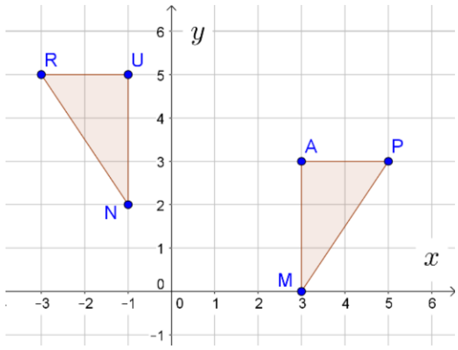
5. Kota A dan B dipisahkan oleh dua sungai seperti pada gambar. Tentukan posisi jembatan yang tegak lurus sisi sungai harus dibangun agar diperoleh total panjang dari A ke B menjadi minimum.



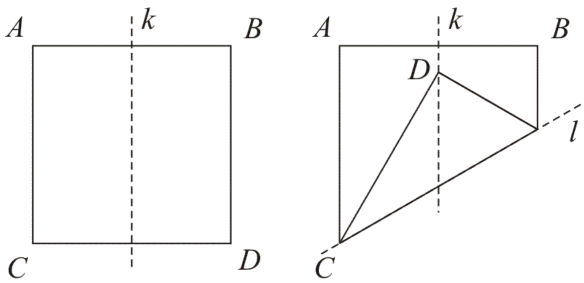
6. Psikolog kadang-kadang menggunakan tes

yang diberinama "Rorschach Test". Carilah informasi kegunaan test tersebut dan transformasi jenis apa yang digunakan?

7. Pada gambar di bawah, komposisi transformasi apakah yang mentransformasikan ΔRUN ke ΔPAM?



8. Sediakan kertas lipat (kertas origami), himpitkan titik B ke A dan D ke C untuk mendapatkan garis lipatan k. Lipat kembali dengan menghimpitkan titik D ke garis k sedemikian sehingga garis lipatan l melalui titik C. Tentukan besar sudut yang dibentuk oleh $\overline{AC}$ dengan garis l?



9. Garis k dan l berpotongan di titik A. Sebuah obyek direfleksikan terhadap garis k kemudian dilanjutkan dengan refleksi terhadap garis l. Selidiki dengan menggunakan kertas berpetak atau software matematika (misal GeoGebra) transformasi tunggal jenis apakah yang dapat menggantikan komposisi dua refleksi tersebut?

10. Lukis segitiga pada koordinat kartesius dengan titik sudut (1, 2), (4, 2) dan (1, 8). Terapkan transformasi $(x, y) \mapsto (-y, x)$ terhadap segitiga tersebut. Transformasi jenis apakah ini? Terapkan terhadap segitiga-segitiga lain untuk meyakinkan jawaban Anda.

F. RANGKUMAN

Transformasi dapat dibedakan menjadi dua, transformasi isometri (transformasi yang menjaga jarak) dan non isometri (transformasi yang tidak menjaga jarak).

Termasuk dalam transformasi isometri di antaranya adalah translasi, rotasi, dan refleksi. Secara aljabar, transformasi dapat dinyatakan dalam bentuk penjumlahan atau perkalian matriks yang dinamakan sebagai matriks transformasi. Berikut tabel matriks transformasi.

No.	Transformasi	Matriks Transformasi
1	Translasi dengan vektor $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$
2	$R_{O,}\alpha$	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
3	$R_{P,\alpha}$, dengan $P(a,b)$	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$
4	Refleksi terhadap sumbu-x	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
5	Refleksi terhadap sumbu-y	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
6	Releksi terhadap $y = x$	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
7	Refleksi terhadap $y = mx$ dengan $m = \tan\theta$	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
8	Refleksi terhadap titik O.	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
9	Dilatasi terhadap titik O, dengan faktor dilatasi k.	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
10	Dilatasi terhadap titik $P(a,b)$, faktor dilatasi k.	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

G. UMPAN BALIK

Anda telah mempelajari materi geometri transformasi, melaksanakan aktivitas pembelajaran dan mengerjakan latihan. Dalam belajar transformasi geometri, tidak dianjurkan sekedar menghapal bentuk-bentuk matriksnya. Yang terpenting adalah memahami bagaimana matriks terbentuk terbentuk. Dengan cara ini, Anda tetap dapat mengerjakan permasalahan transformasi geometri meskipun tidak hapal dengan bentuk-bentuk matriksnya. Dari latihan, Anda dapat menilai kemampuan diri, jika jawaban benar lebih dari 85% maka dipersilakan untuk mempelajari materi berikutnya dengan catatan tetap mempelajari materi yang masih kurang. Namun demikian jika dirasakan masih belum menguasai materi, anda dapat mempelajari kembali.

KEGIATAN PEMBELAJARAN 6
BANGUN RUANG

A. TUJUAN

Tujuan Kegiatan Pembelajaran 6 adalah untuk memberikan pemahaman kepada pembaca terkait dengan bangun ruang bersisi datar dan bangun ruang bersisi lengkung beserta dengan sifat-sifatnya. Terkait dengan volume dan luas permukaan bangun ruang, diharapkan pembaca tidak sekedar menghafal, namun dapat memahami proses untuk mendapatkan rumus-rumusnya.

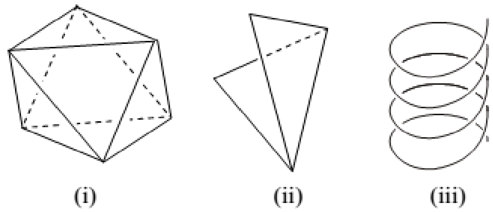
B. INDIKATOR PENCAPAIAN KOMPETENSI

Setelah membaca dan mengikuti serangkaian kegiatan pada bagian ini, pembaca diharapkan mampu:

1. Membedakan bangun ruang solid, kurva dalam ruang, dan permukaan dalam ruang.
2. Menjelaskan proses mendapatkan rumus volum dan luas permukaan balok, prisma tegak, dan limas tegak.
3. Menjelaskan prinsip Cavalieri dan menggunakannya untuk mencari volume berbagai bentuk bangun ruang.
4. Menjelaskan proses mendapatkan rumus volume dan luas permukaan tabung dan kerucut.
5. Menjelaskan proses mendapatkan rumus luas permukaan bola.
6. Menyelesaikan permasalahan terkait dengan bangun ruang dimensi tiga.

C. URAIAN MATERI

Apakah yang dimaksud dengan bangun ruang (*solid*)? Kubus, limas, bola merupakan contoh-contoh bangun ruang. Bangun ruang adalah himpunan semua titik, garis, dan bidang dalam ruang berdimensi tiga yang terletak di bagian tertutup beserta dengan bidang yang membatasinya. Sesuai dengan ketentuan ini, maka pada gambar i merupakan bangun ruang, sedangkan gambar ii, dan iii bukan bangun ruang. Secara khusus, bangun ii dinamakan permukaan dalam dimensi tiga, dan gambar iii dinamakan kurva dalam dimensi tiga.

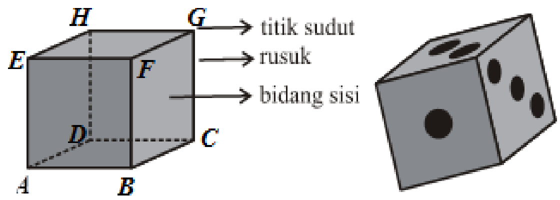


Gambar 58. Obyek berdimensi tiga

1. Bangun Ruang Sisi Datar

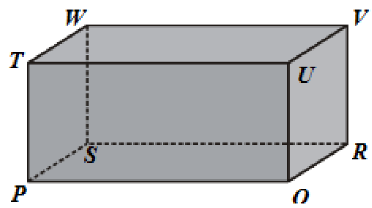
a. Kubus dan Balok

Kubus merupakan bangun ruang yang dibentuk oleh enam buah persegi yang kongruen. Pada gambar dapat dilihat bahwa kubus memiliki 8 titik sudut dan 12 rusuk dengan panjang yang sama. Contoh yang paling sederhana dari kubus adalah dadu.



Gambar 59. Kubus

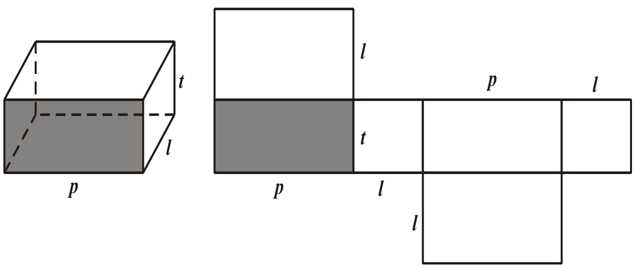
Balok mirip dengan kubus, memiliki 8 titik sudut dan 12 rusuk. Balok dibentuk oleh tiga pasang persegipanjang yang kongruen dan masing-masing pasangan yang kongruen ini terletak sejajar. Kubus merupakan keadaan khusus dari balok, dengan kata lain, kubus dapat dikatakan sebagai balok yang semua sisinya berupa persegi.



Gambar 60. Balok

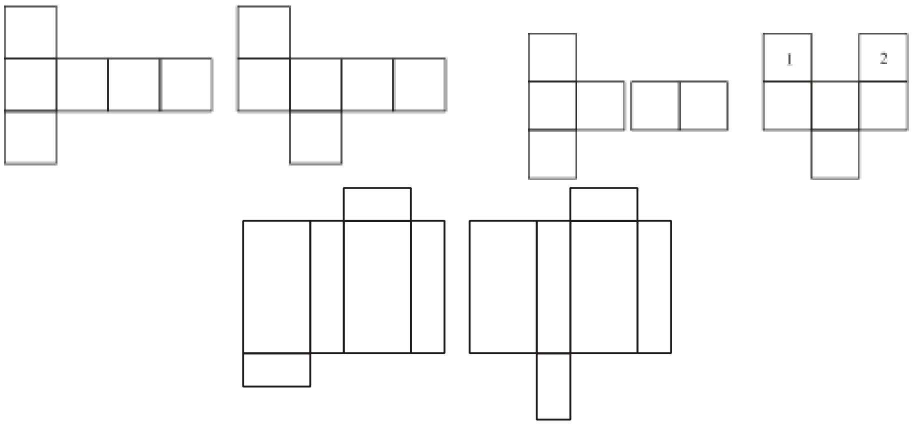
Penamaan kubus dan balok dibuat berdasarkan titik-titik sudutnya. Sebagai contoh kubus pada gambar dapat dituliskan sebagai kubus $PQRSTUVW$ (atau $PQRS \cdot TUVW$).

1) Jaring-jaring Kubus dan Balok



Gambar 61. Luas Permukaan Balok

Jika sebuah polihedron dipotong pada beberapa rusuknya dan dapat dibuka untuk diletakkan pada suatu bidang datar sehingga membentuk susunan yang saling terhubung pada rusuk-rusuknya maka susunan yang terbentuk disebut sebagai jaring-jaring. Sebaliknya, suatu jaring-jaring polihedron dapat dilipat dan disambung untuk membentuk suatu polihedron tanpa ada sisi yang bertumpuk.



Gambar 62 Jaring-jaring dan bukan jaring-jaring

2) Luas permukaan balok dan kubus

Luas permukaan balok dapat ditentukan dengan

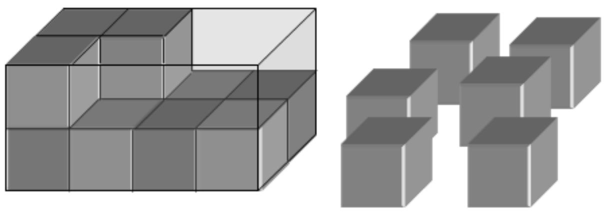
$$L_{Balok} = 2(pl + pt + lt).$$

Sementara itu untuk kubus, karena panjang rusuknya sama, $p = l = t = a$, maka

$$L_{kubus} = 6a^2.$$

3) Volume kubus dan balok

Volume atau isi bangun ruang dinyatakan sebagai banyaknya satuan isi yang dapat mengisi bangun ruang tersebut. Volume diukur dalam satuan kubik, seperti centimeter kubik (cm^3), inchi kubik (in^3) atau meter kubik (m^3). Satu cm^3 menyatakan volume kubus dengan panjang rusuk 1 cm. Satuan lain untuk volume di antaranya adalah liter (1000 cc), gallon, barel, dan sebagainya.



Gambar 63. Volum Balok

Untuk menentukan volume adalah dengan menghitung banyaknya kubus satuan.

Secara umum volume balok dengan panjang p, lebar l, dan tinggi t dapat dinyatakan sebagai

$$V_{balok} = p \times l \times t.$$

Mengingat bahwa alas balok berbentuk persegipanjang dengan luas $A = p \times l$, maka volume balok dapat juga dinyatakan sebagai hasil kali luas alas dengan tinggi balok.

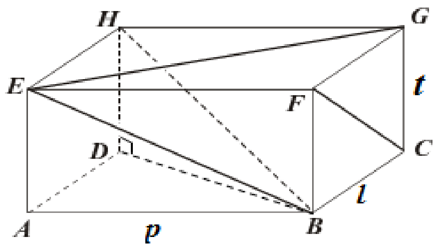
$$V_{balok} = A \times t.$$

Oleh karena pada kubus dengan panjang rusuk a berlaku $p = l = t = a$, maka volume kubus dapat dinyatakan sebagai

$$\textit{Volume Kubus} = a^3$$

4) Diagonal sisi, diagonal ruang dan bidang diagonal

Diagonal ruang suatu bangun ruang merupakan garis yang menghubungkan dua titik sudut yang tidak berdekatan (tidak terletak pada satu bidang sisi). Sebagai contoh, HB merupakan diagonal ruang dari balok $ABCD.EFGH$. Oleh karena itu dalam kubus dan balok terdapat tiga istilah diagonal, yaitu diagonal sisi, diagonal ruang, dan bidang diagonal. Terdapat 12 diagonal sisi dan 6 diagonal ruang pada balok dan kubus. Keduabelas diagonal sisi pada balok dan kubus membentuk enam buah bidang diagonal.



Gambar 64. Diagonal Sisi dan Diagonal Ruang

Perhatikan balok dengan ukuran $p \times l \times t$ pada gambar, ruas garis EB, EG, dan FC merupakan tiga dari duabelas diagonal sisi pada balok $ABCDEFGH$. Dengan menggunakan teorema Pythagoras diperoleh

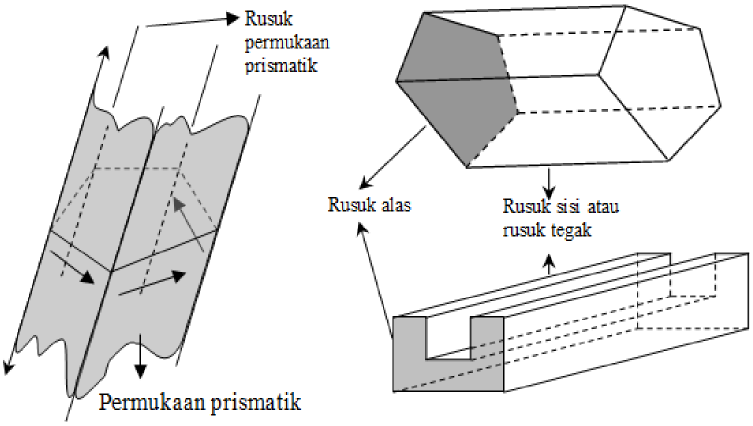
$$EB = \sqrt{p^2 + t^2}, \quad EG = \sqrt{p^2 + l^2}, \text{ dan } FC = \sqrt{l^2 + t^2}.$$

Segitiga HDB siku-siku di D, dengan teorema Pythagoras diperoleh

$$HB = \sqrt{DB^2 + DH^2} = \sqrt{(AB^2 + AD^2) + D\langle^2} = \sqrt{p^2 + l^2 + 2^2}.$$

b. Prisma

Jika sebuah garis lurus bergerak dalam ruang, tanpa perubahan arah garis dan mengikuti keliling suatu segi-*n*, maka jejak yang terbentuk dinamakan permukaan prismatik (*prismatic surface*). Ketika garis yang bergerak ini tepat melalui titik sudut segi-*n*, maka garis ini merupakan rusuk permukaan prismatik.

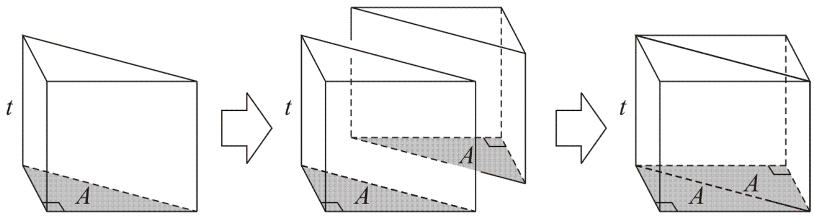


Gambar 65. Prisma

Jika sebuah bidang datar memotong permukaan prismatik beserta seluruh rusuk-rusuknya, maka akan terbentuk sebuah segi-*n*. Jika terdapat dua bidang sejajar memotong permukaan prismatik, maka terbentuk dua segi-*n* yang kongruen. Bagian permukaan prismatik yang berada di antara keduanya, beserta dua segi-*n*, membentuk prisma segi-*n*. Dua segi-*n* ini disebut alas dan tutup, sedangkan permukaan prismatik di antara keduanya disebut sisi prisma. Rusuk-rusuk yang terletak pada sisi prisma dinamakan rusuk sisi dan rusuk yang terletak di bagian alas dinamakan sebagai rusuk alas. Jarak antara bidang alas dan tutup merupakan tinggi prisma. Apabila rusuk-rusuk sisi prisma tegak lurus terhadap alas, maka dinamakan sebagai prisma tegak, dan selain yang demikian, dinamakan sebagai prisma miring.

Prisma diberi nama menurut bentuk alasnya. Contoh: prisma segitiga samasisi, prisma segienam beraturan, prisma segilima beraturan.

1) Volume prisma segitiga siku-siku



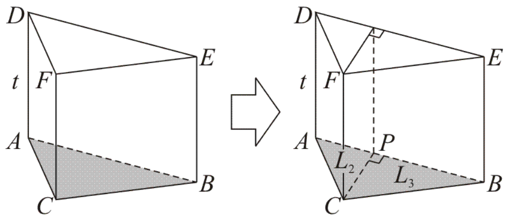
Gambar 66. Volum Prisma Segitiga Siku-siku

Volume prisma segitiga siku-siku dapat dicari dengan menduplikasi prisma segitiga siku-siku yang kongruen sehingga dapat dibentuk menjadi balok.

Misalkan V menyatakan volume prisma segitiga siku-siku dengan luas alas A, maka volume balok yang terbentuk adalah $2V = luas\ alas \times tinggi = 2A \times t$. Karena 2A adalah luas baru yang berupa persegi panjang, maka diperoleh $V = A \times t$.

2) Volume prisma segitiga sebarang

Berdasarkan volume prisma segitiga siku-siku yang telah diperoleh, selanjutnya volume prisma segitiga sebarang dapat ditentukan dengan cara membagi prisma tersebut menjadi dua buah prisma segitiga siku-siku. Pada gambar di samping, prisma segitiga sebarang dengan alas ΔABC dibagi menjadi dua prisma segitiga-siku-siku dengan alas ΔAPC dan ΔCPB.



Gambar 67. Volume Prisma Segitiga

Misalkan volum prisma $ABCDEF$, $APCEQF$, dan $CPBFQE$ berturut-turut dinyatakan sebagai V_1,V_2, dan V_3 maka

$$V_1 = V_2 + V_3 = L_{APC} \times t + L_{PCB} \times t = (L_2 + L_3) \times t = L_{ABC} \times t.$$

Jadi, secara umum

Volum prisma segitiga = Luas alas×tinggi.

3) Volum prisma segi enam dan segi-n

Volum prisma segi-$n$dapat dicari dengan jalan membaginya menjadi prisma-prisma segitiga. Secara umum untuk prisma segi-n, misalkan:

V menyatakan volum prisma segi-n,

V_i menyatakan volum prisma segitiga ke-i, dan

L_i menyatakan luas alas prisma segitiga ke-i

maka

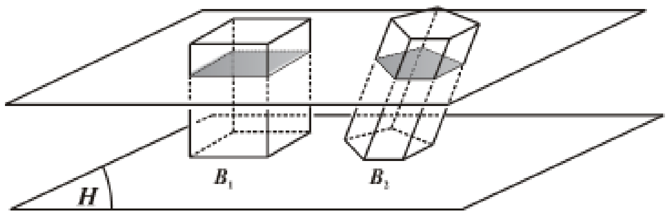
$$\begin{aligned} V = V_1 + V_2 + V_3 + \cdots + V_n = L_1 \times t + L_2 \times t + \cdots + L_n \times t &= (L_1 + L_2 + \cdots + L_n)t \\ &= L \times t. \end{aligned}$$

Jadi secara umum berlaku

Luas prisma segi-n = Luas alas prisma×tinggi.

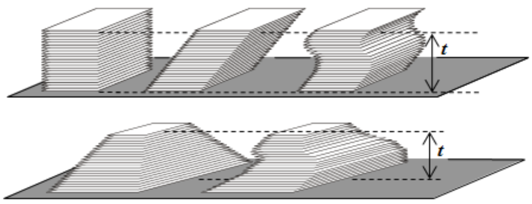
4) Prinsip Cavalieri

Misalkan dua bangun ruang B_1 dan B_2 terletak pada suatu bidang datar H. Jika setiap bidang yang sejajar H memotong kedua bangun ruang dan hasil perpotongannya mempunyai luas yang sama, maka VolumeB_1danB_2 sama besar.



Gambar 68. Prinsip Cavalieri

Untuk memudahkan pemahaman tentang prinsip Cavalieri gunakan dua tumpukan kertas dengan tinggi yang sama. Satu tumpukan membentuk balok, sedang satu tumpukan lagi dibuat berkelok atau miring.

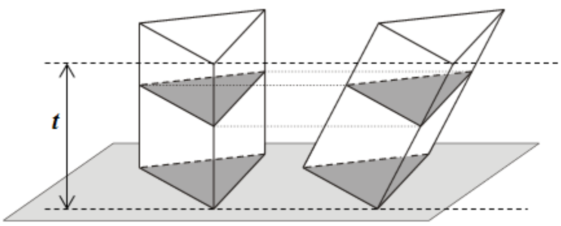


Gambar 69. Prinsip Cavalieri

Perhatikan gambar, ketiga tumpukan kertas memiliki ketinggian yang sama. Jika setiap mengambil kertas ke-n dari bawah dari ketiga tumpukan diperoleh luas kertas yang sama, maka volume ketiga tumpukan tersebut sama besar.

5) Volume Prisma Miring

Untuk menentukan volume prisma miring, buat prisma tegak dengan alas dan tinggi yang sama. Setiap bidang sejajar alas memotong kedua prisma, diperoleh hasil perpotongan yang sama dan sebangun (sehingga luasnya sama).



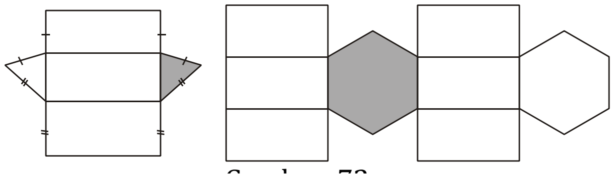
Gambar 70. Volum Prisma Miring

Sesuai dengan prinsip Cavalieri, maka volume kedua prisma sama. Dengan demikian diperoleh

Volume prisma miring = Luas Alas ×tinggi

6) Jaring-Jaring dan Luas Permukaan Prisma

Berikut ini merupakan contoh jaring-jaring prisma segitiga dan segienam beraturan.

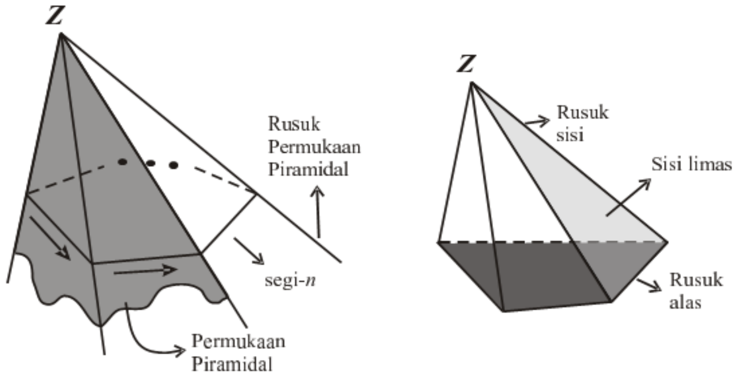

Gambar 71. Jaring-jaring Prisma

Melalui ilustrasi dua jaring-jaring prisma di atas, maka luas permukaan prisma dapat ditentukan dengan jalan menjumlahkan luas sisi prisma, luas tutup, dan luas alas.

$$\textit{Luas permukaan prisma} = \textit{luas sisi prisma} + \textit{luas alas} + \textit{luas tutup}$$

$$\textit{Luas permukaan prisma} = (\textit{keliling alas} \times \textit{tinggi prisma}) + 2 \times \textit{Luas alas}$$

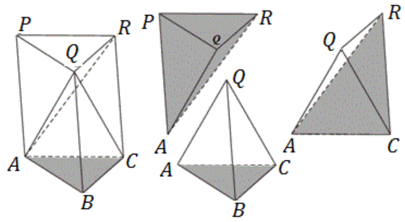
c. Limas (Piramida)



Gambar 72. Limas

Jika sebuah sinar garis berpangkal di titik Z bergerak dengan titik pangkal tetap melalui ruas-ruas garis sisi segi-n, maka jejak yang terbentuk merupakan permukaan piramidal. Sinar garis yang melalui titik sudut segi-n dinamakan sebagai rusuk permukaan piramidal. Segi-n bersama titik Z dan bagian permukaan piramidal yang terletak di antara keduanya beserta seluruh titik yang dibatasinya membentuk limas.

Segi-n dari limas ini dinamakan sebagai alas, titik Z disebut puncak limas, dan permukaan piramidal yang menjadi bagian dari limas dinamakan sisi limas. Ruas garis yang yang menghubungkan puncak dengan sudut-sudut alas dinamakan rusuk sisi, untuk membedakan dengan rusuk alas. Tinggi limas dinyatakan



Gambar 73. Volume Limas Segitiga

sebagai jarak terpendek antara titik puncak dengan bidang alas. Limas segi-n memiliki n buah rusuk sisi yang berbentuk segitiga, n buah rusuk sisi dan n buah rusuk alas. Sehingga banyak rusuk limas segi-n adalah $2n$.

Jika alas limas berbentuk segi-n beraturan, maka dinamakan sebagai limas segi-n beraturan. Limas segi-n beraturan dikatakan sebagai limas tegak jika titik kaki garis tingginya terletak pada pusat alasnya. Limas segi-n beraturan memiliki n sisi berbentuk segitiga samakaki.

1) Volume Limas Segitiga

Berawal dari limas $Q.ABC$, lukis prisma segitiga $ABC.PQR$ dengan rusuk sisi sejajar BQ. Misal volume, luas alas, dan tinggi prisma adalah berturut-turut V, L_{alas}, dan t maka

$$V = L_{alas} \times t.$$

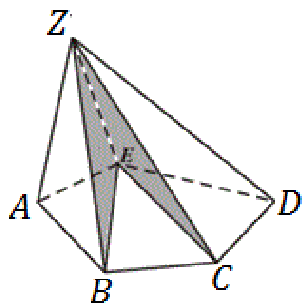
Potong prisma menjadi tiga bagian seperti pada gambar. Limas $Q.APR$ dapat dipandang sebagai limas dengan puncak A dan alas ΔPQR. Karena $\Delta PQR \cong \Delta ABC$, dan tinggi limas $A.PQR$ dengan $Q.ABC$ sama, maka dengan prinsip Cavalieri diperoleh $V_{Q.ABC} = V_{A.PQR} = V_{Q.APR}$.

Perhatikan limas $Q.APR$ dan $Q.ACR$. Kedua limas ini memiliki alas yang kongruen dan tinggi yang sama sehingga $V_{Q.APR} = V_{Q.ACR}$.

Akibatnya ketiga limas $Q.ABC$, $Q.APR$dan $Q.ACR$ memiliki volume yang sama. Dengan demikian $V_{Q.ABC} = \frac{1}{3} \times V_{ABC.PQR} = \frac{1}{3} \times L_{alas} \times t$.

2) Volume Limas segi-n

Seperti pada penurunan rumus prisma, setelah ditemukan rumus volume limas segitiga, selanjutnya volume limas segi-n dapat diturunkan dengan jalan memecah limas ini menjadi limas-limas segitiga.



Gambar 74. Volume Limas Segi

Sebagai contoh perhatikan limas segilima $Z.ABCDE$.

Misalkan V menyatakan volume limas $Z.ABCDE$ dan $t$menyatakan tinggi limas. Maka

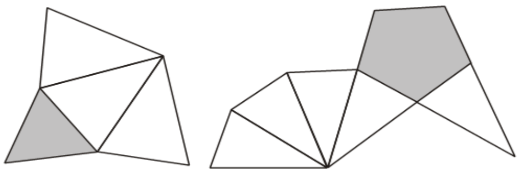
$$V = \frac{1}{3} \cdot L_{ABE} \cdot t + \frac{1}{3} \cdot L_{BEC} \cdot t + \frac{1}{3} \cdot L_{ECD} \cdot t = \frac{1}{3} \cdot (L_{ABE} + L_{BCE} + L_{CDE}) \cdot t$$
$$= \frac{1}{3} \cdot L_{ABCDE} \cdot t.$$

Limas segi-n selalu dapat dipecah menjadi limas-limas segitiga yang mempunyai tinggi sama dengan tinggi limas yang diberikan. Dengan demikian volume prisma segi-n dengan tinggi t adalah

$$Volum\ Limas = \frac{1}{3} \times Luas\ alas \times tinggi.$$

Percobaan untuk menunjukkan kebenaran rumus volume limas dapat dilakukan melalui peragaan menakar menggunakan sebuah limas dan sebuah prisma pasangannya. Dalam hal ini dikatakan limas dan prisma yang berpasangan jika kedua alas bangun tersebut kongruen dan tinggi kedua bangun sama. Melalui praktek menakar didapatkan fakta bahwa prisma dipenuhi oleh tiga takaran limas.

3) Jaring-jaring Limas dan Luas Permukaan Limas



Gambar 75. Jaring-jaring Limas

Luas permukaan limas dapat ditentukan dengan menjumlahkan luas sisi limas dan alasnya.

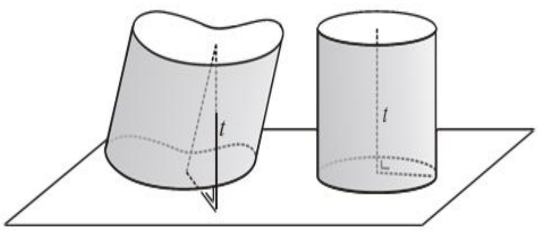
Luas permukaan limas = Luas seluruh sisi limas + Luas alas

2. Bangun Ruang Sisi Lengkung

Bangun ruang sisi lengkung merupakan bangun ruang yang paling tidak memiliki satu sisi lengkung. Beberapa bangun ruang sisi lengkung mungkin sulit didefinisikan secara tepat, namun bangun ruang tersebut dapat diidentifikasi melalui sifat-sifat atau proses terbentuknya.

a. Tabung (Silinder)

Jika sebuah garis dengan arah yang tetap bergerak di dalam ruang sepanjang kurva lengkung, maka jejak yang ditimbulkan membentuk permukaan silindris. Kurva lengkung ini dinamakan garis arah dan garis



Gambar 76. Tabung

yang bergerak dinamakan sebagai garis pelukis. Jika permukaan silindris dengan garis arah kurva tertutup sederhana dipotong oleh dua buah bidang yang sejajar, maka kedua hasil perpotongan bersama-sama dengan permukaan silindris di antara keduanya beserta seluruh titik yang dibatasinya membentuk tabung. Bagian sisi silindris yang terletak di antara dua bidang sejajar dinamakan sebagai sisi tabung yang berupa sisi lengkung. Bagian silinder yang merupakan perpotongan permukaan silindris dengan dua bidang sejajar dinamakan sebagai alas dan tutup. Alas dan tutup tabung mempunyai bentuk kongruen. Jarak antara bidang alas dan bidang tutup dinyatakan sebagai tinggi tabung. Tabung memiliki dua rusuk berbentuk kurva lengkung yang sekaligus merupakan batas dari alas atau tutupnya.

Jika di setiap titik pada rusuk, sudut antara bidang alas dan sisi lengkung membentuk sudut siku-siku, maka tabung yang dinamakan sebagai tabung tegak. Selain berdasarkan sudut antara alas dan sisi lengkung, jenis tabung ditentukan juga oleh bentuk alasnya. Sebagai contoh tabung dengan alas berbentuk ellips dinamakan sebagai tabung ellips dan tabung dengan alas lingkaran dinamakan sebagai tabung lingkaran. Selanjutnya, jika tidak diberi penjelasan, maka yang dimaksud dengan tabung adalah tabung lingkaran tegak. Tabung lingkaran tegak dapat juga didefinisikan sebagai bangun ruang yang dihasilkan oleh perputaran dengan sumbu putar salah satu sisinya. Tabung dapat juga dipandang sebagai prisma segi-n beraturan dengan n tak hingga.

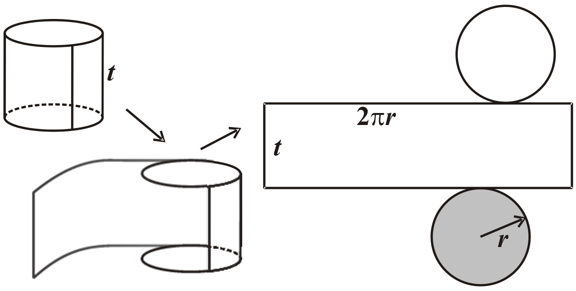
1) Volume Tabung

Pikirkan sebuah prisma tegak segi-n beraturan. Jika banyak rusuk alas diperbanyak tanpa batas, maka segi-n ini akan menjadi lingkaran. Dengan memandang tabung sebagai prisma segi-n, dengan n tak hingga, dapat diturunkan rumus untuk volume tabung dengan tinggi t dan jari-jari alas r.

$$V_{tabung} = L_{alas} \times tinggi = \pi r^2 t.$$

2) Luas permukaan tabung

Perhatikan gambar bukaan tabung pada gambar. Sisi lengkung (selimut) tabung, jika dibuka akan membentuk persegipanjang dengan panjang sisi keliling lingkaran alas dan t. Sehingga

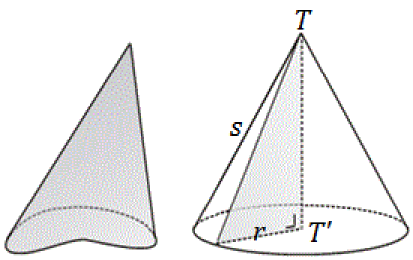


Gambar 77. Bukaan Tabung

$$Luas\ permukaan\ tabung = L_{alas} + L_{tutup} + L_{selimut}$$
$$= 2\pi r^2 + 2\pi rt = 2\pi r(r+t).$$

b. Kerucut

Misalkan diberikan sebuah kurva lengkung yang terletak pada sebuah bidang datar dan sebuah titik T yang tidak sebidang dengannya. Jika sebuah garis melalui titik T dan bergerak sepanjang kurva lengkung, maka jejak yang dihasilkan membentuk *conical surface.* Kurva lengkung ini dinamakan sebagai garis arah dan garis yang bergerak disebut garis pelukis.



Gambar 78. Kerucut

Kerucut merupakan bangun yang dibatasi oleh kurva lengkung tertutup sederhana sebagai alas, bagian kurva lengkung yang terletak diantara T dan alas beserta seluruh daerah yang dibatasinya. Titik T dinamakan sebagai titik puncak, garis s yang menghubungkan puncak ke kurva alas dinamakan sebagai garis pelukis.

Jenis kerucut dapat dibedakan berdasarkan bentuk alas, seperti kerucut lingkaran, kerucut ellips, dan kerucut jenis lainnya. Kerucut lingkaran tegak, merupakan kerucut yang proyeksi puncak pada alas terletak di pusat lingkaran alas, dapat juga dipandang sebagai hasil rotasi satu putaran segitiga siku-siku dengan sumbu rotasi salah satu sisi siku-sikunya. Kerucut yang dibahas dalam bahan belajar ini adalah kerucut lingkaran tegak.

1) Volume Kerucut

Dengan memandang kerucut dengan jari-jari alas r dan tinggi t sebagai limas segi-n beraturan untuk n tak hingga maka volume kerucut dapat ditentukan.

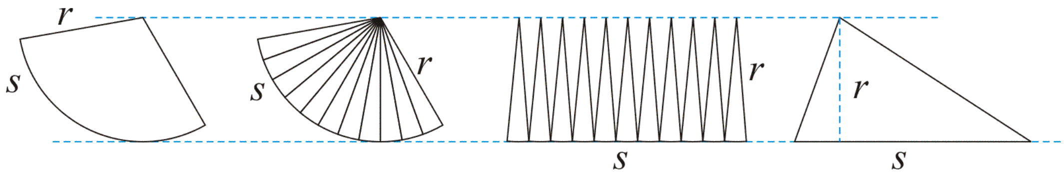
$$Volum\ Kerucut = \frac{1}{3} \times luas\ alas \times tinggi = \frac{1}{3}\pi r^2 t.$$

Kebenaran rumus volume kerucut ini dapat ditunjukkan dengan menggunakan peragaan menakar dengan menggunakan takaran kerucut dengan tabung pasangannya. Pasangan kerucut dan tabung ini memiliki alas yang kongruen dan tinggi yang sama. Melalui penakaran pasir ternyata tabung akan penuh setelah diisi 3 kali takaran kerucut.

2) Luas Permukaan Kerucut

Sebelum membahas luas permukaan kerucut, dicari terlebih dahulu luas juring lingkaran jika diketahui jari-jari dan panjang busurnya.

Perhatikan ilustrasi di bawah ini.



Gambar 79. Luas Selimut Kerucut

Sebuah juring dipotong-potong menjadi juring-juring yang lebih kecil, kemudian disusun seperti gambar yang menyerupai susunan segitiga-segitiga dengan tinggi r. Jika banyak potongan semakin banyak mendekati tak hingga, maka alas-alas segitiga tersebut membentuk garis lurus. Luas bangun ini akan sama dengan luas segitiga dengan alas s, tinggi r. Jadi luas juring lingkaran dengan panjang busur s adalah

$$L_{juring} = \frac{1}{2} sr.$$

Jika dua buah jari-jari lingkaran membentuk sudut 1° dan dipotong, maka:

i. busur AB mempunyai panjang $\frac{1}{360}$ $keliling\ lingkaran$, dan

ii. luas sektor AOB =$\frac{1}{360}$ $luas\ lingkaran$.

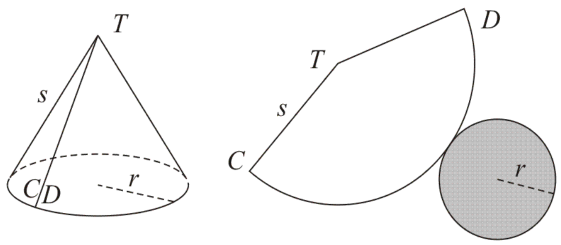
Jadi jika sudut AOB memiliki besar $D°$, maka:

i. $panjang\ busur\ AB = \frac{D}{360} \times keliling\ lingkaran$, dan

ii. $luas\ sektor\ OAB = \frac{D}{360} \times luas\ lingkaran = \frac{D}{360}\pi r \times r$

$= \frac{1}{2} \times keliling\ lingkaran \times \frac{D}{360} \times r = \frac{1}{2} \times panjang\ busur\ AB \times r$ (i)

Untuk menemukan luas selimut (permukaan lengkung) kerucut perhatikan ilustrasi berikut. Misalkan sebuah kerucut dipotong sepanjang garis pelukis TC, dan kemudian dibuka di sebuah bidang datar. Hasilnya berupa sebuah sektor lingkaran TCD dengan jari-jari TC dan busur CD. Busur CD ini sekaligus merupakan keliling lingkaran alas.



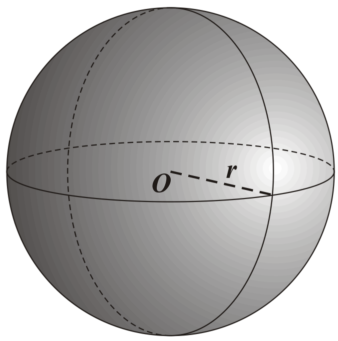
Gambar 80. Luas Permukaan Kerucut

$$Luas\ selimut = \frac{1}{2} \times panjang\ busur\ CD \times TC = \frac{1}{2} \times 2\pi r \times s.$$

Jadi, $Luas\ selimut = \pi rs.$

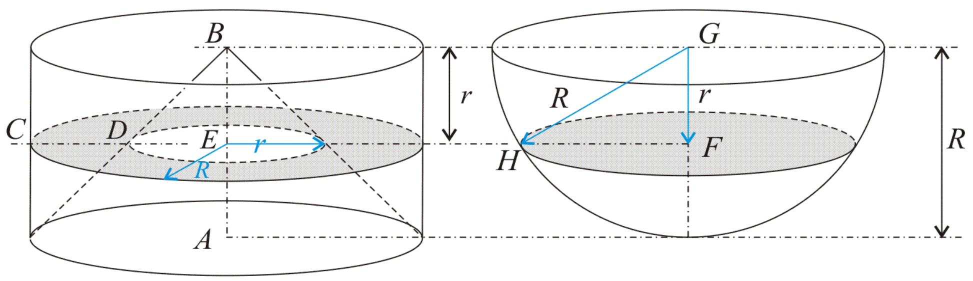
c. Bola

Jika setengah lingkaran dirotasikan mengelilingi diameternya, maka akan terbentuk sebuah permukaan bola. Permukaan bola dapat juga didefinisikan sebagai tempat kedudukan titik-titik yang berjarak sama terhadap suatu titik tertentu yang dinamakan sebagai pusat bola. Benda yang dibatasi oleh permukaan bola dinamakan sebagai bola. Perpotongan antara sebuah bidang datar dengan bola akan membentuk lingkaran. Lingkaran besar merupakan lingkaran yang diperoleh jika bidang pemotong melalui pusat lingkaran.



Gambar 81. Bola

1) Volume Bola



Gambar 82. Volume Bola

Pada gambar di atas, sebuah tabung dengan tinggi dan jari-jari alas R, diisi dengan kerucut yang memiliki tinggi dan jari-jari alas R. Pada gambar kanan, diberikan setengah bola dengan pusat G dan berjari-jari R. Ambil sebarang bidang α sejajar alas kecurut, dengan jarak r (sebarang) dari puncak kerucut. Bidang α mengiris daerah antara tabung dan kerucut sehingga membentuk cincin berjari-jari luar R, jari-jari dalam r dan mengiris bola dengan bentuk lingkaran berjari-jari HF. Akan ditunjukkan bahwa luas cincin di gambar kiri sama dengan luas lingkaran gambar kanan. Perhatikan bahwa $RE = DE = GF = r$ dan $EC = GH = R$. Dengan menggunakan teorema Pythagoras, diperoleh $HF^2 = GH^2 - GF^2$. Misalkan luas cincin dan luas lingkaran dilambangkan dengan L_{cin} dan L_{ling} maka

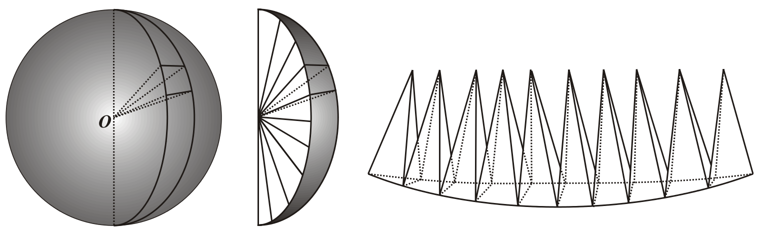
$$L_{cin} = \pi \cdot R^2 - \pi \cdot r^2 = \pi(R^2 - r^2)$$
$$L_{ling} = \pi \cdot HF^2 = \pi(R^2 - r^2).$$

Untuk sebarang bidang sejajar alas memotong kedua bangun, diperoleh luas permukaan hasil irisan yang sama, menurut asas Cavaliery, maka volume kedua bangun sama.

$$V_{setengah\ bola} = V_{tabung} - V_{kerucut} = \pi \cdot R^2 \cdot R - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot R = \frac{2}{3}\pi R^3.$$

Dengan demikian diperoleh $V_{bola} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3.$

2) Luas Permukaan Bola



Gambar 83. Luas Permukaan Bola

Misalkan sebuah bola dipotong membentuk limas-limas dengan titik puncak di pusat bola seperti pada gambar di atas. Perhatikan bahwa limas-limas yang terbentuk mempunyai tinggi yang sama, yaitu jari-jari bola (r). Misalkan luas alas masing-masing limas dinyatakan sebagai L_1, L_2, L_3, ... , dan L_n. Jika alas limas dibuat sekecil-kecilnya, dengan kata lain n dibuat sebesar-besarnya (n tak hingga) maka jumlah luas alas seluruh limas akan sama dengan luas permukaan bola.

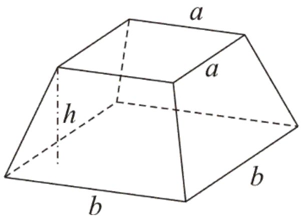
$$Jumlah\ volum\ seluruh\ limas = V_{bola}$$
$$\frac{1}{3} \cdot L_1 \cdot r + \frac{1}{3} \cdot L_2 \cdot r + \frac{1}{3} \cdot L_3 \cdot r + \cdots + \frac{1}{3} \cdot L_n \cdot r = \frac{4}{3}\pi r^3$$
$$\frac{1}{3}(L_1 + L_2 + L_3 + \cdots + L_n)r = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$(L_1 + L_2 + L_3 + \cdots + L_n) = 4\pi r^2$$

Diperoleh, $\quad L_{permukaan\ bola} = 4\pi r^2$.

D. AKTIVITAS PEMBELAJARAN

1. Papyrus Moscow ($\pm$1850 SM) merupakan naskah peninggalan bangsa Mesir yang berisi 25 problem. Salah satu problem adalah tentang volume limas terpancung. Dengan notasi modern, maka rumus tersebut berbentuk $V = \frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2)$, dengan h tinggi kerucut terpancung, a dan b panjang sisi persegi alas dan tutupnya. Selidikilah kebenaran rumus tersebut.

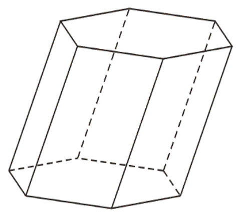


2. Heron dari Alexandria (sekitar 75 M) menemukan cara untuk mencari volume kerucut terpancung menggunakan perhitungan yang ekivalen dengan rumus $V = \frac{1}{4}\pi h(r + R)^2$ dimana h, r, dan R berturut-turut menyatakan tinggi, jari-jari tutup, dan jari-jari alas. Apakah perhitungan Heron dapat dibenarkan?

3. Selain bangun-bangun yang telah dipelajari di bahan pembelajaran ini, sebenarnya masih terdapat berbagai klasifikasi bangun ruang. Carilah informasi tentang bangun ruang Platonic (kata kunci: *Platonic Solid*) dan bangun ruang Archimedian (kata kunci *Archimedian Solid*). Selidiki apakah pada bangun-bangun tersebut berlaku rumus Euler yang menyatakan $S + D = R + 2$, dengan S, D, R berturut-turut menyatakan banyak sisi, banyak titik sudut, dan banyak rusuk.

E. LATIHAN

1. Diberikan bangun ruang seperti gambar di samping.
   a. Sebutkan nama bangun gambar tersebut?
   b. Berbentuk apakah alas dan sisi tegaknya?

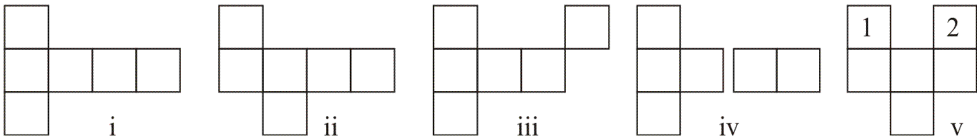


2. Apakah kubus merupakan balok?

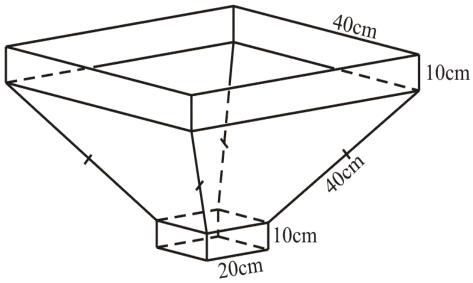
3. Mungkinkah sebuah limas memiliki sisi tegak yang semuanya kongruen jika alas limas tersebut (a) segitiga, (b) persegi panjang, (c) jajargenjang, (d) trapesium sama kaki, (e) segi banyak beraturan?

4. Tentukan volume balok dengan panjang rusuk 4 cm, x cm, $(x+2)$ cm jika diketahui luas permukaannya 94 cm^2.

5. Di antara 4 gambar di bawah, manakah yang merupakan jaring-jaring kubus? Berikan penjelasannya.



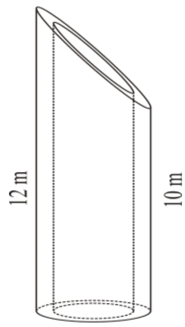
6. Sebuah corong penggiling padi terbuat dari plat *stainless steel* berbentuk seperti pada gambar. Penampang atas dan bawah berbentuk persegi. Gunakan kalkulator untuk membantu perhitungan.



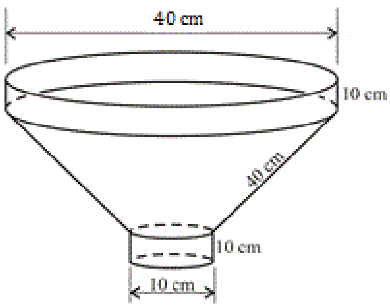
   a. Jika berat bahan yang digunakan adalah 8 kg/m^2, tentukan berat corong.
   b. Jika bagian tersebut berisi rata penuh dengan padi, tentukan volum padi yang dapat ditampung.

7. 
Di desa Sengir, Kec. Prambanan, Kab. Sleman, DIY, terdapat 71 rumah *dome* yang bagian atapnya berbentuk kubah setengah bola berdiameter 7m. Jika bagian kubah salah satu rumah ini akan dicat, dan 1kg cat dapat digunakan untuk mengecat 9m^2, berapa kilogram cat yang diperlukan?

8. Untuk mengenang jasa pahlawan kemerdekaan, sebuah tugu bambu runcing akan dibangun dengan desain utama berbentuk tabung terpancung terbuat dari beton dengan diameter luar 2m, tebal dinding 40cm, bagian tertinggi 12m, bagian terrendah 10m. Tentukan volume beton monumen tersebut.



9. Sebuah corong mesin penggiling dengan bahan plat besi terdiri atas tabung dan kerucut teriris, dengan ukuran seperti pada gambar.



Jika berat plat besi adalah 8 kg/m^2. Gunakan kalkulator untuk mencari jawaban berikut.

a. Berapa berat corong?
b. Berapa volum bahan dapat ditampung oleh corong dengan permukaan atas rata?

10. Sebuah gelas berbentuk silinder (tabung) dengan diameter dan tinggi bagian dalam berturut-turut 7 cm dan 10 cm berisi ¾ bagian. Berapa maksimum kelereng berdiameter 2,5 cm dimasukkan, dengan menjaga air tidak sampai tumpah?

F. RANGKUMAN

Bangun ruang (*solid*) adalah himpunan semua titik, garis, dan bidang dalam ruang berdimensi tiga yang terletak di bagian tertutup beserta dengan bidang yang membatasinya. Tidak setiap bangun ruang memiliki nama. Dari bidang sisinya bangun ruang dapat diklasifikasikan menjadi dua yaitu bangun ruang bersisi datar, dan bangun ruang bersisi lengkung. Termasuk dalam bangun ruang bersisi datar prisma dan limas. Sementara itu, tabung, bola, dan kerucut termasuk dalam kelompok bangun ruang bersisi lengkung.

Urutan proses mendapatkan rumus volume bangun ruang bersisi datar diawali dari volume balok, dilanjutkan volume prisma dan volume limas. Prinsip Cavalieri digunakan untuk mendapatkan rumus luas prisma dan limas miring. Luas permukaan bangun ruang bersisi datar diperoleh dengan menjumlahkan semua luas bidang sisi pembatas bangun ruang tersebut.

Volume bangun ruang sisi lengkung (tabung, kerucut, dan bola) diperoleh dengan urutan volume tabung yang diturunkan dari volume prisma, volume limas yang diperoleh dari volume limas. Volume bola dapat diturunkan menggunakan prinsip cavalieri, setelah dipahami proses mendapatkan volume tabung dan kerucut. Luas permukaan tabung dan kerucut, diperoleh dengan menentukan luas bukaan bangun ruang tersebut. Sementara itu luas permukaan bola dapat diturunkan dengan cara memotong bola menjadi limas-limas kecil dengan tinggi sama dengan jari-jari bola.

G. UMPAN BALIK

Anda telah mempelajari materi bangun ruang yang meliputi bangun-bangun ruang bersisi datar dan bersisi lengkung. Untuk menambah wawasan, telah diberikan juga aktivitas pembelajaran dimana Anda diminta untuk mencari informasi tentang sesuatu yang belum dibahas di bahan pembelajaran. Dari latihan, Anda dapat menilai kemampuan diri, jika jawaban benar lebih dari 85% maka dipersilakan untuk mempelajari materi berikutnya dengan catatan tetap mempelajari materi yang masih kurang. Namun demikian jika dirasakan masih belum menguasai materi, anda dapat mempelajari kembali.

KEGIATAN PEMBELAJARAN 7
JARAK DAN SUDUT DALAM DIMENSI TIGA

A. TUJUAN

Tujuan Kegiatan Pembelajaran 7 adalah untuk memberikan pemahaman kepada pembaca terkait dengan konsep jarak dan sudut antar obyek dalam ruang berdimensi tiga dan sekaligus menentukan jarak dan sudutnya.

B. INDIKATOR PENCAPAIAN KOMPETENSI

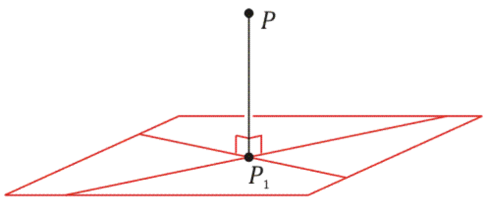
Setelah membaca dan mengikuti serangkaian kegiatan pada bagian ini, pembaca diharapkan mampu:

1. Menjelaskan konsep jarak dan sudut antar obyek dalam ruang berdimensi tiga.
2. Menjelaskan prosedur menentukan jarak antar dua obyek.
3. Menjelaskan prosedur untuk menentukan sudut antar obyek.
4. Menggunakan konsep jarak dan sudut dalam penyelesaian permasalahan.

C. URAIAN MATERI

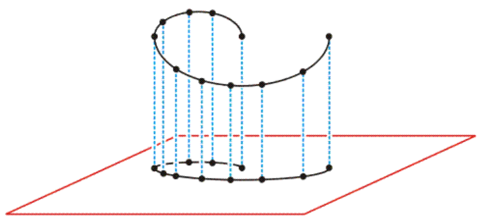
1. Proyeksi

Definisi: Proyeksi titik P pada bidang V adalah titik pangkal di bidang V dari ruas garis yang dibuat melalui titik P tegaklurus pada bidang V.



Gambar 84. Proyeksi Titik ke Bidang

P_1 merupakan proyeksi dari P pada bidang V. Dalam hal ini garis PP_1 disebut garis pemroyeksi, sedangkan bidang V disebut sebagai bidang proyeksi.



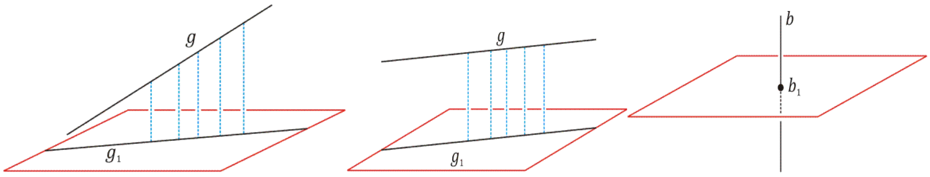
Gambar 85. Proyeksi Kurva ke Bidang

Proyeksi suatu bangun geometri pada bidang V diperoleh dengan memproyeksikan semua titik pada bangun tersebut pada bidang V.

Teorema: Proyeksi sebuah garis pada bidang umumnya berupa sebuah garis.

Teorema: Proyeksi sebuah garis tegak lurus bidang berupa sebuah titik.

Teorema: Proyeksi garis sejajar terhadap bidang berupa garis sejajar dengan garis tersebut.

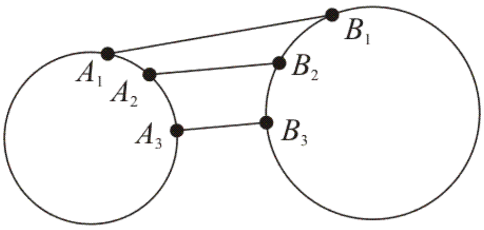


Gambar 86. Proyeksi Garis ke Bidang

2. Jarak

Pengertian jarak dalam geometri sedikit berbeda dengan jarak dalam kehidupan sehari-hari. Sebagai contoh, jika kita buka www.wolframalpha.com dan mengetikkan "distance yogyakarta-sleman" maka akan keluar hasil 8,911 km. Dalam hal ini yang dimaksud adalah jarak antar pusat kota meskipun kedua wilayah tersebut berdampingan.

Dalam geometri jarak dua bangun didefinisikan sebagai panjang ruas garis terpendek yang menghubungkan dua titik pada bangun-bangun tersebut. Sebagai contoh, jika diberikan dua lingkaran seperti pada gambar berikut, maka jarak kedua lingkaran tersebut diwakili oleh panjang ruas garis A_3B_3 karena ruas garis tersebut merupakan ruas garis terpendek yang menghubungkan titik-titik pada kedua lingkaran.



Gambar 87. Jarak dalam Geometri

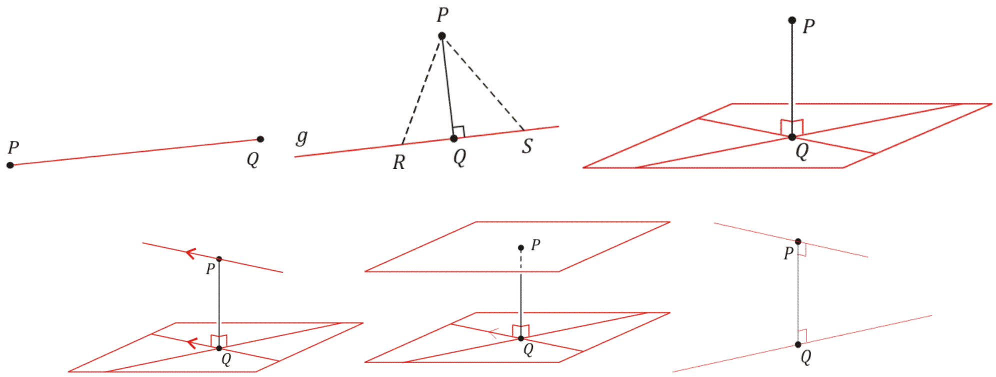
Jarak antar obyek-obyek geometri:

1. Jarak antara dua titik P dan Q adalah panjang ruas garis PQ.
2. Jarak antara titik P dan garis g adalah panjang ruas garis dari P ke garis g yang tegak lurus garis g.
3. Jarak antara titik P dengan bidang α adalah panjang ruas garis dari P ke bidang α yang tegak lurus terhadap bidang α.
4. Jarak dua garis sejajar g dan l adalah panjang ruas garis yang menghubungkan dua titik pada kedua ruas garis dan tegaklurus terhadap kedua garis g dan l.

5. Jarak antara dua garis bersilangan g dan l adalah panjang ruas garis yang menghubungkan titik pada g dengan titik pada l dan tegak lurus terhadap kedua garis g dan l.

6. Garis g sejajar bidang α, maka jarak dari g ke α adalah panjang ruas garis yang menghubungkan salah satu titik pada g dengan bidang α dan tegak lurus terhadap bidang α.

7. Jarak antara dua bidang sejajar α dan β adalah jarak antara salah satu titik pada α ke bidang β atau sebaliknya.

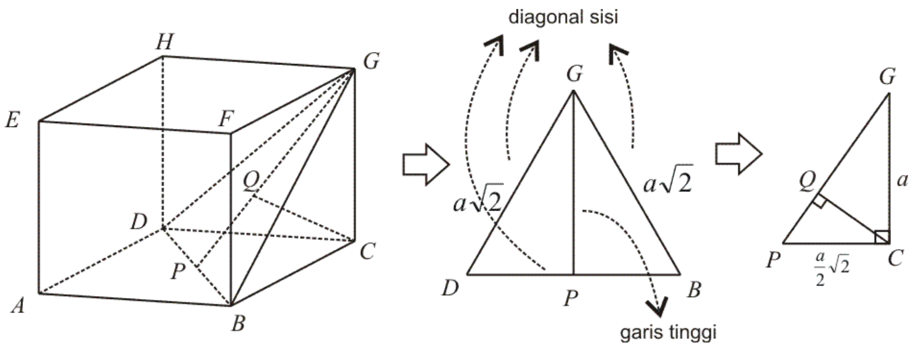


Gambar 88. Jarak antar Objek dalam Geometri

Contoh:

Tentukan jarak titik C dan bidang BDG pada kubus $ABCD.EFGH$ yang memiliki panjang rusuk a.

Penyelesaian



Perhatikan gambar di atas, $CG = CB = CD$ (rusuk kubus), dan $BD = BG = GD$ (diagonal sisi) sehingga $C.BDG$ limas segitiga beraturan, sehingga jarak C ke bidang BDG yaitu garis ruas garis CQ merupakan tinggi limas $C.BDQ$.

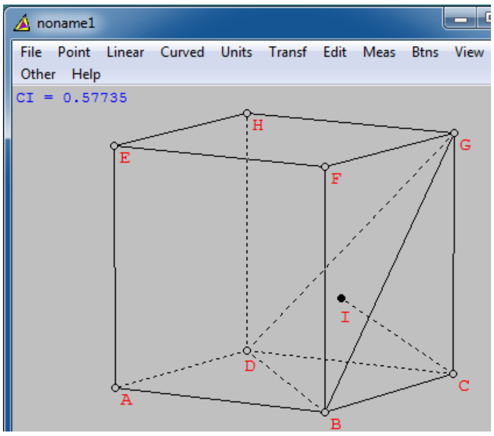
$$BD = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$$

$$PC = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}a\sqrt{2}.$$

Segitiga PCG siku-siku di G, sehingga $PG = \sqrt{PC^2 + AG^2} = \frac{a}{2}\sqrt{6}$.

Dengan menggunakan luas segitiga diperoleh hubungan $PC \cdot GC = PG \cdot CQ$, dengan substitusi nilai-nilai yang diketahui, didapatkan $CQ = \frac{1}{3}a\sqrt{3}$.

Jadi, jarak titik C ke bidang BCD adalah $\frac{1}{3}a\sqrt{3}$.



Untuk memeriksa jawaban, Anda dapat menggunakan aplikasi Wingeom, yang dapat diunduh di http://math.exeter.edu/.

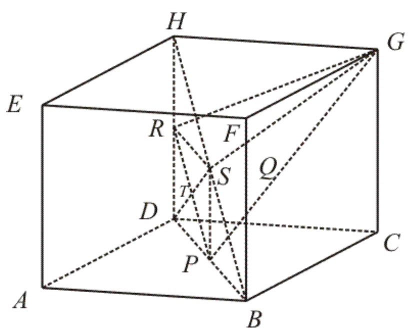
Pada gambar di samping, panjang rusuk kubus 1 satuan. Diperoleh jarak C ke bidang BDG sebesar 0,57735 (pendekatan desimal untuk $\frac{1}{3}\sqrt{3}$).

Contoh 2:

Pada kubus $ABCD.EFGH$ dengan panjang rusuk 2 satuan, titik P di tengah BD. Tentukan jarak garis HB ke garis GP.

Penyelesaian:

Jarak garis HB ke garis GP dapat diwakili oleh jarak garis HB ke bidang melalui GP sejajar HB. Bidang ini dapat dibuat dengan menarik garis sejajar HB melalui P, sehingga bidang GPR sejajar HB. Dengan demikian jarak HB ke GP dapat diwakili oleh jarak HB ke bidang GPR. Selanjutnya, jarak garis ke bidang tersebut dapat diwakili oleh jarak titik S ke bidang GPR.



Limas $G.RSPD$ merupakan potongan bagian dari limas $G.BDHF$ yang memiliki tinggi $\frac{1}{2}GE$ (mengapa?). Luas RSP seperdelapan luas $BDHF$ (mengapa?).

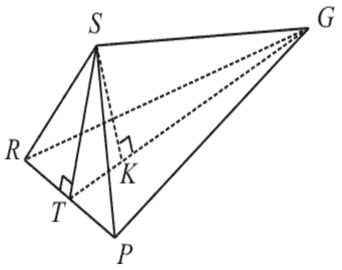
$$V_{G.BDHF}=\frac{1}{3}\cdot BD\cdot BF\cdot\frac{1}{2}EG=\frac{1}{3}\cdot 2\sqrt{2}\cdot 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}=\frac{8}{3}$$

$$V_{G.RSP}=\frac{1}{8}\cdot V_{G.BDHF}=\frac{1}{8}\cdot\frac{8}{3}=\frac{1}{3}\qquad *)$$

Dengan memandang RPG sebagai alas, maka $V_{G.RSP}=\frac{1}{3}Luas\ RPG\times tinggi$.

Sementara itu, tinggi limas $S.RPG$ yaitu SK merupakan jarak dari S ke bidang GPR.

Dengan menggunakan teorema Pythagoras, diperoleh $RG=\sqrt{5}$, $PG=\sqrt{6}$, dan $RP=\sqrt{3}$



Dengan aturan cosinus, diperoleh $\cos(\angle PRG)=\frac{1}{\sqrt{15}}$ sehingga $\sin(\angle PRG)=\frac{14}{15}$. Akibatnya

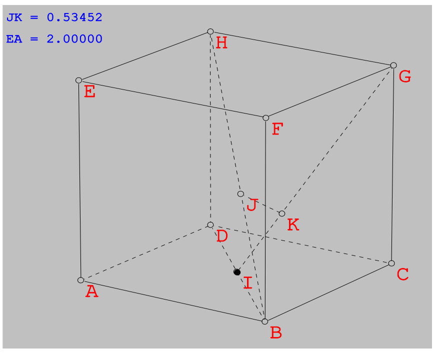
$$L_{PRG}=\frac{1}{2}\cdot PR\cdot RG\cdot\sin(\angle PRG)=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{\frac{14}{15}}=\frac{1}{2}\sqrt{14}.$$

$$V_{G.SRP}=\frac{1}{3}\cdot L_{RPG}\cdot SK$$

$$V_{G.RSP}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{14}\cdot SK\qquad **)$$

Dari * dan **, diperoleh $SK=\frac{2}{\sqrt{14}}=\frac{1}{7}\sqrt{14}$

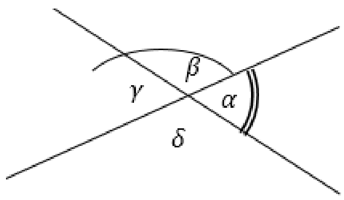
Jadi, jarak garis HB ke GP adalah $\frac{1}{7}\sqrt{14}$.



Pengecekan menggunakan Wingeom diperoleh hasil jarak HB ke GI (gambar di bawah) adalah 0,53452... .

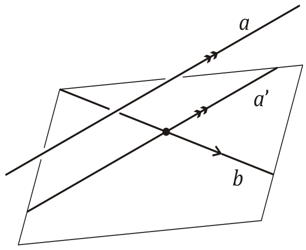
3. Sudut dalam Dimensi Tiga

Dalam geometri bidang, sudut dapat dipandang sebagai bukaan antara dua sinar yang pangkalnya bersekutu. Dengan demikian, pada dua garis yang berpotongan akan terdapat empat sudut. Untuk menghindari kekeliruan persepsi tentang sudut antara dua garis berpotongan, dibuatlah **kesepakatan** bahwa sudut antara dua yang berpotongan adalah sudut yang kecil.



Gambar 89. Sudut antara Dua Garis Berpotongan

a. Sudut antara dua garis bersilangan

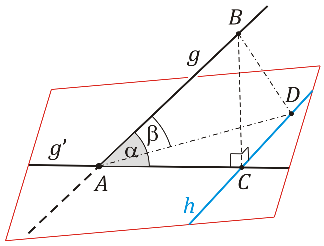


Gambar 90. Sudut antara Dua Garis Bersilangan

Sudut antara dua garis bersilangan a dan b adalah sudut antara garis berpotongan a' dan b dengan a' sejajar a. Jika sudut antara dua garis besarnya $90°$ maka dikatakan bahwa kedua garis tersebut bersilangan tegaklurus.

b. Sudut antara garis dan bidang

Jika garis g tidak tegak lurus bidang K, maka sudut antara garis g dan bidang K adalah sudut lancip yang terbentuk oleh garis g dan proyeksinya pada bidang K.



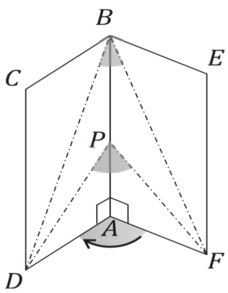
Gambar 91. Sudut antara Garis dan Bidang

Titik B pada garis g. Garis g' merupakan proyeksi g terhadap bidang K. Titik C merupakan proyeksi B pada garis g'. Dengan demikian BC tegak lurus g' dan h. Sudut antara g dengan bidang K adalah sudut α. Sudut β bukan sudut antara garis g dan bidang K (mengapa?).

Catatan: Sudut antara garis g dengan bidang K dapat ditulis dengan $\angle(g,\ K)$.

Misalkan garis l terletak atau sejajar bidang K, maka $\angle(l, K) = 0°$.

c. Sudut antara bidang dengan bidang

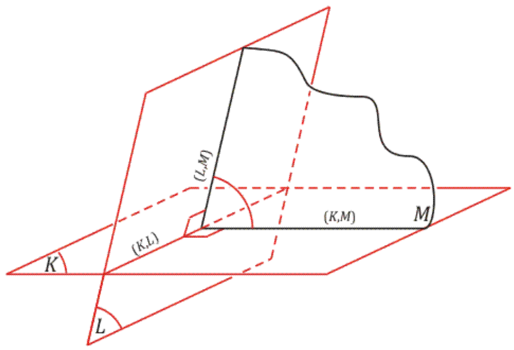


Gambar 92. Sudut antara Bidang dan Bidang

Manakah di antara sudut DAF, DPF, DBE yang "layak" untuk mewakili sudut antara dua bidang $ADCE$ dan $ABEF$? Perhatikan bahwa besar sudut DPF akan berubah jika titik P berpindah sepanjang garis AB meskipun besar bukaan kedua bidang tetap. Demikian juga untuk sudut DBF, besar sudut DBF akan berubah jika panjang AB berubah.

Dari ilustrasi di atas, diperlukan kesepakatan sudut mana yang menjadi wakil dari sudut antara dua bidang. Untuk membahas sudut antara dua bidang, perlu diketahui terlebih dahulu ketentuan tentang bidang tumpuan.

Bidang tumpuan dari dua bidang berpotongan adalah setiap bidang yang tegaklurus terhadap garis potong kedua bidang tersebut. Pada gambar, bidang tumpuan M memotong bidang K dan L menurut dua garis berpotongan (K, M) dan (L, M). Sudut yang dibentuk oleh (K, M) dan (L, M) merupakan sudut antara bidang K dan L.

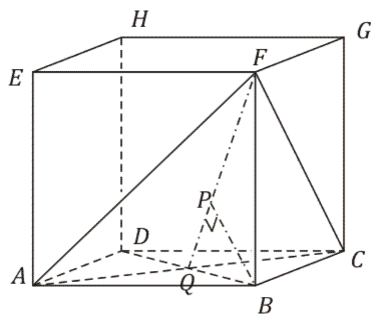


Gambar 93. Bidang Tumpuan

Contoh :

Diketahui kubus $ABCD.EFGH$ memiliki panjang rusuk 6 cm. tentukan jarak antara titik B ke bidang ACF.

Alternatif Penyelesaian (petunjuk):



Bidang $ACF \perp BFHD$ (mengapa?). Misalkan AC dan DB berpotongan di Q, perhatikan bahwa segitiga BQF siku-siku di B. Misalkan proyeksi B pada bidang ACF adalah P, maka BP merupakan jarak titik P ke bidang AFC.

Dengan menggunakan teorema Pythagoras diperoleh $DB = 6\sqrt{2}$, $BQ = 3\sqrt{2}$ dan $FQ = 3\sqrt{6}$. Gunakan perbandingan-perbandingan pada segitiga siku-siku BFQ, akan diperolah $BP = 2\sqrt{3}$. Jadi jarak b ke bidang ACF adalah $2\sqrt{3}$.

D. AKTIVITAS PEMBELAJARAN

1. Carilah beberapa soal tentang jarak dan sudut dalam dimensi tiga kemudian kerjakan secara manual.
2. Unduhlah aplikasi Wingeom atau gunakan GeoGebra 3 dimensi kemudian gunakan untuk memeriksa kebenaran jawaban soal-soal yang telah dikerjakan.

E. LATIHAN

1. Garis g tegak lurus terhadap sebuah garis h yang terletak pada bidang α. Apakah hal ini menjamin bahwa garis g tegak lurus terhadap bidang α ?
2. Pada kubus $ABCD.EFGH$, tentukan kedudukan antar garis berikut bersilangan, berpotongan, atau sejajar.
   a. $\overleftrightarrow{EF}$ dengan $\overleftrightarrow{HG}$
   b. $\overleftrightarrow{EF}$ dengan $\overleftrightarrow{GC}$
   c. $\overleftrightarrow{HB}$ dengan $\overleftrightarrow{BC}$
   d. $\overleftrightarrow{AD}$ dengan $\overleftrightarrow{FG}$
3. Pada kubus $ABCD.EFGH$, titik P terletak di ruas garis HD. Pernyataan berikut yang benar adalah (pilihan bisa lebih dari satu).
   a. $\angle EPG$ selalu tumpul
   b. $\angle EPG$ selalu lancip
   c. $\angle EPG$ bisa lancip, bisa siku-siku.
   d. Bisa ditentukan posisi P sehingga $\angle EPG = 60°$.
4. Kubus $ABCD.EFGH$ memiliki panjang rusuk 4 cm. Jika titik P di tengah EH, tentukan jarak titik P ke baris BG.
5. Diberikan kubus $ABCD.EFGH$ dengan panjang rusuk 6 cm, tentukan jarak titik C ke bidang BDG.
6. Pada ruang berbentuk kubus $ABCD.EFGH$ dengan panjang rusuk a, seekor cicak hendak merayap di dinding dari titik A ke titik G. Berapa jarak terpendek yang dapat ditempuh cicak?
7. Panjang setiap rusuk bidang empat beraturan $T.ABC$ adalah 6 cm. Jika P pertengahan AT, dan Q pertengahan BC, tentukan panjang PQ.
8. Diberikan kubus $ABCD.EFGH$, besar sudut yang dibentuk oleh garis BG dengan bidang $BDHF$ adalah … .
9. Bidang V dan W berpotongan tegak lurus sepanjang garis g. Garis l membentuk sudut 45° dengan V dan 30° dengan W. sinus sudut antara l dan g adalah … .
10. Pada bidang empat beraturan $T.ABC$, titik P di tengah AB dan Q di tengah CT. Kosinus besar sudut antara TP dan BQ adalah … .

F. RANGKUMAN

Proyeksi suatu titik P terhadap bidang V adalah titik pangkal di biang V dari ruas garis yang dibuat melalui titik P tegak lurus pada bidang V. Proyeksi suatu bangun geometri pada bidang V diperoleh dengan memproyeksikan semua titik pada bangun tersebut pada bidang V.

Jarak dua titik diwakili oleh panjang ruas garis yang menghubungkan kedua titik tersebut. Jarak antara titik ke garis adalah panjang ruas garis proyeksi antara titik tersebut ke garis. Jarak titik P ke bidang α ditentukan oleh panjang ruas garis dari titik P ke bidang α yang tegak lurus terhadap bidang α. Jarak antara dua garis bersilangan g dan l ditentukan oleh panjang ruas garis yang menghubungkan titik pada g dengan titik pada l dan tegak lurus pada kedua garis g dan l. Jarak garis g ke bidang α ditentukan oleh jarak salah satu titik pada g ke bidang α. Jarak antara dua bidang sejajar α dan β ditentukan oleh jarak salah satu titik pada α ke bidang β atau sebaliknya.

Sudut antara dua garis berpotongan ditentukan oleh besar sudut terkecil yang dibentuk oleh kedua garis tersebut. Sudut antara dua garis bersilangan$a$ dan b adalah sudut antara garis berpotongan a_1 dan b_1 dengan a_1 sejajar a dan $b_1$sejajar b.Jika garis g tidak tegak lurus bidang K, maka sudut antara garis g dan bidang K adalah sudut lancip yang terbentuk oleh garis g dan proyeksinya pada bidang K.Bidang tumpuan dari dua bidang yang berpotongan adalah setiap bidang yang tegaklurus terhadap garis potong kedua bidang tersebut. Sudut antara dua bidang yang berpotongan ditentukan oleh besar sudut antara garis-garis yang dibentuk oleh perpotongan bidang tumpuan dengan kedua bidang tersebut.

G. UMPAN BALIK DAN TINDAK LANJUT

Anda telah mempelajari materi jarak dan sudut dalam ruang berdimensi tiga. Untuk menguasai materi ini dibutuhkan kemampuan spasial yang kuat. Bagi yang masih kesulitan membayangkan disarankan untuk menggunakan media benda kongkret (kerangka bangun ruang). Dari latihan, Anda dapat menilai kemampuan diri, jika jawaban benar lebih dari 85% maka dikatakan sudah baik penguasaan materinya. Untuk pembaca yang belum dapat mencapai skor yang ditentukan dapat mengulang materi dan memperbanyak latihan.

KEGIATAN PEMBELAJARAN 8
IRISAN KERUCUT

A. TUJUAN

Guru pembelajar dapat menjelaskan pengertian irisan kerucut dan jenis-jenisnya serta dapat menjelaskan persamaan irisan kerucut.

B. INDIKATOR PENCAPAIAN KOMPETENSI

Setelah membaca dan mengikuti serangkaian kegiatan pada bagian ini, pembaca diharapkan mampu:

1. Menjelaskan pengertian irisan kerucut.
2. Menjelaskan pengertian parabola.
3. Menjelaskan pengertian ellips.
4. Menjelaskan pengertian hiperbola.
5. Menjelaskan persamaan parabola.
6. Menjelaskan persamaan ellips.
7. Menjelaskan persamaan hiperbola.

C. URAIAN MATERI

1. Irisan Kerucut

Irisan kerucut dan sifat-sifatnya telah dipelajari oleh Menaechmus (sekitar 350 SM) dan Apollonius (sekitar 225 SM). Menaechmus menggunakan kurva parabola untuk menyelesaikan permasalahan melipatduakan volum kubus. Apollonius menulis 11 buku, salah satu yang terkenal adalah "*Conics*". Ia memperkenalkan istilah parabola, hiperbola, dan ellips.

Saat ini, kurva irisan kerucut banyak diaplikasikan dalam kehidupan sehari-hari. Sebagai contoh, sifat parabola yang memantulkan sinar sejajar sumbu simetri sehingga melalui fokus telah digunakan untuk kompor matahari, pembangkit listrik tenaga surya, reflektor lampu, radar, dll. Dengan memandang lintasan planet dan matahari terletak sebidang, maka lintasan tersebut berbentuk ellips dengan matahari sebagai salah satu titik fokusnya. Sebelum tergeser oleh peralatan GPS (*Global Positioning System*) kurva hierbola digunakan dalam navigasi pelayaran. Kurva hiperbola juga digunakan dalam konstruksi cerobong pendingin (*cooling tower*) karena memiliki kekuatan struktur dengan bahan pembuatan yang minimal. Bentuk ini juga membantu kecepatan naik udara panas sehingga meningkatkan efisiensi pendinginan. Karena mempunyai banyak kegunaan maka sampai sekarang masih relevan untuk dipelajari.

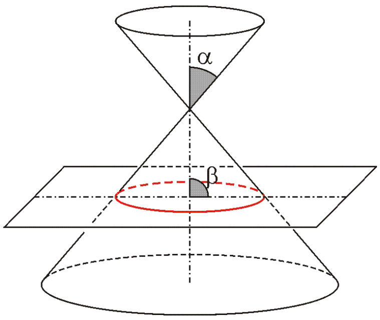
Gambar 94. Bangunan yang penampangnya berbentuk hiperbola

Sumber gambar:http://en.wikipedia.org/wiki/Cooling_tower

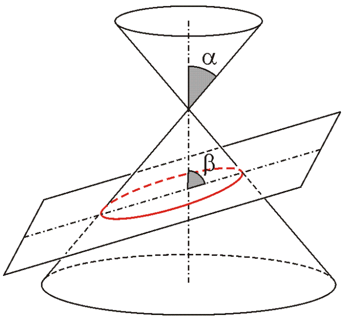
Sesuai dengan namanya, irisan kerucut diperoleh dari sepasang kerucut (kerucut ganda) yang dipotong oleh sebuah bidang. Irisan dari kerucut ganda dengan bidang disebut irisan kerucut. Misal diberikan kerucut ganda yang sumbunya vertikal. Misalkan juga sudut antara garis pelukis kerucut dan sumbu kerucut sebesar α dan sudut antara bidang dengan sumbu kerucut sebesar β. Terdapat beberapa kemungkinan :

a. $\beta = \pi/2$

Jika $\beta = \pi/2$ dan bidang tidak melalui puncak kerucut maka irisan antara bidang dengan kerucut ganda berbentuk lingkaran. Jika bidang melalui puncak kerucut, maka irisan antara bidang dengan kerucut ganda berupa titik.



Gambar 95. Irisan kerucut dan bidang berupa lingkaran



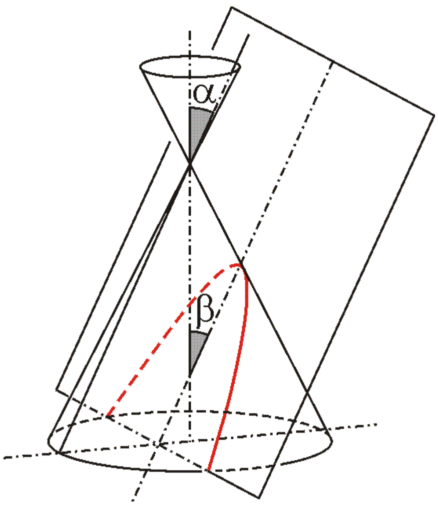
Gambar 96. Irisan kerucut dan bidang berupa ellips

b. $\alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$

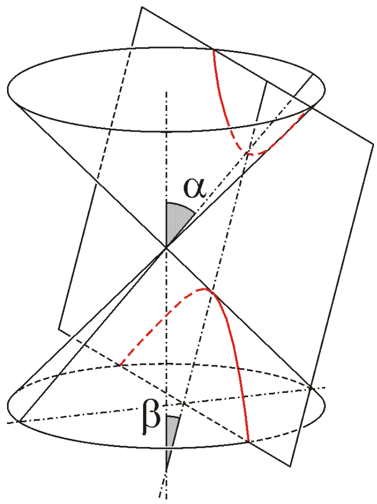
Jika $\alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$ dan bidang tidak melalui titik puncak kerucut maka irisan antara bidang dengan kerucut ganda dinamakan ellips.

c. $\alpha = \beta$

Jika $\alpha = \beta$ dan bidang tidak melalui titik puncak kerucut maka irisan antara kerucut ganda dan bidang dinamakan parabola. Jika bidang melalui kerucut maka irisannya berupa sebuah garis.



Gambar 97. Irisan kerucut dan bidang berupa parabola

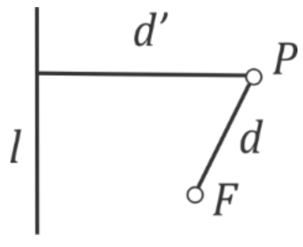


Gambar 98. Irisan kerucut dan bidang berupa hiperbola

d. $0 \leq \beta < \alpha$

Jika $0 \leq \beta < \alpha$ irisan kerucut yang terbentuk berupa sepasang hiperbola. Jika $\beta = 0$ dan melalui sumbu kerucut, maka irisannya berupa sepasang garis yang berpotongan di puncak kerucut.

Misal titik P sembarang titik pada tempat kedudukan, garis tertentu l, titik tertentu F, jarak titik P ke l dinotasikan d, jarak titik P ke F dinotasikan d', dan perbandingan yang tetap $d\!:\!d'$ dinotasikan e. Garis tertentu l dinamakan **direktriks**, titik tertentu dinamakan **fokus** atau **titik api**, dan perbandingan e dinamakan **eksentrisitas.**



Gambar 99. Definisi irisan kerucut dengan *eksentrisitas* $e = d\!:\!d'$

Bentuk dari irisan kerucut ditentukan oleh nilai dari perbandingan $d\!:\!d'$, yaitu :

a. Jika $e = 1$, yaitu jika $d = d'$, irisan kerucut dinamakan **parabola**.

b. Jika $e < 1$, irisan kerucut dinamakan **ellips**.

c. Jika $e > 1$, irisan kerucut dinamakan **hiperbola**.

Pada pembahasan berikutnya, akan ditunjukkan bagaimana memperoleh persamaan dari irisan-irisan kerucut tersebut dengan menggunakan definisi ini. Selain definisi di atas, bangun-bangun irisan kerucut juga dapat didefinisikan sebagai berikut.

Lingkaran adalah tempat kedudukan titik-titik yang berjarak sama terhadap suatu titik tertentu. Titik tertentu tersebut dinamakan titik pusat lingkaran, sedangkan jarak tertentu tersebut dinamakan jari-jari lingkaran.

Parabola adalah tempat kedudukan titik-titik yang jaraknya ke suatu titik tertentu dan jaraknya ke suatu garis tertentu sama. Titik tertentu tersebut dinamakan titik api (fokus), sedangkan garis tertentu tersebut dinamakan direktriks.

Ellips adalah tempat kedudukan titik-titik yang jumlah jaraknya ke dua titik tertentu tetap. Kedua titik tertentu tersebut dinamakan fokus atau titik api.

Hiperbola adalah tempat kedudukan titik-titik yang selisih jaraknya ke dua titik tertentu tetap. Kedua titik tertentu tersebut dinamakan fokus atau titik api.

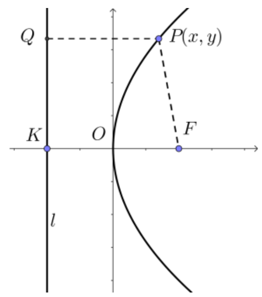
2. Persamaan Parabola

Beberapa lengkung jembatan berbentuk parabola. The Gladesville Bridge di Sydney Australia adalah jembatan lengkung tunggal terpanjang di dunia, dibangun pada tahun 1964. Lengkung jembatan ini hampir berbentuk parabola dengan persamaan $y = -x^2$. Lengkung seperti ini sering dinamakan **catenary** (ket: catenary tidak sama dengan parabola)**.**

Gambar 100. Lengkung jembatan berbentu parabola
http://www.ozroads.com.au/

Berikut akan dicari persamaan parabola yang paling sederhana, yaitu jika garis yang melalui fokus tegak lurus terhadap direktriks adalah sumbu-x dan titik asal merupakan titik tengah antara fokus dan direktriks.

Berdasarkan definisi, titik-titik pada parabola memenuhi $FP = QP$. Misalkan $2p$ adalah notasi untuk jarak tetap dari l ke F. Maka O, titik tengah KF, berjarak sama dari l dan F, yaitu suatu titik pada parabola.



Gambar 101. Parabola dengan puncak di O

Dengan mengambil titik puncak di titik asal O dan sumbu-x sepanjang KF, titik tertentu $F(p,0)$; dan jika $P(x,y)$ sebarang titik pada parabola, maka persamaan parabola ditentukan dari kondisi $FP = QP$; yaitu, $\sqrt{(x-p)^2+y^2} = p + x$. Dengan demikian diperoleh persamaan parabola yang dicari, yaitu

$$y^2 = 4px.$$

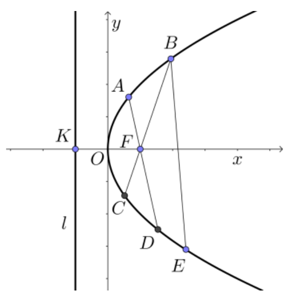
Parabola $y^2 = 4px$ memiliki fokus di titik $(p,0)$, dan direktriksnya adalah garis $x = -p$. Sumbu-x merupakan sumbu simetri parabola. Perpotongan antara sumbu simetri dan parabola dinamakan titik puncak parabola, dalam hal ini adalah titik $O(0,0)$.

Contoh:

Parabola $y^2 = 24x$ memiliki titik (6,0) sebagai fokusnya dan garis $x = -6$ sebagai direktriksnya.

Secara umum, suatu garis yang menghubungkan sebarang dua titik pada irisan kerucut dinamakan tali busur (*chord*). Suatu tali busur yang melalui focus dinamakan tali busur fokus (*focal chord*). Suatu ruas garis yang menghubungkan focus dan sebarang titik pada kurva dinamakan jari-jari fokus (*focal radius*). Tali busur fokus yang tegak lurus sumbu simetri disebut latus rectum (*focal width*).

Pada gambar di samping, ruas garis AD, BC, dan BE merupakan tali busur parabola. Tali busur AD dan BC merupakan tali busur fokus. Tali busur fokus AD merupakan latus rectum, karena merupakan tali busur fokus yang tegak lurus sumbu simetri parabola.



Gambar 102. Tali busur parabola

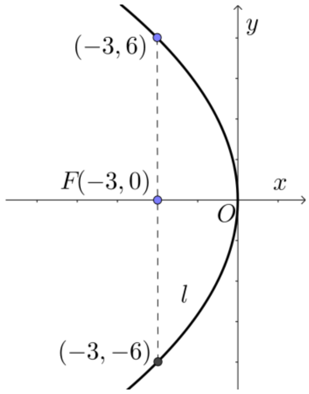
Parabola dengan persamaan $y^2 = 4px$ terletak di sebelah kanan sumbu-y. Jika kurva terletak di sebelah kiri sumbu-y, maka persamaan parabola adalah $y^2 = -4px$.

Contoh:

Buatlah sketsa kurva dan tentukan fokus dan titik ujung latus rectum dari parabola $y^2 = -12x$.

Jawab:

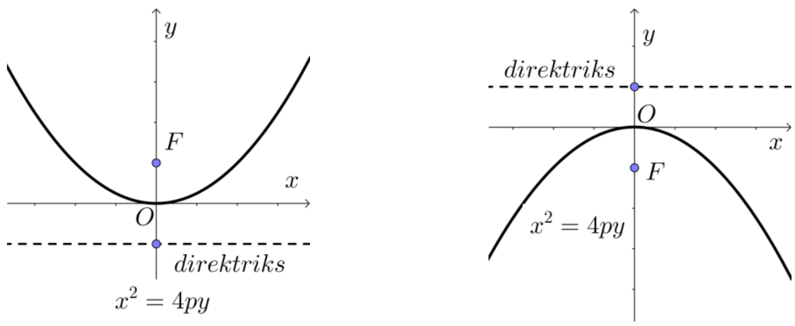
Persamaan $y^2 = -12x$ memiliki $p = 3$ dan membuka ke kiri. Fokusnya adalah $F(-3,0)$, sedangkan titik ujung latus rectumnya adalah $(-3,6)$ dan $(-3,-6)$.



Persamaan parabola yang sumbunya sejajar dengan sumbu-y dan puncaknya di titik asal adalah

$$x^2 = 4py \text{ dan } x^2 = -4py.$$

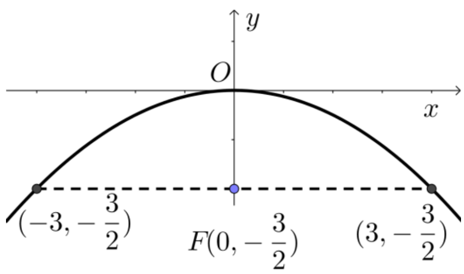
Parabola ini berturut-turut membuka ke atas atau membuka ke bawah. Fokusnya terletak pada sumbu-y yaitu $F(0,p)$ atau $F(0,-p)$. sedangkan direktriksnya adalah garis $y = -p$ atau $y = p$.



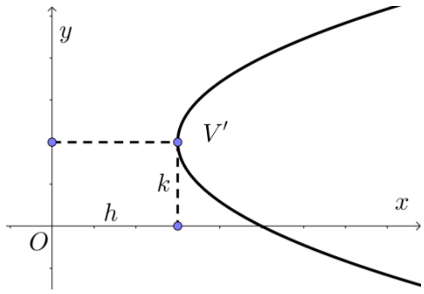
Gambar 103. Parabola dengan sumbu simetri sumbu-y

Contoh:

Parabola dengan persamaan $x^2 = -6y$ mempunyai fokus di titik $F(0,-\frac{3}{2})$.



Berikutnya akan dicari persamaan parabola yang sumbu simetrinya sejajar dengan sumbu-x dan puncaknya di titik $V(h, k)$.



Gambar 104. Parabola yang puncaknya di $V(h, k)$

Jika garis-garis yang melalui V dan sejajar dengan sumbu-x dan sumbu-y diambil sebagai sumbu-sumbu koordinat yang baru, maka terhadap system koordinat yang baru ini parabola mempunyai persamaan $y^2 = 4px$.

Jika V menjadi titik asal pada sistem koordinat yang baru, maka koordinat O menjadi $(-h, -k)$. Jika titik asal baru ini digerakkan ke O, maka x menjadi $x - h$ dan y menjadi $y - k$ dalam persamaan $y^2 = 4px$, sehingga persamaan parabola yang dicari adalah

$$(y - k)^2 = 4p(x - h).$$

Persamaan ini merupakan persamaan parabola yang puncaknya di (h, k), fokus di titik $(h + p, k)$, direktriks $x = h - p$, dan sumbu simetri sejajar

sumbu-x, yaitu garis $x = h$.

Contoh:

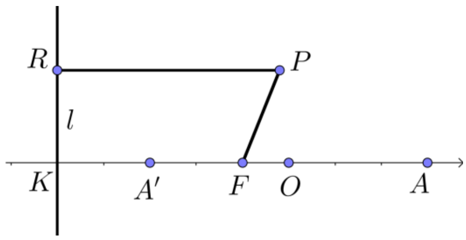
Persamaan $3y^2 - 12y - 5x + 2 = 0$ dapat ditulis menjadi $3(y^2 - 4y) = 5x - 2$ atau $3(y - 2)^2 = 5x + 10$ atau $(y - 2)^2 = \frac{5}{3}(x + 2)$. Parabola ini sumbu simetrinya sejajar sumbu-x, yaitu garis $y = 2$ dan puncaknya di titik $(-2, 2)$.

3. Persamaan Ellips

Dalam ilmu fisika, dikenal hukum Keppler pertama yang berbunyi : orbit planet mengelilingi matahari berbentuk ellips dengan matahari terletak di salah satu fokusnya. Orbit planet merupakan salah satu contoh aplikasi dari ellips. Oleh karena itu perlu dipelajari tentang ellips.

Berikut akan dicari persamaan ellips yang diturunkan dari definisi ellips dengan menggunakan eksentrisitas.

Diberikan titik tertentu F dan garis tertentu l. Ellips adalah tempat kedudukan titik-titik P yang memenuhi syarat perbandingan jaraknya ke titik F dan jaraknya ke garis l tetap, kurang dari 1, yaitu $\frac{FP}{RP} = e < 1$.



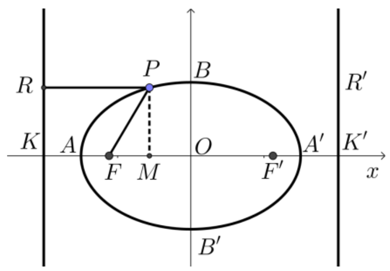
Gambar 105. Definisi ellips

Dengan menggambar KF tegak lurus terhadap l, terdapat titik A' pada KF sedemikian sehingga $A'F/KA' = e$, dan terdapat titik A pada KF dengan $FA/KA = e$. Maka A' dan A pada ellips. Misalkan $A'A = 2a$, dan titik O titik tengah $A'A$, maka $A'O = OA = a$. Akan ditentukan KO dan FO dalam suku-suku a dan e. Karena $A'F = e \cdot KA'$, dan $FA = e \cdot KA$, diperoleh

$$A'F + FA = e(KA' + KA).$$

Akan tetapi $A'F + FA = 2a$, $KA' = KO - a$, dan $KA = KO + a$. Maka $2a = e \cdot 2KO$; di mana $KO = a/e$.

Diperoleh juga, $FA - A'F = e(KA - KA')$; yaitu $(FP + a) - (a - FO) = e \cdot 2a$; di mana $FO = ae$.



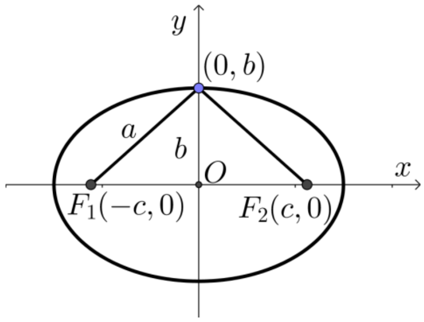
Gambar 106. Ellips dengan pusat $O(0,0)$

Dengan mengambil titik asal di O, sumbu-x tegak lurus terhadap direktriks, sumbu-y sejajar dengan direktriks, misalkan titik $P(x, y)$ sebarang titik pada ellips. Maka persamaan ellips diperoleh dari kondisi

$$FP = e \cdot RP.$$

Karena $F(-ae, 0)$, maka $FP = \sqrt{(x + ae)^2 + y^2}$.

Karena $RP = KO - MO = \frac{a}{e} + x$, maka $e.RP = e\left(\frac{a}{e} + x\right) = a + ex$. Dengan demikian, $\sqrt{(x + ae)^2 + y^2} = a + ex$ atau $(1 - e^2)x^2 + y^2 = a^2(1 - e^2)$.



Gambar 107. Unsur-unsur ellips

Persamaan ellips ini dapat dituliskan secara lebih sederhana dengan membagi kedua ruas dengan $a^2(1 - e^2)$, dan kemudian menuliskan $a^2(1 - e^2) = b^2$, diperoleh

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Persamaan ini merupakan persamaan umum ellips yang berpusat di $O(0,0)$.

Setelah diperoleh persamaan ellips, berikut akan dibahas unsur-unsur ellips. Ruas garis $A'A$ dan $B'B$ berturut-turut disebut sumbu utama (*major axes*) dan sumbu minor dari ellips. Titik ujung sumbu utama A' dan A dan titik ujung sumbu minor B' dan B disebut titik puncak ellips (*vertex*), titik O disebut pusat ellips, ruas garis OA dan OB, atau a dan b disebut setengah sumbu ellips (*semiaxes*).

Eksentrisitas ellips e berhubungan dengan a dan b dan diberikan oleh persamaan $b^2 = a^2(1 - e^2)$. Jika $a^2 - b^2 = c^2$

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{c}{a}.$$

Dengan demikian, jarak ae dari fokus ke pusat adalah $FO = ae = \sqrt{a^2 - b^2} = c$. Fokus ellips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ adalah di $(-c, 0)$ dan $(c, 0)$, di mana c juga dapat diperoleh dari $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Titik puncak ellips ini adalah $(-a, 0)$, $(a, 0)$, $(0, b)$, dan $(0, -b)$. Garis KR dan $K'R'$ merupakan direktriks ellips. Garis ini berjarak $\frac{a}{e}$ dari pusat ellips $O(0, 0)$ sehingga direktriksnya adalah garis $x = \pm\frac{a}{e}$. Karena $ae = c$ maka direktriks ellips dapat ditulis sebagai $x = \pm\frac{a^2}{c}$.

Perbandingan c/a yang disebut eksentrisitas (*eccentricity*) ellips ini menentukan bentuk ellips. Jika eksentrisitasnya besar, maka ellips lebih panjang. Semakin kecil nilai eksentrisitas, ellips akan semakin bulat. Jika eksentrisitas 0, akan diperoleh lingkaran.

Ellips mempunyai dua latus rectum. Panjang kedua latus rectum ellips $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ adalah panjang ruas garis yang tegak lurus sumbu utama dan melalui fokus, yaitu ruas garis yang terletak pada garis $x=\sqrt{a^2-b^2}$. Dengan mensubstitusikan nilai x ini ke persamaan ellips diperoleh ordinat titik potong latus rectum dan ellips $y=\pm\frac{b^2}{a}$. Jadi panjang latus rectum adalah $\frac{2b^2}{a}$.

Contoh:

Tentukan koordinat puncak dan fokus ellips $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$.

Dalam persamaan ini, $a^2=100$ dan $b^2=64$ sehingga $a = 10$ dan , karena $a>0$ dan $b>0$. Jadi titik puncaknya $(-10,0)$, $(10,0)$, $(0,-6)$ dan $(0,6)$. Nilai c adalah

$$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{100-64}=6.$$

Jadi fokus ellips di $(-6,0)$ dan $(6,0)$.

Jika sumbu utama ellips adalah sumbu-y maka fokus terletak pada sumbu-y, sehingga persamaan ellips menjadi $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$, dengan $a>b.$

Dari persamaan ini diperoleh ellips berpusat di $O(0,0)$, fokusnya di $(0,c)$ dan $(0,-c)$, dan puncaknya di titik $(b,0)$, $(-b,0)$, $(0,a)$ dan $(0,-a)$.

Contoh:

1. Tentukan koordinat puncak dan fokus ellips $25x^2+y^2 = 25$.

Jawab:

Persamaan $25x^2+y^2=25$ dapat ditulis sebagai $x^2+\frac{y^2}{25}=1$. Jadi $b=1$ dan $a=5$. Sumbu utamanya adalah sumbu-y.

Titik puncaknya adalah $(0,-5)$, $(0,5)$, $(1,0)$, dan $(-1,0)$.

Nilai c diperoleh dari $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{25-1}=2\sqrt{6}$

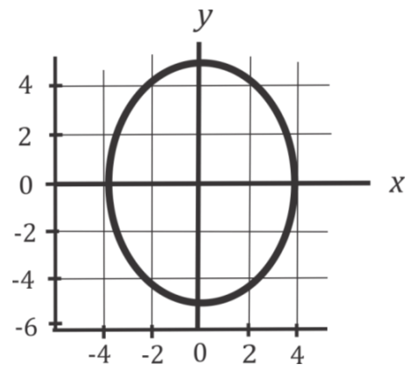
Sehingga fokusnya adalah $(0,-2\sqrt{6})$ dan $(0,2\sqrt{6})$.

2. Tentukan persamaan ellips yang panjang sumbu minornya 8 dan salah satu puncaknya di $(0, -5)$.

Jawab:

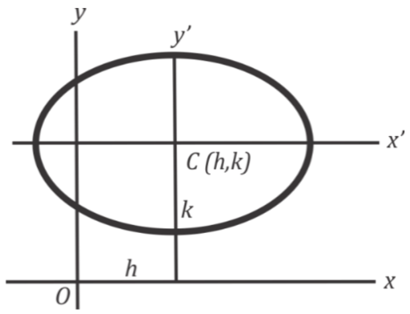
Karena panjang sumbu minornya 8 dan salah satu puncaknya di $(0, -5)$, maka a = 5 dan b = 4. Jadi persamaan ellips yang dicari adalah:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$$



Selanjutnya akan dicari persamaan ellips yang pusatnya di titik (h, k) dan sumbu-sumbunya sejajar dengan sumbu koordinat. Jika diambil garis Cx' dan Cy' sebagai sumbu-sumbu koordinat, persamaan ellips adalah $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Misal dilakukan translasi sumbu Cx' dan Cy' , dengan memindahkan titik asal C ke titik O, yang bersesuaian dengan titik C jika titik asalnya adalah $(-h, -k)$. Jika x ditulis menjadi $x - h$ dan y menjadi $y - k$, maka persamaan ellips yang bersesuaian dengan sumbu-x dan sumbu-y adalah



Gambar 108. Ellips berpusat di (h, k)

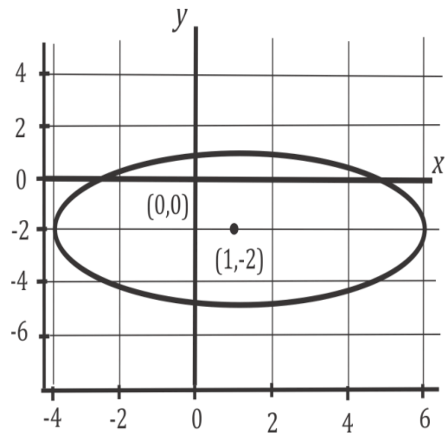
$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Contoh:

Tuliskan karakteristik ellips dengan persamaan $\frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$.

Jawab:

Dari persamaan terlihat bahwa ellips berpusat di $(1, -2)$, $a = 5$, dan $b = 3$. Panjang sumbu



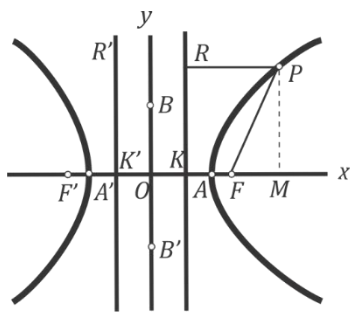
utama adalah 10 dan panjang sumbu minornya adalah 6. Sumbu mayor garis $y = -2$, sedangkan sumbu minor garis $x = 1$. Ellips berpuncak di titik $(1 + 5, -2) = (6, -2)$, $(1 - 5, -2) = (-4, -2)$, $(1, -2 + 3) = (1, 1)$, dan $(1, -2 - 3) = (1, -5)$.

4. Persamaan Hiperbola

Seperti halnya parabola, dan ellips, hiperbola juga memiliki banyak aplikasi di kehidupan. Salah satunya adalah menara pendingin pada PLTN penampangnya berbentuk hiperbola. Pada Kegiatan Belajar ini akan dipelajari tentang persamaan hiperbola.

Salah satu definisi hiperbola adalah tempat kedudukan titik-titik yang eksentrisitasnya lebih besar dari satu. Berikut akan dicari persamaan hiperbola menggunakan defnisi ini. Diberikan titik tertentu F dan garis tertentu l. Hiperbola adalah tempat kedudukan titik-titik P yang bergerak sedemikian sehingga perbandingan jaraknya dari F dan l konstan lebih besar dari 1, yaitu $FP/PR = e$.

Lukis KF tegak lurus dengan l. Maka pada KF terdapat titik A sedemikian sehingga $AF/KA = e$, dan titik A' sedemikian sehingga $A'F/A'K = e$, yaitu, $AF = e \cdot KA$ dan $A'F = e \cdot A'K$. Maka, menurut definisi, A dan A' berada pada hiperbola.



Gambar 109 Definisi Hiperbola

Misalkan $A'A = 2a$ dan O titik tengah $A'A$, sehingga $A'O = OA = a$. OK dan OF akan dinyatakan dalam a dan e. Karena $A'F - AF = e(A'K - KA)$, yaitu, $2a = e((a + OK) - (a - OK))$, diperoleh

$$OK = a/e.$$

Selain itu, $A'F + AF = 2OF = e(A'K + KA) = e \cdot 2a$ sehingga $OF = ae$.

Selanjutnya akan ditentukan persamaan hiperbola. Dengan mengambil titik asal O, sumbu-x tegak lurus dengan direktriks dan sumbu-y sejajar dengan direktriks, misalkan $P(x, y)$ sembarang titik pada hiperbola. Persamaan hiperbola dapat ditentukan dari syarat

$$FP = e \cdot RP.$$

Karena $F(ae, 0)$, maka $HP = \sqrt{(x-ae)^2 + y^2}$. Karena $RP = OM - OK = x - a/e$, maka

$$e \cdot RP = e(x - a/e) = ex - a.$$

Dengan demikian, $ex - a = \sqrt{(x-ae)^2 + y^2}$; sehingga

$(e^2-1)x^2 - y^2 = a^2(e^2-1)$, atau $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2(e^2-1)} = 1.$

Dengan mengambil bilangan positif $a^2(e^2-1) = b^2$, diperoleh

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Persamaan di atas sering ditulis juga sebagai $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$.

Dari langkah-langkah di atas diperoleh unsur-unsur dan karakteristik hiperbola sebagai berikut :

a. Misal dinotasikan $ae = c$, dari $a^2(e^2-1) = b^2$ diperoleh $c^2 = a^2 + b^2$.

b. Garis AR dan garis $A'R'$ merupakan direktriks dari hiperbola. Kedua garis ini berjarak $\frac{a}{e}$ dari titik O. Jadi direktriks hiperbola adalah garis dengan persamaan $x = \pm\frac{a}{e}$.

c. Karena $ae = c$, maka persamaan direktriks dapat ditulis sebagai $x = \pm\frac{a^2}{c}$.

d. Titik $F(ae, 0)$ atau $F(c, 0)$ merupakan fokus dari hiperbola. Hiperbola juga akan terbentuk jika didefinisikan dari fokus ke dua F' dan direktriks ke dua $K'R'$. Jadi fokus hiperbola tersebut adalah $F(c, 0)$ dan $F'(-c, 0)$.

e. Ruas garis $A'A$ disebut sumbu nyata. Walaupun kurva tidak memotong sumbu-y, dapat ditempatkan $OB = b$, dan $OB' = -b$, garis $B'B$ atau sumbu-y disebut sumbu sekawan (*conjugate axis*).

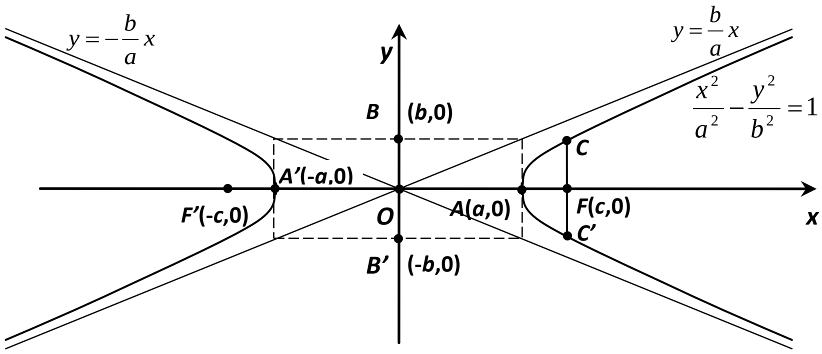
f. Jelas bahwa F' dan F, $K'R'$ dan KR simetris terhadap sumbu sekawan, yaitu sumbu-y.

g. Titik A' dan A disebut titik puncak (*vertex/vertices*), yaitu perpotongan antara sumbu nyata dengan hiperbola. Koordinat titik puncak hiperbola adalah $(a, 0)$ dan $(-a, 0)$.

h. Titik O dinamakan pusat hiperbola, yaitu perpotongan antara sumbu nyata dan sumbu sekawan.

i. Latus rectum hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, ruas garis CC' diperoleh dari mengalikan 2 ordinat positif dari fokusnya, yaitu dengan mengalikan 2 ordinat yang bersesuaian dengan $x = \sqrt{a^2 + b^2}$. Diperoleh panjang latus rectum adalah $\frac{2b^2}{a}$.

j. Ruas kanan persamaan $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ atau $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 1$ tidak pernah bernilai 0 sehingga $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \neq 0$ dan $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} \neq 0$. Jadi sembarang titik (x, y) pada hiperbola tidak pernah terletak pada garis $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$ atau $y = -\frac{b}{a}x$ dan garis $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$ atau $y = \frac{b}{a}x$. Kedua garis ini dinamakan asimptot hiperbola.



Gambar 110. Unsur-unsur hiperbola

Contoh:

Diberikan hiperbola $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$. Tentukan karakteristik hiperbola ini.

Jawab:

Dari persamaan diperoleh $a^2 = 9$ atau $a = 3$ dan $b^2 = 16$ atau $b = 4$ sehingga $c = \sqrt{9 + 16} = 5$. Karakteristiknya adalah:

a. Berpusat di $O(0,0)$.
b. Fokus di titik $(-5,0)$ dan $(5,0)$.
c. Sumbu utama adalah sumbu-x dengan panjang 6.
d. Sumbu sekawan adalah sumbu-x dengan panjang 8.
e. Titik puncaknya di $(-3,0)$ dan $(3,0)$.
f. Panjang latus rectum $\frac{32}{3}$.

g. Direktriks garis $x = -\frac{9}{5}$ dan $x = \frac{9}{5}$.

h. Eksentrisitas $e = \frac{5}{3}$.

Jika sumbu-y merupakan sumbu nyata, maka fokusnya terletak di sepanjang sumbu nyata ini, variabel x dan y bertukar posisi dalam persamaan, sehingga diperoleh

$$-\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \text{ atau } \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

di mana $2b$ menyatakan sumbu nyata $B'B$, dan $2a$ merupakan panjang sumbu sekawan $A'A$.

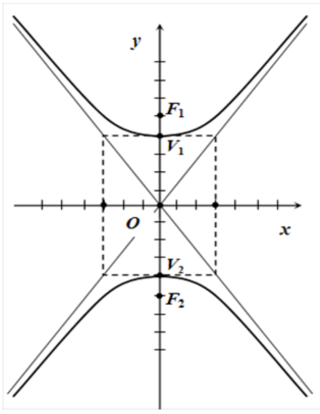
Dengan cara yang sama untuk hiperbola yang fokusnya terletak pada sumbu-x, diperoleh juga beberapa rumus berikut.

a. $a^2 = b^2(e^2 - 1)$.

b. $e = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}$.

c. $OF = be = \sqrt{a^2 + b^2}$.

d. $OK = \frac{b}{e}$.



Gambar 111 Hiperbola dengan sumbu nyata sumbu-y

Contoh:

Diberikan hiperbola dengan persamaan $9y^2 - 16x^2 - 144 = 0$ tentukan puncak, fokus, asimptot dan buatlah sketsanya.

Jawab:

Persamaan hiperbola $9y^2 - 16x^2 - 144 = 0$ dapat ditulis menjadi $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$.

Dari persamaan terakhir diperoleh $a = 4, b = 3$ sehingga $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$ dan memiliki karakteristik sebagai berikut.

a. Berpusat di $O(0,0)$.

b. Hiperbola membuka ke atas dan ke bawah.

c. Puncak $V_1(0, 4)$ dan $V_2(0, -4)$.

d. Asimptot $y = \frac{4}{3}x$ dan $y = -\frac{4}{3}x$

e. Fokus $F_1(0, 5)$ dan $F_2(0, -5)$.

Persamaan hiperbola yang pusatnya di titik (h, k) dan sumbu nyatanya sejajar dengan sumbu-x (analog dengan ellips) adalah

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1.$$

Hiperbola ini mempunyai sifat :

Pusat hiperbola : (h, k).

Puncak hiperbola : $V_1(h + a, k)$ dan $V_2(h - a, k)$.

Fokus hiperbola : $F_1(h + c, k)$ dan $F_2(h - c, k)$.

Asimptot : $y - k = \frac{b}{a}(x - h)$ dan $y - k = -\frac{b}{a}(x - h)$

Jika sumbu nyata sejajar dengan sumbu-y, b menyatakan panjang setengah sumbu nyata hiperbola, dan persamaannya adalah

$$-\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \text{ atau } \frac{(y-k)^2}{b^2} - \frac{(x-k)^2}{a^2} = 1.$$

D. AKTIVITAS PEMBELAJARAN

Untuk pengembangan dan menambah wawasan tentang materi ini, Anda dapat mengerjakan aktivitas berikut.

1. Dari mana munculnya definisi ellips, parabola, dan hiperbola? Bagaimana kerucut diiris oleh bidang sehingga menghasilkan kurva-kurva tersebut? Proses kerucut diiris bidang sehingga menghasilkan definisi kurva tersebut dapat dijelaskan dengan menggunakan bola Dandelin. Carilah referensi tentang Bola Dandelin. Buatlah ringkasan tentang proses mendapatkan kerucut diiris sehingga menghasilkan definisi parabola, hiperbola dan ellips.

2. Carilah aplikasi parabola pada permasalahan nyata, misalnya pada alat-alat seperti antenna parabola. Carilah penjelasan tentang sifat parabola yang diaplikasikan pada peralatan tersebut.

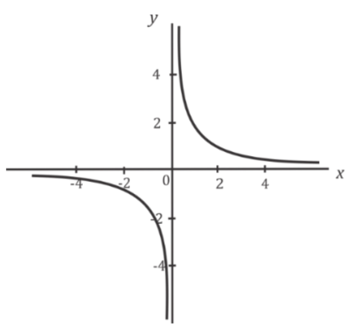
3. Bandingkan persamaan yang Anda peroleh pada aktivitas 1 di atas dengan persamaan parabola yang dipelajari di SMP, yaitu $y = ax^2 + bx + c$. Apa hubungan kedua persamaan parabola tersebut ?

4. Bumi mengelilingi matahari menurut lintasan yang berbentuk ellips, di mana matahari berada di salah satu fokusnya (ditemukan oleh Keppler pada tahun 1610). Nilai dari eksentrisitas $c/$ orbit bumi adalah 1/60. Carilah referensi tentang jarak terjauh dan jarak terdekat bumi ke matahari (aphelium dan perihelium). Selanjutnya susunlah persamaan orbit bumi.

5. Persamaan ellips juga dapat diturunkan dari definisi tempat kedudukan titik-titik yang jumlah jaraknya ke dua titik tertentu tetap. Tunjukkan bahwa persamaan ellips yang berpusat di $O(0,0)$ dan jumlah jaraknya ke dua titik tertentu, yaitu titik $F(c,0)$ dan $F'(-c,0)$ adalah $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ dengan mengikuti langkah-langkah berikut. Misalkan jumlah jarak yang tetap tersebut $2a$.

   a. Ambil sembarang titik $T(x,y)$ pada ellips.
   b. Jumlah jarak T ke F dan F' tetap sebesar $2a$, maka memenuhi $TF + TF' = 2a$. Dengan menggunakan jarak rumus jarak antara dua titik dan pengkuadratan sebanyak dua kali, jabarkan dan sederhanakan persamaan yang diperoleh.
   c. Setelah diperoleh persamaan yang memuat $a^2 - c^2$, tuliskan $a^2 - c^2 = b^2$.
   d. Sederhanakan sampai diperoleh persamaan $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

6. Hiperbola yang paling sederhana, yaitu $xy = 1$ adalah hiperbola siku. Jika dibandingkan dengan hiperbola yang sudah dibahas, hiperbola ini diperoleh dengan memutar sebesar 45° terhadap titik asal. Selidikilah sifat-sifat hiperbola ini.



7. Sebelum ditemukannya sistim GPS, untuk menentukan posisi kapal di laut digunakan sistem LORAN. Sistem ini melibatkan kurva-kurva hiperbola. Carilah referensi tentang bagaimana prinsip kerja sistem ini.

E. LATIHAN/KASUS/TUGAS

Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut.

1. Pada kerucut yang diiris oleh bidang, apa hubungan antara hiperbola dan dua garis berpotongan ?
2. Apakah mungkin eksentrisitas e bernilai negatif ? Jelaskan.
3. Tentukan fokus, persamaan direktriks, dan latus rectum dari parabola berikut.
   a. $y^2 = 8x$.
   b. $x^2 = 8y$.
   c. $x = 2y^2$
   d. $6x = -y^2$
4. Tentukan persamaan parabola yang puncaknya di titik asal dan sumbunya adalah salah satu sumbu koordinat, dan memenuhi kondisi yang diberikan.
   a. Ruas garis yang kedua titik ujungnya $(-2,5)$ dan $(-2,-5)$ merupakan salah satu tali busurnya.
   b. Ruas garis yang kedua titik ujungnya $(-2,6)$ dan $(2,6)$ merupakan salah satu tali busurnya.
   c. Fokusnya $(0,-3)$
   d. Fokusnya terletak pada garis $3x + 4y = 12$.
5. Tentukan persamaan parabola yang memenuhi kondisi berikut.
   a. Direktriksnya garis $x = 6$ dan fokusnya titik $(4,2)$.
   b. Direktriksnya garis $0 = 4y - 3$ dan fokusnya titik $(1,1)$.
6. Tentukan puncak, fokus, dan direktriks dari parabola berikut.
   a. $y^2 - 4y - 6x + 10 = 0$.
   b. $y^2 = 3x + 2y + 5$.
   c. $2y^2 + 12y + 3x + 3 = 0$.
   d. $y = 2x^2 - 6x + 3$.
7. Tunjukkan bahwa puncak kedua parabola $x^2 - 2x = 5y - 11$ dan $y^2 = 4y + 5x - 9$ sama, dan tentukan titik perpotongan kedua parabola.
8. Suatu antenna penerima berbentuk parabola dengan lebar penampang 12m dan kedalaman 2m. Di manakah penerima sinyal harus ditempatkan agar penerimaan optimal ?

9. Tentukan fokus, direktriks, dan panjang latus rectum ellips berikut.
   a. $4x^2 + 25y^2 = 100.$
   b. $x^2 + 25y^2 = 25.$
   c. $3x^2 + 4y^2 = 12.$
   d. $25x^2 + 9y^2 = 225.$
10. Tentukan persamaan ellips yang sumbu-sumbunya adalah sumbu koordinat dan memenuhi kondisi berikut:
    a. Fokus $(\pm 4{,}0)$; puncaknya $(\pm 6{,}0)$.
    b. Fokus $(\pm 3{,}0)$; direktriks $x = \pm 12$.
    c. Panjang sumbu minor 6; fokus $(\pm 4{,}0)$.
    d. Puncak $(\pm 8{,}0)$; eksentrisitas ¾.
11. Tentukan pusat, eksentrisitas, dan fokusnya.
    a. $x^2 + 9y^2 + 16x - 18y - 11 = 0.$
    b. $4x^2 + 25y^2 - 8x - 100y + 4 = 0.$
    c. $2x^2 + 5y^2 - 16x + 20y + 42 = 0.$
12. Tentukan persamaan ellips yang sumbu-sumbunya sejajar dengan sumbu kordinat dan memenuhi kondisi berikut.
    a. Berpusat di $(4{,}3)$, eksentrisitas ½, sumbu utama sejajar sumbu-x dan panjangnya 12.
    b. Fokus di $(6, -2)$ dan $(-2, -2)$, dan panjang sumbu utama dua kali panjang sumbu minor.
    c. Berpusat di $(1{,}2)$ dan melalui titik $(1{,}1)$ dan $(3{,}2)$
13. Tentukan fokus, eksentrisitas, panjang latus rectum, dan direktriks dari hiperbola-hiperbola berikut.
    a. $4x^2 - 25y^2 = 100.$
    b. $9x^2 - 4y^2 = 36.$
14. Tentukan persamaan hiperbola yang sumbu-sumbunya sepanjang sumbu koordinat dan memenuhi kondisi berikut.
    a. Salah satu titik puncaknya (4,0) dan fokusnya (5,0).
    b. Salah satu titik puncaknya (0,8) dan eksentrisitasnya 2.

c. Salah satu asimptotnya $2y = 3x$, dan fokusnya $(13,0)$.

15. Tentukan eksentrisitas, fokus, dan titik puncaknya.
   a. $4x^2 - 9y^2 - 16x + 18y = 29$.
   b. $9x^2 - y^2 + 36x + 6y + 18 = 0$.

F. RANGKUMAN

Irisan kerucut merupakan irisan antara kerucut ganda dan bidang. Jenis irisan kerucut ditentukan oleh sudut antara garis pelukis kerucut dan sudut antara bidang dengan sumbu kerucut.

Irisan kerucut juga didefinisikan sebagai tempat kedudukan titik-titik yang perbandingan jaraknya ke suatu titik tertentu dan jaraknya ke suatu garis tertentu tetap. Bilangan perbandingan ini dinamakah eksentrisitas e.

a. Jika $e = 1$, irisan kerucut berupa **parabola**.
b. Jika $e < 1$, irisan kerucut berupa **ellips**.
c. Jika $e > 1$, irisan kerucut berupa **hiperbola**.

Definisi lain :

a. Lingkaran adalah tempat kedudukan titik-titik yang berjarak sama terhadap suatu titik tertentu.
b. Parabola adalah tempat kedudukan titik-titik yang jaraknya ke suatu titik tertentu dan jaraknya ke suatu garis tertentu sama.
c. Ellips adalah tempat kedudukan titik-titik yang jumlah jaraknya ke dua titik tertentu tetap.
d. Hiperbola adalah tempat kedudukan titik-titik yang selisih jaraknya ke dua titik tertentu tetap.

Persamaan parabola yang puncaknya di $O(0,0)$ dan sumbunya pada sumbu-x adalah $y^2 = 4px$ dan $y^2 = -4px$.

Persamaan parabola yang puncaknya di $O(0,0)$ dan sumbunya pada sumbu-y adalah $x^2 = 4py$ dan $x^2 = -4py$.

Persamaan parabola yang puncaknya di (h, k) dan sumbunya sejajar sumbu-x adalah $(y - k)^2 = 4p(x - h)$ dan $(y - k)^2 = -4p(x - h)$.

Persamaan parabola yang puncaknya di (h, k) dan sumbunya pada sumbu-y adalah $(x-h)^2 = 4p(y-k)$ dan $(x-h)^2 = -4p(y-k)$.

Persamaan ellips yang berpusat di $O(0,0)$ dan sumbu mayornya sumbu-x adalah $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ dan mempunyai sifat-sifat berikut.

a. Pusat di $O(0,0)$
b. Sumbu simetri : sumbu mayor adalah sumbu-x dan sumbu minor adalah sumbu-y.
c. Panjang sumbu mayor $2a$ dan panjang sumbu minor $2b$.
d. Fokus di $(c, 0)$ dan $(-c, 0)$
e. Puncak di $(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(0, b)$ dan $(0, -b)$
f. Direktriks garis $x = \pm\frac{a}{e} = \pm\frac{a^2}{c}$.
g. Panjang latus rectum adalah $\frac{2b^2}{a}$.

Persamaan ellips yang berpusat di $O(0,0)$ dan sumbu mayornya sumbu-y adalah $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$.

Persamaan ellips yang berpusat di $V(h, k)$ dan sumbu mayornya sejajar dengan sumbu-x adalah $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$.

Persamaan hiperbola yang pusatnya di $O(0,0)$ dengan sumbu nyata sumbu-x adalah $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Sifat-sifat hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$:

a. Hubungan nilai a, b dan c adalah $c^2 = a^2 + b^2$.
b. Direktriks hiperbola adalah garis dengan persamaan $x = \pm\frac{a}{e}$.
c. Fokus hiperbola tersebut adalah $F(c, 0)$ dan $F'(-c, 0)$.
d. Sumbu-y merupakan sumbu sekawan (*conjugate axis*).
e. Koordinat titik puncak hiperbola adalah $(a, 0)$ dan $(-a, 0)$.
f. Panjang latus rectum adalah $\frac{2b^2}{a}$.
g. Garis $y = -\frac{b}{a}x$ dan garis $. = \frac{b}{a}x$ dinamakan asimptot hiperbola.

Persamaan hiperbola dengan pusat $O(0,0)$ dan sumbu nyata sumbu-y adalah $-\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ atau $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$.

Persamaan hiperbola yang pusatnya di titik (h,k) dan sumbu nyatanya sejajar dengan sumbu-x adalah $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$.

Dengan sifat-sifat:

a. Pusat di (h,k).

b. Puncak di $V_1(h+a,k)$ dan $V_2(h-a,k)$.

c. Fokus di $F_1(h+c,k)$ dan $F_2(h-c,k)$.

d. Asimptot garis $y-k=\pm\frac{b}{a}(x-h)$.

G. UMPAN BALIK DAN TINDAK LANJUT

Anda telah mempelajari materi irisan kerucut dan persamaan-persamaannya. Untuk menguasai materi ini dibutuhkan keterampilan perhitungan dan penguasaan dasar-dasar geometri yang kuat. Dari latihan, Anda dapat menilai kemampuan diri, jika jawaban benar lebih dari 85% maka dikatakan sudah baik penguasaan materinya. Untuk pembaca yang belum dapat mencapai skor yang ditentukan dapat mengulang materi dan memperbanyak latihan.

KEGIATAN PEMBELAJARAN 9
PERSAMAAN LINGKARAN

A. TUJUAN

Guru pembelajar mampu menjelaskan persamaan lingkaran dan persamaan garis singgung lingkaran.

B. INDIKATOR PENCAPAIAN KOMPETENSI

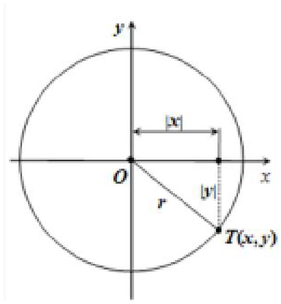
Setelah membaca dan mengikuti serangkaian kegiatan pada bagian ini, pembaca diharapkan mampu:

1. Menentukan persamaan standar/baku lingkaran.
2. Menentukan persamaan bentuk umum lingkaran.
3. Menentukan persamaan parametrik lingkaran.
4. Menentukan persamaan lingkaran yang diketahui ketiga titiknya
5. Menentukan pusat dan jari-jari lingkaran yang diketahui persamaannnya.
6. Menentukan relasi/kedudukan antara garis dan lingkaran.
7. Menentukan garis singgung lingkaran yang bergradien m.
8. Menentukan garis singgung lingkaran di suatu titik.
9. Menentukan garis singgung lingkaran yang melalui suatu titik.

C. URAIAN MATERI

1. Persamaan Lingkaran

Kita ingat kembali definisi lingkaran, yaitu tempat kedudukan titik-titik yang berjarak sama terhadap suatu titik tertentu. Pada Kegiatan Belajar ini akan dicari persamaan lingkaran yang diketahui pusat dan jari-jarinya dan persamaan lingkaran yang memenuhi kondisi tertentu.

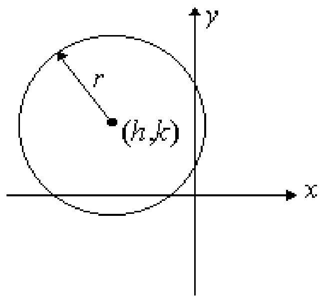


Gambar 112. Lingkaran berpusat di $\boldsymbol{O}(\mathbf{0},\mathbf{0})$ dan berjari-jari $\boldsymbol{r}$

Pertama, akan dicari persamaan lingkaran yang berpusat di titik asal $O(0,0)$ dan berjari-jari r. Mengingat definisi lingkaran, maka untuk sembarang titik $T(x, y)$

pada lingkaran dengan pusat $O(0,0)$ berlaku $TO = r$, yaitu $\sqrt{|x|^2 + |y|^2} = r$ atau $\sqrt{x^2 + y^2} = r$. Dengan mengkuadratkan kedua ruas diperoleh persamaan yang dicari, yaitu $x^2 + y^2 = r^2$.

Selanjutnya akan ditentukan persamaan lingkaran dengan titik $P(h, k)$ adalah pusat lingkaran dan r jari-jari lingkaran. Jika $T(x, y)$ sebarang titik pada lingkaran, maka lingkaran ini didefinisikan oleh kondisi $TP = r$. Dari rumus jarak antara dua titik T dan P maka



Gambar 113 Lingkaran berpusat di $\boldsymbol{P(h, k)}$

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$$

atau

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2.$$

Persamaan ini merupakan persamaan yang dicari. Persamaan ini dinamakan **persamaan standar/baku lingkaran**. Persamaan baku lingkaran ini dapat ditulis sebagai

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0$$

atau

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

dengan $A = -2h$, $B = -2k$, dan $C = h^2 + k^2 - r^2$. Persamaan ini disebut **persamaan bentuk umum lingkaran**.

Dari sini diperoleh hubungan antara nilai-nilai A, B, C dan h, k, dan r, yaitu :

$$h = -A/2, k = -B/2,$$

dan

$$r^2 = h^2 + k^2 - C = \left(-\frac{A}{2}\right)^2 + \left(-\frac{B}{2}\right)^2 - C = \frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C$$

Jadi lingkaran $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ mempunyai pusat di titik $(-A/2, -B/2)$ dan berjari-jari $r = \sqrt{\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C}$.

Sifat: Suatu persamaan berderajad dua dalam x dan y menyatakan suatu lingkaran jika dan hanya jika tidak memuat suku xy dan koefisien dari x^2 dan y^2 sama.

Contoh:

1. Nyatakan persamaan baku lingkaran $(x+4)^2+(y-5)^2=36$ ke dalam persamaan bentuk umum lingkaran dan kemudian buatlah sketsanya.

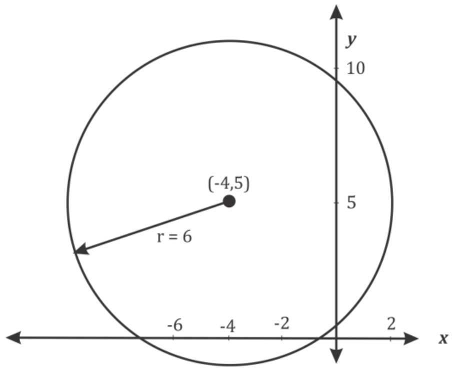
Jawab:

$(x+4)^2+(y-5)^2=36$

$x^2+8x+16+y^2-10y+25-36=0$

$$x^2+y^2+8x-10y+5=0.$$

Jadi persamaan bentuk baku lingkaran $(x+4)^2+(y-5)^2=36$ adalah $x^2+y^2+8x-10y+5=0$. Persamaan ini merupakan persamaan lingkaran yang berpusat di titik $(-4,5)$ dan berjari-jari $r=\sqrt{36}=6$.



2. Tentukan pusat dan jari-jari lingkaran $x^2+y^2+8x+6y=0$.

Jawab:

Persamaan diubah ke bentuk $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ dengan melengkapkan kuadrat sempurna ruas kiri persamaan.

$$x^2+8x+y^2+6y=0$$

$$x^2+8x+16+y^2+6y=25$$

$$(x+4)^2+(y+3)^2=5^2$$

Terlihat bahwa lingkaran tersebut berpusat di titik $(-4,-3)$ dan berjari-jari 5 unit. Lingkaran ini melalui titik asal $O(0,0)$ karena memenuhi $(-4)^2+(-3)^2=(5)^2$.

Berikut akan dibahas tentang persamaan parametrik lingkaran. Dalam persamaan parametrik, hubungan antara variabel x dan y tidak dinyatakan secara langsung, melainkan melalui variabel ketiga yang disebut parameter. Diberikan lingkaran dengan pusat $P(h,k)$ dan berjari-jari r. Misalkan $T(x,y)$ sebarang titik pada lingkaran, maka koordinat T memenuhi

$$x=h+r\cos t \quad \text{dan} \quad y=k+r\sin t$$

dengan h, k, dan r merupakan konstanta dan t suatu parameter. Bilangan r adalah jari-jari lingkaran, $P(h,k)$ pusat lingkaran, dan t adalah sudut yang dibentuk oleh garis tertentu yang melalui pusat lingkaran dengan sebarang jari-jari lingkaran. Persamaan ini dinamakan **persamaan parametrik lingkaran** (*parametric equation*).

Akan ditunjukkan hubungan antara persamaan parametrik lingkaran dengan persamaan baku lingkaran.

$$x = h + r\cos t \text{ atau } x - h = r\cos t \text{ atau } (x-h)^2 = r^2\cos^2 t$$
$$y = k + r\sin t \text{ atau } y - k = r\sin t \text{ atau } (y-k)^2 = r^2\sin^2 t$$

Dengan menjumlahkan kedua ruas kedua persamaan terakhir diperoleh

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2(\cos^2 t + \sin^2 t)$$

Karena $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, maka

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

Contoh:

Persamaan parametrik lingkaran yang berpusat di titik $(-3, 2)$ dan berjari-jari 3 adalah

$$\begin{cases} x = -3 + 3\cos t \\ y = 2 + 3\sin t \end{cases}$$

dengan t parameter. Misal $t = 45°$, maka $x = -3 + 3 \cdot \cos 45° = -3 + \frac{3}{2}\sqrt{2}$ dan $y = 2 + \frac{3}{2}\sqrt{2}$. Titik $(-3 + \frac{3}{2}\sqrt{2},\ 2 + \frac{3}{2}\sqrt{2})$ adalah suatu titik pada lingkaran tersebut.

Selanjutnya akan dibahas persamaan lingkaran yang melalui tiga titik. Jika diberikan tiga titik yang tidak segaris maka terdapat tepat satu lingkaran yang melalui ketiga titik tersebut. Persamaan lingkaran $(x-h)^2+(y-k)^2= r^2$ dan $x^2+y^2+Ax + By + C = 0$ memuat tiga konstanta (h, k, dan r atau A, B, dan C) yang nilainya menentukan sifat lingkaran. Hal ini menunjukkan bahwa suatu lingkaran akan tertentu jika diketahui tiga kondisinya. Sebagai contoh:

a. Melalui tiga titik yang diberikan (tiga titik tidak segaris).
b. Melalui dua titik tertentu dan menyinggung garis tertentu.
c. Menyinggung tiga garis tertentu (ketiga garis tidak setitik atau tidak sejajar).

Untuk mencari persamaan lingkaran yang ditentukan oleh tiga kondisi, pilihlah salah satu bentuk persamaan lingkaran. Selanjutnya, masalah direduksi menjadi menyatakan ketiga kondisi tersebut ke dalam suku-suku dari ketiga konstanta dalam persamaan yang dipilih sehingga akan diperoleh suatu sistem persamaan linear dengan variabel ketiga konstanta tersebut. Dengan menyelesaikan sistem persamaan linear ini akan diperoleh persamaan lingkaran yang dicari.

Contoh:

Akan ditentukan persamaan lingkaran yang melalui ketiga titik $K(-1,0)$, $L(0,2)$, dan $M(3,0)$. Koordinat ketiga titik pastilah memenuhi $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ dengan A, B, dan C akan dicari. Dengan demikian,

$$(-1)^2+0^2+A(-1)+B(0)+C=0$$
$$0^2+2^2+A\cdot 0+B\cdot 2+C=0$$
$$3^2+0^2+A\cdot 3+B\cdot 0+C=0.$$

Diperoleh sistem persamaan linear tiga variabel

$$\begin{cases} -A+C=-1 \\ 2B+C=-4 \\ 3A+C=-9. \end{cases}$$

Dengan menyelesaikan sistem persamaan ini, diperoleh $A=-2$, $B=-\frac{1}{2}$, dan $C=-3$, sehingga persamaan lingkaran yang dicari adalah $x^2+y^2-2x-\frac{1}{2}y-3=0$.

Persamaan lingkaran yang melalui tiga titik yang diberikan dapat dipandang sebagai tempat kedudukan titik-titik keempat yang terletak pada lingkaran yang melalui ketiga titik tersebut. Dengan demikian, persamaan lingkaran ini memenuhi atau dapat ditentukan oleh persamaan yang terdapat dalam determinan matriks berikut.

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

2. Garis Singgung Lingkaran

Setelah pembahasan tentang persamaan lingkaran, berikut akan diuraikan tentang garis singgung lingkaran. Ingat kembali bahwa kedudukan atau relasi antara garis dan lingkaran dapat berupa : garis saling asing dengan lingkaran, garis menyinggung lingkaran, dan garis memotong lingkaran. Garis singgung lingkaran ada tiga macam, yaitu garis singgung yang gradiennya diketahui, garis singgung lingkaran di suatu titik, dan garis singgung lingkaran yang melalui suatu titik (di luar lingkaran).

Berikut akan dicari persamaan garis singgung lingkaran $x^2+y^2=r^2$ yang bergradien m. Misalkan garis $y=mx+c$ merupakan garis bergradien m yang dicari. Masalah ini menjadi menentukan nilai c sedemikian sehingga garis $y=mx+c$ merupakan garis singgung ke lingkaran $x^2+y^2=r^2$. Titik potong garis dan lingkaran dapat dicari dengan menyelesaikan sistem persamaan dari kedua persamaan garis dan lingkaran. Dengan mensubstitusikan persamaan garis ke persamaan lingkaran, diperoleh $x^2+(mx+c)^2=r^2$ atau $(1+m^2)x^2+2mcx+c^2-r^2=0$.

Kedua akar dari persamaan kuadrat dalam x merupakan absis dari titik potong garis dan lingkaran. Agar garis menyinggung lingkaran, kedua titik ini haruslah berimpit sehingga keduanya mempunyai absis yang sama. Dengan demikian, kedua akar persamaan kuadrat ini haruslah sama. Syarat agar kedua akar sama adalah nilai diskriminannya 0. Oleh karena itu diperoleh

$$4m^2c^2-4(1+m^2)(c^2-r^2)=0,$$

di mana $c=\pm r\sqrt{1+m^2}$.

Jadi persamaan garis singgung bergradien m yang dicari adalah

$$y=mx\pm r\sqrt{1+m^2}.$$

Jika lingkaran berpusat di titik (h,k), dengan cara yang sama persamaan garis singgung lingkaran yang bergradien m adalah

$$y-k=m(x-h)\pm r\sqrt{1+m^2}.$$

Contoh:

Carilah persamaan garis singgung lingkaran $x^2+y^2-4x-6y-3=0$ yang membentuk sudut 60° dengan sumbu-x positif.

Jawab:

Persamaan lingkaran dapat dituliskan menjadi $(x-2)^2+(y-3)^2=16$. Persamaan garis singgung lingkaran yang bergradien $m=\tan 60°=\sqrt{3}$ adalah

$$y-3=\sqrt{3}(x-2)\pm 4\sqrt{1+(\sqrt{3})^2}$$

atau $y=\sqrt{3}x+11-2\sqrt{3}$ dan $y=\sqrt{3}x-5-2\sqrt{3}$.

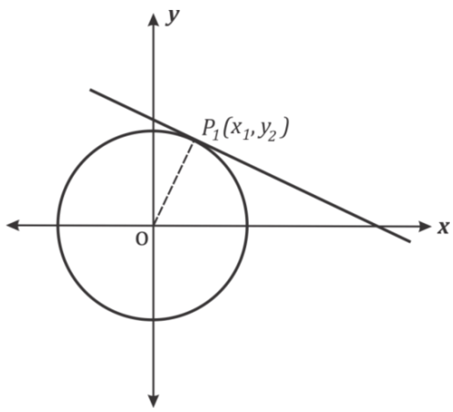
Untuk sembarang titik pada lingkaran, terdapat suatu garis yang hanya bersekutu dengan titik tersebut. Garis ini merupakan garis singgung lingkaran. Berikut akan dicari persamaan garis singgung lingkaran $x^2+y^2=r^2$ di suatu titik $P_1(x_1,y_1)$ pada lingkaran. Pusat lingkaran berada di titik asal O.

Kemiringan atau gradien jari-jari yang melalui P_1, yaitu garis OP_1 adalah $\frac{y_1}{x_1}$. Garis OP_1 ini disebut normal di titik P_1. Karena garis singgung di P_1 tegak lurus terhadap OP_1, maka kemiringan garis singgung di P_1 adalah $-\frac{x_1}{y_1}$. Dengan demikian, persamaan garis singgung di P_1 adalah

$$y-y_1=-\frac{x_1}{y_1}(x-x_1)$$

atau

$$x_1x+y_1y=x_1^2+y_1^2.$$



Gambar 114. Garis singgung lingkaran di titik $\boldsymbol{P_1(x_1,y_1)}$

Karena titik $P_1(x_1,y_1)$ pada lingkaran, maka berlaku $x_1^2+y_1^2=r^2$. Jadi persamaan garis singgung yang dicari adalah

$$x_1x+y_1y=r^2.$$

Terlihat bahwa persamaan garis singgung diperoleh dari persamaan lingkaran $x^2+y^2=r^2$ dengan mengganti suku x^2 dengan x_1x dan mengganti y^2 dengan y_1y. Jika persamaan lingkaran berbentuk $x^2+y^2+Ax+By+C=0$, maka persamaan garis singgung diperoleh dengan mengganti suku x^2 dengan x_1x dan mengganti y^2 dengan y_1y, $2x$ dengan (x_1+x), dan $2y$ dengan (y_1+y). Aturan ini dinamakan aturan bagi adil atau aturan **Joachimsthal**.

Jadi persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ di titik $P_1(x_1, y_1)$ adalah $x_1x + y_1y + \frac{1}{2}A(x + x_1) + \frac{1}{2}B(y + y_1) + C = 0$. Dengan cara yang sama, persamaan garis singgung lingkaran $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ di titik $P_1(x_1, y_1)$ adalah $(x_1 - h)(x - h) + (y_1 - k)(y - k) = r^2$.

Contoh:

Tentukan persamaan garis singgung dan normal dari lingkaran $x^2 + y^2 = 29$ di titik $(5, -2)$.

Jawab:

Karena $5^2 + (-2)^2 = 29$, maka titik $(5, -2)$ terletak pada lingkaran. Dengan demikian, persamaan garis singgung di titik ini adalah $5x - 2y = 29$.

Karena normal melalui titik $(5, -2)$ dan tegak lurus terhadap garis singgung, maka persamaan normalnya adalah $y + 2 = -\frac{2}{5}(x - 5)$ atau $2x + 5y = 0$.

Melalui suatu titik di luar lingkaran dapat dilukis dua garis singgung lingkaran. Akan ditentukan persamaan garis singgung yang ditarik dari titik $T(x_1, y_1)$ terhadap lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$. Misalkan titik singgungnya adalah $S(x_0, y_0)$. Maka persamaan garis singgung di S adalah $x_0x + y_0y = r^2$. Garis singgung ini melalui titik $T(x_1, y_1)$, sehingga

$$x_0x_1 + y_0y_1 = r^2 \qquad (1)$$

Titik T pada lingkaran sehingga

$$x_0^2 + y_0^2 = r^2 \qquad (2)$$

Dari (1) dan (2) dapat ditentukan x_0 dan y_0. Akan diperoleh dua pasang nilai x_0 dan y_0 yang mana merupakan titik singgung garis dengan lingkaran. Karena x_0 dan y_0 pada lingkaran, maka garis singgung yang dicari dapat ditentukan dengan cara yang sama mencari garis singgung di titik pada lingkaran.

Contoh:

Dari titik $A(4,2)$ ditarik garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 = 10$. Tentukan persamaan garis singgung ini.

Jawab:

Misalkan titik singgungnya di $S(x_0, y_0)$. Maka garis singgung di titik S adalah

$$x_0x + y_0y = 10$$

Garis singgung ini melalui titik $A(4, 2)$, sehingga diperoleh persamaan

$$4x_0 + 2y_0 = 10 \qquad \text{(i)}$$

Titik S pada lingkaran, sehingga berlaku

$$x_0{}^2 + y_0{}^2 = 10 \qquad \text{(ii)}$$

Dari (i) dan (ii), diperoleh

$$y_0 = 5 - 2x_0$$

$$x_0{}^2 - 4x_0 + 3 = 0.$$

Dengan menyelesaikan persamaan kuadrat ini diperoleh

$$(x_0, y_0) = (3, -1) \text{ dan } (x_0, y_0) = (1,3).$$

Diperoleh dua titik singgung, $S_1(3, -1)$ dan $S_2(1, 3)$. Dengan demikian, persamaan garis singgung lingkaran yang melalui A adalah $3x - y = 10$ dan $x + 3y = 10$.

D. AKTIVITAS PEMBELAJARAN

Untuk memperdalam materi ini, Anda dapat mencari soal-soal yang lebih variatif di referensi/buku-buku yang lain. Untuk mengembangkan pengetahuan, kerjakanlah aktivitas berikut.

1. Misalkan akan dicari garis singgung lingkaran yang melalui sebuah titik. Langkah mencari dan bagaimana persamaan garis singgung ditentukan oleh apakah titik tersebut di dalam, pada, atau di luar lingkaran. Bagaimana cara Anda mengetahui apakah suatu titik terletak pada lingkaran, di luar lingkaran, atau di dalam lingkaran ?
2. Bagaimana cara Anda mengetahui jika diberikan sembarang tiga titik apakah dapat dilukis suatu lingkaran yang melalui ketiga titik tersebut?
3. Dalam uraian materi telah diketahui bahwa terdapat satu garis singgung lingkaran di suatu titik pada lingkaran dan dapat dilukis dua garis singgung

lingkaran yang melalui suatu titik di luar lingkaran. Selidikilah apakah terdapat suatu garis singgung lingkaran yang melalui suatu titik di dalam lingkaran.

E. LATIHAN/KASUS/TUGAS

1. Tentukan pusat dan jari-jari lingkaran dengan persamaan sebagai berikut.
   a. $x^2 + y^2 - 2x + 3y = 0$.
   b. $2(x^2 + y^2) + 5x - 6y = 0$.
2. Tentukan persamaan lingkaran yang memenuhi kondisi yang diberikan.
   a. Pusat (4,3), menyinggung sumbu-x.
   b. Pusat $(-5,0)$, menyinggung sumbu-y.
3. Tentukan persamaan lingkaran yang memenuhi kondisi yang diberikan.
   a. Melalui titik (0,8), menyinggung sumbu-x di titik asal.
   b. Menyinggung sumbu-y, garis $y = 2$ dan garis $y = 6$.
4. Tentukan persamaan lingkaran yang memenuhi kondisi yang diberikan.
   a. Menyinggung garis $x = -1$, $x = 5$, dan $y = -2$.
   b. Memotong sumbu-x di $(-1,0)$ dan (2,0), dan berjari-jari 5.
5. Tentukan persamaan lingkaran yang melalui titik $(0, 0)$ dan $(-1, 1)$, dan berjari-jari 5.
6. Tentukan persamaan parametrik lingkaran yang salah satu diameternya mempunyai titik ujung $(6, 3)$ dan $(-2, -5)$.
7. Tentukan persamaan lingkaran yang berpusat di titik asal dan menyinggung garis $2x - y + 3 = 0$.
8. Tentukan persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 + 10x - 6y - 2 = 0$ yang sejajar dengan garis $3x - 4y = 0$.
9. Untuk setiap soal berikut, titik P_1 terletak pada lingkaran. Tentukan persamaan garis singgung lingkaran P_1.
   a. $x^2 + y^2 = 25$; $P_1(3,4)$
   b. $x^2 + y^2 = 29$; $P_1(2,-5)$
10. Jika garis $4x - 3y = 50$ merupakan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 = 100$, maka tentukan koordinat titik singgung lingkaran.

F. RANGKUMAN

Persamaan standar/baku lingkaran yang pusatnya di titik (h, k) dan berjari-jari r adalah $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$.

Persamaan bentuk umum lingkaran adalah $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

dengan pusat di titik $(-A/2, -B/2)$ dan berjari-jari $r = \sqrt{\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C}$.
Persamaan parametrik lingkaran dengan pusat (h, k) dan berjari-jari r adalah $x = h + r\cos t$ dan $y = k + r\sin t$.

Lingkaran tertentu oleh tiga titik yang tidak segaris. Persamaan lingkaran yang melalui tiga titik dapat ditentukan dengan menyelesaikan sistem persamaan linear tiga variabel yang diperoleh dengan mensubstitusikan koordinat ketiga titik yang diketahui ke persamaan baku atau persamaan bentuk umum lingkaran.

Ada tiga jenis garis singgung lingkaran, yaitu:

a. Garis singgung lingkaran yang diketahui gradiennya.
b. Garis singgung lingkaran di suatu titik pada lingkaran.
c. Garis singgung lingkaran yang melalui suatu titik di luar lingkaran.

Persamaan garis singgung bergradien m adalah:

a. $y = mx \pm r\sqrt{1 + m^2}$, jika lingkaran berpusat di $O(0,0)$ dan berjari-jari r.
b. $y - k = m(x - h) \pm r\sqrt{1 + m^2}$, jika lingkaran berpusat di titik (h, k) dan berjari-jari r.

Persamaan garis singgung lingkaran di titik (x_1, y_1) dapat diperoleh dengan cara bagi adil (aturan Joachimsthal), yaitu mengganti x^2 dengan x_1x, y^2 dengan y_1y, Ax dengan $\frac{1}{2}A(x_1 + x)$, dan By dengan $\frac{1}{2}B(y_1 + y)$. Jadi, persamaan garis singgung lingkaran di titik (x_1, y_1) adalah:

a. $x_1x + y_1y = r^2$, untuk lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$.
b. $(x_1 - h)(x - h) + (y_1 - k)(y - k) = r^2$, untuk lingkaran $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$.

c. $x_1x + y_1y + \frac{1}{2}A(x_1 + x) + \frac{1}{2}B(y_1 + y) + C = 0$, untuk lingkaran $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$.

Persamaan garis singgung lingkaran yang melalui suatu titik (x_1, y_1) di luar lingkaran diperoleh dengan langkah-langkah sebagai berikut:

a. Memisalkan titik singgung (x_0, y_0).
b. Menuliskan persamaan garis singgung di titik (x_0, y_0).
c. Mensubstitusikan titik (x_0, y_0) ke persamaan lingkaran.
d. Mensubsitusikan titik (x_1, y_1) ke persamaan pada langkah b.
e. Menyelesaikan persamaan kuadrat yang diperoleh dengan mensubstitusikan persamaan dari langkah d ke persamaan pada langkah c sehingga diperoleh dua pasang (x_0, y_0).
f. Mensubstitusikan kedua pasang (x_0, y_0) ke persamaan pada langkah b.

Penting untuk mengecek apakah suatu titik (x_1, y_1) terletak pada lingkaran, di dalam, atau di luar lingkaran ketika mencari persamaan garis singgung lingkaran yang melibatkan titik tersebut.

G. UMPAN BALIK DAN TINDAK LANJUT

Anda telah mempelajari materi persamaan lingkaran dan garis singgung lingkaran Untuk menguasai materi ini dibutuhkan kemampuan pemahaman konsep-konsep lingkaran yang kuat. Bagi yang masih kesulitan membayangkan disarankan untuk mempelajari sifat-sifat lingkaran Dari latihan, Anda dapat menilai kemampuan diri, jika jawaban benar lebih dari 85% maka dikatakan sudah baik penguasaan materinya. Untuk pembaca yang belum dapat mencapai skor yang ditentukan dapat mengulang materi dan memperbanyak latihan.

KUNCI JAWABAN LATIHAN/TUGAS

KB 1

1a). 1. 1b). Tak hingga. 1c). 1. 1d). Tidak ada. 2). Setiap dua titik selalu kolinear. Dapat, jika semua titik tersebut segaris. 3a). diberikan. 3b). keduanya ditambah besar sudut yang sama. 3c). ruas kiri $\angle MOP$, ruas kanan $\angle NOQ$; 4). Tidak benar, karena jika kedua garis yang dipotong tidak sejajar, maka sudut dalam berseberangan tidak sama besar. 5). Dari garis g diambil dua titik yang berbeda A dan B. Titik T di luar garis g, sehingga dipunyai 3 titik berbeda tidak segaris. Menurut aksioma di uraian materi, melalui tiga titik tidak segaris dapat dibuat satu bidang. Terbukti.

KB 2

1). Dapat. 2). $\angle R, \angle Q, \angle P$. 3). Segitiga siku-siku. 4). $8 < n < 25, n$ bilangan asli. 5). B. 6a). Tidak pernah benar. 6b). Selalu benar. 6c). Bisa benar, bisa salah. 6d). Bisa benar, bisa salah. 7). Pilihan a, b, dan d. 8). Pilihan b. 9). Pilihan c. 10). $VW = 12$, $WX = 10$.

KB 3

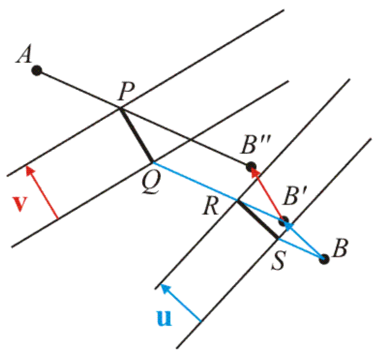
1). $PQMN$ boleh, $MNQP$ tidak boleh. 2). Titik D terletak di garis bagi $\angle BAC$. $ABCD$ berbentuk layang-layang. 3). Persegi panjang. 4). Trapesium sama kaki. 5). Salah. Contoh kontra: buat persegi panjang dengan panjang sisi 1 dan $\sqrt{3}$, diagonal persegi panjang tersebut membagi sudut menjadi 30° dan 60°. 6). Deskripsi Gani salah, contoh kontra: trapesium sama kaki. Deskripsi Eka benar. 7). $\frac{5}{2}\sqrt{5}$ m. 8). Salah, gunakan contoh kontra persegi panjang. 9). Bantuan: buat garis bantu salah satu diagonal segi empat sehingga segiempat tersebut terbagi menjadi dua segitiga. 10). Salah, dengan contoh kontra persegi panjang.

KB 4

1). Pilihan b. 2a). Tidak pernah benar. 2b). Selalu benar. 2c). Tidak pernah benar. 2d). Selalu benar. 2e). Bisa benar, bisa salah. 2f). Bisa benar, bisa salah. 2g). Bisa benar, bisa salah. 3). Bantuan: buat ruas garis BC dan ED, tunjukkan bahwa $\Delta BTC \sim \Delta DTE$, kemudian gunakan sifat kesebangunan. 4). $\sqrt{6010^2 - 6000^2}$ km. 5). Bantuan: buat jari-jari ke titik singgung keempat sisi, maka akan terbentuk empat buah layang-layang dan gunakan sifat-sifatnya 6). Bantuan: tunjukkan bahwa $\Delta ORS \sim \Delta ORQ \sim \Delta OTQ$. 7). Bantuan: gunakan kesebangunan antara $\Delta APB, \Delta ACP$ dan ΔPCB untuk mendapatkan hubungan $AC \cdot BC = PC^2$, gunakan hubungan $AB^2 = (AC + CB)^2$. 8). Benar. 9) bisa 4, 3, 2, atau 1.

KB 5

1). Bukan, karena tidak satu-satu.
2). Tidak ada titik invarian untuk translasi (kecuali dengan vektor nol), titik invarian rotasi ada di pusat rotasi, titik invarian refleksi ada di garis refleksi atau titik refleksi. Titik invarian pada dilatasi ada di pusat dilatasi.
3). $2y = x - 1$.
4). $x^2 + y^2 + 2xy + (3\sqrt{2} - 8)x + (\sqrt{2} - 8)y - 6\sqrt{2} + 12 = 0$.
5).B' bayangan B oleh translasi vektor $\overline{u}$, B'' bayangan B' oleh translasi $\overline{v}$. Hubungkan AB'' sehingga memogong sisi sungai atas di P. Translasikan PB'' dengan vektor translasi $-\overline{v}$, diperoleh bayangan QB' yang memotong sisi sungai bawah di R. Translasikan RB' dengan vektor translasi $-\overline{u}$ sehingga diperoleh bayangan SB. Posisi jembatan adalah PQ dan RS dengan jalur minimal $AP + \circ Q + QR + RS + SB$.



6). Tes untuk mengungkap kepribadian. Transformasi refleksi.
7). Refleksi terhadap sumbu-y dilanjutkan dengan translasi.
8). 60°.
9). Rotasi dengan pusat A, sudut rotasi dua kali sudut antara k dan l.
10). Rotasi berpusat di (0, 0), sudut rotasi 90°.

KB 6

1a). Prisma miring. 1b). Alas berbentuk segienam, sisi tegak berbentuk jajargenjang. 2. Ya, kubus merupakan balok yang semua panjang rusuknya sama. 3a). Mungkin, jika alasnya segitiga samasisi. 3b). Tidak mungkin, kecuali alasnya berbentuk persegi. 3c). Tidak mungkin, kecuali alasnya berbentuk belahketupat. 3d). Tidak mungkin. 3e). Mungkin. 4). 60 cm^3. 5), gambar i dan ii. 6a). 5,64 kg. 6b). 0,055 m^3. 7). 8,56 kg. 8). 22,12 m^3. 9a). 3,77 kg 9b). 0,03374 m^3. 10).3.

KB 7

1). Tidak. Contoh pada kubus $ABCD.EFGH$, garis $BG \perp AB$, AB pada bidang $ABCD$. Namun demikian BG tidak tegaklurus bidang $ABCD$.2a). Sejajar. 2b). Bersilangan. 2c). Berpotongan 2d). Sejajar. 3). Pilihan benar: c dan d. 4).$3\sqrt{2}$ cm. 5). $2\sqrt{3}$ cm. 6).$a\sqrt{5}$. Bantuan: putar dinding $ADHE$ dengan poros DH sehingga sebidang dengan $CDHG$ kemudian tarik garis dari A ke G sehingga memotong DH di P. Jalur $A - P - G$ inilah yang terpendek dari A ke G. 7). $3\sqrt{2}$ cm. 8). 30°. 9). 45°. 10). $\frac{2}{3}$.

KB 8

1. Keduanya merupakan irisan kerucut yang terjadi jika $\alpha = \beta$.
2. Tidak mungkin terjadi, karena eksentrisitas merupakan perbandingan antara jarak ke titik tertentu dan jarak ke garis tertentu, sedangkan jarak pastilah bernilai non negatif.
3. a. Fokus $(2, 0)$; Direktriks garis $x = -2$; Panjang latus rectum 8.
   b. Fokus $(0, 2)$; Direktriks garis $y = -2$; Panjang latus rectum 8.
   c. Fokus $(\frac{1}{8}, 0)$; Direktriks garis $x = -\frac{1}{8}$; Panjang latus rectum $\frac{1}{2}$.
   d. Fokus $(-\frac{3}{2}, 0)$; Direktriks garis $x = \frac{3}{2}$; Panjang latus rectum 6

4 a. $y^2 = -\frac{25}{2}x$; b. $x^2 = \frac{2}{3}y$; c. $x^2 = -12y$ d. $y^2 = 16x$ dan $x^2 = 12y$

5. a. $(y-2)^2 = -4(x-5)$; b. $(x-1)^2 = \frac{1}{4}(y - \frac{7}{8})$;

6. a. Puncak $(1, 2)$; Fokus $(\frac{5}{2}, 2)$; Direktriks garis $x = -\frac{1}{2}$
   b. Puncak $(-2, 1)$; Fokus $(-\frac{5}{4}, 1)$; Direktriks garis $x = -\frac{11}{4}$.
   c. Puncak $(5, -3)$; Fokus $(\frac{37}{8}, -3)$; Direktriks garis $x = \frac{43}{8}$
   d. Puncak $(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$; Fokus $(\frac{3}{2}, -\frac{11}{8})$; Direktriks garis $y = -\frac{13}{8}$.
7. Parabola $x2{-}2x = 5y - 11$ dan $y2{=}\ 4y + 5x - 9$ berturut-turut dapat ditulis sebagai $(x-1)^2 = 5(y-2)$ dan $(y-2)^2 = 5(x-1)$. Dari kedua persamaan terakhir terlihat bahwa puncak kedua parabola ada di titik $(1, 2)$. Untuk mencari titik potong kedua parabola, salah satu persamaan disubstitusikan ke persamaan lainnya, diperoleh $(x-1)^4 = 125(x-1)$. Dengan menyelesaikan persamaan ini, diperoleh $x = 1$ dan $x = 6$. Diperoleh titik potong kedua parabola adalah $(1, 2)$ dan $(6, 7)$.
8. Ditempatkan pada sumbu simetri parabola sejauh $\frac{9}{2}$m dari puncak parabola, yaitu di fokusnya.
9. a. Fokus $(\pm\sqrt{21}, 0)$; Direktriks garis $x = \pm\frac{25}{\sqrt{21}}$; Panjang latus rectum $\frac{8}{5}$.
   b. Fokus $(\pm 2\sqrt{6}, 0)$; Direktriks garis $x = \pm\frac{25}{12}\sqrt{6}$; Panjang latus rectum $\frac{2}{5}$.
   c. Fokus $(\pm 1, 0)$; Direktriks garis $x = 4$; Panjang latus rectum 3.
   d. Fokus $(0, \pm 4)$; Direktriks garis $y = \pm\frac{25}{4}$; Panjang latus rectum $\frac{18}{5}$
10. a. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$; b. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$; c. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$; d. $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{28} = 1$.
11. a. Pusat $(-2, 1)$; Eksentrisitas $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$; Fokus $(-2 \pm \sqrt{5}, 1)$
    b. Pusat $(1, 2)$; Eksentrisitas $e = \frac{\sqrt{21}}{5}$; Fokus $(1 \pm \sqrt{21}, 2)$.
    c. Pusat $(4, -21)$; Eksentrisitas $\sqrt{\frac{3}{5}}$; Fokus $(4 \pm \sqrt{3}, -2)$.

12. a. $\frac{(x-4)^2}{36}+\frac{(y-3)^2}{27}=1$; b. $\frac{(x-2)^2}{\frac{64}{3}}+\frac{(y+2)^2}{\frac{16}{3}}=1$; c. $\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y-2)^2}{1}=1$.

13. a. Fokus $(\pm\sqrt{29},0)$; Eksentrisitas $e=\frac{\sqrt{29}}{5}$; Panjang latus rectum $\frac{8}{5}$; Direktriks garis $x=\pm\frac{25}{\sqrt{29}}$.

    b. Fokus $(\pm\sqrt{13},0)$; Eksentrisitas $e=\frac{\sqrt{13}}{2}$; Panjang latus rectum 9; Direktriks garis $x=\pm\frac{4}{\sqrt{13}}$.

14. a. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$; b. $-\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{192}=1$; c. $\frac{x^2}{52}-\frac{y^2}{117}=1$

15. a. Eksentrisitas $e=\frac{\sqrt{13}}{3}$; Puncak $(-1,1)$ dan $(5,1)$; Fokus $(2\pm\sqrt{13},1)$.

    b. Eksentrisitas $e=\sqrt{10}$; Puncak $(-3,3)$ dan $(-1,3)$; Fokus $(-2\pm\sqrt{10},3)$

KB 9

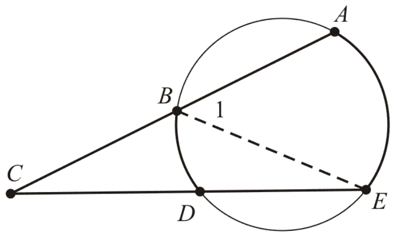
1. a. $P(1,-\frac{3}{2})$; $r=\frac{1}{2}\sqrt{13}$; b. $P(-\frac{5}{4},\frac{3}{2})$; $r=\frac{1}{4}\sqrt{61}$
2. a. $(x-4)^2+(y-3)^2=9$; b. $(x+5)^2+y^2=25$
3. a. $x^2+(y-4)^2=16$; b. $(x-2)^2+(y-4)^2=4$
4. a. $(x-3)^2+(y-1)^2=9$; b. $x^2+y^2-x+\sqrt{91}y-2=0$
5. $x^2+y^2-6x-8y=0$ dan $x^2+y^2+6x+8y=0$
6. $x=2+4\sqrt{2}\cos t$; $y=-1+4\sqrt{2}\sin t$
7. $x^2+y^2=\frac{9}{5}$
8. $y=\frac{3}{4}x+\frac{57}{4}$ dan $y=\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}$
9. a. $3x+4y=25$; b. $2x-5y=29$
10. $(8,-6)$

EVALUASI

1. Dalam ΔABC, $\angle A = 55°$ dan $\angle B = 60°$. Manakah pernyataan tentang ΔABC berikut ini yang benar?
   A. Semua sisi berbeda panjang, dan AC sisi terpanjang.
   B. Semua sisi berbeda panjang, dan AB sisi terpanjang.
   C. AB dan AC sama panjang, dan yang terpanjang adalah BC.
   D. AB dan BC sama panjang dan panjangnya lebih dari panjang AC.

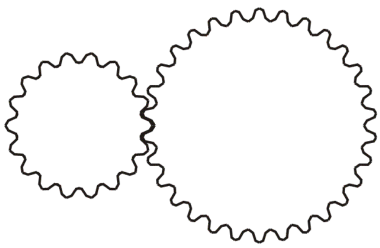
2. Bangun segiempat yang mungkin dibentuk jika bangun tersebut memiliki dua pasang sisi sejajar, dan sisi yang berhadapan sama panjang adalah … .
   A. Jajargenjang, persegi panjang, belah ketupat, trapesium.
   B. Jajargenjang, layang-layang, belah ketupat.
   C. Jajargenjang, persegi panjang, persegi, belah ketupat.
   D. Jajargenjang, persegi panjang, persegi, belah ketupat, trapezium.

3. Diberikan garis AC dan DC seperti pada gambar. Pernyataan yang benar tentang besar sudut C adalah … .



   A. Jumlah antara sudut keliling yang menghadap busur AE dan BD.
   B. Jumlah antara sudut pusat yang menghadap busur AE dan BD.
   C. Selisih antara sudut keliling yang menghadap busur AE dan BD.
   D. Selalu merupakan sudut lancip.

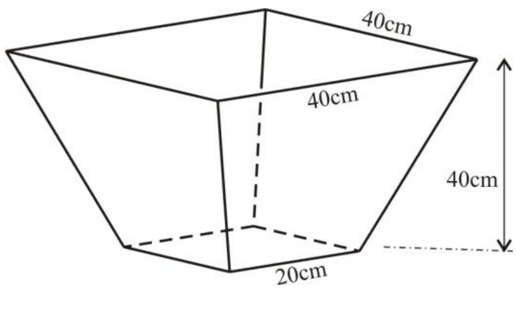
4. Dua roda gigi saling bersinggungan seperti pada gambar. Roda gigi besar memiliki 30 gigi, dan yang kecil memiliki 18 gigi. Jika roda gigi besar berputar 60°, berapa sudut putar roda gigi kecil?



   A. 30°
   B. 45°
   C. 75°
   D. 100°

5. Jajargenjang $A'B'C'D'$ merupakan bayangan jajargenjang $ABCD$ yang direfleksikan terhadap sumbu-x kemudian dengan rotasi berpusat di $P(2, 0)$ sudut rotasi 90°. Jika$A(2,1)$, $B(5, 3)$, dan $C(6, 5)$, maka koordinat titik D' adalah … .
   A. $(5, 1)$
   B. $(1, 5)$
   C. $(-1, -5)$
   D. $(-5, -1)$

6. Sebuah bak air berbentuk limas persegi terpancung. Panjang rusuk



alas 20 cm dan panjang rusuk bagian atas 40 cm. Jika tinggi limas terpancung 40 cm, berapa cm3 volum air yang dapat ditampung?

A. $\frac{112.000}{3}$
B. 56.000
C. 112.000
D. 114.000

7. Sebuah balon udara berbentuk bola berjari-jari r memerlukan udara sebanyak 2 m^3. Berapa m^3 lagi udara yang harus dipompakan agar jari-jarinya menjadi dua kali jari-jari semula?

A. 2
B. 6
C. 12
D. 14

8. Sepuluh batang bambu dengan diameter 10 cm panjang 4 meter diikat di dasar kolam berbentuk balok dengan ukuran panjang 4,5 m, lebar 55 cm, dan tinggi 30 cm untuk direndam dalam suatu larutan pengawet. Jika diasumsikan ujung-ujung bambu tertutup, berapa liter larutan pengawet harus dimasukkan sampai bak menjadi penuh? Gunakan 3,14 untuk pendekatan nilai π.

A. 314
B. 428,5
C. 711
D. 742,5

9. Pada kubus $ABCD.EFGH$, sudut yang dapat diambil sebagai ukuran sudut antara Garis FC dan garis HD adalah … .

A. $\angle DGC$
B. $\angle FCG$
C. $\angle EDG$
D. $\angle DGF$

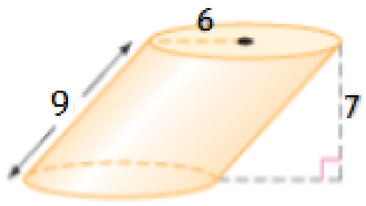
10. Pada kubus $ABCD.EFGH$, titik O adalah perpotongan antara AC dan BD. Sudut antara bidang ACF dan ACH adalah … .

A. $\angle HAF$
B. $\angle HAO$
C. $\angle HOF$
D. $\angle COF$

11. Jarak antara bidang BDG dan AHF pada kubus $ABCD.EFGH$ yang panjang rusuknya r adalah … .

A. $\frac{1}{3}r\sqrt{2}$
B. $\frac{1}{2}r\sqrt{2}$
C. $\frac{1}{3}r\sqrt{3}$
D. $\frac{1}{2}r\sqrt{3}$

12. Diberikan pernyataan mengenai bangun tabung miring dengan alas lingkaran seperti pada gambar. Volume tabung tersebut adalah ... .



   A. 1296π
   B. 1008π
   C. 324π
   D. 252π

13. Besar sudut antara diagonal ruang AG dan diagonal sisi BD pada kubus $ABCD.EFGH$ adalah ... .
   A. 90°
   B. 75°
   C. 60°
   D. 45°

14. Pernyataan yang salah terkait komposisi transformasi berikut adalah ... .
   A. Translasi dilanjutkan dengan translasi menghasilkan translasi.
   B. Pencerminan dilanjutkan dengan pencerminan di mana kedua cerminnya sejajar berupa translasi
   C. Rotasi dilanjutkan dengan rotasi dengan pusat yang sama menghasilkan rotasi
   D. Pencerminan terhadap suatu garis dilanjutkan dengan pencerminan terhadap garis lain yang memotong garis pertama adalah suatu pencerminan.

15. Diberikan segi empat ABCD. Jika keempat sisi ABCD merupakan tali busur dari suatu lingkaran maka berlaku ... .
   A. $AB + CD = AD + BC$
   B. $\angle BAD + \angle BCD = \angle ABC + ADC$
   C. $AB \cdot BC = AD \cdot CD$
   D. $\Delta ABD \sim \Delta BCD$

16. Diberikan segitiga ABC yang siku-siku di titik A. Ditarik garis tinggi dari titik A sehingga memotong sisi BC di titik D. Pernyataan yang **salah** adalah ... .
   A. $AD.BC = AB.AC$
   B. $AB \cdot AC = AD \cdot BC$
   C. $AD^2 = BD.AC$
   D. $\Delta ABD \sim \Delta ACD$

17. Irisan antara bidang dengan kerucut ganda yang terjadi sedemikian sehingga sudut antara bidang dengan sumbu kerucut sama besar dengan sudut garis pelukis dengan sumbu kerucut berupa... .
   A. Lingkaran
   B. Ellips
   C. Hiperbola
   D. Parabola

18. Parabola dapat didefinisikan sebagai ... .
    A. Irisan kerucut dengan $e < 1$
    B. Irisan kerucut dengan $e > 1$
    C. Tempat kedudukan titik-titik yang perbandingan jaraknya ke suatu titik tertentu dan jaraknya ke suatu garis tertentu bernilai satu.
    D. Tempat kedudukan titik-titik yang jumlah jaraknya ke dua titik tertentu tetap.
19. Berikut ini yang merrupakan persamaan lingkaran yang menyinggung sumbu-x di titik $(3, 0)$ dan menyinggung sumbu-y adalah ... .
    A. $(x + 3)^2 + (y + 3)^2 = 36$
    B. $(x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 36$
    C. $(x + 3)^2 + (y + 3)^2 = 9$
    D. $(x - 3)^2 + (y + 3)^2 = 9$
20. Persamaan parametrik lingkaran yang melalui titik $(-2, 0)$, $(2, 0)$, dan $(0, -4)$ adalah ... .
    A. $x = \frac{5}{2}\cos t\,;\ \ y = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2}\sin t$
    B. $x = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2}\cos t\,;\ \ y = \frac{5}{2}\sin t$
    C. $x = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2}\sin t\,;\ \ y = \frac{5}{2}\cos t$
    D. $x = \frac{5}{2}\sin t\,;\ \ y = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2}\sin t$
21. Persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 = 25$ yang tegak lurus dengan garis $3x - 4y = 6$ adalah ... .
    A. $4x + 3y - 25 = 0$ dan $4x + 3y - 25 = 0$
    B. $3x + 4y - 25 = 0$ dan $3x + 4y + 25 = 0$
    C. $3x + 4y - 25 = 0$ dan $4x - 3y + 25 = 0$
    D. $3x + 4y - 5 = 0$ dan $3x + 4y + 5 = 0$
22. Fokus dari parabola $y^2 + 8x - 6y + 25 = 0$ di titik ... .
    A. $(-4, 3)$
    B. $(-2, 3)$
    C. $(2, 3)$
    D. $(4, 3)$
23. Dilukis garis singgung lingkaran $(x - 3)2+(y + 2)2= 20$ yang melalui titik P. Agar terdapat dua garis singgung lingkaran, titik P yang memenuhi adalah ... .
    A. $(1, 2)$
    B. $(0, 2)$
    C. $(-1, 2)$
    D. $(-2, 2)$
24. Ellips $9x2+16y2-12x + 16y = 64$ berpusat di titik ... .
    A. $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right)$
    B. $\left(\frac{4}{3}, \frac{3}{2}\right)$
    C. $(2, 2)$

D. $(-6, 8)$

25. Salah satu asimptot dari hiperbola $36x^2 - 64y^2 = 2304$ adalah … .

A. $3x - 4y = 12$
B. $3x - 4y = 0$
C. $4x - 3y = 0$
D. $4x - 3y - 12 = 0$

PENUTUP

Seiring dengan perkembangan peradaban manusia, guru harus senantiasa membekali siswanya untuk siap menghadapi tantangan untuk era yang berbeda dengan apa yang dialami oleh gurunya. Untuk itu guru dituntut untuk tetap mengembangkan kompetensinya, baik kompetensi pedagogis maupun profesional. Diharapkan buku ini dapat menjadi salah satu bagian untuk kegiatan Pengembangan Keprofesian Berkelanjutan (PKB) guru, terutama untuk peningkatan kopetensi profesional. Baik itu untuk kegiatan yang bersifat kediklatan maupun madiri.

Modul ini masih belum lengkap dan perlu disempurnakan, oleh karena itu saran dan masukan dari pembaca sangat diharapkan untuk perbaikan di masa yang akan datang.

DAFTAR PUSTAKA

Ann Xavier Gantert, 2008, *Amsco's Geometry*, New York: Amsco School Publication.

Cindy J. Boyd, Jerry Cummins, Carol E. Malloy, John A. Carter, & Alfinio Flores, 2008, *California Geometry: Concepts, Skills, and Problem Solving*, Columbus: Glencoe/McGraw-Hill.

Daniel C. Alexander & Geralyn M. Koeberlein, 2011, *Elementary Geometry for College Students*, Belmont: Brooks/Cole.

David M. Burton, 2011, *The History of Mathematics : An Introduction,* New York: McGraw-Hill.

Fuller, Gordon. 1954. *Analytic Geometry*. Addison Wesley Publishing Company, Inc.

H.S. Hall, &F.H. Stevens,1949,. *School Geometry Parts I – VI*. London: MacMillan and Co.

Kletenic C, D*. Problems in Analytic Geometry*. Moscow : Peace Publishers.

Larson, Edwads. 2010. *Calculus*.

Michael Serra, 2008, *Discovering Geometry: An Investigative Approach*, Emeryville California: Key Curriculum Press.

Morrill, C. W.K. 1969. *Analytic Geometry*. Scranton, Pennsylvania : International textbook Company.

Sicellof, Lewis Parker; Wentworth, George; & Smith, David Eugene. 1922. *Analytic Geometry*. Boston : Ginn & Company.

Sprague, Atherton H. 1946. *Essentials of Plane Trigonometry and Analytic Geometry*. New York : Prentice-Hall, Inc.

Thomas, George B. & Finney Ross L. 1998. *Calculus and Analytic Geometry*. Massachusetts : Addison-Wesley Publishing Comapany.

Thomas H. Sidebotham. 2002. *The A to Z of Mathematics, A Basic Guide*. New York: John Wiley & Sons, Inc.

Untung Trisna S., 2015, *Bahan Belajar Diklat Pasca UKG*, Yogyakarta: PPPPTK Matematika.

W. Gellert, H. Kastner, &M. Helwich,1977, The *VNR Concise Encyclopedia of Mathematics*, New York: Van Nostrand Reinhold Company.

Yates, Robert C. 1961. *Analytic Geometry with Calculus*. Englewood Cliffs, New Jersey : PRENTICE-HALL.

GLOSARIUM

Derajat : satuan pengukuran sudut, satu derajat (1°) besarnya 1/360 putaran.

Eksentrisitas : misalkan T pada kurva irisan kerucut, perbandingan antara jarak T ke suatu titik tertentu dengan jarak T ke suatu garis tertentu.

Ellips : tempat kedudukan titik-titik yang jumlah jaraknya ke dua titik tertentu selalu tetap.

Garis sumbu : garis sumbu suatu ruas garis adalah garis yang membagi dua sama panjang dan tegak lurus ruas garis tersebut.

Garis tinggi : garis yang ditarik dari salah satu puncak dan tegak lurus terhadap sisi di hadapannya.

Garis berat : garis yang ditarik dari puncak segitiga dan melalui titik tengah sisi di hadapannya.

Garis bagi sudut : garis yang membagi dua sama besar suatu sudut.

Gradian : satuan pengukuran sudut, satu gradian (1^g) besarnya 1/400 putaran.

Hiperbola : tempat kedudukan titik-titik yang selisih jaraknya selalu tetap.

Kongruen : dua bangun dikatakan kongruen jika tepat dapat dihimpitkan.

Kolinear : segaris

Lingkaran : tempat kedudukan titik-titik pada bidang yang berjarak sama terhadap suatu titik tertentu.

Parabola : tempat kedudukan titik-titik yang jaraknya ke satu titik tertentu sama dengan jaraknya ke garis tertentu.

Radian : satuan pengukuran sudut yang besarnya sama dengan sudut pusat lingkaran berjari-jari 1 yang menghadap busur sepanjang s.

Ruas garis: sinar garis AB merupakan himpunan titik A, B, dan semua titik di antara garis A dan B yang kolinear dengan garis yang melalui kedua titik tersebut.

Sinar garis: sinar garis AB merupakan Bagian dari garis AB yang terdiri atas ruas garis AB dan semua titik X pada garis AB sedemikian hingga B terletak di antara A dan X.

Segitiga : gabungan tiga ruas garis yang ujung-ujungnya ditentukan oleh tiga titik tidak segaris.

Sudut : Sudut adalah gabungan dua sinar yang bersekutu di titik pangkalnya

Segiempat : segibanyak dengan empat sisi.

Segibanyak : bangun datar tertutup yang sisi-sisinya berupa ruas garis, dan setiap ruas garis hanya berpotongan pada ujung-ujungnya.

Sejajar : dua garis sebidang dikatakan sejajar jika keduanya tidak berpotongan.

Sudut pusat : sudut dengan titik sudut pada pusat lingkaran.

Sudut keliling : sudut dengan titik sudut pada lingkaran

Transversal : garis yang memotong dua garis lain.

LAMPIRAN

Kunci Jawaban/Bantuan Evaluasi:

1.	B	6.	A	11.	C	16.	C	21.	A
2.	C	7.	D	12.	D	17.	D	22.	A
3.	C	8.	B	13.	A	18.	C	23.	D
4.	D	9.	B	14.	D	19.	D	24.	A
5.	A	10.	C	15.	B	20.	A	25.	B

TUT WURI HANDAYANI