GURU PEMBELAJAR
MODUL MATEMATIKA SMP

KELOMPOK KOMPETENSI G

PENILAIAN 1 DAN GEOMETRI 2

DIREKTORAT JENDERAL GURU DAN TENAGA KEPENDIDIKAN
KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
2016

Kata Sambutan

Peran guru profesional dalam proses pembelajaran sangat penting sebagai kunci keberhasilan belajar siswa. Guru profesional adalah guru yang kompeten membangun proses pembelajaran yang baik sehingga dapat menghasilkan pendidikan yang berkualitas. Hal tersebut menjadikan guru sebagai komponen yang menjadi fokus perhatian pemerintah pusat maupun pemerintah daerah dalam peningkatan mutu pendidikan terutama menyangkut kompetensi guru.

Pengembangan profesionalitas guru melalui program Guru Pembelajar merupakan upaya peningkatan kompetensi untuk semua guru. Sejalan dengan hal tersebut, pemetaan kompetensi guru telah dilakukan melalui uji kompetensi guru (UKG) untuk kompetensi pedagogik profesional pada akhir tahun 2015. Hasil UKG menunjukkan peta kekuatan dan kelemahan kompetensi guru dalam penguasaan pengetahuan. Peta kompetensi guru tersebut dikelompokkan menjadi 10 (sepuluh) kelompok kompetensi. Tindak lanjut pelaksanaan UKG diwujudkan dalam bentuk pelatihan guru paska UKG melalui program Guru Pembelajar. Tujuannya untuk meningkatkan kompetensi guru sebagai agen perubahan dan sumber belajar utama bagi peserta didik. Program Guru Pembelajar dilaksanakan melalui pola tatap muka, daring penuh (*online*), dan daring kombinasi (*blended*) tatap muka dengan *online*.

Pusat Pengembangan dan Pemberdayaan Pendidik dan Tenaga Kependidikan (PPPPTK), Lembaga Pengembangan dan Pemberdayaan Pendidik dan Tenaga Kependidikan Kelautan Perikanan Teknologi Informasi dan Komunikasi (LP3TK KPTK) dan Lembaga Pengembangan dan Pemberdayaan Kepala Sekolah (LP2KS) merupakan Unit Pelaksanana Teknis di lingkungan Direktorat Jenderal Guru dan Tenaga Kependidikan yang bertanggung jawab dalam mengembangkan perangkat dan melaksanakan peningkatan

kompetensi guru sesuai bidangnya. Adapun perangkat pembelajaran yang dikembangkan tersebut adalah modul untuk program Guru Pembelajar tatap muka dan Guru Pembelajar online untuk semua mata pelajaran dan kelompok kompetensi. Dengan modul ini diharapkan program Guru Pembelajar memberikan sumbangan yang sangat besar dalam peningkatan kualitas kompetensi guru.

Mari kita sukseskan program Guru Pembelajar ini untuk mewujudkan Guru Mulia Karena Karya.

Jakarta, Maret 2016

Direktur Jenderal,

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
DIREKTORAT JENDERAL GURU DAN TENAGA KEPENDIDIKAN

Sumarna Surapranata

NIP. 195908011985031002

GURU PEMBELAJAR

MODUL MATEMATIKA SMP

KELOMPOK KOMPETENSI G

PEDAGOGIK

PENILAIAN 1

DIREKTORAT JENDERAL GURU DAN TENAGA KEPENDIDIKAN
KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
2016

Penulis:

Prof. Dr., Nanang Priatna, M.Pd.

08122356350, nanang_priatna@yahoo.com

Penelaah*:*

Idris Harta, M.A., Ph.D

081548548277, idrisharta@gmail.com

Ilustrator*:*

R. Haryo Jagad P

Copyright © 2016

Direktorat Jenderal Guru dan Tenaga Kependidikan

Hak Cipta Dilindungi Indang-Undang

Dilarang mengcopy sebagian atau keseluruhan buku ini untuk kepentingan komersial tanpa izin tertulis dari Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan

Kata Pengantar

Peningkatan kualitas pendidikan saat ini menjadi prioritas, baik oleh pemerintah pusat maupun daerah. Salah satu komponen yang menjadi fokus perhatian adalah peningkatan kompetensi guru. Peran guru dalam pembelajaran di kelas merupakan kunci keberhasilan untuk mendukung keberhasilan belajar siswa. Guru yang profesional dituntut mampu membangun proses pembelajaran yang baik sehingga dapat menghasilkan *output* dan *outcome* pendidikan yang berkualitas.

Dalam rangka memetakan kompetensi guru, telah dilaksanakan Uji Kompetensi Guru (UKG) Tahun 2015. UKG tersebut dilaksanakan bagi semua guru, baik yang sudah bersertifikat maupun belum bersertifikat untuk memperoleh gambaran objektif kompetensi guru, baik profesional maupun pedagogik. Hasil UKG kemudian ditindaklanjuti melalui Program Guru Pembelajar sehingga diharapkan kompetensi guru yang masih belum optimal dapat ditingkatkan.

PPPPTK Matematika sebagai Unit Pelaksana Teknis Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan di bawah pembinaan Direktorat Jenderal Guru dan Tenaga Kependidikan mendapat tugas untuk menyusun modul guna mendukung pelaksanaan Guru Pembelajar. Modul ini diharapkan dapat menjadi sumber belajar bagi guru dalam meningkatkan kompetensinya sehingga mampu mengambil tanggung jawab profesi dengan sebaik-baiknya.

Yogyakarta, Maret 2016

Kepala PPPPTK Matematika,

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
PUSAT PENGEMBANGAN DAN PEMBERDAYAAN PENDIDIK DAN TENAGA KEPENDIDIKAN MATEMATIKA

Dr. Dra. Daswatia Astuty, M.Pd.

NIP. 196002241985032001

DAFTAR ISI

Kata Pengantar iii
DAFTAR ISI v
DAFTAR GAMBAR vii
DAFTAR TABEL ix
PENDAHULUAN 1
A. Latar Belakang 1
B. Tujuan 1
C. Peta Kompetensi 2
D. Ruang Lingkup 5
E. Saran Cara Penggunaan Modul 6
KEGIATAN PEMBELAJARAN 1 KONSEP PENILAIAN DALAM PEMBELAJARAN MATEMATIKA 7
A. Tujuan 7
B. Indikator Pencapaian Kompetensi 7
C. Uraian Materi 8
1. Konsep Penilaian Hasil Belajar oleh Pendidik 8
2. Fungsi dan Tujuan Penilaian Hasil Belajar oleh Pendidik 9
3. Prinsip-prinsip Penilaian Hasil Belajar oleh Pendidik 10
4. Lingkup dan Sasaran Penilaian Hasil Belajar oleh Pendidik 11
5. Skala Penilaian dan Ketuntasan 12
6. Instrumen Penilaian 12
7. Prosedur Penilaian 14
D. Aktivitas Pembelajaran 15
E. Latihan/Kasus/Tugas 16
F. Rangkuman 16
G. Umpan Balik dan Tindak Lanjut 17
KEGIATAN PEMBELAJARAN 2 PENGOLAHAN DATA HASIL PENILAIAN DALAM PEMBELAJARAN MATEMATIKA 19
A. Tujuan 19

B. Indikator Pencapaian Kompetensi 19
C. Uraian Materi 19
1. Pengertian Skor dan Nilai 19
2. Acuan Penilaian 20
3. Penentuan Skor 20
4. Skala Penilaian 25
5. Pengolahan Hasil Penilaian 27
D. Aktivitas Pembelajaran 32
E. Latihan/Kasus/Tugas 33
F. Rangkuman 33
G. Umpan Balik dan Tindak Lanjut 34
KEGIATAN PEMBELAJARAN 3 KETUNTASAN BELAJAR, PELAPORAN, DAN PEMANFAATAN HASIL PENILAIAN 35
A. Tujuan 35
B. Indikator Pencapaian Kompetensi 35
C. Uraian Materi 36
1. Ketuntasan Belajar 36
2. Pelaporan dan Pemanfaatan Hasil Penilaian 36
3. Kriteria Ketuntasan Minimal (KKM) 38
4. Petunjuk Teknis Pengisian Rapor SMP 39
5. Pelaporan Hasil Penilaian Pembelajaran dalam Rapor 40
6. Pembelajaran Remedial dan Pengayaan 41
7. Kriteria kenaikan Kelas 41
D. Aktivitas Pembelajaran 45
E. Latihan/Kasus/Tugas 45
F. Rangkuman 46
G. Umpan Balik dan Tindak Lanjut 46
KUNCI JAWABAN LATIHAN 47
EVALUASI 49
PENUTUP 53
DAFTAR PUSTAKA 55
GLOSARIUM 57

DAFTAR GAMBAR

Gambar 1 . Skema Pengolahan Nilai Sikap 28

DAFTAR TABEL

Tabel 1. Peta Kompetensi.....2
Tabel 2. Rubrik Soal Uraian 20
Tabel 3. Contoh Rubrik Penilaian Jawaban Siswa 21
Tabel 4. Contoh Pengisian Capaian Nilai Ekstrakurikuler 39
Tabel 5. Contoh Pengisian Capaian Nilai Ekstrakurikuler 39
Tabel 6. Deskripsi Pengisian Kompetensi Pada Rapor.....40

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Penilaian dalam proses pendidikan merupakan komponen yang tidak dapat dipisahkan dari komponen lainnya khususnya pembelajaran. Penilaian merupakan proses pengumpulan dan pengolahan informasi untuk mengukur pencapaian hasil belajar peserta didik. Penilaian hasil belajar oleh pendidik dilakukan untuk memantau proses, kemajuan belajar, dan perbaikan hasil belajar peserta didik secara berkesinambungan. Penilaian hasil belajar oleh pendidik memiliki peran antara lain untuk membantu peserta didik mengetahui capaian pembelajaran (*learning outcomes*). Berdasarkan penilaian hasil belajar oleh pendidik, pendidik dan peserta didik dapat memperoleh informasi tentang kelemahan dan kekuatan pembelajarannya.

Dengan mengetahui kelemahan dan kekuatannya, pendidik dan peserta didik memiliki arah yang jelas mengenai apa yang harus diperbaiki dan dapat melakukan refleksi mengenai apa yang dilakukannya dalam pembelajaran. Selain itu bagi peserta didik memungkinkan melakukan proses transfer cara belajar tadi untuk mengatasi kelemahannya (*transfer of learning*). Sedangkan bagi guru, hasil penilaian hasil belajar merupakan alat untuk mewujudkan akuntabilitas profesionalnya, dan dapat juga digunakan sebagai dasar dan arah pengembangan pembelajaran remedial atau program pengayaan bagi peserta didik yang membutuhkan, serta memperbaiki rencana pelaksanaan pembelajaran (RPP) dan proses pembelajaran pada pertemuan berikutnya.

B. Tujuan

Modul ini disusun sebagai bahan belajar mandiri bagi guru atau bahan ajar pendamping bagi peserta dan fasilitator mengenai materi konsep penilaian, aspek-aspek proses dan hasil belajar matematika serta prosedur penilaian, pengolahan data hasil penilaian, dan ketuntasan belajar, pelaporan, dan pemanfaatan hasil penilaian dalam pembelajaran matematika.

Tujuan belajar yang ingin dicapai adalah peserta memiliki pemahaman mengenai konsep penilaian, aspek-aspek proses dan hasil belajar matematika serta prosedur

penilaian, pengolahan data hasil penilaian, dan ketuntasan belajar, pelaporan, dan pemanfaatan hasil penilaian dalam pembelajaran matematika.

C. Peta Kompetensi

Kompetensi yang terkait dengan modul ini adalah kompetensi pedagogik, dengan peta kompetensinya sebagai berikut.

Tabel 1. Peta Kompetensi

STANDAR KOMPETENSI GURU		INDIKATOR ESENSIAL/ INDIKATOR PENCAPAIAN KOMPETENSI (IPK)
KOMPETENSI INTI GURU	**KOMPETENSI GURU MATEMATIKA**	
8. Menyelenggarakan penilaian dan evaluasi proses dan hasil belajar.	8.1 Memahami prinsip-prinsip penilaian dan evaluasi proses dan hasil belajar sesuai dengan karakteristik mata pelajaran yang diampu.	8.1.1 Menjelaskan pengertian penilaian, pengukuran, dan evaluasi dalam pembelajaran
		8.1.2 Menjelaskan jenis dan bentuk penilaian
		8.1.3 Menjelaskan pengertian tes dan nontes
		8.1.4 Membedakan penilaian, pengukuran, evaluasi, dan tes
		8.1.5 Menjelaskan tujuan, fungsi, dan prinsip-prinsip penilaian dalam proses pembelajaran
		8.1.6 Menerapkan prinsip-prinsip penilaian dalam pembelajaran
		8.1.7 Menjelaskan lingkup penilaian dalam pembelajaran
		8.1.8 Menjelaskan ketuntasan belajar dalam pembelajaran
		8.1.9 Mengidentifikasi prinsip-prinsip penilaian dan evaluasi proses dan hasil belajar sesuai dengan karakteristik mapel matematika SMP/MTs
		8.1.10 Mengidentifikasi jenis instrumen dan

		teknik penilaian proses dan hasil belajar pada kompetensi sikap spiritual dan sosial.
		8.1.11 Mengidentifikasi jenis instrumen dan teknik penilaian proses dan hasil belajar pada kompetensi pengetahuan dan keterampilan
		8.1.12 Mengembangkan penilaian autentik dalam pembelajaran matematika dengan pendekatan saintifik sesuai dengan karakteristik mapel matematika SMP/MTs
	8.2 Menentukan aspek-aspek proses dan hasil belajar yang penting untuk dinilai dan dievaluasi sesuai dengan karakteristik mata pelajaran yang diampu.	8.2.1 Menjelaskan aspek-aspek penilaian proses dan hasil belajar
		8.2.2 Mengidentifikasi prinsip-prinsip dasar penilaian proses dan hasil belajar yang penting untuk dinilai dan dievaluasi sesuai dengan karakteristik mapel matematika SMP/MTs
		8.2.3 Mengidentifikasi aspek penilaian sikap, pengetahuan, dan keterampilan.
		8.2.4 Menentukan aspek-aspek proses dan hasil belajar yang penting untuk dinilai dan dievaluasi sesuai dengan karakteristik mapel matematika SMP/MTs
	8.3 Menentukan prosedur penilaian dan evaluasi proses dan hasil belajar.	8.3.1 Menjelaskan prosedur penilaian dan evaluasi proses dan hasil belajar.
		8.3.2 Menjelaskan prosedur penilaian sikap, pengetahuan, dan keterampilan.

		8.3.3 Mengidentifikasi teknik penyusunan butir instrumen penilaian hasil belajar.
		8.3.4 Menentukan prosedur penilaian dan evaluasi proses dan hasil belajar.
	8.5 Mengadministrasikan penilaian proses dan hasil belajar secara berkesinambungan dengan mengunakan berbagai instrumen.	8.5.1. Memverifikasi hasil evaluasi sesuai dengan jenis-jenis penilaian
		8.5.2. Menentukan prosedur sistem pengadministrasian penilaian proses dan hasil belajar
		8.5.3. Menyusun laporan hasil evaluasi dan penilaian pembelajaran
	8.6 Menganalisis hasil penilaian proses dan hasil belajar untuk berbagai tujuan.	8.6.1. Mengidentifikasi hasil evaluasi proses dan hasil belajar sesuai dengan prinsip-prinsip penilaian hasil belajar.
		8.6.2. Mengolah hasil penilaian proses dan hasil belajar untuk berbagai tujuan.
		8.6.3. Menyimpulkan hasil penilaian proses dan hasil belajar
9. Memanfaatkan hasil penilaian dan evaluasi untuk kepentingan	9.1 Menggunakan informasi hasil penilaian dan evaluasi untuk menentukan ketuntasan belajar	9.1.1 Menentukan Kreteria Ketuntasan belajar dengan menggunakan penilaian dan evaluasi proses dan hasil belajar
		9.1.2. Mengkonstruksikan hasil penilaian dan evaluasi dengan KKM yang sudah ditentukan
	9.3 Mengkomunikasikan hasil penilaian dan evaluasi kepada pemangku kepentingan.	9.3.1 Membuat laporan penilaian dan evaluasi proses dan hasil pembelajaran
		9.3.2 Mengkomunikasikan penilaian dan evaluasi proses dan hasil

		pembelajaran kepada siswa, wali murid/orang tua, kepala sekolah, pemangku kepentingan, dan pemerintah
	9.4 Memanfaatkan informasi hasil penilaian dan evaluasi pembelajaran untuk meningkatkan kualitas pembelajaran.	9.4.1 Memanfaatkan informasi hasil penilaian dan evaluasi pembelajaran sebagai bahan penyusunan rancangan pembelajaran yang akan dilakukan selanjutnya.
		9.4.2 Memanfaatkan informasi hasil penilaian dan evaluasi pembelajaran sebagai bahan perbaikan proses belajar
		9.4.3 Memanfaatkan informasi hasil penilaian dan evaluasi pembelajaran sebagai bahan pengayaan proses belajar
		9.4.4 Memanfaatkan informasi penilaian untuk pengembangan penilaian pembelajaran

D. Ruang Lingkup

Ruang lingkup materi dalam modul ini meliputi:

1. Pengertian penilaian, pengukuran, dan evaluasi dalam pembelajaran.
2. Jenis dan bentuk penilaian.
3. Pengertian tes dan nontes.
4. Fungsi, dan prinsip-prinsip penilaian dalam proses pembelajaran.
5. Penilaian autentik dalam pembelajaran matematika.
6. Aspek-aspek penilaian dan komponen penilaian hasil belajar.
7. Penilaian pencapaian kompetensi sikap, pengetahuan, dan keterampilan.
8. Prosedur penilaian dan evaluasi proses dan hasil belajar.
9. Mengolah dan menyusun laporan hasil penilaian proses dan hasil belajar.
10. Pengertian tentang kriteria ketuntasan belajar minimal (KKM).

11. Pelaporan hasil penilaian, program remedial, dan program pengayaan.

E. Saran Cara Penggunaan Modul

1. Bacalah modul ini secara runtut, mulai dari uraian pendahuluan sampai bagian akhir modul, agar Anda dapat lebih mudah dan lancar dalam mempelajari modul ini.
2. Lakukan aktivitas belajar yang terdapat pada modul ini. Dalam melakukan aktivitas belajar tersebut, Anda dapat melihat kembali materi di dalam modul.
3. Materi di dalam modul lebih bersifat ringkas dan padat, sehingga disarankan untuk menelusuri literatur lain yang dapat menunjang pemahaman materi dalam modul ini.
4. Setelah melakukan aktivitas belajar, Anda menyelesaikan latihan/kasus/tugas. Jangan melihat kunci dan petunjuk jawaban. Kemandirian dalam mempelajari modul akan menentukan seberapa jauh penguasaan Anda terhadap materi dalam modul ini.
5. Setelah menyelesaikan latihan/kasus/tugas, bandingkan dengan kunci atau petunjuk jawaban.
6. Setelah selesai mempelajari modul dan mengerjakan latihan/kasus/tugas, lakukan refleksi. Kemudian, rencanakan dan lakukan tindak lanjut yang relevan, sesuai dengan hasil refleksi.

KEGIATAN PEMBELAJARAN 1
KONSEP PENILAIAN
DALAM PEMBELAJARAN MATEMATIKA

A. Tujuan

Setelah mempelajari modul ini, peserta diharapkan dapat:

1. memahami pengertian penilaian, pengukuran, dan evaluasi dalam pembelajaran
2. memahami tujuan, fungsi, dan prinsip-prinsip penilaian dalam proses pembelajaran
3. mengidentifikasi jenis instrumen dan teknik penilaian proses dan hasil belajar pada kompetensi sikap spiritual dan sosial
4. mengidentifikasi jenis instrumen dan teknik penilaian proses dan hasil belajar pada kompetensi pengetahuan dan keterampilan.

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

Peserta dapat:

1. menjelaskan pengertian penilaian, pengukuran, dan evaluasi dalam pembelajaran
2. menjelaskan jenis dan bentuk penilaian
3. menjelaskan pengertian tes dan nontes
4. membedakan penilaian, pengukuran, evaluasi, dan tes
5. menjelaskan tujuan, fungsi, dan prinsip-prinsip penilaian dalam proses pembelajaran
6. mengidentifikasi jenis instrumen dan teknik penilaian proses dan hasil belajar pada kompetensi sikap spiritual dan sosial
7. mengidentifikasi jenis instrumen dan teknik penilaian proses dan hasil belajar pada kompetensi pengetahuan dan keterampilan.

C. Uraian Materi

1. Konsep Penilaian Hasil Belajar oleh Pendidik

Mutu pembelajaran dipengaruhi oleh banyak faktor, salah satunya adalah sistem penilaian (*assesment*) yang dilakukan oleh guru. Setiap penilaian didasarkan pada tiga elemen mendasar yang saling berhubungan, yaitu: aspek prestasi yang akan dinilai (kognisi), tugas-tugas yang digunakan untuk mengumpulkan bukti tentang prestasi siswa (observasi), dan metode yang digunakan untuk menganalisis bukti yang dihasilkan dari tugas-tugas (interpretasi) (NRC: 2001).

Berdasarkan Permendikbud No. 81A tahun 2013 istilah penilaian (*assesment*) terdiri dari tiga kegiatan, yakni pengukuran, penilaian, dan evaluasi. Ketiga istilah tersebut memiliki makna yang berbeda, walaupun memang saling berkaitan. Pengukuran adalah kegiatan membandingkan hasil pengamatan dengan suatu kriteria atau ukuran. Penilaian adalah proses mengumpulkan informasi/bukti melalui pengukuran, menafsirkan, mendeskripsikan, dan menginterpretasi bukti-bukti hasil pengukuran. Evaluasi adalah proses mengambil keputusan berdasarkan hasil-hasil penilaian.

Berdasarkan Permendikbud No. 53 tahun 2015 penilaian hasil belajar oleh pendidik adalah proses pengumpulan informasi/bukti tentang capaian pembelajaran peserta didik dalam kompetensi sikap spiritual dan sikap sosial, kompetensi pengetahuan, dan kompetensi keterampilan yang dilakukan secara terencana dan sistematis, selama dan setelah proses pembelajaran. Penilaian dilakukan melalui observasi, penilaian diri, penilaian antar peserta didik, ulangan, penugasan, tes praktek, proyek, dan portofolio yang disesuaikan dengan karakteristik kompetensi.

Aspek yang dinilai dalam penilaian matematika meliputi pemahaman konsep (*comprehension*), melakukan prosedur, representasi dan penafsiran, penalaran (*reasoning*), pemecahan masalah dan sikap. Penilaian dalam aspek representasi melibatkan kemampuan untuk menyajikan kembali suatu permasalahan atau obyek matematika melalui hal-hal berikut: memilih, menafsirkan, menerjemahkan, dan menggunakan grafik, tabel, gambar, diagram, rumus, persamaan, maupun benda konkret untuk memotret permasalahan sehingga menjadi lebih jelas. Penilaian

dalam aspek penafsiran meliputi kemampuan menafsirkan berbagai bentuk penyajian seperti tabel, grafik, menyusun model matematika dari suatu situasi.

Penilaian aspek penalaran dan bukti meliputi identifikasi contoh dan bukan contoh, menyusun dan memeriksa kebenaran dugaan (*conjecture*), menjelaskan hubungan, membuat generalisasi, menggunakan contoh kontra, membuat kesimpulan, merencanakan dan mengkonstruksi argumen-argumen matematis, menurunkan atau membuktikan kebenaran rumus dengan berbagai cara.
Penilaian pemecahan masalah dalam matematika merupakan proses untuk menilai kemampuan menerapkan pengetahuan matematika yang telah diperoleh sebelumnya ke dalam situasi baru yang belum dikenal, baik dalam konteks matematika maupun di luar matematika.

Penilaian hasil belajar oleh pendidik dilaksanakan dalam bentuk penilaian autentik dan non-autentik. Penilaian autentik merupakan pendekatan utama dalam penilaian hasil belajar oleh pendidik. Penilaian Autentik adalah bentuk penilaian yang menghendaki peserta didik menampilkan sikap, menggunakan pengetahuan dan keterampilan yang diperoleh dari pembelajaran dalam melakukan tugas pada situasi yang sesungguhnya. Bentuk penilaian autentik mencakup: (1) penilaian berdasarkan pengamatan, (2) tugas ke lapangan, (3) portofolio, (4) projek, (5) produk, (6) jurnal, (7) kerja laboratorium, dan (8) unjuk kerja, serta (9) penilaian diri. Penilaian diri merupakan teknik penilaian sikap, pengetahuan, dan keterampilan yang dilakukan sendiri oleh peserta didik secara reflektif. Bentuk penilaian non-autentik mencakup: (1) tes, (2) ulangan, dan (3) ujian.

2. Fungsi dan Tujuan Penilaian Hasil Belajar oleh Pendidik

Secara umum, penilaian hasil belajar oleh pendidik dilaksanakan untuk memenuhi fungsi formatif dan sumatif dalam penilaian. Secara lebih khusus penilaian hasil belajar oleh pendidik berfungsi untuk:

a. memantau kemajuan belajar;
b. memantau hasil belajar; dan
c. mendeteksi kebutuhan perbaikan hasil belajar peserta didik secara berkesinambungan.

Penilaian hasil belajar oleh pendidik memiliki tujuan untuk:

a. mengetahui tingkat penguasaan kompetensi;
b. menetapkan ketuntasan penguasaan kompetensi;
c. menetapkan program perbaikan atau pengayaan berdasarkan tingkat penguasaan kompetensi; dan
d. memperbaiki proses pembelajaran.

3. Prinsip-prinsip Penilaian Hasil Belajar oleh Pendidik

Prinsip umum penilaian hasil belajar oleh pendidik meliputi: sahih, objektif, adil, terpadu, terbuka, holistik dan berkesinambungan, sistematis, akuntabel, dan edukatif.

a. *Sahih*, berarti penilaian didasarkan pada data yang mencerminkan kemampuan yang diukur.
b. *Objektif*, berarti penilaian didasarkan pada prosedur dan kriteria yang jelas, tidak dipengaruhi subjektivitas penilai.
c. *Adil*, berarti penilaian tidak menguntungkan atau merugikan peserta didik karena berkebutuhan khusus serta perbedaan latar belakang agama, suku, budaya, adat istiadat, status sosial ekonomi, dan gender.
d. *Terpadu*, berarti penilaian oleh pendidik merupakan salah satu komponen yang tak terpisahkan dari kegiatan pembelajaran.
e. *Terbuka*, berarti prosedur penilaian, kriteria penilaian, dan dasar pengambilan keputusan dapat diketahui oleh pihak yang berkepentingan.
f. *Holistik/menyeluruh* dan *berkesinambungan*, berarti penilaian oleh pendidik mencakup semua aspek kompetensi dengan menggunakan berbagai teknik penilaian yang sesuai, untuk memantau perkembangan kemampuan peserta didik.
g. *Sistematis*, berarti penilaian dilakukan secara berencana dan bertahap dengan mengikuti langkah-langkah baku.
h. *Beracuan kriteria*, berarti penilaian didasarkan pada ukuran pencapaian kompetensi yang ditetapkan.
i. *Akuntabel*, berarti penilaian dapat dipertanggungjawabkan, baik dari segi teknik, prosedur, maupun hasilnya.

Prinsip khusus untuk penilaian autentik meliputi:

a. materi penilaian dikembangkan dari kurikulum;
b. bersifat lintas muatan atau mata pelajaran;
c. berkaitan dengan kemampuan peserta didik;
d. berbasis kinerja peserta didik;
e. memotivasi belajar peserta didik;
f. menekankan pada kegiatan dan pengalaman belajar peserta didik;
g. memberi kebebasan peserta didik untuk mengkonstruksi responnya;
h. menekankan keterpaduan sikap, pengetahuan, dan keterampilan;
i. mengembangkan kemampuan berpikir divergen;
j. menjadi bagian yang tidak terpisahkan dari pembelajaran;
k. menghendaki balikan yang segera dan terus menerus;
l. menekankan konteks yang mencerminkan dunia nyata;
m. terkait dengan dunia kerja;
n. menggunakan data yang diperoleh langsung dari dunia nyata; dan
o. menggunakan berbagai cara dan instrument.

4. Lingkup dan Sasaran Penilaian Hasil Belajar oleh Pendidik

Lingkup penilaian hasil belajar oleh pendidik mencakup kompetensi sikap spiritual, kompetensi sikap sosial, kompetensi pengetahuan, dan kompetensi keterampilan.

Sasaran penilaian hasil belajar oleh pendidik terhadap kompetensi sikap spiritual dan kompetensi sikap sosial meliputi tingkatan sikap: menerima, menanggapi, menghargai, menghayati, dan mengamalkan nilai spiritual dan nilai sosial. Sasaran penilaian hasil belajar oleh pendidik terhadap kompetensi pengetahuan meliputi tingkatan kemampuan mengetahui, memahami, menerapkan, menganalisis, dan mengevaluasi pengetahuan faktual, pengetahuan konseptual, pengetahuan prosedural, dan pengetahuan metakognitif.

Sasaran penilaian hasil belajar oleh pendidik terhadap kompetensi keterampilan mencakup keterampilan abstrak dan keterampilan konkrit. Keterampilan abstrak merupakan kemampuan belajar yang meliputi: mengamati, menanya, mengumpulkan informasi/mencoba, menalar/mengasosiasi, dan mengomunikasikan. Keterampilan konkrit merupakan kemampuan belajar yang

meliputi: meniru, melakukan, menguraikan, merangkai, memodifikasi, dan mencipta.

5. Skala Penilaian dan Ketuntasan

Penilaian hasil belajar oleh pendidik untuk kompetensi sikap, kompetensi pengetahuan, dan kompetensi keterampilan menggunakan skala penilaian. Predikat untuk sikap spiritual dan sikap sosial dinyatakan dengan A = sangat baik, B = baik, C = cukup, dan D = kurang. Skala penilaian untuk kompetensi pengetahuan dan kompetensi keterampilan diperoleh dengan cara merata-ratakan hasil pencapaian kompetensi setiap KD selama satu semester. Nilai akhir selama satu semester pada rapor ditulis dalam bentuk angka 0 – 100 dan predikat serta dilengkapi dengan deskripsi singkat kompetensi yang menonjol bedasarkan pencapaian KD selama satu semester.

Ketuntasan belajar merupakan tingkat minimal pencapaian kompetensi sikap, kompetensi pengetahuan, dan kompetensi keterampilan meliputi: (1) ketuntasan penguasaan substansi; dan (2) ketuntasan belajar dalam konteks kurun waktu belajar. Kriteria ketuntasan minimal kompetensi sikap ditetapkan dengan predikat B = baik. Skor rerata untuk ketuntasan kompetensi pengetahuan dan keterampilan disesuaikan dengan kriteria ketuntasan minimal (KKM) masing-masing kelas/ satuan pendidikan.

6. Instrumen Penilaian

Penilaian hasil belajar oleh pendidik dilaksanakan dengan menggunakan instrumen penilaian. Dalam Permendikbud Nomor 53 Tahun 2015 dinyatakan bahwa instrumen penilaian harus memenuhi persyaratan: (1) substansi yang merepresentasikan kompetensi yang dinilai; (2) konstruksi yang memenuhi persyaratan teknis sesuai dengan bentuk instrumen yang digunakan; dan (3) penggunaan bahasa yang baik dan benar serta komunikatif sesuai dengan tingkat perkembangan peserta didik. Penilaian hasil belajar peserta didik dalam pembelajaran matematika dapat dilakukan dengan teknik penilaian tes dan nontes. Tes adalah serangkaian pertanyaan atau latihan atau alat lain yang digunakan untuk mengukur keterampilan, pengetahuan, intelegensi, kemampuan atau bakat yang dimiliki oleh individu atau kelompok. Teknik penilaian tes terdiri dari tes tulis, tes

lisan, tes praktek. Penilaian dengan teknik tes tulis dapat menggunakan: (1) soal obyektif, (2) soal isian, dan (3) soal uraian/terbuka. Penilaian dengan teknik tes lisan menggunakan daftar pertanyaan lisan. Teknik nontes biasanya digunakan untuk mengevaluasi bidang sikap atau keterampilan.

Penilaian Kompetensi Ranah Sikap dalam Pembelajaran Matematika SMP/MTs

Pendidik melakukan penilaian kompetensi sikap melalui observasi, penilaian diri, penilaian "teman sejawat" (*peer evaluation*) oleh peserta didik dan jurnal. Instrumen yang digunakan untuk observasi, penilaian diri, dan penilaian antarpeserta didik adalah daftar cek atau skala penilaian (*rating scale*) yang disertai rubrik, sedangkan pada jurnal berupa catatan pendidik.

Penilaian Kompetensi Ranah Pengetahuan dalam Pembelajaran Matematika SMP/MTs

Pendidik menilai kompetensi pengetahuan melalui tes tulis, tes lisan, dan penugasan. Instrumen tes tulis berupa soal pilihan ganda, isian, jawaban singkat, benar-salah, menjodohkan, dan uraian. Instrumen uraian dilengkapi pedoman penskoran. Kompetensi ranah pengetahuan dalam pembelajaran matematika dimaknai sebagai perilaku yang diharapkan dari peserta didik ketika mereka berhadapan dengan konten matematika, dan dapat terdiri atas domain: (1) pemahaman, (2) penyajian dan penafsiran, (3) penalaran dan pembuktian.

Penilaian Kompetensi Ranah Keterampilan dalam Pembelajaran Matematika SMP/MTs

Pendidik menilai kompetensi keterampilan melalui penilaian kinerja, yaitu penilaian yang menuntut peserta didik mendemonstrasikan suatu kompetensi tertentu dengan menggunakan tes praktik, projek, dan penilaian portofolio. Instrumen yang digunakan berupa daftar cek atau skala penilaian (*rating scale*) yang dilengkapi rubrik.

a. Tes praktik adalah penilaian yang menuntut respon berupa keterampilan melakukan suatu aktivitas atau perilaku sesuai dengan tuntutan kompetensi.

b. Projek adalah tugas-tugas belajar (*learning tasks*) yang meliputi kegiatan perancangan, pelaksanaan, dan pelaporan secara tertulis maupun lisan dalam waktu tertentu.
c. Penilaian portofolio adalah penilaian yang dilakukan dengan cara menilai kumpulan seluruh karya peserta didik dalam bidang tertentu yang bersifat reflektif-integratif untuk mengetahui minat, perkembangan, prestasi, dan/atau kreativitas peserta didik dalam kurun waktu tertentu. Karya tersebut dapat berbentuk tindakan nyata yang mencerminkan kepedulian peserta didik terhadap lingkungannya.

7. Prosedur Penilaian

Prosedur penilaian dimaksudkan sebagai langkah-langkah terurut yang harus ditempuh dalam melaksanakan penilaian. Langkah-langkah tersebut merupakan tahapan dari kegiatan permulaan sampai kegiatan akhir dalam rangka pelaksanaan penilaian.

Pelaksanaan penilaian diawali dengan pendidik merumuskan indikator pencapaian kompetensi pengetahuan dan keterampilan yang dijabarkan dari Kompetensi Dasar (KD) pada mata pelajaran matematika. Indikator pencapaian kompetensi untuk KD pada KI-3 dan KI-4 dirumuskan dalam bentuk perilaku spesifik yang dapat terukur dan/atau diobservasi. Indikator pencapaian kompetensi dikembangkan menjadi indikator soal yang diperlukan untuk penyusunan instrumen penilaian. Indikator tersebut digunakan sebagai rambu-rambu dalam penyusunan butir soal atau tugas. Instrumen penilaian memenuhi persyaratan substansi/materi, konstruksi, dan bahasa.

Persyaratan substansi merepresentasikan kompetensi yang dinilai, persyaratan konstruksi memenuhi persyaratan teknis sesuai dengan bentuk instrumen yang digunakan, dan persyaratan bahasa adalah penggunaan bahasa yang baik dan benar serta komunikatif sesuai dengan tingkat perkembangan peserta didik.

Indikator pencapaian pengetahuan dan keterampilan merupakan ukuran, karakteristik, atau ciri-ciri yang menunjukkan ketercapaian suatu KD tertentu dan menjadi acuan dalam penilaian KD mata pelajaran. Setiap Indikator pencapaian kompetensi dapat dikembangkan menjadi satu atau lebih indikator soal

pengetahuan dan keterampilan. Sedangkan untuk mengukur pencapaian sikap digunakan indikator penilaian sikap yang dapat diamati.

Menurut Suharsimi (2006) langkah-langkah dalam penyusunan tes adalah:

1. Menentukan tujuan mengadakan tes
2. Membuat pembatasan terhadap bahan yang akan diteskan
3. Menderetkan semua Indikataor Pencapaian Kompetensi (IPK) yang memuat aspek pengetahuan, sikap dan keterampilan
4. Menyusun tabel spesifikasi yang memuat pokok materi dan aspek-aspek yang akan diukur
5. Menuliskan butir-butir soal sesuai Indikator Pencapaian Kompetensi

D. Aktivitas Pembelajaran

1. Buatlah kelompok, kemudian diskusikan di dalam kelompok Anda mengenai pengertian-pengertian berikut, kemudian berikan contohnya.

No.	Pengertian	Contoh dalam pembelajaran matematika (deskripsikan)
1	Penilaian	
2	Pengukuran	
3	Evaluasi	
4	Jenis Penilaian	
5	Bentuk Penilaian	
6	Tes, Nontes	
7	Ketuntasan Belajar	
8	Penilaian Autentik	

2. Secara individu maupun kelompok, coba Anda diskusikan mengenai jenis instrumen dan teknik penilaian proses dan hasil belajar pada kompetensi *sikap spiritual* dan *sosial.*

No.	Jenis Instrumen		Teknik Penilaian	
	Sikap Spiritual	Sikap Sosial	Sikap Spiritual	Sikap Sosial
1				
2				

3. Secara individu maupun kelompok, coba Anda diskusikan mengenai jenis instrumen dan teknik penilaian proses dan hasil belajar pada kompetensi *pengetahuan* dan *keterampilan.*

No.	Jenis Instrumen		Teknik Penilaian	
	Pengetahuan	Keterampilan	Pengetahuan	Keterampilan
1				
2				

E. Latihan/Kasus/Tugas

Untuk memantapkan pemahaman Anda mengenai materi penilaian dalam pembelajaran matematika, jawablah latihan berikut ini secara mandiri.

1. Jelaskanlah pengertian penilaian, pengukuran, dan evaluasi dalam pembelajaran matematika!
2. Jelaskanlah jenis dan bentuk penilaian hasil belajar oleh pendidik!
3. Jelaskanlah tujuan, fungsi, dan prinsip-prinsip penilaian dalam proses pembelajaran.
4. Jelaskan teknik penilaian proses dan hasil belajar pada kompetensi sikap spiritual dan sosial pada mata pelajaran matematika.
5. Jelaskanlah jenis instrumen dan teknik penilaian proses dan hasil belajar pada kompetensi pengetahuan dan keterampilan.

F. Rangkuman

Istilah penilaian (*assesment*) terdiri dari tiga kegiatan, yakni pengukuran, penilaian, dan evaluasi. Pengukuran adalah kegiatan membandingkan hasil pengamatan dengan suatu kriteria atau ukuran. Penilaian adalah proses mengumpulkan informasi/bukti melalui pengukuran, menafsirkan, mendeskripsikan, dan menginterpretasi bukti-bukti hasil pengukuran. Evaluasi adalah proses mengambil keputusan berdasarkan hasil-hasil penilaian.

Penilaian sikap adalah penilaian terhadap kecenderungan perilaku peserta didik sebagai hasil pendidikan, baik di dalam kelas maupun di luar kelas.

Penilaian pengetahuan merupakan penilaian untuk mengukur kemampuan peserta didik berupa pengetahuan faktual, konseptual, prosedural, dan metakognitif, serta kecakapan berpikir tingkat rendah sampai tinggi.

Penilaian keterampilan adalah penilaian untuk mengukur pencapaian kompetensi peserta didik terhadap kompetensi dasar pada KI-4. Penilaian keterampilan menuntut peserta didik mendemonstrasikan suatu kompetensi tertentu.

G. Umpan Balik dan Tindak Lanjut

Jika Anda dapat memahami sebagian besar materi dan dapat menjawab sebagian besar latihan/tugas, maka Anda dianggap telah menguasai kompetensi yang diharapkan. Namun jika tidak atau Anda merasa masih belum optimal, silakan pelajari kembali dan berdiskusi dengan teman untuk memantapkan pemahaman dan memperoleh kompetensi yang diharapkan.

KEGIATAN PEMBELAJARAN 2
PENGOLAHAN DATA HASIL PENILAIAN DALAM PEMBELAJARAN MATEMATIKA

A. Tujuan

Setelah mempelajari modul ini, peserta diharapkan dapat:

1. mengolah hasil penilaian proses dan hasil belajar
2. menyimpulkan hasil penilaian proses dan hasil belajar.

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

Peserta dapat:

1. menentukan prosedur sistem pengadministrasian penilaian proses dan hasil belajar
2. mengidentifikasi hasil evaluasi proses dan hasil belajar sesuai dengan prinsip-prinsip penilaian hasil belajar
3. mengolah hasil penilaian proses dan hasil belajar untuk berbagai tujuan
4. menyimpulkan hasil penilaian proses dan hasil belajar.

C. Uraian Materi

1. Pengertian Skor dan Nilai

Bobot adalah bilangan yang dikenakan terhadap setiap butir soal yang nilainya ditentukan berdasarkan usaha siswa dalam menyelesaikan soal itu. Bobot untuk suatu butir soal disebut skor untuk butir soal tersebut. Skor untuk keseluruhan butir soal dari suatu perangkat tes yang diperoleh seorang disebut skor tes dari orang tersebut. Skor disebut skor aktual artinya skor kenyataan (empirik) yang diperoleh siswa. Jika seluruh soal dalam perangkat tes itu dapat dijawab dengan benar (tanpa salah), sesuai dengan harapan pembuat soal, skor untuk menyatakan kondisi ini disebut skor maksimum ideal. Jika skor (data mentah) tersebut diolah lebih lanjut dengan menggunakan aturan dan kriteria tertentu sehingga dapat diinterpretasikan, hasil pengolahan tersebut dinamakan nilai. Nilai ini bisa berupa bilangan (kuantitatif) dan bisa pula berupa huruf atau kategori (kualitatif).

2. Acuan Penilaian

Menurut Woodworth (1961) ada dua jenis pedoman yang bisa digunakan untuk menentukan nilai (mengubah skor menjadi nilai) sebagai hasil evaluasi, yaitu:

a. Penilaian Acuan Patokan (PAP), dengan cara membandingkan skor yang diperoleh seorang individu (siswa) dengan suatu standar yang sifatnya mutlak (absolut).
b. Penilaian Acuan Normatif (PAN), dengan cara membandingkan skor yang diperoleh seorang individu (siswa) dengan skor yang diperoleh siswa lainnya dalam kelompok tes tersebut.

3. Penentuan Skor

Pada butir soal dengan tipe subyektif (bentuk uraian), untuk mengurangi unsur subyektivitas dan perbedaan hasil pemeriksaan yang mencolok, pembuat soal hendaknya menyusun rambu-rambu penilaian yang harus diberikan kepada pemeriksa. Pertama kali tentulah menentukan besarnya skot (bobot) yang akan diberikan untuk masing-masing butir soal berdasarkan kriteria di atas. Rubrik soal uraian/terbuka dapat mengacu dari *analytic scoring scale* (NCTM, dalam lampiran III Permendikbud 58/2014, PMP Matematika, hal. 384) sebagai berikut.

Tabel 2.Rubrik Soal Uraian

Aspek	Skor	Uraian
Pemahaman Soal	0	Tidak ada usaha memahami soal
	1	Salah interpretasi soal secara keseluruhan
	2	Salah interpretasi pada sebagian besar soal
	3	Salah interpretasi pada sebagian kecil soal
	4	Interpretasi soal benar seluruhnya
Penyelesaian Soal	0	Tidak ada usaha
	1	Perencanaan penyelesaian yang tidak sesuai
	2	Sebagian prosedur benar, tetapi kebanyakan salah
	3	Prosedur substansial benar, tetapi masih terdapat kesalahan
	4	Prosedur penyelesaian tepat, tanpa kesalahan aritmetika
Menjawab Soal	0	Tanpa jawab atau jawab salah yang diakibatkan prosedur penyelesaian yang tidak tepat
	1	Salah komputasi, tiada pernyataan jawab, pelabelan salah
	2	Penyelesaian benar
Skor maksimal 10 **Skor minimal 0**		

Contoh Teknik dan Instrumen Penilaian Kompetensi Pengetahuan

Teknik Penilaian: Tes Tertulis

Bentuk Instrumen: Soal Uraian

Kompetensi Dasar (KD): Menyelesaikan persamaan dan pertidaksamaan linear satu variabel (Kelas VII)

Contoh indikator pencapaian kompetensi pada KD tersebut adalah siswa mampu menentukan penyelesaian pertidaksamaan linear satu variabel.

Contoh indikator penulisan butir soal (indikator soal/indikator penilaian) yang relevan adalah "Diberikan suatu pertidaksamaan linear satu variabel, siswa dapat menyelesaikan pertidaksamaan tersebut".

Contoh instrumen penilaiannya:

"Tentukan nilai x yang memenuhi pertidaksamaan $2x - 6 \geq 8x + 5$".

Tabel 3. Contoh Rubrik Penilaian Jawaban Siswa

No	Aspek Penilaian	Rubrik Penilaian	Skor
1.	*Pemahaman terhadap konsep pertidaksamaan linear satu variabel*	Penyelesaian dihubungkan dengan konsep pertidaksamaan linear satu variabel	5
		Sudah menghubungkan penyelesaian dengan konsep pertidaksamaan linear satu variabel, namun belum benar	3
		Penyelesaian sama sekali tidak dihubungkan dengan konsep pertidaksamaan linear satu variabel	1
		Tidak ada respon/jawaban	0
2.	*Kebenaran jawaban akhir soal*	Jawaban benar	5
		Jawaban hampir benar	3
		Jawaban salah	1
		Tidak ada respon/jawaban	0
3.	*Proses perhitungan*	Proses perhitungan benar	5
		Proses perhitungan sebagian besar benar	3
		Proses perhitungan sebagian kecil saja yang benar	2
		Proses perhitungan sama sekali salah	1
		Tidak ada respon/jawaban	0
	Skor maksimal		**15**
	Skor minimal		**0**

Bagaimana dengan pemberian skor pada soal tipe objektif?

Contoh:

Misalkan seorang siswa dapat menjawab 8 soal dengan benar dari 10 soal yang harus dikerjakan, sisanya dijawab salah. Jika soal tersebut berbentuk B-S, apakah tingkat penguasaan siswa tersebut sebesar 80%?

Menurut teori probabilitas option B dan S masing-masing mempunyai nilai kemungkinan yang sama untuk dipilih, yaitu $\frac{1}{2}$. Kemungkinan siswa menjawab benar soal tipe objektif sangatlah besar, dengan demikian diperoleh hubungan bahwa, *"Jumlah jawaban yang benar sama dengan banyak jawaban yang benar-benar dikuasai ditambah dengan banyak jawaban yang ditebak".* Jika kita misalkan jawaban siswa yang benar-benar dikuasai sebagai *x*, maka dipenuhi persamaan:

$$8 = x + (10 - x)\,\frac{1}{2}$$

Diperoleh $\quad x = 6$

Jadi tingkat penguasaan siswa tersebut sebenarnya adalah 60%.

Jika soal tersebut berbentuk pilihan ganda dengan 4 option, maka tingkat penguasaan siswa tersebut dapat dicari melalui hubungan

$$8 = x + (10 - x)\,\frac{1}{4}$$

Diperoleh $\quad x = 7$

Jadi tingkat penguasaan siswa tersebut sebenarnya adalah 70%.

Misalkan disajikan 100 butir soal bentuk pilihan ganda dengan 5 option. Seorang siswa dapat menjawab benar sebanyak 60 soal. Berapa butir soalkah yang benar-benar dikuasai oleh siswa tersebut?

Untuk menyelesaikan soal tersebut, dimisalkan banyak butir soal yang dijawab dengan yakin (dikuasai, tidak ditebak) sebanyak *x* butir. Sisanya, yaitu $(100 - x)$ butir dijawab dengan tebakan. Dari kedua kondisi tersebut diperoleh:

$$60 = x + (100 - x)\,\frac{1}{5}$$

atau $\quad x = 50$

Jadi banyak butir soal yang benar-benar dikuasai sebanyak 50 butir atau 50% dari seluruh materi tes.

Jika soal tersebut berbentuk B-S, maka diperoleh persamaan

$$60 = x + (100 - x)\frac{1}{2}$$

atau $\quad x = 20$

Jadi banyak butir soal yang benar-benar dikuasai hanya 20 butir atau 20% saja. Dengan cara yang sama kita bisa menentukan jumlah soal dengan tipe B-S yang dijawab dengan benar agar kita bisa mencapai tingkat penguasaan yang dikehendaki. Misalnya, jika kita ingin mendapatkan tingkat penguasaan sebesar 50%, maka jumlah soal yang harus dijawab dengan benar sebesar 75 butir soal.

Dari contoh-contoh di atas, tampak bahwa untuk soal bentuk B-S, sebuah soal yang dapat dijawab dengan benar tanpa membaca soal (apalagi dipikirkan) mempunyai peluang sebesar 50% untuk mendapatkan jawabannya yang benar. Sedangkan untuk soal bentuk pilihan ganda, peluangnya adalah 25% jika disajikan 4 option dan 20% untuk 5 option.

Peluang untuk memperolah minimal 70% soal dapat dijawab dengan benar dengan cara menebak, menurut buku *"Improving The Classroom Test"* yang dikutip oleh Ruseffendi (1984) untuk tipe objektif bentuk B-S adalah seoerti tampak di bawah ini:

Tabel 2.3 Peluang Tebakan pada Bentuk B-S

Banyak Soal	Peluang
10	$\frac{1}{6}$
25	$\frac{1}{50}$
50	$\frac{1}{350}$
100	$\frac{1}{10.000}$

Untuk soal bentuk pilihan ganda dengan 4 option adalah seperti tampak pada tabel berikut:

Tabel 2.4 Peluang Tebakan pada Bentuk Pilihan Ganda 4 Option

Banyak Soal	Peluang
10	$\frac{1}{1000}$
25	$\frac{1}{1.000.000}$

Dari kedua tabel di atas tampak bahwa makin banyak soal yang disajikan untuk tipe objektif, makin sedikit peluang testi untuk menebak jawabannya. Oleh karena itu, jika kita menyajikan soal berbentuk pilihan (B-S atau P-G) haruslah memperhitungkan banyaknya soal agar unsur tebakan yang akan dilakukan oleh siswa dapat ditekan menjadi lebih sedikit. Dengan kata lain, penyajian soal bentuk tersebut haruslah cukup banyak. Perbandingan banyak soal untuk bentuk B-S dan bentuk P-G, agar unsur spekulatifnya sama adalah 200 bentuk B-S ekuivalen dengan 25 soal bentuk P-G.

Pada contoh-contoh di atas, tampak bahwa tingkat penguasaan sebenarnya relatif lebih kecil daripada jumlah jawaban yang benar. Untuk menanggulangi masalah tersebut maka pemberian skor untuk soal tipe objektif menggunakan rumus-rumus di bawah ini:

a) Rumus skor untuk soal bentuk B-S

$$S = (J_B - J_S) \times b$$

dengan:

S = Skor

J_B = Jumlah jawaban yang benar

J_S = Jumlah jawaban yang salah

b = bobot soal

b) Rumus Skor untuk soal bentuk Pilihan Ganda (P-G)

$$S = (J_B - \frac{J_S}{(n-1)}) \times b$$

dengan n: banyak option yang disediakan pada setiap item (butir soal).

c) Rumus untuk soal yang memasangkan

$$S = (J_B - \frac{J_S}{(n_1-1)(n_2-1)}) \times b$$

dengan n_1 = banyak stem (soal) pada kolom sebelah kiri

n_2 = banyak alternatif jawaban pada kolom sebelah kanan

d) Rumus untuk soal yang bentuk isian/uraian.

$$S = J_B \times b$$

tanpa pengurangan (hukuman) sebab tidak ada pilihan.

Misalkan suatu tes matematika terdiri dari 10 bentuk Benar-Salah, 20 butir bentuk P-G dengan 4 option, 5 butir bentuk memasangkan dengan 7 alternatif jawaban, dan

10 butir isian. Mengingat kadar kesulitan dan usaha siswa dalam mengerjakan setiap bentuk soal tersebut berlainan maka bobot untuk soal bentuk B-S ditentukan 1, bentuk P-G bobotnya 3, bentuk memasangkan bobotnya $1\frac{1}{2}$, dan bentuk isian bobotnya 2, jika seorang siswa dapat menjawab benar B-S sebanyak 7 soal, bentuk P-G sebanyak 15 soal, bentuk memasangkan sebanyak 2 soal, dan bentuk isian sebanyak 8 soal, maka skor yang diperoleh siswa tersebut adalah ...

Penyelesaian:

Skor total siswa tersebut, sebagai berikut:

Skor $_{(B\text{-}S)} = (7 - 3) \times 1 = 4{,}0$

Skor $_{(P\text{-}G)} = (15 - \frac{5}{3}) \times 3 = 40{,}0$

Skor $_{(M\text{-}I)} = (2 - \frac{3}{4{,}6}) \times 1\frac{1}{2} = 2{,}8$

Skor $_{(Isian)} = (8 \times 5) = 40$

Jadi total Skor adalah 86,8

Jika seorang siswa dapat menjawab soal tersebut dengan benar, maka skor (maksimum ideal) yang diperoleh adalah:

$10 \times 1{,}0 = 10{,}0$

$20 \times 3{,}0 = 60{,}0$

$5 \times 1{,}5 = 7{,}5$

$10 \times 5 = 50{,}0.$

Skor maksimal ideal = 127,5

Jadi tingkat penguasaan siswa tersebut adalah: $\frac{86{,}8}{127{,}5} \times 100\% = 67\%$

4. Skala Penilaian

Hasil pengolahan data skor evaluasi peserta didik menghasilkan nilai yang memiliki makna berbeda-beda sesuai dengan skala penilaian yang digunakan. Skala penilaian merupakan rentang nilai, yang mana rentang tersebut dapat menggambarkan tingkat penguasaan peserta didik. Berikut ini adalah teknik-teknik untuk menentukan rentang-rentang nilai berdasarkan skala penilaian:

a. Skala Sepuluh

Skala sepuluh memiliki rentang nilai: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 dan 10

Teknik penggunaan skala 10 lebih mudah menggunakan kurva normal, yaitu membaginya menjadi 10 bagian. Sehingga jarak antar selang adalah 0,6*s*. Konversi nilai dari skala 10 menjadi sebagai berikut:

$$\bar{x} + 2{,}25\,s \leq 10$$

$$\bar{x} + 1{,}75\,s \leq 9 < \bar{x} + 2{,}25\,s$$

$$\bar{x} + 1{,}25\,s \leq 8 < \bar{x} + 1{,}75\,s$$

$$\bar{x} + 0{,}75\,s \leq 7 < \bar{x} + 1{,}25\,s$$

$$\bar{x} + 0{,}25\,s \leq 6 < \bar{x} + 0{,}75\,s$$

$$\bar{x} - 0{,}25\,s \leq 5 < \bar{x} + 0{,}25\,s$$

$$\bar{x} - 0{,}75\,s \leq 4 < \bar{x} - 0{,}25\,s$$

$$\bar{x} - 1{,}25\,s \leq 3 < \bar{x} - 0{,}75\,s$$

$$\bar{x} - 1{,}75\,s \leq 2 < \bar{x} - 1{,}25\,s$$

$$1 < \bar{x} - 1{,}75\,s$$

b. Skala Baku

Skala baku disebut juga skala *z*, nilainya disebut nilai baku atau nilai *z*. Dasarnya adalah kurva normal baku yang memiliki nilai rerata $\bar{Z}$ = 0 dan simpangan baku S = 1. Panjang interval dari kurva normal baku adalah $-3 \leq Z \leq 3$ sebab 99,74% nilai berada pada interval itu, sehingga sisanya dapat diabaikan. Rumus *Z*:

$$Z = \frac{X - \bar{X}}{S}$$

Kegunaan skala baku adalah untuk menentukan kedudukan seseorang siswa dalam kelompoknya. Oleh karena itu perhitungan nilai *Z* diolah dari skor aktual yang diperoleh siswa.

Contoh kasus:

Misalkan kita akan membandingkan kedudukan siswa 1 (56) dan siswa 3 (76). Sehingga diperoleh Z_1 = –0,274 dan Z_2 = 0,809 berdasarkan nilai *Z* yang diperoleh bahwa kedudukan Z_2 lebih baik dari pada Z_1.

Kegunaan lain dari skala baku ini adalah untuk menentukan kedudukan seorang siswa pada dua kelompok tes (atau lebih) yang berlainan.

c. Skala Seratus

Nilai yang digunakan pada skala seratus adalah nilai T yang bergerak pada interval 0 sampai dengan 100. Nilai T ini didasari oleh nilai z dengan hubungan $T = 50 + 10z$, dengan demikian pada skala 100 ini tidak akan ditemui nilai negatif atau pecahan, seperti halnya skala baku. Dengan interval lainnya, skala 100 ini lebih cermat dalam membedakan kemampuan siswa pada suatu tes.

Salah satu fungsi skala seratus ini adalah seperti skala z yaitu mengetahui kedudukan seseorang pada dua kelompok tes atau mengetahui kedudukan seseorang siswa dalam kelompoknya.

Contoh kasus:

$T_1 = 50 + 10(-0{,}274) = 47{,}26$

$T_2 = 50 + 10(0{,}809) = 58{,}09$

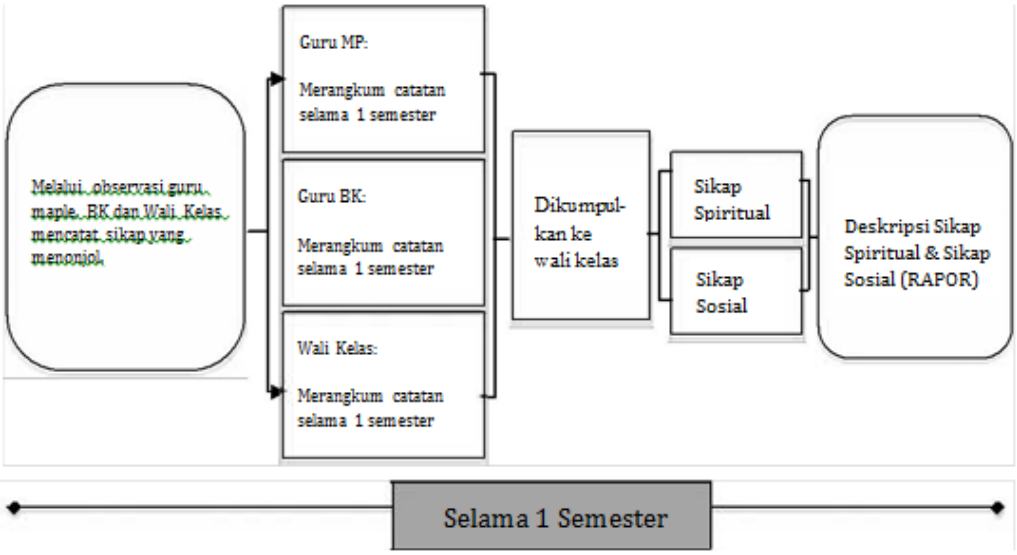
5. Pengolahan Hasil Penilaian

a. Nilai Sikap Spiritual dan Sikap Sosial

Langkah-langkah menyusun rekapitulasi penilaian sikap untuk satu semester.

a. Wali kelas, guru mata pelajaran, dan guru BK mengelompokkan (menandai) catatan-catatan jurnal ke dalam sikap spiritual dan sikap sosial.
b. Wali kelas, guru mata pelajaran, dan guru BK membuat rumusan deskripsi singkat sikap spiritual dan sikap sosial sesuai dengan catatan-catatan jurnal untuk setiap peserta didik yang ditulis dengan kalimat positif.
c. Wali kelas mengumpulkan deskripsi singkat (rekap) sikap dari guru mata pelajaran dan guru BK.
d. Deskripsi yang ditulis pada sikap spiritual dan sikap sosial adalah perilaku yang menonjol, sedangkan sikap spiritual dan sikap sosial yang belum mencapai kriteria (indikator) dideskripsikan sebagai perilaku yang perlu pembimbingan.
e. Dalam hal peserta didik tidak ada catatan apapun dalam jurnal, sikap peserta didik tersebut diasumsikan berperilaku sesuai indikator kompetensi.
f. Rekap hasil observasi sikap spritual dan sikap sosial yang dilakukan oleh wali kelas sebagai deskripsi untuk mengisi buku rapor pada kolom hasil belajar sikap.

Berikut ini skema pengolahan nilai sikap.



Gambar 1 . Skema Pengolahan Nilai Sikap

Rambu-rambu deskripsi pencapaian sikap:

a. Sikap yang ditulis adalah sikap spritual dan sikap sosial.
b. Deskripsi sikap terdiri atas keberhasilan dan/atau ketercapaian sikap yang diinginkan dan belum tercapai yang memerlukan pembinaan dan pembimbingan.
c. Substansi sikap spiritual adalah hal-hal yang berkaitan dengan menghayati dan mengamalkan ajaran agama yang dianutnya.
d. Substansi sikap sosial adalah hal-hal yang berkaitan dengan menghayati dan mengamalkan perilaku jujur, disiplin, tanggungjawab, peduli, santun, responsif dan pro-aktif dan menunjukkan sikap sebagai bagian dari solusi atas berbagai permasalahan dalam berinteraksi secara efektif dengan lingkungan sosial dan alam serta dalam menempatkan diri sebagai cerminan bangsa dalam pergaulan dunia.
e. Hasil penilaian pencapaian sikap dalam bentuk predikat dan deskripsi.
f. Predikat untuk sikap spiritual dan sikap sosial dinyatakan dengan A = sangat baik, B = baik, C = cukup, dan D = kurang. Deskripsi dalam bentuk kalimat positif, memotivasi dan bahan refleksi.

Contoh kesimpulan hasil deskripsi sikap spiritual oleh wali kelas.

Agung:

Selalu bersyukur dan berdoa sebelum melakukan kegiatan serta memiliki toleran pada agama yang berbeda; ketaatan beribadah mulai berkembang.

Contoh kesimpulan hasil deskripsi sikap sosial oleh wali kelas.

Agung:

Memiliki sikap santun, disiplin, dan tanggung jawab yang baik, responsif dalam pergaulan; sikap kepedulian mulai meningkat.

Catatan:

Kriteria penilaian sikap dibuat oleh satuan pendidikan disesuaikan dengan peraturan dan karakteristik satuan pendidikan sebagai rujukan untuk menentukan nilai akhir deskripsi sikap peserta didik pada rapor.

b. Nilai Pengetahuan

Nilai pengetahuan diperoleh dari hasil penilaian harian selama satu semester untuk mengetahui pencapaian kompetensi pada setiap KD pada KI-3. Penilaian harian dapat dilakukan melalui tes tertulis dan/atau penugasan, maupun lisan, dan lain-lain sesuai dengan karakteristik masing-masing KD. Pelaksanaan penilaian harian dapat dilakukan setelah pembelajaran satu KD atau lebih. Penilaian harian dapat dilakukan lebih dari satu kali untuk KD dengan cakupan materi luas dan komplek sehingga penilaian harian tidak perlu menunggu pembelajaran KD tersebut selesai.

Berikut contoh pengolahan nilai KD pada KI-3.

Hasil penilaian pengetahuan yang dilakukan oleh pendidik dengan berbagai teknik penilaian dalam satu semester direkap dan didokumentasikan pada tabel pengolahan nilai sesuai dengan KD yang dinilai. Jika dalam satu KD dilakukan penilaian lebih dari satu kali maka nilai akhir KD tersebut merupakan nilai rerata. Nilai akhir pencapaian pengetahuan mata pelajaran tersebut diperoleh dengan cara merata-ratakan hasil pencapaian kompetensi setiap KD selama satu semester. Nilai akhir selama satu semester pada rapor ditulis dalam bentuk angka pada skala 0 – 100 dan predikat serta dilengkapi

dengan deskripsi singkat kompetensi yang menonjol berdasarkan pencapaian KD selama satu semester.

Contoh pengolahan nilai pengetahuan mata pelajaran Matematika kelas VIII semester 1.

No	Nama	KD	Hasil Penilaian Harian					Penilaian Akhir Semester	Rerata (Pembulatan)
			1	2	3	4	...		
1	Yeni	3.1	75	68				70	71
		3.2	60	66				70	65
		3.3	86	80	90			80	84
		3.4	80					95	88
		3.5	88					80	84
	Nilai Rapor								78

Keterangan:

1. Penilaian harian dilakukan oleh pendidik dengan cakupan meliputi seluruh indikator dari satu kompetensi dasar
2. Penilaian akhir semester merupakan kegiatan yang dilakukan oleh satuan pendidikan untuk mengukur pencapaian kompetensi peserta didik pada akhir semester. Cakupan penilaian meliputi seluruh indikator yang merepresentasikan semua KD pada semester tersebut.
3. KD 3.1 dilakukan tagihan penilaian sebanyak 3 kali, maka nilai pengetahuan pada KD 3.1. adalah $\frac{75+68+70}{3} = 71$
4. Nilai rapor $= \frac{71 + 65 + 84 + 88 + 84}{5} = 78$
5. Deskripsi berisi kompetensi yang sangat baik dikuasai oleh peserta didik dan/atau kompetensi yang masih perlu ditingkatkan. Pada nilai di atas yang dikuasai peserta didik adalah KD 3.4 dan yang perlu ditingkatkan pada KD 3.2.

   Contoh deskripsi: “Memiliki kemampuan mendeskripsikan operasi aritmetika pada fungsi, namun perlu peningkatan pemahaman masalah kontekstual menggunakan konsep sistem persamaan linear dua variabel”.

c. Nilai Keterampilan

Nilai keterampilan diperoleh dari hasil penilaian unjuk kerja/kinerja/praktik, proyek, produk, portofolio, dan bentuk lain sesuai karakteristik KD mata pelajaran. Hasil penilaian pada setiap KD pada KI-4 adalah nilai optimal jika penilaian dilakukan dengan teknik yang sama dan objek KD yang sama. Penilaian KD yang sama yang dilakukan dengan proyek dan produk atau praktik dan produk, maka hasil akhir penilaian KD tersebut dirata-ratakan. Untuk memperoleh nilai akhir keterampilan pada setiap mata pelajaran adalah rerata dari semua nilai KD pada KI-4 dalam satu semester. Selanjutnya, penulisan capaian keterampilan pada rapor menggunakan angka pada skala 0 – 100 dan predikat serta dilengkapi deskripsi singkat capaian kompetensi.

Contoh 1:

Berikut cara pengolahan nilai keterampilan mata pelajaran Matematika kelas IX yang dilakukan melalui praktik pada KD 4.1 sebanyak 1 kali dan KD 4.2 sebanyak 2 kali. KD 4.3 dan KD 4.4 dinilai melalui satu proyek. Selain itu KD 4.4 juga dinilai melalui satu kali produk.

KD	Praktik		Produk		Proyek		Portofolio		Nilai Akhir (Pembulatan)
4.1	87								87
4.2	66	75							75
4.3					92				92
4.4			75		82				79
	Rerata								**83**

Keterangan:

1) Pada KD 4.1, 4.2, dan 4.3 Nilai Akhir diperoleh berdasarkan nilai optimum, sedangkan untuk 4.4 diperoleh berdasarkan rata-rata karena menggunakan proyek dan produk.
2) Nilai akhir semester diperoleh dengan cara merata-ratakan nilai akhir pada setiap KD.
3) Nilai rapor $= \dfrac{92 + 75 + 87 + 78{,}50}{4} = 83{,}13$ (pembulatan)
4) Nilai rapor keterampilan dilengkapi deskripsi singkat kompetensi yang

menonjol berdasarkan pencapaian KD pada KI-4 selama satu semester.

5) Deskripsi nilai keterampilan di atas adalah: *"Memiliki keterampilan menemukan rumus luas daerah bangun datar".*

Dokumen hasil penilaian keterampilan (praktik, produk, proyek) dikumpulkan dalam bentuk portofolio yang merupakan lampiran rapor yang diberikan kepada orangtua/wali dan sebagai informasi awal pendidik di kelas berikutnya. Penilaian keterampilan oleh satuan pendidikan untuk mata pelajaran tertentu dapat dilakukan melalui penilaian akhir semester, penilaian akhir tahun, dan/atau ujian sekolah.

D. Aktivitas Pembelajaran

1. Buatlah kelompok, kemudian diskusikan di dalam kelompok Anda mengenai pengertian-pengertian berikut, kemudian berikan contohnya.

No.	Pengertian	Contoh dalam pembelajaran matematika
1	Skor	
2	Skor Maksimal Ideal	
3	Penilaian Acuan Patokan (PAP)	
4	Penilaian Acuan Normatif (PAN)	
5	Skala Sepuluh	
6	Skala Baku	
7	Skala Seratus	

2. Diskusikan di dalam kelompok Anda mengenai pengolahan hasil penilaian dalam pembelajaran matematika. Kemudian berikan contohnya.

No	Pengolahan Penilaian	Contoh dalam pembelajaran matematika
1	Nilai Sikap Spiritual dan Sosial	
3	Nilai Pengetahuan	
4	Nilai Keterampilan	

3. Diskusikan di dalam kelompok Anda mengenai teknik pengolahan data skor soal tipe objektif dalam pembelajaran matematika. Kemudian lengkapilah tabel berikut.

No	Tipe Soal Objektif	Contoh Pengolahan Data Hasil Penilaian
1	Benar-Salah	
2	Pilihan Ganda dengan 4 Option	
3	Pilihan Ganda dengan 5 Option	
4	Bentuk Soal Memasangkan	

E. Latihan/Kasus/Tugas

1. Jelaskanlah perbedaan antara skor dengan nilai. Berikan contohnya!
2. Buatlah contoh hasil penilaian untuk kompetensi pengetahuan, kemudian lakukan pengolahan data hasil penilaian tersebut, serta interpretasikan hasilnya.
3. Buatlah contoh hasil penilaian untuk kompetensi keterampilan, kemudian lakukan pengolahan data hasil penilaian tersebut, serta interpretasikan hasilnya.
4. Buatlah contoh hasil penilaian untuk soal tipe objektif bentuk Benar-Salah, kemudian lakukan pengolahan data hasil penilaian tersebut, serta interpretasikan hasilnya.
5. Buatlah contoh hasil penilaian untuk soal tipe objektif bentuk Pilihan Ganda dengan 4 option, kemudian lakukan pengolahan data hasil penilaian tersebut, serta interpretasikan hasilnya.
6. Buatlah contoh hasil penilaian untuk soal tipe objektif bentuk Pilihan Ganda dengan 5 option, kemudian lakukan pengolahan data hasil penilaian tersebut, serta interpretasikan hasilnya.
7. Buatlah contoh soal uraian/terbuka dan rubrik penilaiannya mengacu pada analytic scoring scale (NCTM, dalam lampiran III Permendikbud 58/2014, PMP Matematika, hal 384).
8. Apa kelebihan dan kekurangan penilaian menggunakan PAN dan PAP. Jelaskan, berikan contoh kasusnya.

F. Rangkuman

1. Skor adalah bilangan yang merupakan data mentah (*raw data*) dari hasil suatu evaluasi, belum diolah lebih lanjut. Jika skor (data mentah) tersebut diolah lebih lanjut dengan menggunakan aturan dan kriteria tertentu sehingga dapat diinterpretasikan, hasil pengolahan tersebut dinamakan nilai.

   Ada dua jenis pedoman yang bisa digunakan untuk menentukan nilai (mengubah skor menjadi nilai) sebagai hasil evaluasi, yaitu: penilaian Acuan Patokan (PAP) dan Penilaian Acuan Normatif (PAN).
2. Terdapat perbedaan penskoran untuk jenis soal berikut.
   a. Soal B-S adalah dengan rumus Skor = $(J_B - J_S) \times b$, dimana:

      S = Skor

      J_B = Jumlah jawaban yang benar

J_S = Jumlah jawaban yang salah

b = bobot soal

b. Soal bentuk Pilihan Ganda (P-G) adalah dengan rumus:

$$S = (J_B - \frac{J_S}{(n-1)}) \times b$$

dimana n: banyak option yang disediakan pada setiap item (butir soal).

c. Soal bentuk memasangkan dengan rumus:

$$S = (J_B - \frac{J_S}{(n_1-1)(n_2-1)}) \times b$$

dimana n_1 = banyak stem (soal) pada kolom sebelah kiri

n_2 = banyak alternatif jawaban pada kolom sebelah kanan

d. Soal bentuk isian/uraian dengan rumus $S = J_B \times b$

tanpa pengurangan (hukuman) sebab tidak ada pilihan.

G. Umpan Balik dan Tindak Lanjut

Jika Anda dapat memahami sebagian besar materi dan dapat menjawab sebagian besar latihan/tugas, maka Anda dianggap telah menguasai kompetensi yang diharapkan. Namun jika tidak atau Anda merasa masih belum optimal, silakan pelajari kembali dan berdiskusi dengan teman kelompok untuk memantapkan pemahaman dan memperoleh kompetensi yang diharapkan.

KEGIATAN PEMBELAJARAN 3
KETUNTASAN BELAJAR, PELAPORAN, DAN PEMANFAATAN HASIL PENILAIAN

A. Tujuan

Peserta diharapkan dapat:

1. menjelaskan pengertian tentang ketuntasan belajar dan kriteria ketuntasan belajar
2. menjelaskan cara pelaporan hasil penilaian
3. merancang program remedial dan pengayaan
4. mengkomunikasikan hasil penilaian dan evaluasi kepada pemangku kepentingan.

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

Setelah mempelajari modul ini, peserta diharapkan dapat:

1. menjelaskan pengertian tentang ketuntasan belajar
2. menentukan kriteria ketuntasan belajar untuk mata pelajaran
3. menjelaskan cara pelaporan hasil penilaian
4. menggunakan informasi hasil penilaian dan evaluasi untuk menentukan ketuntasan belajar
5. menggunakan informasi hasil penilaian dan evaluasi untuk merancang program remedial dan pengayaan
6. mengomunikasikan hasil penilaian dan evaluasi kepada pemangku kepentingan
7. memanfaatkan informasi hasil penilaian dan evaluasi pembelajaran sebagai bahan penyusunan rancangan pembelajaran yang akan dilakukan selanjutnya.
8. memanfaatkan informasi hasil penilaian dan evaluasi pembelajaran sebagai bahan perbaikan proses belajar
9. memanfaatkan informasi hasil penilaian dan evaluasi pembelajaran sebagai bahan pengayaan proses belajar
10. memanfaatkan informasi penilaian untuk pengembangan penilaian pembelajaran.

C. Uraian Materi

1. Ketuntasan Belajar

Konsep belajar tuntas dilandasi oleh pandangan bahwa semua atau hampir semua siswa akan mampu mempelajari pengetahuan atau keterampilan dengan baik asal diberikan waktu yang sesuai dengan kebutuhannya.

Menurut Bloom (1968) pembelajaran tuntas merupakan satu pendekatan pembelajaran yang difokuskan pada penguasaan siswa dalam sesuatu hal yang dipelajari. Anderson & Block (1975) mengungkapkan bahwa pembelajaran tuntas pada dasarnya merupakan seperangkat gagasan dan tindakan pembelajaran secara individu yang dapat membantu siswa untuk belajar secara konsisten. Asumsi yang digunakan dalam pembelajaran tuntas ini yaitu jika setiap siswa diberikan waktu sesuai dengan yang diperlukan untuk mencapai suatu tingkat penguasaan dan jika siswa tersebut menghabiskan waktu yang diperlukan, maka besar kemungkinan siswa akan mencapai tingkat penguasaan itu.

Ketuntasan belajar adalah tingkat minimal pencapaian kompetensi sikap, pengetahuan, dan keterampilan meliputi ketuntasan penguasaan substansi dan dan ketuntasan belajar dalam konteks kurun waktu belajar.

a. Nilai ketuntasan kompetensi sikap dituangkan dalam bentuk predikat, yakni predikat sangat baik (SB), baik (B), cukup (C), dan kurang (K). Ketuntasan belajar untuk sikap (KD pada KI-1 dan KI-2) ditetapkan dengan predikat baik (B)
b. Nilai ketuntasan kompetensi pengetahuan dan keterampilan dituangkan dalam bentuk angka, yakni 0 – 100 tergantung dari masing-masing kelas dan satuan pendidikannya. Ketuntasan belajar untuk pengetahuan ditetapkan dengan skor rerata dari penilaian kompetensi pengetahuan. Sedangkan ketuntasan belajar dari penilaian kompetensi keterampilan ditetapkan dengan skor rerata optimum dari penilaian kompetensi keterampilan.

2. Pelaporan dan Pemanfaatan Hasil Penilaian

a. Pelaporan Data Hasil Penilaian

Melalui hasil penilaian kita dapat mengetahui kemampuan dan perkembangan siswa, selain itu juga dapat memberi gambaran tingkat keberhasilan pendidikan

pada sekolah yang bersangkutan. Menurut Sudjana (2011) laporan data hasil penilaian bukan hanya mengenai prestasi atau hasil belajar, melainkan juga mengenai kemajuan dan perkembangan belajar siswa di sekolah seperti motivasi belajar, disiplin, kesulitan belajar, atau sikap siswa terhadap mata pelajaran. Oleh sebab itu, guru perlu mencatat perkembangan dan kemajuan belajar siswa secara teratur dan berkelanjutan.

1) Laporan kepada Kepala Sekolah
2) Laporan kepada Wali Kelas
3) Laporan kepada Guru Pembimbing

b. Pemanfaatan Data Hasil Penilaian

1) Manfaat data penilaian hasil belajar formatif (ulangan harian)

   Data hasil penilaian formatif menurut Sudjana (2011) dapat dimanfaatkan guru untuk berbagi kepentingan, yaitu sebagai berikut:

   a) Memperbaiki program pembelajaran atau rencana pelaksanaan pembelajaran (RPP);
   b) Meninjau kembali dan memperbaiki tindakan mengajarnya dalam memilih dan menggunakan metode mengajar;
   c) Mengulang kembali materi pembelajaran yang belum dikuasai para siswa sebelum melanjutkan dengan materi baru; dan
   d) Melakukan diagnosis kesulitan belajar para siswa sehingga dapat ditemukan faktor penyebab kegagalan siswa dalam menguasai tujuan pembelajaran.

2) Manfaat data penilaian hasil belajar sumatif (ulangan akhir semester)

   Tes sumatif dilaksanakan pada akhir suatu satuan program, misalnya pada akhir semester yang bertujuan untuk mengukur tingkat penguasaan hasil belajar siswa. Seperti halnya data hasil penilaian formatif, menurut Sudjana (2011) data hasil penilaian sumatif juga bermanfaat bagi guru untuk keperluan sebagai berikut.

   a) Membuat laporan kemajuan belajar siswa (dalam hal ini menentukan nilai prestasi belajar untuk mengisi rapor siswa) setelah mempertimbangkan pula nilai dari hasil tes formatif;

b) Menata kembali seluruh pokok bahasan dan subpokok bahasan setelah melihat hasil tes sumatif terutama kelompok materi yang belum dikuasainya;
c) Melakukan perbaikan dan penyempurnaan alat penilaian tes sumatif yang telah digunakan berdasarkan hasil-hasil yang telah diperoleh atau dicapai siswa; dan
d) Merancang program belajar bagi siswa pada semester berikutnya.

3) Manfaat data hasil penilaian proses pembelajaran

Data hasil penilaian proses pembelajaran sangat bermanfaat bagi guru, siswa, dan kepala sekolah. Guru dapat mengetahui kemampuan dirinya sebagai pendidik, baik kekurangan maupun kelebihannya. Guru juga dapat mengetahui pendapat dan aspirasi para siswanya dalam berbagai hal yang berkenaan dengan proses pembelajaran.

Implementasi ketuntasan belajar adalah:

a) Lanjut KD berikutnya, jika tuntas
b) Remedial individu, jika belum tuntas
c) Remedial klasikal, jika 75% siswa belum tuntas
d) Kemampuan peserta didik tidak dibandingkan terhadap kelompoknya, tetapi dibandingkan terhadap kriteria yang ditetapkan

3. Kriteria Ketuntasan Minimal (KKM)

a. KKM ditentukan oleh Satuan Pendidikan dengan mempertimbangkan: *karakteristik kompetensi dasar, daya dukung,* dan *karakteristik peserta didik*.
b. KKM *tidak* dicantumkan dalam buku hasil belajar, melainkan pada buku penilaian guru.
c. KKM maksimal 100 %, KKM ideal 75 %. Satuan pendidikan dimungkinkan menentukan KKM di bawah KKM ideal, tetapi secara bertahap perlu meningkatkan KKM-nya hingga mencapai KKM ideal/ maksimal.
d. Peserta didik yang belum mencapai KKM, diberi kesempatan mengikuti program *remedial* sepanjang semester yang diikuti.
e. Peserta didik yang sudah mencapai atau melampaui KKM, diberi program *pengayaan.*

4. Petunjuk Teknis Pengisian Rapor SMP

a. Buku laporan hasil belajar diisi dengan tulisan rapi dan jelas.

b. Nama peserta didik di halaman judul, data satuan pendidikan di lembar 2, serta petunjuk penggunaan di lembar 3 dan 4, ditulis menggunakan huruf kapital secara jelas dan rapi.

c. Lembar 5 diisi dengan data peserta didik dan dilengkapi dengan pas foto terbaru berukuran 3 × 4 cm.

d. Lembar capaian kompetensi semester 1 dan 2 diisi dengan:

   1) Identitas satuan pendidikan dan identitas peserta didik.

   2) Pada kolom pengetahuan dan keterampilan diisi dengan perolehan nilai dari tiap guru mata pelajaran pada kolom pengetahuan dan keterampilan.

Berikut contoh pengisian rapor.

Tabel 4. Contoh Pengisian Capaian Nilai Ekstrakurikuler

Kegiatan Ekstrakurikuler	Nilai	Keterangan
1. Praja Muda Karana (PRAMUKA)	SB	Sangat Baik. Juara I Lomba Tingkat provinsi
2. Usaha Kesehatan Sekolah (UKS)	B	Baik, aktif dalam setiap kegiatan

Lembar catatan deskripsi kompetensi mata pelajaran diisi dengan:

a. Identitas satuan pendidikan dan identitas peserta didik.

b. Catatan deskripsi pengetahuan, keterampilan, sikap spiritual, dan sikap sosial tiap mata pelajaran diperoleh dari guru mata pelajaran.

c. Catatan deskripsi pengetahuan, keterampilan, sikap spiritual, dan sosial tiap mata pelajaran ditulis dengan jelas dan rapi.

Tabel 5. Contoh Pengisian Capaian Nilai Ekstrakurikuler

Kegiatan Ekstrakurikuler	Nilai	Keterangan
1. Praja Muda Karana (PRAMUKA)	SB	Sangat Baik. Juara I Lomba Tingkat provinsi
2. Usaha Kesehatan Sekolah (UKS)	B	Baik, aktif dalam setiap kegiatan

Tabel 6. Deskripsi Pengisian Kompetensi Pada Rapor

No.	Mata Pelajaran	Kompetensi	Catatan
Kelompok A			
1	Pendidikan Agama dan Budi Pekerti	Pengetahuan	Baik, sudah memahami seluruh kompetensi, terutama dalam memahami makna khulafaurrasyidin. Terus berlatih agar lebih baik dalam kompetensi yang lain.
		Keterampilan	Sudah terampil dalam hafalan surat-surat yang ditentukan, namun masih perlu banyak berlatih dalam hafalan QS. Al Baqarah (2):153.
		Sikap Spiritual dan Sosial	Sudah konsisten menunjukkan sikap beriman bertaqwa, jujur, dan perlu peningkatan rasa percaya diri.
Kelompok B			
2	Pendidikan Jasmani, Olahraga dan Kesehatan	Pengetahuan	Sudah memahami semua konsep keterampilan, kecuali konsep gaya hidup sehat untuk mencegah berbagai penyakit. Perlu lebih disiplin dalam memahami konsep gaya hidup sehat.
		Keterampilan	Sudah menguasai permainan dan olah raga, terutama mempraktikkan teknik dasar Dapat diikutsertakan dalam lomba OSN tingkat kota.
		Sikap Spiritual dan Sosial	Sudah menunjukan usaha maksimal dalam setiap aktivitas gerak jasmani, sportif dalam bermain, perlu peningkatan dalam menghargai perbedaan. perlu terus dikembangkan sikap, sportif dalam bermain dan menghargai perbedaan.

5. Pelaporan Hasil Penilaian Pembelajaran dalam Rapor

Hasil penilaian oleh pendidik setiap semester diolah untuk dimasukkan ke dalam buku laporan hasil belajar (rapor). Nilai rapor merupakan gambaran pencapaian kemampuan peserta didik dalam satu semester. Nilai sikap, pengetahuan dan

keterampilan dalam rapor diperoleh dari berbagai jenis penilaian dengan teknik dan perhitungan yang telah ditetapkan.

6. Pembelajaran Remedial dan Pengayaan

Konsekuensi dari pembelajaran tuntas adalah tuntas atau belum tuntas. Bagi peserta didik yang belum mencapai KKM maka dilakukan tindakan remedial dan bagi peserta didik yang sudah mencapai atau melampaui ketuntasan belajar dilakukan pengayaan. Pembelajaran remedial dan pengayaan dilaksanakan untuk kompetensi pengetahuan dan keterampilan, sedangkan sikap tidak ada remedial atau pengayaan namun menumbuhkembangkan sikap, perilaku, dan pembinaan karakter setiap peserta didik.

Berikut bentuk pelaksanaan remedial dan pengayaan:

a. Bentuk Pelaksanaan Remedial
   1) Pemberian pembelajaran ulang dengan metode dan media yang berbeda.
   2) Pemberian bimbingan secara khusus, misalnya bimbingan perorangan.
   3) Pemberian tugas-tugas latihan secara khusus.
   4) Pemanfaatan tutor sebaya.

b. Bentuk Pelaksanaan Pengayaan
   1) Belajar kelompok.
   2) Belajar mandiri.
   3) pembelajaran berbasis tema.

7. Kriteria kenaikan Kelas

Peserta didik dinyatakan naik kelas apabila memenuhi persyaratan sebagai berikut.

a. Menyelesaikan seluruh program pembelajaran dalam dua semester pada tahun pelajaran yang diikuti.
b. Deskripsi sikap sekurang-kurangnya minimal BAIK yaitu memenuhi indikator kompetensi sesuai dengan kriteria yang ditetapkan oleh satuan pendidikan.
c. Deskripsi kegiatan ekstrakurikuler pendidikan kepramukaan minimal BAIK sesuai dengan kriteria yang ditetapkan oleh satuan pendidikan.
d. Tidak memiliki lebih dari 2 (dua) mata pelajaran yang masing-masing nilai pengetahuan dan/atau keterampilan di bawah KKM. Apabila ada mata pelajaran

yang tidak mencapai ketuntasan belajar pada semester ganjil dan/atau semester genap, nilai akhir diambil dari rerata semester ganjil dan genap pada mata pelajaran yang sama pada tahun pelajaran tersebut.

e. Satuan pendidikan dapat menambahkan kriteria lain sesuai dengan kebutuhan masing-masing.

Berikut contoh penentuan kenaikan kelas berdasarkan KKM setiap mata pelajaran.

Contoh 1:

No	Mata Pelajaran	KKM	Semester 1		Semester 2		Rerata		Ket
			Penge-tahuan	Keteram pilan	Penge-tahuan	Keteram-pilan	Penge-tahuan	Keteram-pilan	
Kelompok A									Terdapat 2 mata pelajaran tidak tuntas, sehingga peserta didik tersebut NAIK KELAS
1	Pend. Agama dan Budi Pekerti	75							
2	Pend. Pancasila dan Kewarganegaraan	70							
3	Bahasa Indonesia	70	**60**	62	**60**	70	**60**	66	
4	Matematika	65	**58**	60	60	60	**59**	60	
5	Ilmu Pengetahuan Alam	60							
6	Ilmu Pengetahuan Sosial	65							
7	Bahasa Inggris	60							
Kelompok B									
8	Seni Budaya	70							
9	Pend. Jasmani, Olahraga dan Kesehatan	65	**62**	65	70	65	66	65	
10	Prakarya dan Kewirausahaan	65							

Keterangan:

- Dengan memperhatikan KKM masing-masing mata pelajaran, pada semester 1, terdapat 3 mata pelajaran tidak tuntas yang terdiri atas Bahasa Indonesia, Matematika, dan PJOK.

- Pada semester 2, terdapat 1 mata pelajaran tidak tuntas yaitu Bahasa Indonesia.
- Untuk mengetahui banyaknya ketuntasan yaitu merata-ratakan nilai setiap aspek pada mata pelajaran yang sama. Pada contoh diatas nilai semester 1 pada aspek pengetahuan mata pelajaran PJOK = 62 dan semester 2 aspek pengetahuan = 70, maka reratanya = 66 (tuntas). Semester 1 pada aspek keterampilan = 65 dan semester 2 = 65, maka reratanya = 65 (tuntas).
- Kesimpulan jumlah mata pelajaran yang tidak tuntas adalah 2 yaitu Bahasa Indonesia dan Matematika, maka peserta didik yang bersangkutan NAIK KELAS (dengan syarat deskripsi sikap menunjukkan berperilaku BAIK).

Contoh 2:

No	Mata Pelajaran	KKM	Semester 1		Semester 2		Rerata		Ket
			Penge-tahuan	Keteram-pilan	Penge-tahuan	Keteram-pilan	Pengetahuan	Keteram-pilan	
Kelompok Umum A (Umum)									Terdapat 3 mata pelajaran tidak tuntas, sehingga peserta didik tersebut TIDAK NAIK KELAS
1	Pend. Agama dan Budi Pekerti	75							
2	Pend. Pancasila dan Kewargane-garaan	70							
3	Bahasa Indonesia	70	**60**	62	**60**	70	**60**	66	
4	Matematika	65	**58**	60	60	60	**59**	60	
5	Ilmu Pengetahu-an Alam	60							
6	Ilmu Pengetahu-an Sosial	65							
7	Bahasa Inggris	60							
Kelompok B (Umum)									
8	Seni Budaya	70							
9	Pend. Jasmani, Olahraga dan Kesehatan	65	**62**	**64**	70	**62**	66	**63**	
10	Prakarya dan Kewira-usahaan	65							

Keterangan:

Pada contoh di atas, peserta didik TIDAK NAIK KELAS karena ada 3 mata pelajaran yang tidak tuntas setelah merata-ratakan nilai setiap aspek pada mata pelajaran yang sama.

Berikut contoh penentuan kenaikan kelas berdasarkan KKM yang sama untuk semua mata pelajaran.

Contoh 3:

Kriteria Ketuntasan Minimal = 65

No	Mata Pelajaran	Semester 1		Semester 2		Rerata		Ket
		Penge-tahuan	Keteram-pilan	Penge-tahuan	Keteram-pilan	Penge-tahuan	Keteram-pilan	
Kelompok Umum A (Umum)								Terdapat 3 mata pelajaran tidak tuntas, sehingga peserta didik tersebut TIDAK NAIK KELAS
1	Pend. Agama dan Budi Pekerti							
2	Pend. Pancasila dan Kewargane-garaan							
3	Bahasa Indonesia	**60**	65	**60**	65	**60**	65	
4	Matematika	**58**	65	65	65	**62**	65	
5	Ilmu Pengetahuan Alam							
6	Ilmu Pengetahuan Sosial							
7	Bahasa Inggris							
Kelompok B (Umum)								
8	Seni Budaya							
9	Pend. Jasmani, Olahraga dan Kesehatan	**64**	**63**	70	**65**	67	**64**	
10	Prakarya dan Kewirausa-haan							

Bahan referensi lain yang wajib Anda baca sebagai pedoman dalam melakukan penilaian adalah Permen No. 53 Tahun 2015.

D. Aktivitas Pembelajaran

1. Buatlah kelompok, kemudian diskusikan di dalam kelompok Anda mengenai pengertian-pengertian berikut, kemudian berikan contohnya.

No.	Pengertian	Contoh dalam pembelajaran matematika
1	Kriteria Ketuntasan Minimal (KKM)	
2	Pembelajaran Remedial	
3	Pembelajaran Pengayaan	
4	Kriteria Kenaikan Kelas	
5	Deskripsi Pengisian Kompetensi Pengetahuan, Keterampilan, dan sikap pada Rapor	

2. Diskusikan di dalam kelompok Anda mengenai penentuan kenaikan kelas. Kemudian berikan contoh penentuan kenaikan kelas berdasarkan KKM.
   a. Naik kelas (dua buah contoh). Berikan alasannya!
   b. Tidak naik kelas (dua buah contoh). Berikan alasannya!

E. Latihan/Kasus/Tugas

1. Faktor-faktor apa yang menentukan dalam penetapan kriteria ketuntasan minimal (KKM)? Jelaskan!
2. Jelaskan maksud dari pengayaan dan remedial dalam pembelajaran matematika? Kapan kegiatan tersebut dilakukan?
3. Buatlah dua buah contoh kenaikan kelas berdasarkan KKM (naik kelas). Berikan alasannya!
4. Buatlah dua buah contoh kenaikan kelas berdasarkan KKM (tidak naik kelas)! Berikan alasannya!
5. Data hasil penilaian dapat dimanfaatkan oleh berbagai pihak. Oleh siapa saja data hasil penilaian dimanfaatkan? Coba Anda jelaskan!

F. Rangkuman

Ketuntasan belajar adalah tingkat minimal pencapaian kompetensi sikap, pengetahuan, dan keterampilan meliputi ketuntasan penguasaan substansi dan dan ketuntasan belajar dalam konteks kurun waktu belajar.

Seorang siswa dapat naik kelas jika sudah memenuhi KKM yang telah ditetapkan untuk setiap mata pelajaran untuk aspek pengetahuan dan keterampilan dan berkategori baik untuk aspek sikap serta ditunjang kriteria lain seperti kegiatan ekstrakurikuler dan kehadiran siswa.

G. Umpan Balik dan Tindak Lanjut

Jika Anda dapat memahami sebagian besar materi dan dapat menjawab sebagian besar latihan/tugas, maka Anda dianggap telah menguasai kompetensi yang diharapkan. Namun jika tidak atau Anda merasa masih belum optimal, silakan pelajari kembali dan berdiskusi dengan teman kelompok untuk memantapkan pemahaman dan memperoleh kompetensi yang diharapkan.

KUNCI JAWABAN LATIHAN

Berikut adalah petunjuk penyelesaian soal latihan yang terdapat pada kegiatan Pembelajaran 1, 2 dan 3.

A. Kegiatan Pembelajaran 1.

1. Lihat pada uraian tentang konsep penilaian hasil belajar oleh pendidik!
2. Lihat pada uraian tentang konsep penilaian hasil belajar oleh pendidik!
3. Lihat pada uraian materi tentang fungsi dan tujuan penilaian!
4. Lihat pada uraian materi tentang instrumen penilaian!
5. Lihat pada uraian materi tentang instrumen penilaian!

B. Kegiatan Pembelajaran 2.

1. Lihat pada uraian materi tentang pengertian skor dan nilai!
2. Lihat pemaparan contoh pada pengolahan nilai!
3. Lihat pemaparan contoh pada pengolahan nilai!
4. Lihat pemaparan contoh pada pengolahan nilai!
5. Lihat pada uraian materi tentang teknik dan instrumen penilaian!
6. Lihat pada uraian materi tentang teknik dan instrumen penilaian!
7. Lihat pada uraian materi dan contoh pada penentuan skor!
8. **Kelebihan PAN**: acuan hasil belajar dapat terkontrol, karena nilai yang diperoleh bisa mencerminkan tingkat penguasaan siswa

   Kekurangan PAN:

   a. kondisi siswa peserta tes tidak diperhatikan baik secara individu maupun kelompok
   b. kurang memperhatikan bahwa pada hakekatnya setiap penilaian itu bersifat relatif. Artinya acuan mutlak bagi penilai (guru) yang satu dengan yang lainnya pada umumnya tidak sama, begitu pula jika ditinjau dari butir soalnya
   c. hanya tes yang benar-benar terstandar yang pengolahannya cocok dengan menggunakan sistem PAP

   Kelebihan PAP: kedudukan relatif siswa dalam kelompoknya dapat diketahui, sesuai dengan sifat dari nilai tersebut yang tidak mutlak (relatif)

Kekurangan PAP: tingkat penguasaan siswa terhadap materi tes tidak dapat diketahui, sehingga kualitas hasil belajar siswa tidak dapat terkontrol.

C. Kegiatan Pembelajaran 3.

1. Lihat pada uraian tentang KKM!
2. Lihat pada uraian tentang pengayaan dan remedial!
3. Lihat contoh penentuan kenaikan kelas berdasarkan KKM setiap mata pelajaran!
4. Lihat contoh penentuan kenaikan kelas berdasarkan KKM setiap mata pelajaran!
5. Lihat pada uraian pemanfaatan data hasil penilaian!

EVALUASI

Pilihlah salah satu jawaban di bawah ini yang paling tepat dengan cara memberi tanda silang (X) pada huruf A, B, C, atau D.

1. Berikut ini yang *tidak* termasuk bentuk penilaian non-autentik yaitu ....
   A. Unjuk kerja
   B. Tes
   C. Ulangan
   D. Ujian
2. Pengertian objektif pada prinsip umum penilaian hasil belajar adalah ....
   A. Penilaian didasarkan pada data yang mencerminkan kemampuan yang diukur
   B. Penilaian dapat dipertanggungjawabkan, baik dari segi teknik, prosedur, maupun hasilnya
   C. Penilaian didasarkan pada ketercapaian tujuan
   D. Penilaian didasarkan pada prosedur dan kriteria yang jelas, tidak dipengaruhi subjektivitas penilai
3. Berikut ini yang *bukan* merupakan tujuan penilaian hasil belajar oleh pendidik yaitu ....
   A. Menetapkan ketuntasan penguasaan kompetensi
   B. Menetapkan program perbaikan atau pengayaan berdasarkan tingkat penguasaan kompetensi
   C. Mengetahui tingkat penguasaan sikap
   D. Memperbaiki proses pembelajaran
4. Dari hasil penilaian proses dan hasil belajar matematika, diketahui bahwa semua peserta didik melampaui KKM. Tindakan yang perlu dilakukan oleh seorang guru selanjutnya adalah ....
   A. Mempertahankan metode pembelajaran yang telah digunakan untuk seluruh kegiatan pembelajaran selanjutnya
   B. Mendeteksi faktor utama penyebab keberhasilan pembelajaran yang dapat dioptimalkan untuk mendukung kegiatan pengayaan

C. Merevisi penilaian proses belajar matematika yang menyebabkan peserta didik mudah melampaui KKM
D. Memberikan pilihan kepada peserta didik untuk mengikuti atau tidak mengikuti kegiatan pengayaan

5. Agar dapat mengetahui bagaimana peningkatan hasil belajar di sekolah, maka harus dilaporkan data hasil penilaian kepada semua pihak di bawah ini, *kecuali...*
   A. Kepala sekolah
   B. Wali kelas
   C. Masyarakat sekitar sekolah
   D. Komite sekolah
6. Bentuk-bentuk pelaksanaan remedial antara lain adalah ...
   A. Pemberian pembelajaran ulang dengan metode dan media yang berbeda
   B. Belajar kelompok
   C. Belajar mandiri
   D. Pembelajaran berbasis tema
7. Hasil ulangan akhir semester mata pelajaran matematika di kelas VIIID yang terdiri dari 40 siswa, diperoleh hasil sebagi berikut: sebanyak 24 orang memperoleh nilai 70 ke atas, sebanyak 10 orang memperoleh nilai antara 50 sampai dengan 70, yang lain memperoleh nilai 50 ke bawah. Jika nilai KKM matematika adalah 70, maka persentase siswa yang belum lulus adalah …
   A. 40%
   B. 60%
   C. 15%
   D. 25%
8. Instrumen penilaian yang paling tepat digunakan untuk menilai keterampilan siswa dalam memecahkan masalah secara tertulis pada topik perbandingan di Kelas VII SMP adalah...
   A. Lembar penilaian diri dengan lembar pengamatan
   B. Daftar pertanyaan untuk wawancara dan lembar pengamatan
   C. Soal uraian tentang perbandingan dan lembar penilaian diri
   D. Soal uraian tentang perbandingan dan daftar pertanyaan untuk wawancara

9. Dari hasil penilaian dan evaluasi proses pembelajaran matematika diperoleh data bahwa siswa kelas VII SMP yang belum tuntas sebanyak 5%, maka program remedial yang sesuai adalah ....
   A. Memberikan tugas-tugas matematika yang dikerjakan secara berkelompok pada siswa yang belum tuntas
   B. Memberikan pembelajaran ulang matematika secara klasikal dengan metode dan media yang berbeda bagi siswa yang belum tuntas
   C. Memberikan tugas matematika secara perorangan yang dikerjakan secara mandiri di rumah bagi siswa yang belum tuntas
   D. Memberikan bimbingan matematika perorangan secara khusus untuk siswa yang belum tuntas
10. Siswa kelas VIII belajar tentang; "Menghitung Keliling dan Luas Lingkaran". Siswa melakukan kegiatan: 1) menemukan rumus keliling dan luas lingkaran, 2) menghitung keliling dan luas lingkaran.

    Kemampuan siswa setelah mengikuti proses belajar tersebut yang tidak penting dinilai adalah ....
   A. Menuliskan rumus keliling dan luas lingkaran
   B. Menjelaskan teknis bekerja dalam menghitung keliling dan luas lingkaran
   C. Menjelaskan makna dari rumus keliling dan luas lingkaran
   D. Menentukan keliling dan luas lingkaran menggunakan rumus yang telah ditemukan

PENUTUP

Penilaian hasil belajar oleh pendidik memiliki peran yang sangat penting dalam meningkatkan mutu pembelajaran. Melalui penilaian ini guru dapat memantau kemajuan belajar, hasil belajar, dan mendeteksi kebutuhan perbaikan hasil belajar peserta didik secara berkesinambungan. Melalui penilaian ini juga guru dapat mengetahui tingkat penguasaan kompetensi, menetapkan ketuntasan penguasaan kompetensi, menetapkan program perbaikan atau pengayaan berdasarkan tingkat penguasaan kompetensi, serta memperbaiki proses pembelajaran.

Setelah mempelajari modul ini diharapkan para peserta dapat melaksanakan penilaian dan menyusun laporan pencapaian kompetensi peserta didik meliputi kompetensi sikap, pengetahuan, dan keterampilan. Modul ini tidak lepas dari kekurangan dan kekeliruan. Oleh karena itu, saran dan kritik yang konstruktif untuk perbaikan modul dan pemanfaatannya, senantiasa diharapkan.

Akhirnya, jika ditemukan ada kekeliruan dalam modul atau saran konstruktif untuk perbaikan, silakan disampaikan langsung ke PPPPTK Matematika, Jl. Kaliurang Km. 6, Sambisari, Depok, Sleman, DIY, (0274) 881717, atau melalui email sekretariat@p4tkmatematika.org atau ke penulis nanang_priatna@yahoo.com atau langsung melalui email penulis.

DAFTAR PUSTAKA

Direktorat Jenderal Pendidikan Dasar dan Menengah Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan (2015). *Panduan Penilaian untuk Sekolah Menengah Pertama*.

Maryono, I. (2015). *Penilaian dalam Pembelajaran Matematika di Sekolah* (Makalah). Bandung: Sekolah Pascasarjana UPI.

National Research Council (NRC). (2001). *Knowing what Students KnowThe Science and Design of Educational Assessment*. Washington, DC: National Academy Press.

Peraturan Menteri Pendidikan dan Kebudayaan Republik Indonesia Nomor 58 Tahun 2014 tentang *Kurikulum 2013 Sekolah Menengah Pertama/Madrasah Tsanawiyah* Lampiran III Tentang Pedoman Mata Pelajaran Matematika.

Peraturan Menteri Pendidikan dan Kebudayaan Republik Indonesia Nomor 54 Tahun 2013 tentang *Standar Kompetensi Lulusan Pendidikan Dasar dan Menengah*.

Peraturan Menteri Pendidikan dan Kebudayaan Republik Indonesia Nomor 64 Tahun 2013 tentang *Standar Isi Pendidikan Dasar dan Menengah*.

Peraturan Menteri Pendidikan dan Kebudayaan Republik Indonesia Nomor 53 Tahun 2015 tentang *Penilaian Hasil Belajar oleh Pendidik dan Satuan Pendidikan pada Pendidikan dasar dan Menengah*.

Peraturan Menteri Pendidikan dan Kebudayaan Republik Indonesia Nomor 81A Tahun 2013 tentang Implementasi Kurikulum 2013.

Peraturan Pemerintah Republik Indonesia Nomor 19 Tahun 2005 tentang Standar Nasional Pendidikan sebagaimana telah beberapa kali diubah terakhir Peraturan Pemerintah Republik Indonesia Nomor 13 Tahun 2015 tentang *Perubahan Kedua tentang Standar Nasional Pendidikan*.

Sudjana, N. (2011). *Penilaian Hasil Proses Belajar Mengajar.* Bandung: PT Remaja Rosdakarya.

Suharsimi, A. (2006). *Dasar-dasar Evaluasi Pendidikan*. Jakarta: Bina Aksara.

Suherman, E. (2003). *Evaluasi Pembelajaran Matematika*. Bandung: FPMIPA UPI.

Zetrulista (2015). *Ketuntasan Belajar dan Pelaporan Penilaian Proses dan Hasil Belajar Matematika* (Makalah). Bandung: Sekolah ascasarjana UPI.

GLOSARIUM

Evaluasi	:	proses mengambil keputusan berdasarkan hasil-hasil penilaian.
Ketuntasan belajar	:	tingkat minimal pencapaian kompetensi sikap, pengetahuan, dan keterampilan meliputi ketuntasan penguasaan substansi dan dan ketuntasan belajar dalam konteks kurun waktu belajar
Pembelajaran tuntas	:	suatu pendekatan pembelajaran untuk memastikan bahwa semua siswa menguasai hasil pembelajaran yang diharapkan dalam suatu unit pembelajaran sebelum berpindah ke unit pembelajaran berikutnya
Pengukuran	:	kegiatan membandingkan hasil pengamatan dengan suatu kriteria atau ukuran
Penilaian	:	proses mengumpulkan informasi/bukti melalui pengukuran, menafsirkan, mendeskripsikan, dan menginterpretasi bukti-bukti hasil pengukuran
Skor	:	bilangan yang merupakan data mentah (*raw data*) dari hasil suatu evaluasi

KUNCI JAWABAN EVALUASI

1. A
2. D
3. C
4. B
5. C
6. C
7. A
8. C
9. D
10. B

GURU PEMBELAJAR

MODUL MATEMATIKA SMP

KELOMPOK KOMPETENSI G

PROFESIONAL

GEOMETRI 2

DIREKTORAT JENDERAL GURU DAN TENAGA KEPENDIDIKAN
KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
2016

Penulis:

AL Krismanto, M.Sc
081328011398, kristemulawak@yahoo.co.id

Drs. Murdanu, M.Pd
danubengkel@yahoo.co.id

Penelaah*:*

Dr. Abdurrahman As'ari, M.Pd., M.A.
081 334 452 615, abdur.rahman.fmipa@um.ac.id

Dr. Sumardyono, M.Pd
081328516171, matematikasejak2014@gmail.com

Ilustrator*:*

R. Haryo Jagad P

Copyright © 2016

Direktorat Jenderal Guru dan Tenaga Kependidikan

Hak Cipta Dilindungi Indang-Undang

Kata Pengantar

Peningkatan kualitas pendidikan saat ini menjadi prioritas, baik oleh pemerintah pusat maupun daerah. Salah satu komponen yang menjadi fokus perhatian adalah peningkatan kompetensi guru. Peran guru dalam pembelajaran di kelas merupakan kunci keberhasilan untuk mendukung keberhasilan belajar siswa. Guru yang profesional dituntut mampu membangun proses pembelajaran yang baik sehingga dapat menghasilkan *output* dan *outcome* pendidikan yang berkualitas.

Dalam rangka memetakan kompetensi guru, telah dilaksanakan Uji Kompetensi Guru (UKG) Tahun 2015. UKG tersebut dilaksanakan bagi semua guru, baik yang sudah bersertifikat maupun belum bersertifikat untuk memperoleh gambaran objektif kompetensi guru, baik profesional maupun pedagogik. Hasil UKG kemudian ditindaklanjuti melalui Program Guru Pembelajar sehingga diharapkan kompetensi guru yang masih belum optimal dapat ditingkatkan.

PPPPTK Matematika sebagai Unit Pelaksana Teknis Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan di bawah pembinaan Direktorat Jenderal Guru dan Tenaga Kependidikan mendapat tugas untuk menyusun modul guna mendukung pelaksanaan Guru Pembelajar. Modul ini diharapkan dapat menjadi sumber belajar bagi guru dalam meningkatkan kompetensinya sehingga mampu mengambil tanggung jawab profesi dengan sebaik-baiknya.

Yogyakarta, Maret 2016

Kepala PPPPTK Matematika,

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
PUSAT PENGEMBANGAN DAN PEMBERDAYAAN PENDIDIK DAN TENAGA KEPENDIDIKAN MATEMATIKA

Dr. Dra. Daswatia Astuty, M.Pd.

NIP. 196002241985032001

DAFTAR ISI

Kata Pengantar iii
DAFTAR ISI v
DAFTAR GAMBAR vii
PENDAHULUAN 1
A. Latar Belakang 1
B. Tujuan 2
C. Peta Kompetensi 2
D. Ruang Lingkup 2
E. Saran Cara Penggunaan Modul 3
KEGIATAN PEMBELAJARAN 1 TRANSFORMASI GEOMETRI 5
A. Tujuan 5
B. Indikator Pencapaian Kompetensi 5
C. Uraian Materi 5
1. Pengertian Transformasi 5
2. Pergeseran (Translasi) 6
3. Perputaran (Rotasi) 10
4. Pencerminan (Refleksi) 15
5. Dilatasi 19
D. Aktivitas Pembelajaran 22
E. Latihan/Kasus/Tugas 24
F. Rangkuman 25
G. Umpan Balik dan Tindak Lanjut 26
KEGIATAN PEMBELAJARAN 2 PENGENALAN TRIGONOMETRI 27
A. Tujuan 27
B. Indikator Pencapaian Kompetensi 27
C. Uraian Materi 27
1. Pengantar 27
2. Perbandingan Trigonometri 28
D. Aktivitas Pembelajaran 33
E. Latihan/Kasus/Tugas 33

F. Rangkuman 34
G. Umpan Balik dan Tindak Lanjut 35
KEGIATAN PEMBELAJARAN 3 BANGUN RUANG SISI DATAR.....37
A. Tujuan 37
B. Indikator Pencapaian Kompetensi.....37
C. Uraian Materi 37
1. Bangun Ruang Sisi Datar.....37
2. Diagonal-diagonal dalam Kubus da Balok.....53
3. Luas Permukaan Bangun Ruang Bidang Sisi Datar 60
4. Volume Bangun Ruang Bidang sisi Datar 64
D. Aktifitas Pembelajaran 67
E. Latihan/Kasus/Tugas 68
F. Ringkasan 69
G. Umpan Balik/Tindak Lanjut 70
KEGIATAN PEMBELAJARAN 4 72
BANGUN RUANG SISI LENGKUNG 72
A. Tujuan 72
B. Indikator Pencapaian Kompetensi.....72
C. Uraian Materi 72
1. Konsep Bangun Ruang Sisi Lengkung.....72
2. Luas Permukaan Bangun Ruang Bidang sisi Lengkung.....80
3. Volume Bangun Ruang Bidang sisi Lengkung 86
D. Aktifitas Pembelajaran 88
E. Latihan/Kasus/Tugas 88
F. Ringkasan 89
G. Umpan Balik/Tindak Lanjut 90
KUNCI JAWABAN LATIHAN.....92
EVALUASI 96
PENUTUP.....101
DAFTAR PUSTAKA 103
GLOSARIUM 105

DAFTAR GAMBAR

Gambar 1 Contoh transformasi di alam 5
Gambar 2 Translasi 7
Gambar 3 Translasi 7
Gambar 4. Translasi A ke A' 8
Gambar 5. Translasi jajargenjang 8
Gambar 6. Translasi berurutan.....9
Gambar 7. Contoh terapan translasi.....10
Gambar 8. Rotasi 11
Gambar 9. Rotasi 2 kali berurutan 11
Gambar 10. Rotasi dan simetri putar 12
Gambar 11. Bangun-bangun datar yang memiliki simetri putar 12
Gambar 12. Rotasi pada koordinat.....13
Gambar 13. Pencerminan.....15
Gambar 14. Pencerminan dua kali dengan sumbu sejajar 16
Gambar 15. Pencerminan dua kali dengan sumbu berpotongan 16
Gambar 16. Contoh simetri di alam.....17
Gambar 17. Sumbu simetri pada polygon beraturan 18
Gambar 18. Pencerminan di bidang koordinat.....18
Gambar 19. Dilatasi 20
Gambar 20. Pantograp 20
Gambar 21. Dilatasi bangun ABCD 21
Gambar 22. Tanjakan dan skala perbandingan 28
Gambar 23. Perbandingan pada lingkaran 28
Gambar 24. Perbandingan segitiga pada peta geografi.....29
Gambar 25. Perbandingan pada Sudut α 29
Gambar 26. Perbandingan trigonometri 30
Gambar 27. Tabel trigonometri 32
Gambar 28. Tombol perbandingan trigonometri pada Kalkulator 32
Gambar 29. Bidang-banyak-bidang-banyak Beraturan 38
Gambar 30. Kubus dan Kerangka Kubus.....39
Gambar 31. Kubus ABCD EFGH 40
Gambar 32. Visualisasi dari Definisi Prisma 43
Gambar 33. Visualisasi Empat Jenis Prisma.....44
Gambar 34. Prisma-tegak Segitiga ABC.DEF dan Prisma-condong Segitiga KLM.PQR 44
Gambar 35. Paralelepedum ABCD EFGH.....46
Gambar 36. Rhoemboeder ABCD EFGH 47
Gambar 37. Balok ABCD EFGH 48
Gambar 38. Visualisasi Definisi Limas 49

Gambar 39. Contoh-contoh Limas 49
Gambar 40. Visualisasi Tinggi Limas Segitiga A.BCD 51
Gambar 41. Dua Limas Beraturan dan Aphotemanya 52
Gambar 42. Contoh Diagonal sisi dalam Kubus ABCD.EFGH 53
Gambar 43. Contoh Bidang diagonal dalam Kubus ABCD EFGH 55
Gambar 44. Keempat Diagonal ruang dalam Kubus ABCD.EFGH 56
Gambar 45. Balok ABCD.EFGH dengan Empat Diagonal sisi 57
Gambar 46. Contoh Bidang diagonal dalam Balok ABCD.EFGH.....58
Gambar 47. Keempat Diagonal ruang dalam Balok ABCD.EFGH 59
Gambar 48. Empat Macam Jaring-jaring Kubus Pertama 60
Gambar 49 . Penyusunan Jaring-jaring Balok 61
Gambar 50.....62
Gambar 51. Jaring-jaring Limas Segitiga Samasisi dan Limas Persegi 64
Gambar 52. Visualisasi Volume Kubus ABCD.EFGH 64
Gambar 53. Visualisasi perhitungan volume prisma-tegak-segitiga.....65
Gambar 54. Kubus dan Keempat Diagonal ruang sebagai Pendekatan Pengukuran Volume Limas 66
Gambar 55. Visualisasi Definisi Tabung/Silinder.....72
Gambar 56. Contoh-contoh Tabung/Silinder 74
Gambar 57. Tabung-tegak dan Tabung-condong 74
Gambar 58. Visualisasi Definisi Kerucut 74
Gambar 59. Visualisasi Selimut dan Bidang alas Kerucut 75
Gambar 60. Visualisasi Penentuan Jenis Kerucut 76
Gambar 61. Bola dan Objek-objek Geometri yang Berkaitan 77
Gambar 62. Tiga Kemungkinan suatu Bidang Memotong suatu Bola 79
Gambar 63. Juring-dalam-bola 80
Gambar 64. Jaring-jaring Tabung-tegak.....81
Gambar 65. Kerucut dan Jaring-jaringnya 82
Gambar 66. Bola dalam Tabung.....84
Gambar 67.....84
Gambar 68. Sketsa Perhitungan Volume Bola 87

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Geometri ruang merupakan salah satu pokok bahasan geometri dalam pelajaran matematika. Geometri ruang harus diajarkan kepada siswa SMP/MTs, untuk membekali siswa melanjutkan pendidikannya atau memanfaatkannya dalam kehidupan.

Materi geometri ruang yang diberikan kepada siswa SMP/MTs merupakan kelanjutan materi geometri ruang yang telah dipelajari di jenjang SD/MI. Ketika pada jenjang SD/MI siswa mengenal bentuk-bentuk geometri ruang (bangun-bangun ruang), yaitu kubus, balok, prisma, tabung, limas, kerucut, dan bola. Pada jenjang SMP/MTs siswa mempelajari lebih dalam tentang kubus, balok, prisma, tabung, limas, kerucut, dan bola. Siswa perlu menelusuri detailnya bentuk-bentuk geometri ruang yang telah dikenal sebelumnya. Dalam hal ini siswa menulusuri asal-usulnya, bagian-bagiannya, sifat-sifatnya, dan keragaman yang bisa terjadi.

Kenyataan di lapangan geometri ruang di SMP/MTs sering menimbulkan permasalahan dalam pembelajarannya. Permasalahan tersebut berdampak pada kesulitan baik bagi siswa maupun bagi guru. Permasalahan tersebut berawal dari sumber pustaka yang dipilih guru, dan guru pun kurang bersedia mengembangkan isi pustaka yang dipilih. Pada umumnya guru kurang bersedia menggunakan alat peraga yang harus digunakannya dalam pembelajaran geometri. Alat peraga geometri harus dimanipulasi bersama antara guru dan siswa, sehingga kedetailan bentuk-bentuk geometri yang dimengerti guru sama dengan yang dimengerti siswa.

Selain geometri ruang, materi transformasi geometri dan pengantar trigonometri (didasarkan pada konsep geometri) perlu mendapat perhatian. Oleh karena itu, kedua bagian itu termasuk kedalam modul geometri 2 ini. Transformasi geometri mula dikenalkan di SMP sebelum siswa mendapatkannya dalam konteks aljabar (dengan menggunakan matriks), sementara materi pengantar Trigonometri merupakan materi awal sebelum siswa mengenal fungsi trigonometri dan sifat-sifatnya di SMA.

B. Tujuan

Modul ini disusun untuk memberikan pengetahuan dan keterampilan peserta, agar berkompeten untuk membelajarkan materi transformasi geometris, pengenalan trigonometri, dan geometri ruang bagi siswa-siswa SMP/MTs.

C. Peta Kompetensi

1. Menjelaskan jenis dan sifat transformasi dasar pada bidang datar.
2. Menerapkan prinsip-prinsip transformasi (dilatasi, translasi, pencerminanan, rotasi) dalam menyelesaikan permasalahan nyata.
3. Memahami nilai perbandingan yang tetap yang menyangkut sudut tertentu
4. Menjelaskan pengertian perbandingan trigonometri sudut yang lancip.
5. Menggunakan konsep perbandingan trigonometri untuk menyelesaikan masalah.
6. Menjelaskan konsep bangun ruang bidang sisi datar dan bangun ruang bidang sisi lengkung.
7. Menjelaskan pengukuran luas permukaan dan volume bangun ruang bidang sisi datar dan bangun ruang bidang sisi lengkung.
8. Menyelesaikan masalah-masalah yang berkaitan dengan bangun-bangun ruang.

D. Ruang Lingkup

Modul Geometri 2 ini mengemas bahasan beberapa topik geometri yang dibelajarkan bagi siswa SMP ke dalam 5 bagian yang disajikan dalam 5 kegiatan pembelajaran. Kelima kegiatan pembelajaran tersebut, yaitu:

1. Kegiatan Pembelajaran 2: Transformasi Geometris
2. Kegiatan Pembelajaran 3: Pengenalan Trigonometri
3. Kegiatan Pembelajaran 4: Bangun Ruang Sisi Datar
4. Kegiatan Pembelajaran 5: Bangun Ruang Sisi Lengkung

Pada setiap Kegiatan Pembelajaran diberikan usulan aktifitas pembelajaran dan diberikan tantangan sebagai Latihan/Kasus/Tugas yang harus Anda kerjakan. Tantangan tersebut sebagai salah satu bahan refleksi tentang pemahaman Anda terhadap uraian materi.

E. Saran Cara Penggunaan Modul

Dalam memanfaatkan modul ini sebaiknya Anda memahami setiap kalimat yang disajikan dalam uraian materi dengan cermat. Beberapa istilah yang diberikan mungkin merupakan istilah baru bagi Anda, atau istilah lama bagi Anda. Beberapa istilah diungkapkan dengan tegas dan Anda diharapkan memahami penjelasannya. Oleh karena itu untuk menguatkan kemampuan keruangan Anda, dalam bagian Aktifitas Pembelajaran Anda disarankan untuk mempertimbangkan model (alat peraga) bangun ruang yang terkait.

Teori-teori dalam modul geometri ini telah diusahakan sesuai dengan kaidah yang benar dalam matematika dan berlaku secara universal/internasional dalam istilah berbahasa Indonesia. Kesulitan memahaminya mungkin terjadi dalam diri Anda, bila perlu Anda dapat membacanya berulang-ulang dengan disertai mengerti maksudnya. Bahan Latihan/Kasus/Tugas hendaknya dikerjakan sebagai salah satu cara penilaian tingkat kompetensi Anda diklat. Jika isi materi dan latihan bagi Anda belum mencukupi, Anda dapat merujuk pada sumber pustaka yang digunakan dalam penyusunan modul ini. Kunci jawaban latihan yang diberikan hanya sekedar petunjuk penemuan jawaban, dan sebaiknya Anda mampu menguraikan penyelesaian persolan yang diberikan.

KEGIATAN PEMBELAJARAN 1

TRANSFORMASI GEOMETRI

A. Tujuan

Setelah mempelajari modul ini Anda diharapkan memahami konsep transformasi geometris yang berkaitan dengan simetri dan transformasi yang mencakup refleksi (pencerminan), translasi (pergeseran), rotasi (perputaran), dan dilatasi (perkalian; perkalian bangun) dan menerapkan prinsip-prinsip transformasi dalam memecahkan permasalahan nyata

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

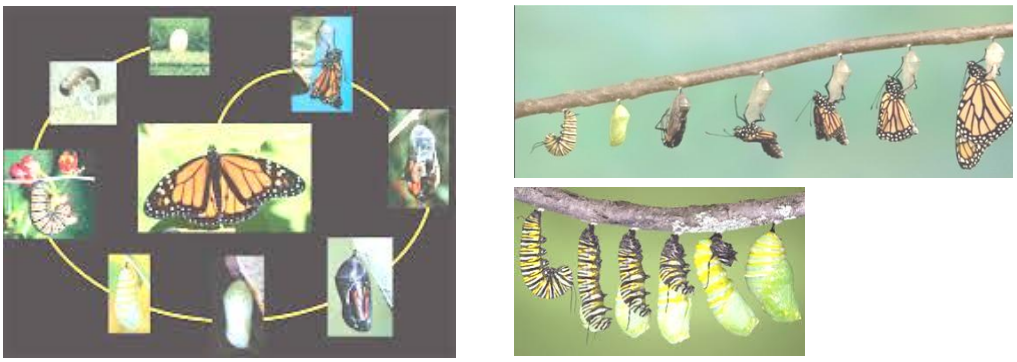
Setelah membaca dan mengikuti serangkaian kegiatan pada bagian ini, pembaca diharapkan mampu

1. menjelaskan jenis dan sifat transformasi bidang
2. menjelaskan dan menentukan simetri kaitannya dengan transformasi
3. menerapkan prinsip-prinsip transformasi (dilatasi, translasi, pencerminan, rotasi) dalam menyelesaikan permasalahan nyata.

C. Uraian Materi

1. Pengertian Transformasi

Menurut Kamus Besar Bahasa Indonesia salah satu arti transformasi adalah perubahan rupa (bentuk, sifat, fungsi, dan sebagainya). Dalam biologi transformasi dapat berupa metamorphosis, misalnya siklus perubahan bentuk dan penampilan dari telur ke kupu-kupu.



Gambar 1 Contoh transformasi di alam

Dalam matematika, misalnya *The Concise Oxford Dictionary of Mathematics* menuliskan "*Let S be the set of points in the plane. A transformation of the plane is a *one-to-one mapping from S to S*". Transformasi bidang adalah suatu pemetaan satu-satu pada sebuah bidang. Khususnya dalam geometri datar transformasinya berupa pergeseran, perputaran, pencerminan, perkalian bangun dan beberapa jenis perubahan lainnya yang tidak dibahas di sini.

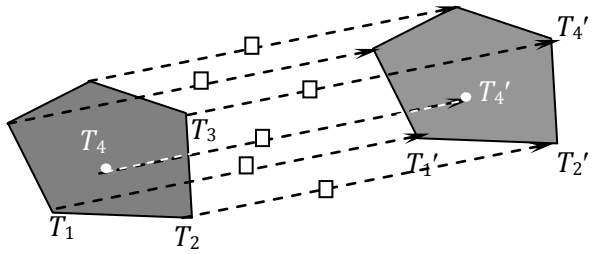
Ketika kereta api melintasi jembatan lurus, setiap bagian bahkan setiap titik yang ada di kereta api berpindah dengan jarak dan arah yang sama, pemindahan itu berpindah dengan arah dan jarak tertentu. Ini merupakan suatu jenis transformasi yang disebut translasi atau pergeseran.

Selain "perubahan letak" ke arah lurus, ada yang dikenal sebagai rotasi (perputaran), misalnya berputarnya baling-baling pada pesawat terbang yang berputar pada porosnya (pusat rotasi), setiap bagian baling-baling berputar ke arah sama dan setiap kali menempuh sudut putar yang sama besar. Demikian pula pada saat kita bercermin (dengan cermin datar), maka akan selalu ditemukan bahwa setiap bagian (titik) pada bayangan atau bangun hasil dan bagian (titik) asalnya berkorespondensi satu-satu. Artinya, bayangan suatu titik hanya berasal dari sebuah titik tertentu, demikian pula sebuah titik tertentu menghasilkan hanya sebuah titik tertentu sebagai bayangannya. Pemetaan bijektif demikian merupakan transformasi yang disebut pencerminan (refleksi). Disamping itu ketika seseorang memperbesar atau memperkecil foto, maka di situlah terjadi transformasi yang dikenal dengan dilatasi.

2. Pergeseran (Translasi)

a. Pengertian Tranlasi

Pergeseran atau translasi terjadi jika setiap titik pada bidang datar "berpindah" dengan jarak dan arah tertentu. Dengan demikian setiap bangun yang terletak pada bidang itu juga digeser dengan jarak dan arah tertentu.



Gambar 2 Translasi

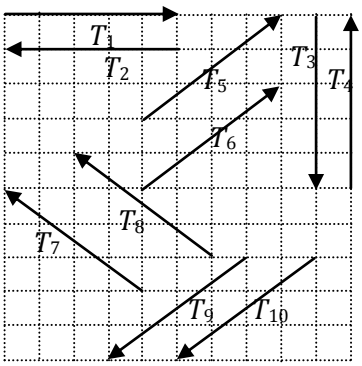
Dapat dikatakan pula bahwa translasi adalah pemetaan satu-satu pada sebuah bidang dengan sifat bahwa untuk setiap titik T pada bidang tersebut jarak dan arah dari titik asal T ke titik hasilnya, T' sama.

Pada Gambar 2: $\overline{T_1T_1}' \parallel \overline{T_2T_2}' \parallel \overline{T_3T_3}' \parallel \overline{T_4T_4}'$ ...

dan $T_1\,T_1' = T_2\,T_2' = T_3\,T_3' = T_4\,T_4' = \ldots$

Translasi adalah transformasi isometri. Dalam translasi bangun hasil kongruen dengan bangun asal. Semua garis yang sejajar dengan arah translasi invarian terhadap translasi.

b. Translasi dalam bidang koordinat

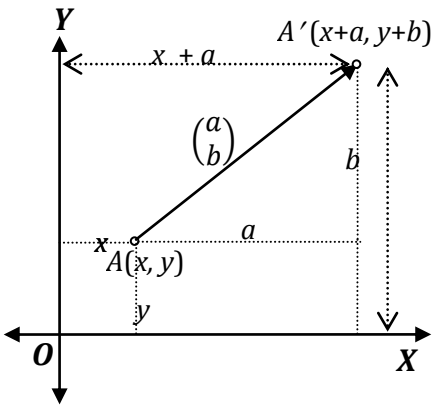


Gambar 3 Translasi

Gambar 3 menunjukkan T_1, T_2, T_3, ... T_{10}, ruas-ruas garis berarah yang mewakili atau menggambarkan **G**eseran atau translasi yang sama besarnya yaitu 5 satuan, dengan arah yang tidak semuanya sama.

Jika sebuah titik $A(x, y)$ ditranslasikan dengan $G = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, maka titik hasilnya adalah titik $A'(x + a, y + b)$

Atau dilambangkan dengan $A(x, y) \xrightarrow{G=\binom{a}{b}} A'(x + a, y + b)$ Lihat Gambar 4.

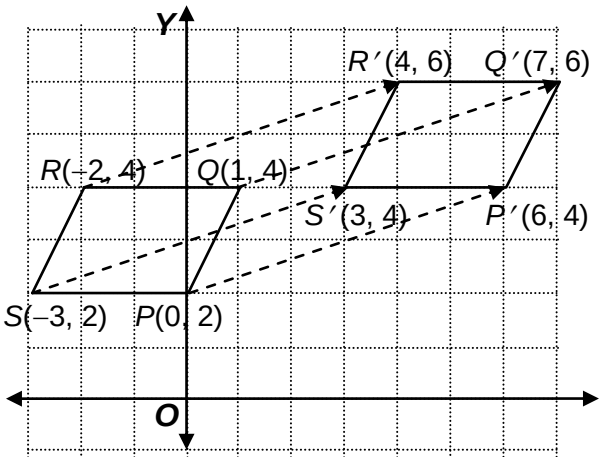


Gambar 4. Translasi A ke A'

.

Contoh:

Jajar genjang $PQRS$ dengan $P(0, 2)$, $Q(1, 4)$, $R(-2, 4)$, dan $S(3, 2)$ ditranslasikan dengan $G = \binom{6}{2}$. Hasilnya ialah jajar genjang dengan $P'(6, 4)$, $Q'(7, 6)$, $R'(4, 6)$ dan $S'(3, 4)$. Dapat dilihat bahwa:



Gambar 5. Translasi jajargenjang

Titik hasil $(6, 4)$ dari $(0 \mathbf{+ 6}, 2 \mathbf{+ 2})$

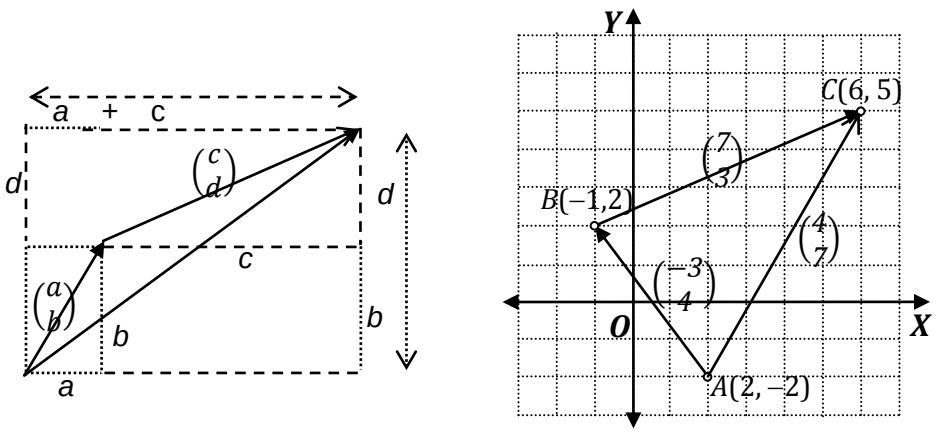
$(7, 6)$ dari $(1 \mathbf{+ 6}, 4 \mathbf{+ 2})$

$(4, 6)$ dari $(-2 \mathbf{+ 6}, 4 \mathbf{+ 2})$

$(3, 4)$. dari $(3 \mathbf{+ 6}, 2 \mathbf{+ 2})$

c. Dua Translasi Berurutan

Dua translasi yang berurutan $G_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ dilanjutkan dengan $G_2 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$, maka komposisi kedua translasi dapat diwakili oleh sebuah translasi baru $G = \begin{pmatrix} a + c \\ b + d \end{pmatrix}$



Gambar 6. Translasi berurutan

Contoh.

Diketahui translasi $G_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ dan translasi $G_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$. Translasi G_1 dilanjutkan dengan G_2 dilambangkan dengan G_2 o G_1.

$$G_2 \text{ o } G_1 = \begin{pmatrix} -3 + 7 \\ 4 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Hasil translasi titik $A(2, -2)$ oleh $G = G_2$ o G_1 dapat diperoleh dari $(G_2 \text{ o } G_1)(A)$ atau $G(A)$.

$(G_2 \text{ o } G_1)(A) = (G_2\ (G_1\ (A)) = G_2\ (2 + (-3), -2 + 4)$

$= G_2\ (-1\ , 2)$ …….. $= G_2\ (B)$

$= (-1 + 7\ , 2 + 3)$

$= (6, 5)$ ……..titik C

Atau secara langsung:

$G(A) = (2 + 4, -2 + 7)$

$= (6, 5)$

d. Translasi dalam kehidupan sehari-hari

Penerbangan dengan pesawat penumpang dalam cuaca bagus sepanjang kecepatan yang stabil merupakan salah satu contoh translasi dari semua titik dalam pesawat tersebut. Translasi juga banyak dijumpai antara lain dalam karya budaya Indonesia, misalnya batik dan ukir-ukiran. Banyak bangun-bangun pembentuk kain batik dan ukiran diperoleh secara translasi.

Contoh:

Gambar 7. Contoh terapan translasi

3. Perputaran (Rotasi)

a. Pengertian Rotasi

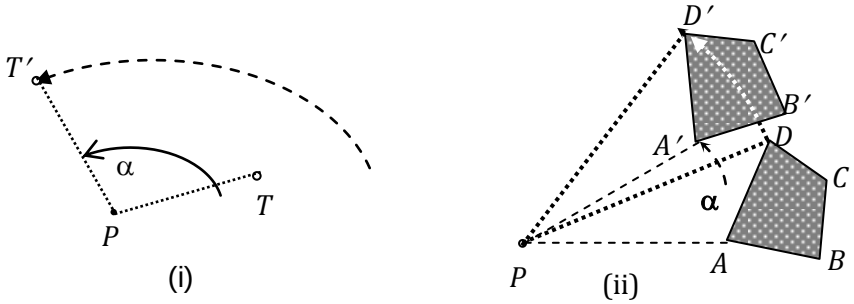
Rotasi atau perputaran pada sebuah bidang datar ditentukan oleh

- titik pusat rotasi;
- arah rotasi
- besar sudut rotasi;

Arah putaran searah dengan arah putar jarum jam disepakati sebagai arah negatif, sedangkan yang berlawanan dengan arah putar jarum jam adalah arah putar positif.

Rotasi sebesar α terhadap titik P adalah pemetaan yang memetakan titik T pada sebuah bidang dengan titik T' pada bidang tersebut, sehingga untuk setiap titik T dan titik hasil atau bayangannya (T') berlaku $m\angle TPT' = \alpha$.

Gambar 8(i) menunjukkan putaran satu titik T berpusat di titik P sebesar α. $PT' = PT$. Gambar 8(ii) menunjukkan putaran sebuah bangun datar berpusat di titik P sebesar α. $PA' = PA$ dan $PB' = PB$; $m\angle APA' = m\angle DPD' = \alpha$.

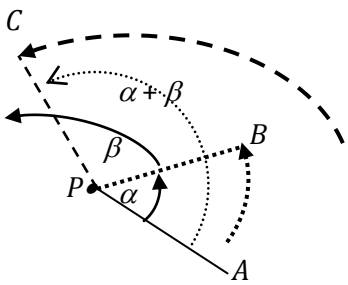


Gambar 8. Rotasi

b. Sifat Rotasi

Beberapa sifat rotasi:

1) Rotasi merupakan transformasi isometri.
2) Rotasi satu putaran penuh ekuivalen dengan transformasi identitas.
3) Jika garis rotasinya sebesar α maka kedua garis membentuk sudut α.
4) Pusat putaran adalah titik invarian (titik tetap, tidak bergerak) terhadap putaran.
5) Semua lingkaran berpusat di pusat putaran invarian terhadap putaran.
6) Putaran sebesar α dilanjutkan dengan putaran sebesar β dengan pusat *P.* ekuivalen dengan putaran sebesar $\alpha + \beta$ terhadap *P.*



Gambar 9. Rotasi 2 kali berurutan

c. Putaran dengan Sudut Khusus

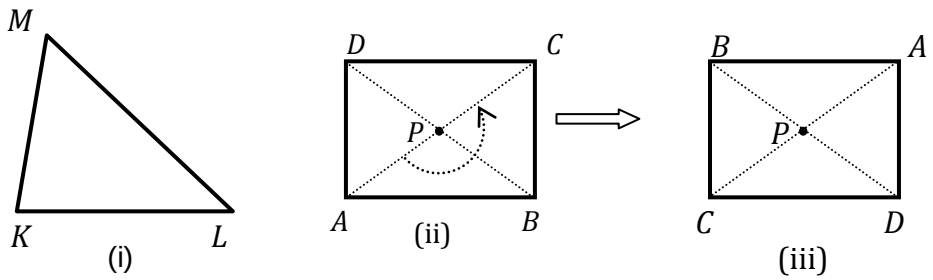
Putaran bersudut $n \times 360^o$ (n bilangan cacah) adalah suatu **transformasi identitas**. Semua titik pada bangun asal dipetakan ke dirinya sendiri.

Putaran bersudut putar 90°, 180°, 270°, dan 360° berturut-turut biasa disebut dengan seperempat putaran, setengah putaran, tiga perempat putaran, dan satu putaran penuh.

d. Simetri Putar

Suatu gambar atau bangun datar memiliki simetri putar mengelilingi titik *O* jika gambar atau bangun datar iitu diputar mengelilingi *O* dengan sudut positif tertentu kurang dari 360° dapat tepat menempati posisinya semula. Pusat putaran tersebut dinamakan **pusat simetri putar** bangun tersebut.

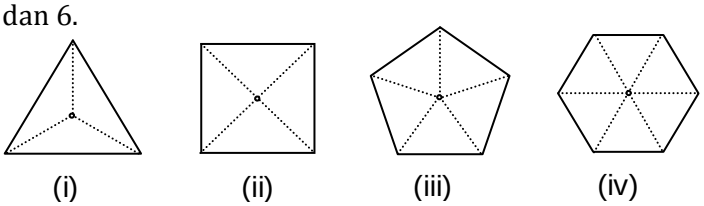
Jika oleh suatu putaran suatu bangun dapat *n* kali (n ≥ 2, *n* bilangan asli), dapat menempati bangun semula, bangun demikian dikatakan memiliki simetri putar tingkat *n*.



Gambar 10. Rotasi dan simetri putar

Jika segitiga *KLM* pada Gambar 10 (i) diputar 360° dengan pusat lingkaran luarnya sebagai pusat perputaran, maka segitiga itu tidak pernah menempati posisi seperti posisi tersebut kecuali saat berada di posisi semula. Berarti segitiga itu tidak memiliki simetri putar. Persegi panjang *ABCD* pada Gambar 10 (ii) dan (iii) menunjukkan dua posisi yang sama jika diputar kurang dari 360° yaitu pada posisi awal (Gambar 10 (ii)) dan ketika putarannya 180° (Gambar 10 (iii)). Dikatakan bahwa persegi panjang memiliki simetri putar tingkat 2.

Segi-*n* beraturan mempunyai simetri putar tingkat *n*. Pusat simetri putarnya yaitu pusat lingkaran luar dan sekaligus pusat lingkaran dalam segi-*n* beraturan tersebut). Contoh: Segitiga samasisi, segi-4 beraturan (persegi), segi-5 beraturan, dan segi-6 beraturan pada Gambar 3 (i) - (iv) simetri putarnya berturut-turut tingkat 3, 4, 5, dan 6.



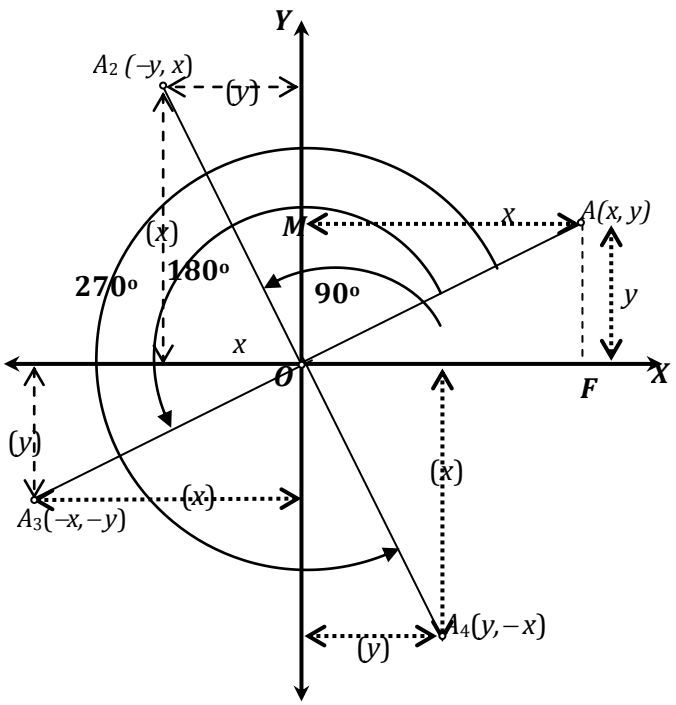
Gambar 11. Bangun-bangun datar yang memiliki simetri putar

e. Rotasi pada bidang koordinat

Pada modul ini rotasi pada bidang koordinat hanya disajikan yang pusat rotasinya titik asal (O) saja dan sudut-sudut khusus, karena dengan sembarang sudut diperlukan trigonometri.

f. Rumus hubungan koordinat titik hasil dan titik semula, dengan pusat perputaran titik asal koordinat (O),

Perhatikan Gambar 12 di bawah ini.



Gambar 12. Rotasi pada koordinat

Diperoleh hasil sebagai berikut.

1) Sudut putar 90°, maka $x' = -y$ dan $y' = x$
2) Sudut putar – 90° atau 270°

   Jika pusat putarannya $\boldsymbol{O}(0, 0)$, maka: $x' = y$ dan $y' = -x$
3) Sudut putar 180°; maka $x' = -x$ dan $y' = -y$

Untuk setiap titik $T(x, y)$ yang dirotasikan dengan $\boldsymbol{R}_{(a,b),180°}$ diperoleh hasil: $x' = -x + 2a \Leftrightarrow x' + x = 2a$ dan $y' = -y + 2b \Leftrightarrow y' + y = 2b$. Karena (a, b) adalah pusat rotasi dan ternyata bahwa $(a, b) = \left(\frac{x'+x}{2}, \frac{y'+y}{2}\right)$, maka hal ini menunjukkan bahwa *setiap titik*

dan bayangannya simetris terhadap pusat rotasi setengah putaran. Karena itu maka rotasi setengah putaran sering disebut juga sebagai *pencerminan terhadap sebuah titik.*

Jika di dalam sebuah bangun ada titik P sehingga untuk setiap titik T pada bangun itu ada titik lain T' sedemikian sehingga titik P merupakan titik tengah $\overline{TT'}$ bangun itu dikatakan memiliki **simetri titik**. Titik P disebut **titik simetri**. Persegi dan belah ketupat adalah contoh bangun yang memiliki simetri titik.

Jadi, dengan memilih α^o adalah sudut-sudut khusus diperoleh antara lain bahwa koordinat bayangan hasil rotasi titik $A(x, y)$ terhadap titik O adalah sebagai berikut:

i. $R_{O,90^\circ} : A(x, y) \rightarrow A'(-y, x)$

ii. $R_{O,180^\circ} : A(x, y) \rightarrow A'(-x, -y)$

iii. $R_{O,270^\circ} : A(x, y) \rightarrow A'(y, -x)$

Contoh 1

Tentukan koordinat titik hasilnya jika $T(4, -2)$ diputar (1) 90°, (2) 180°, dan (3) 270°.

Jawab

i. $R_{O,90} : A(x, y) \rightarrow A'(-y, x)$ maka $(4, -2) \rightarrow A'(-(-2), 4)$ atau $A'(2, 4)$

ii. $R_{O,180} : A(x, y) \rightarrow A'(-x, -y)$ maka $(4, -2) \rightarrow A'(-(4), -(-2))$ atau $A'(-4, 2)$

iii. $R_{O,270} : A(x, y) \rightarrow A'(y, -x)$` maka $(4, -2) \rightarrow A'((-2), -(4))$ atau $A'(-2, -4)$

Contoh 2

Bayangan ΔABC oleh suatu rotasi adalah $\Delta A'B'C'$ dengan $A'(-2, 3)$, $B'(3, -2)$ dan $C'(2, 5)$. Jika koordinat titik A adalah (3, 2), tentukan koordinat titik B dan C.

Jawab:

$A(3, 2) \leftrightarrow A'(-2, 3)$. Secara umum $T(x, y) \leftrightarrow T'(-y, x)$. Rotasinya $R_{O,90^\circ}$. Untuk memperoleh titik semula harus "diputar balik", yaitu $R_{O,-90^\circ}$ yang ekuivalen dengan $R_{O,270^\circ}$: $P'(x, y) \rightarrow P(y, -x)$, sehingga $B'(3, -2) \rightarrow B(-2, -3)$ dan $C'(2, 5). \rightarrow C(5, -2)$

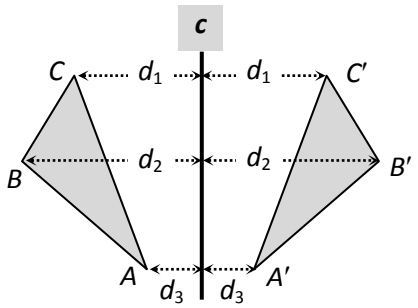
Jadi koordinat adalah $B(-2, -3)$ dan koordinat C adalah $(5, -2)$.

4. Pencerminan (Refleksi)

a. Pengertian

Refleksi atau pencerminan ditentukan oleh adanya sebuah **cermin (sumbu pencerminan).**

Pencerminan sebuah bangun pada bidang datar terhadap garis (cermin) c adalah pemetaan sedemikian sehingga untuk setiap titik T pada bangun pada bidang tersebut ada sebuah titik T' di pihak lain dari cermin tersebut yang memenuhi jarak T ke c sama dengan jarak T' ke c.



Gambar 13. Pencerminan

b. Sifat pencerminan

Untuk setiap titik T pada bangun asal dan bayangannya yaitu T', dan d melambangkan jarak. maka hubungannya ialah $d_{T \text{ ke } m} = d_{T' ke\ m}$

Bangun asal dan bangun hasil terletak *simetris* terhadap sumbu pencerminan. Setiap titik pada cermin ***invarian*** (tidak berubah) oleh adanya pencerminan. Setiap garis yang tegak lurus cermin *invarian* terhadap pencerminan.

Pencerminan bersifat isometris (berukuran tetap/sama). Bangun hasil (bayangan) kongruen dengan bangun asalnya.

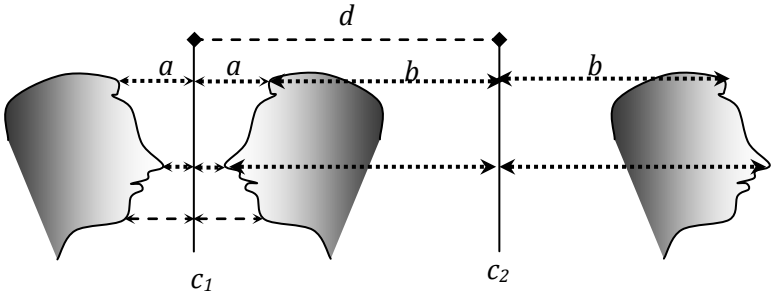
Pencerminan merupakan transformasi "pembalikan" bidang. Orientasi bangun asal dan bangun hasilnya berlawanan. Perhatikan urutan *ABC*-nya pada Gambar 13 diatas.

c. Komposisi Refleksi

Dua refleksi atau lebih dapat dikomposisikan. Refleksi terhadap cermin c_1 dilanjutkan dengan refleksi terhadap cermin c_2 yang dikenakan pada suatu titik T dapat dilambangkan dengan $(c_2 \circ c_1)(T)$. Mungkin $c_2 \parallel c_1$, mungkin juga c_2 dan c_1 berpotongan membentuk sudut tertentu misalnya α.

1) Komposisi refleksi terhadap $c_2 \circ c_1$ dengan $c_2 \parallel c_1$

Suatu pencerminan terhadap sumbu m_1 dilanjutkan dengan pencerminan terhadap c_2 yang berjarak d dari c_1 dapat digambarkan sebagai berikut:

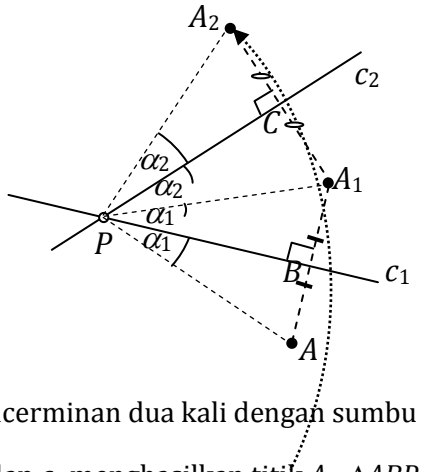


Gambar 14. Pencerminan dua kali dengan sumbu sejajar

Gambar diatas menunjukkan "gambar wajah" paling kiri dicerminkan terhadap c_1 dan bayangannya pada gambar tengah dicerminkan lagi terhadap cermin c_2 yang sejajar c_1.Jarak antara kedua cermin d.

2) Komposisi refleksi terhadap $c_2 \circ c_1$ dengan c_2 dan c_1 berpotongan di P.

Komposisi refleksi titik A terhadap $c_2 \circ c_1$ hasilnya sebagai berikut.



Gambar 15. Pencerminan dua kali dengan sumbu berpotongan

Titik A dicerminkan terhadap c_1 menghasilkan titik A_1. $\Delta ABP \cong \Delta A_1BP$, karena

$AB = A_1B$ (sifat pencerminan)

$m\angle ABP = m\angle A_1BP$ (siku-siku)

$BP = BP$ (sekutu)

Akibatnya: $m\angle APB = m\angle A_1PB$. Namakan α_1. .....(1)

Juga: $AP = A_1P$ .....(2)

Titik A_1 dicerminkan terhadap c_2 menghasilkan titik A_2.

$\Delta A_1CP \cong \Delta A_2CP$ karena

$A_1C = A_2C$ (sifat pencerminan)

$m\angle A_1CP = m\angle A_2CP$ (siku-siku)

$CP = BP$ (sekutu)

Akibatnya: $m\angle A_1PC = m\angle A_2PC$. Namakan α_2. .....(3)

Juga: $A_1P = A_2P$ ..... (4)

Dari (1) dan (3): $m\angle BPC = m\angle A_1PB + m\angle A_1PC = \alpha_1 + \alpha_2$

$m\angle APA_2 = m\angle APB + m\angle A_1PB + m\angle A_1PC + m\angle A_2PC$

$= \alpha_1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_2 = 2(\alpha_1 + \alpha_2)$

Dari (2) dan (4): $AP = A_1P$ dan $A_1P = A_2P$.

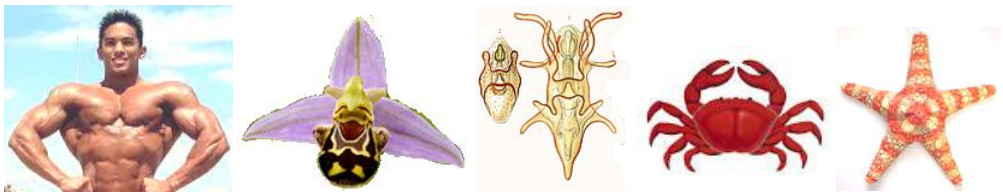
Berarti $AP = A_1P = A_2P$ atau A, A_1 dan A_2 terletak pada satu lingkaran berpusat di P.

Jadi pencerminan berturut-turut terhadap dua sumbu yang berpotongan dengan sudut α di titik P ekuivalen dengan suatu putaran berpusat di titik P dengan sudut putar sebesar 2α dengan arah putar sesuai dari cermin pertama (c_1) ke cermin kedua (c_2).

d. Sumbu Simetri dan Simetri Sumbu

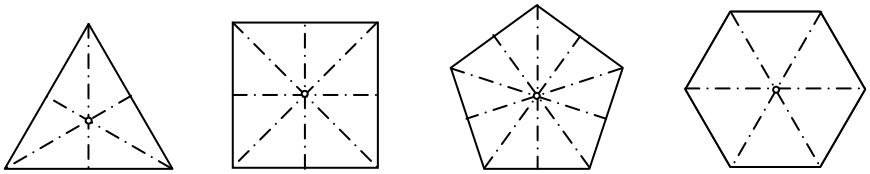
Jika pada sebuah bangun datar ada garis yang letaknya sedemikian sehingga bagian bangun yang satu di satu pihak dan bagian lain di pihak lainnya simetris terhadap garis tersebut, maka garis tersebut dinamakan sumbu simetri bangun datar tersebut. Sifat simetri bangunnya adalah simetri sumbu.

Dalam biologi sering terjadi simetrinya "tidak sempurna" seperti yang terdefinisi secara matematis, namun kesimetriannya masih diterima dalam pandangan keseharian seperti Gambar berikut.



Gambar 16. Contoh simetri di alam

Setiap segi-n beraturan memiliki n buah sumbu simetri. Semua sumbu simetri segi-n beraturan berpotongan pada sebuah titik yang merupakan pusat lingkaran luar dan pusat lingkaran dalam segi-n beraturan tersebut.

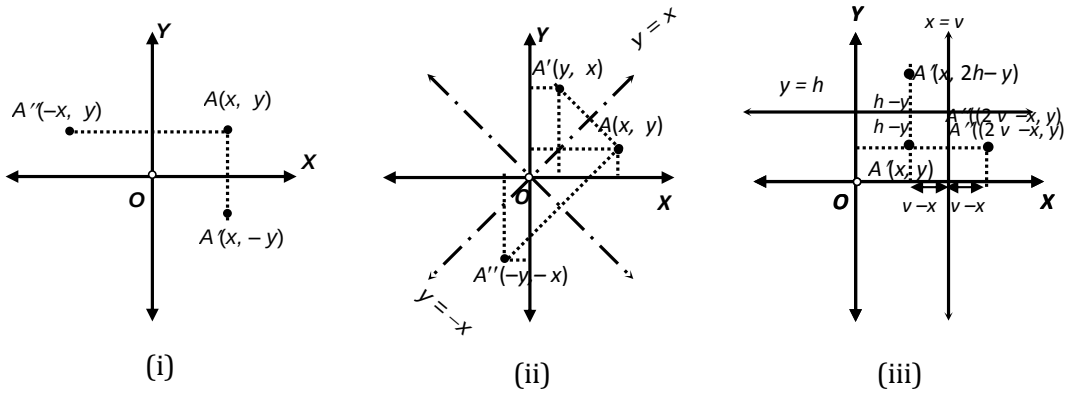


Gambar 17. Sumbu simetri pada polygon beraturan

Jika sebuah gambar atau bangun datar mempunyai sumbu simetri *s* maka dengan melipat gambar itu sepanjang *s* kedua bagian sebelah-menyebelah *s* akan saling menutup, karena kedua bagian bangun kongruen. Karena itu simetri sumbu juga dikenal sebagai **simetri lipat**.

e. Pencerminan dalam bidang koordinat

Sebarang garis dapat digunakan sebagai sumbu pencerminan. Namun untuk kemiringan yang sudutnya tidak khusus untuk membahasnya memerlukan trigonometri. Karena itu yang dibahas di sini hanya sumbu-sumbu khusus, yaitu sumbu koordinat, garis bagi kuadran I-III yang persamaannya $y = x$, garis bagi kuadran II-IV yang persamaannya $y = -x$, dan garis-garis yang sejajar sumbu-*X* serta garis-garis sejajar sumbu-*Y*.



Gambar 18. Pencerminan di bidang koordinat

Gambar (i): C_X = Refleksi terhadap sumbu-X : $A(x, y) \rightarrow A'(x, -y)$

atau $A(x, y) \xrightarrow{C_X} A'(x, -y)$

C_Y = Refleksi terhadap sumbu-Y : $A(x, y) \rightarrow A'(-x, y)$

atau $A(x, y) \xrightarrow{C_Y} A'(-x, y)$

Gambar (ii): $C_{y=x}$ = Refleksi terhadap garis $y = x$: $A(x, y) \rightarrow A'(y, x)$

atau $A(x, y) \xrightarrow{C_{y=x}} A'(y, x)$

$C_{y=-x}$ = Refleksi terhadap garis $y = -x$: $A(x, y) \rightarrow A'(-y, -x)$

atau $A(x, y) \xrightarrow{C_{y=-x}} A'(-y, -x)$

Gambar (iii): Refleksi terhadap garis $y = h$; $h \in R$: $A(x, y) \rightarrow A'(x, 2h - y)$

atau $A(x, y) \xrightarrow{C_{y=h}} A'(x, 2h - y)$

Refleksi terhadap garis $x = v$; $v \in R$: $A(x, y) \rightarrow A'(2v - x, y)$

atau $A(x, y) \xrightarrow{C_{x=v}} A'(2v - x, y)$

Catatan: Pencerminan yang dilambangkan dengan $A(x, y) \xrightarrow{C_{y=x}} A'(y, x)$ sering juga dilambangkan dengan $A(x, y) \xrightarrow{M_{y=x}} A'(y, x)$. ($C$ = Cermin, M = Mirror). Demikian juga yang serupa dengan itu.

Contoh.

Tentukan titik hasil pencerminan titik (5, 6) terhadap:

(i) sumbu X (ii) garis $y = x$ (iii) garis $x = 3$ (iv) garis $y = 2$

Jawab:

(i) $C_X : (x, y) \rightarrow (x, -y)$, maka $(5, 6) \rightarrow (5, -6)$

(ii) $C_{y=x} : (x, y) \rightarrow (x, -y)$, maka $(5, 6) \rightarrow (6, 5)$

(iii) $C_{x=v} : (x, y) \rightarrow (2v - x, y)$, maka $(5, 6) \rightarrow (2 \times 3 - 5, 6)$ atau $(1, 6)$

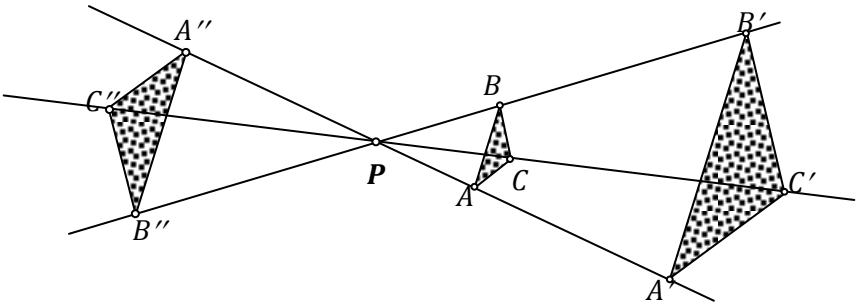
(iv) $C_{y=h} : (x, y) \rightarrow (x. 2h - y)$, maka $(4, 5) \rightarrow (5, 2 \times 2 - 6)$ atau $(5, -2)$

5. Dilatasi

a. Pengertian

Diketahui sebuah titik P pada sebuah bidang datar H dan sebuah bilangan real k ($k \neq 0$). Bangun **hasil dilatasi** titik A pada bidang H adalah titik A' pada $\overleftrightarrow{PA}$ sedemikian sehingga P, A, dan A' kolinear dengan $PA' = |k| \times PA$.

Titik P dinamakan **pusat dilatasi** dan k dinamakan **faktor dilatasi.** Dilatasi dengan pusat dilatasi P dan faktor skala k dilambangkan dengan $[P, k]$



Gambar 19. Dilatasi

Jika $k < 0$, maka titik P' pada $\overrightarrow{AP}$ (terhadap P, titik$A$ dan A' berlainan pihak)

Jika $k > 0$, maka titik P' pada $\overrightarrow{PA}$ (terhadap P, titik A dan A' sepihak)

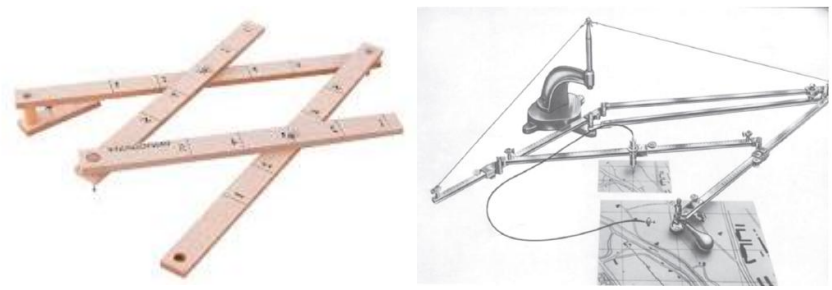
Untuk $k = 1$, maka dilatasinya merupakan transformasi identitas. Bangun hasil adalah juga bangun asalnya.

Pada Gambar 19 diatas, $PA' = 3\ PA$, $PB' = 3\ PB$, dan $PC' = 3\ PC$. Faktor skala = 3. Sedangkan PA'', PB'' dan PC'' berturut-turut panjangnya $2PA$, $2PB$, dan $2PC$, namun terhadap pusat dilatasi bayangan berada di pihak lain dari bangun asaalnya. Faktor skalanya adalah –2.

Bangun $A'B'C'$ adalah bangun hasil dilatasi $[P, 3]$ dari ABC; $\overrightarrow{PA'} = 3\,\overrightarrow{PA}$

Bangun $A''B''C''$ adalah bangun hasil dilatasi $[P, -2]$ dari ABC; $\overrightarrow{PA'} = -2\,\overrightarrow{PA}$

Dalam praktik, untuk memperbesar atau memperkecil gambar digunakan pantograph seperti gambar berikut



Gambar 20. Pantograp

b. Sifat Dilatasi

Berikut ini beberapa sifat dilatasi.

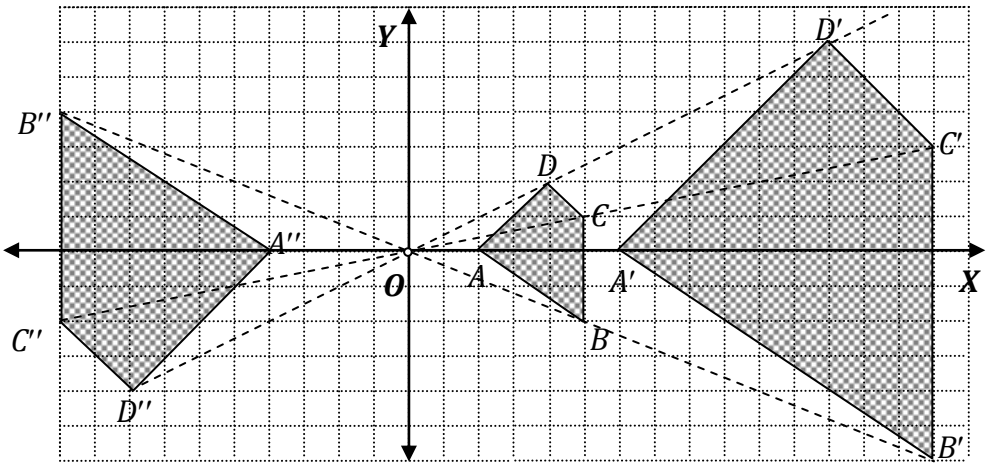
a. Dilatasi adalah transformasi similaritas (kesebangunan). Bangun hasil sebangun bangun asal. Setiap ruas garis bangun hasil sejajar dengan bangun asalnya.
b. Semua garis melalui pusat dilatasi invarian terhadap sebarang dilatasi ($k \neq 0$).
c. Dilatasi tidak mengubah orientasi (arah).
d. Jika $|k| > 1$ bangun hasil diperbesar dari ukuran semula; jika $|k| < 1$ bangun hasilnya diperkecil.

Dengan diperbesar atau diperkecilnya bangun hasil dari bangun asalnya menunjukkan bahwa dilatasi bukan transformasi isometri.

c. Dilatasi Dalam Bidang Koordinat

Pada Gambar 21 ditunjukkan $D_{O,k}$: titik $A(x, y) \rightarrow A'(kx, ky)$. Keterangannya dapat dinyatakan dengan koordinat titik-titik sudut bangun hasil dibandingkan dengan koordinat titik-titik sudut bangun asalnya.

Titik Asal	**$k = 3$**	**$k = -2$**
$A(2, 0)$	$A'(6, 0)$	$A''(-4, 0)$
$B(5, -2)$	$B'(15, -6)$	$B''(-10, 4)$
$C(5, 1)$	$C'(15, 3)$	$C''(-10, -2)$
$D(4, 2)$	$D'(12, 6)$	$D''(-8, -4)$



Gambar 21. Dilatasi bangun ABCD

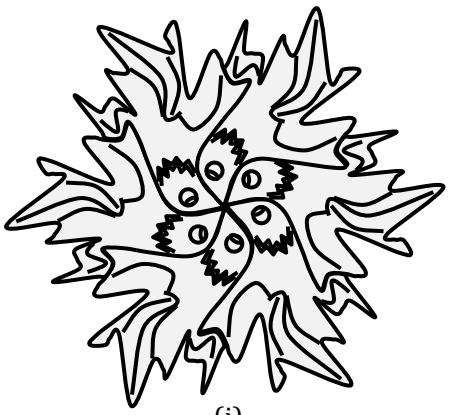
D. Aktivitas Pembelajaran

Jawablah pertanyaan di bawah ini, dan apabila ada masalah diskusikanlah dengan rekan sejawat.

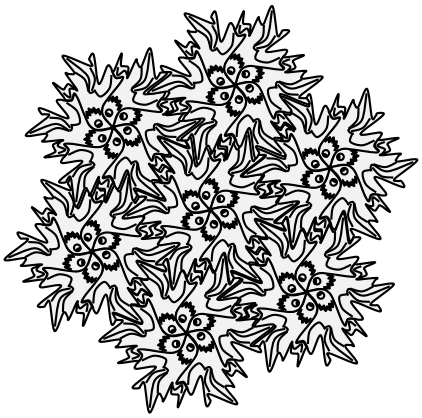
1. Carilah penggunaan istilah transformasi di luar matematika. Berikan contohnya masing-masing yang terkait dengan translasi, refleksi, rotasi, dan dilatasi.

2. Carilah gambar-gambar dari motif-motif batik atau ukiran atau hasil budaya Indonesia lainnya yang memuat translasi.

3. Kumpulan "6 ekor burung" pada gambar pertama di bawah ini menunjukkan suatu pengubinan. Tak ada celah di antara keenam "burung".



(i)



(ii)

a. Apakah yang Anda ketahui tentang sifat simetri Gambar (i)?
   Apakah setiap 6 gambar burung yang kongruen selalu dapat disusun seperti gambar pertama? Jelaskan.

b. Gambar (ii) adalah pengubinan menggunakan gambar pertama (diperkecil). Untuk gambar kedua sebagai satu bangun, berikan penjelasan tentang sifat simetrinya dan selidiki adakah transformasi lain selain rotasi.

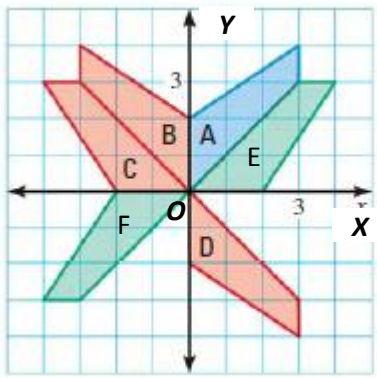
4. Banyak makhluk hidup yang jika diambil gambarnya dengan arah tertentu hasilnya adalah gambar yang memiliki simetri sumbu. Pada Gambar berikut, kupu-kupu dan motif batik juga memiliki sifat dimilikinya simetri sumbu.

Kumpulkan paling sedikit 5 (lima) gambar berbeda dari makhluk hidup yang gambarnya memiliki sifat adanya simetri sumbu.

5. Pada kertas berpetak gambarlah sebuah bangun datar. Pilih sebuah titik di dalam bangun itu sebagai pusat dilatasi dan dilatasikan gambar itu dengan faktor skala ½ , 2, dan 3.

E. Latihan/Kasus/Tugas

1. Periksalah, transformasi apa yang memetakan bangun satu ke lainnya dari yang berikut ini?



a. *A* ke *B*
b. *B* ke *C*
c. *C* ke *D*
d. *D* ke *E*
e. *E* ke *F*
f. *A* ke *C*
g. *B* ke *D*
h. *F* ke *A*

2. Gambarlah setiga ABC dan bayangannya jika ditahui titik sudutnyaadalah titik-titik $A(5, -1)$, $B(-3, 2)$, $C(-2, -1)$ oleh translasi $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$
3. Titik (12,–6) adalah peta (a, b) oleh pergeseran $\begin{pmatrix} -8 \\ 10 \end{pmatrix}$. Tentukan $a + b$.
4. Oleh geseran G titik (2,–5) dipetakan ke titik (–1, 8) Tentukanlah peta titik (5, –7) oleh G.
5. Tentukan hasil transformasi berikut
   a. Rotasi 90° titik (–2, 3) mengelilingi titik $O(0, 0)$
   b. Rotasi 270° titik (–2, 3) mengelilingi titik $O(0, 0)$.
6. Oleh suatu rotasi berpusat di O(0, 0), titik (3,–4) dipetakan ke titik (4,3). Tentukan bayangan (–2, 5) oleh rotasi itu.
7. Oleh suatu rotasi sebesar α rad berpusat di O(0, 0), titik (3, 4) dipetakan ke titik (–4,3). Manakah titik hasil (–2,5) oleh rotasi sebesar $(\pi + \alpha)$ rad?
8. Tentukan hasil transformasi berikut
   a. Titik A (5, –4) direfleksikan terhadap garis $x = 2$
   b. Titik A (–4, 5) direfleksikan terhadap garis $y = 3$
   c. Titik A (–1, 4) direfleksikan terhadap garis $x = 2$ dilanjutkan terhadap garis $x = 6$
   d. Titik A (–1, 4) direfleksikan terhadap garis $x = 2$ dilanjutkan terhadap garis $y = 3$
9. Tentukan persamaan garis hasil pencerminan garis $2x + y - 4 = 0$ terhadap sumbu X.
10. Titik $A'(6, -12)$ adalah titik hasil dilatasi pada O dari titik $A(-3, 6)$. Tentukanlah bayangan titik $B(-1, 2)$ dan $C(4, -3)$ oleh dilatasi tersebut.

F. Rangkuman

Transformasi geometris dapat mengubah posisi setiap titik suatu objek geometris dengan memindah (translasi), mencerminkan (refleksi), memutar (rotasi), atau memperkecil/memperbesar (dilatasi). Posisi setiap titik pada objek hasil transformasi dapat dianalisis menggunakan koordinat, yaitu dengan meletakkan objek dan gerakannya pada bidang koordinat.

Translasi, refleksi dan rotasi tidak mengubah ukuran dan bentuk objek (kongruen), sementara dilatasi tidak mengubah bentuk tetapi mengubah ukuran (sebangun). Translasi dan dilatasi positif tidak mengubah arah pada objek geometri.

G. Umpan Balik dan Tindak Lanjut

Evaluasi diri

Untuk mengukur ketercapaian peserta diklat dalam mempelajari modul ini lakukan evaluasi diri sebagai berikut secara jujur.

Petunjuk:

Evaluasi diri dengan cara mengerjakan soal latihan yang terdiri dari 10 soal. Pada masing-masing soal, pengerjaan yang benar mendapatkan skor maksimal 10. Jadi skor total 100. Capaian kompetensi (CK) dirumuskan sebagai

$$CK = \frac{Skor\ yang\ diperoleh}{100} \times 100\%$$

Setelah mengerjakan semua soal latihan/tugas, cocokkan jawaban Anda dengan kunci jawaban yang telah disajikan untuk mengukur capaian kompetensi (CK).

Tindak Lanjut

Seperti telah dijelaskan pada bagian sebelumnya bahwa evaluasi yang dilakukan oleh diri sendiri secara jujur adalah kunci keberhasilan mengukur capaian kompetensi (CK). Berkaitan dengan itu, pertimbangkan hal berikut.

Perolehan CK (dalam %)	Deskripsi dan tindak lanjut
$91 \leq \text{CK} \leq 100$	Sangat Baik, berarti Anda benar-benar memahami transformasi geometris. Selanjutnya kembangkan pengetahuan dan tuangkan dalam pembelajaran.
$76 \leq \text{CK} < 91$	Baik, berarti Anda cukup memahami transformasi geometris walaupun ada beberapa bagian yang perlu dipelajari lagi. Selanjutnya pelajari lagi beberapa bagian yang dirasakan belum begitu dipahami.
$50 \leq \text{CK} < 76$	Cukup, berarti Anda belum cukup memahami transformasi geometris. Oleh karena itu Anda perlu mempelajari lagi bagian yang belum dikuasai dan menambah referensi dari sumber lain.
$\text{CK} < 50$	Kurang, berarti Anda belum dapat memahami transformasi geometris. Oleh karena itu Anda perlu mempelajari lagi dari awal dan menambah referensi dari sumber lain.

KEGIATAN PEMBELAJARAN 2
PENGENALAN TRIGONOMETRI

A. Tujuan

Anda diharapkan mampu memahami bahwa perbandingan trigonometri tergantung dari besar sudut bukan dari panjang sisi-sisi pembentuknya dan bukan pula segitiga siku-sikunya yang terkait.

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

Guru dapat:

1. Menentukan nilai perbandingan trigonometri sudut lancip.
2. Menerapkan perbandingan trigonometri dalam bangun datar.
3. Menggunakan nilai perbandingan trigonometri untuk menyelesaikan masalah

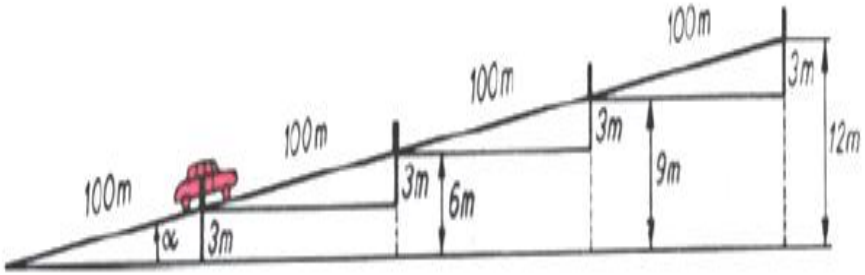
C. Uraian Materi

1. Pengantar

Trigonometri digunakan untuk mencari hubungan antara sisi dan sudut dari segitiga, dan menulisnya sebagai model jumlah kehidupan nyata. Fungsi trigonometri digunakan untuk model kuantitas yang bersifat periodik. Misalnya: sepanjang hari, kedalaman air pada ujung dermaga di pelabuhan bervariasi pasang surut. Kedalaman dapat dimodelkan dengan fungsi trigonometri.

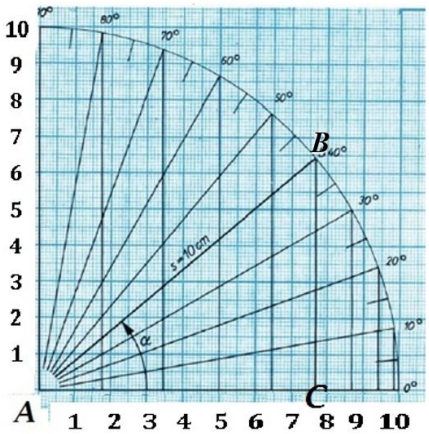
Berasal dari bahasa Yunani, kata trigonometri berarti "pengukuran segitiga". Awalnya, trigonometri berurusan dengan hubungan antara sisi dan sudut dari segitiga dan digunakan dalam pengembangan astronomi, navigasi, dan survei. Dengan perkembangan kalkulus dan ilmu-ilmu fisik di abad ke-17, perspektif yang berbeda muncul - yang melihat hubungan trigonometri klasik sebagai fungsi dengan himpunan bilangan real sebagai domain mereka. Akibatnya, aplikasi trigonometri diperluas untuk mencakup sejumlah besar fenomena fisik yang melibatkan rotasi dan getaran. Fenomena ini termasuk gelombang suara, sinar cahaya, orbit planet, getaran dawai, bandul, dan orbit partikel atom. Pendekatan dalam teks ini menggabungkan kedua perspektif, dimulai dengan sudut dan ukuran mereka.

2. Perbandingan Trigonometri



Gambar 22. Tanjakan dan skala perbandingan

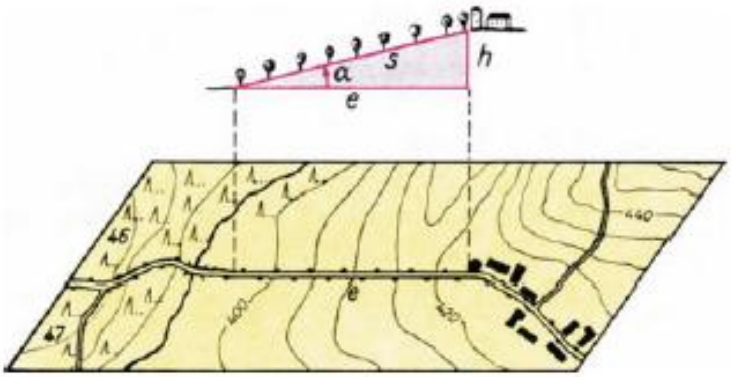
Di jalan raya yang mendaki secara seragam 3 m setiap melintas maju100 m, perbandingan kenaikan yaitu h terhadap lintasan perjalanan (s), di sini h/s = 3/100, adalah ukuran kecuraman jalan tersebut. Nilai atau ukuran perbandingan itu tidak berubah di mana pun diukurnya. Misalnya dalam gambar itu 6/200, 9/300 dan 12/400 yang semuanya bernilai 3/100. Nilai perbandingan tersebut dinamakan sinus dari sudut yang terbentuk oleh kemiringan (pananjakan/kecuraman) jalan raya tersebut. Jika sudutnya α, maka dituliskan sin $\alpha = \frac{3}{100}$. Jika jalan semakin menanjak, artinya α semakin besar, nilai h semakin besar sementara s tetap. Jadi nilai sinusnya semakin besar.



Gambar 23. Perbandingan pada lingkaran

Pada gambar di atas, ditunjukkan s = 10 cm dan bahwa untuk α = 40° ketinggiannya adalah CB atau $h \approx$ 6,4 cm. Jadi nilai sinus sudut 40° $\approx \frac{6,4}{10}$ = 0,64. Ditulis: sin 40° = 0,64 (pembulatan sampai 2 tempat desimal).

Pada gambar berikut, proyeksi jarak tempuh s pada bidang mendatar (horisontal) panjangnya e. Jarak mendatar inilah yang tampak pada peta geografi.



Gambar 24. Perbandingan segitiga pada peta geografi

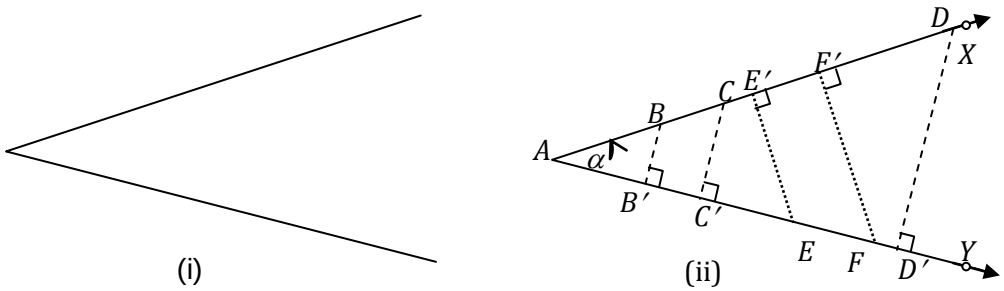
Perbandingan jarak mendatar dengan panjang sesungguhnya yang ditempuh yaitu e/s dinamakan kosinus sudut tersebut pada peta. Pada jalan yang tidak menanjak, kemiringan atau sudutnya makin kecil, besarnya e makin mendekati s, sehingga pada jalan rata nilai $e = s$ sehingga $e/s = 1$.

Pada **Gambar 24** dengan lintasan 10 cm jarak tempuh mendatar $AC = e \approx 7{,}7$ cm.

Jadi kosinus sudut 40°, ditulis $\cos 40° = e/s \approx \frac{7{,}7}{10} = 0{,}77$.

Gradien atau kemiringan jalan juga ditandai oleh perbandingan antara kenaikan (bisa juga kecuraman) dan proyeksi mendatar dari lintasannya, yaitu h/s yang dikenal sebagai tangen sudutnya. Dalam hal ini $\tan \alpha = \frac{h}{e}$.

Bagaimana jika letak sudutnya seperti **Gambar 25** (i):



Gambar 25. Perbandingan pada Sudut α

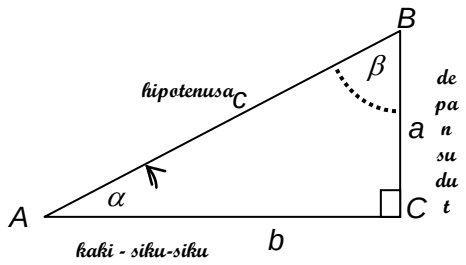
Pada **Gambar 25**(ii) titik-titik *B, C,* dan *D* pada $\overrightarrow{AX}$ diproyeksikan ke $\overrightarrow{AY}$ dan titik *E* dan *F* pada $\overrightarrow{AY}$ diproyeksikan ke $\overrightarrow{AX}$. Menurut kesebangunan segitiga, $\Delta ABB'$, $\Delta ACC'$,$\Delta ADD'$,$\Delta AEE'$, dan $\Delta AFF'$ kelimanya sebangun karena memiliki dua sudut sama yaitu sama-sama memiliki sudut α dan sudut siku-siku (akibatnya juga sudut ketiga sama), Karena itu maka:

$$\frac{BB'}{AB} = \frac{CC'}{AC} = \frac{DD'}{AD} = \frac{EE'}{AE} = \frac{FF'}{AF} = ... = \sin\alpha$$

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{AD'}{AD} = \frac{AE'}{AE} = \frac{AF'}{AF} = ... = \cos\alpha$$

$$\frac{BB'}{AB'} = \frac{CC'}{AC'} = \frac{DD'}{AD'} = \frac{EE'}{AE'} = \frac{FF'}{AF'} = ... = \tan\alpha$$

Jadi di mana pun suatu titik dipilih pada satu kaki sudut dan diproyeksikan ke kaki sudut lainnya nilai perbandingan itu tidak berubah dan tidak tergantung letak sudutnya. Karena itu secara sederhana perbandingan trigonometri sebuah sudut dapat dihubungkan dengan segitiga siku-siku.



Gambar 26. Perbandingan trigonometri

Perhatikan **Gambar 26**. Dari yang dikemukakan di atas diperoleh:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \cos\alpha = \frac{b}{c}, \text{ dan } \tan\alpha = \frac{a}{b}$$

Kebalikan dari perbandingan-perbandingan di atas juga merupakan perbandingan trigonometri, yaitu:

sekan: $\sec\alpha = \frac{c}{b}$ kosekan: $\csc\alpha = \frac{c}{a}$ kotangen: $\cot\alpha = \frac{b}{a}$

Secara singkat:

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$ $\left(= \frac{\textit{panjang kaki depan sudut}}{\textit{panjang hipotenusa}}\right)$ $\cot\alpha = \frac{b}{a}$ $\left(= \frac{\textit{panjang kaki siku - siku}}{\textit{panjang kaki depan sudut}}\right)$

$\cos\alpha = \frac{b}{c}$ $\left(= \frac{\textit{panjang kaki siku - siku}}{\textit{panjang hipotenusa}}\right)$ $\sec\alpha = \frac{c}{b}$ $\left(= \frac{\textit{panjang hipotenusa}}{\textit{panjang kaki siku - siku}}\right)$

$\tan\alpha = \frac{a}{b}$ $\left(= \frac{\textit{panjang kaki depan sudut}}{\textit{panjang kaki siku - siku}}\right)$ $\csc\alpha = \frac{c}{a}$ $\left(= \frac{\textit{panjang hipotenusa}}{\textit{panjang kaki depan sudut}}\right)$

Dari $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ dan $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ diperoleh $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a/c}{b/c} = \frac{a}{b} = \tan\alpha$

Jadi $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

Jika $\sin^2\alpha$ melambangkan $(\sin\alpha)^2$, $\cos^2\alpha$ melambangkan $(\cos\alpha)^2$ maka dapat diperoleh pula bahwa $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = (a/c)^2 + (b/c)^2$

$= (a/c)^2 + (b/c)^2$

$= (a^2 + b^2)/c^2$

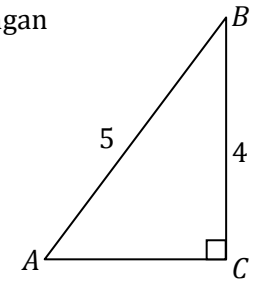
$= c^2/c^2$ (karena $a^2 + b^2 = c^2$)

$= 1$

Jadi $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, salah satu dari kesamaan (***identitas***) trigonometri.

Contoh 1:

Dari gambar di samping, tentukan nilai-nilai perbandingan trigonometri sudut A dan sudut B.



Jawab: $b^2 = c^2 - a^2$

$= 5^2 - 4^2$

$= 9 \Rightarrow b = 3$

$\sin A = \frac{a}{c} = \frac{4}{5}$ $\tan A = \frac{a}{b} = \frac{4}{3}$ $\sec A = \frac{c}{b} = \frac{5}{3}$

$\cos A = \frac{b}{c} = \frac{3}{5}$ $\cot A = \frac{b}{a} = \frac{3}{4}$ $\csc A = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$

$\sin B = \frac{a}{c} = \frac{3}{5}$ $\tan B = \frac{b}{a} = \frac{3}{4}$ $\sec B = \frac{c}{b} = \frac{5}{4}$

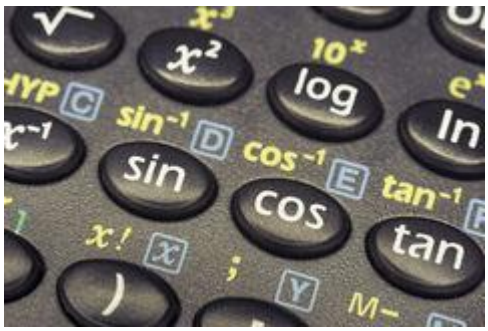
$\cos B = \frac{b}{c} = \frac{4}{5}$ $\cot B = \frac{a}{b} = \frac{4}{3}$ $\csc B = \frac{c}{a} = \frac{5}{3}$

Untuk dapat menentukan nilai perbandingan trigonometri sudut lancip dapat digunakan 1) tabel dan 2) kalkulator (kalkulator *scientific*).

TABLE 3 Values of Trigonometric Functions

Degrees	Radians	Sin	Cos	Tan	Cot	Sec	Csc		
0° 00′	0.0000	0.0000	1.0000	0.0000	—	1.000	—	1.5708	90° 00′
10	029	029	000	029	343.8	000	343.8	679	50
20	058	058	000	058	171.9	000	171.9	650	40
30	0.0087	0.0087	1.0000	0.0087	114.6	1.000	114.6	1.5621	30
40	116	116	0.9999	116	85.94	000	85.95	592	20
50	145	145	999	145	68.75	000	68.76	563	10
1° 00′	0.0175	0.0175	0.9998	0.0175	57.29	1.000	57.30	1.5533	89° 00′
10	204	204	998	204	49.10	000	49.11	504	50
20	233	233	997	233	42.96	000	42.98	475	40
30	0.0262	0.0262	0.9997	0.0262	38.19	1.000	38.20	1.5446	30
40	291	291	996	291	34.37	000	34.38	417	20
50	320	320	995	320	31.24	001	31.26	388	10
2° 00′	0.0349	0.0349	0.9994	0.0349	28.64	1.001	28.65	1.5359	88°00′
10	378	378	993	378	26.43	001	26.45	330	50

Gambar 27. Tabel trigonometri



Gambar 28. Tombol perbandingan trigonometri pada Kalkulator

Dengan bantuan trigonometri pengukuran suatu objek tidak harus menyentuh sampai ke seluruh bagian objek.

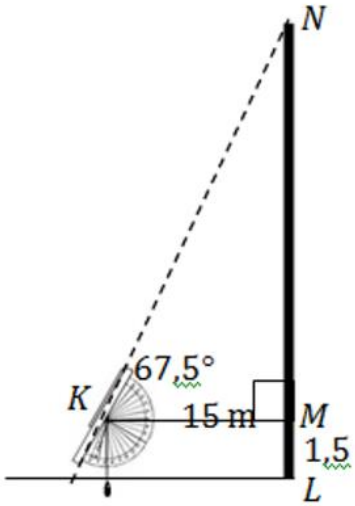
Contoh

Krisna berdiri 15 m dari kaki sebuah menara telekomunikasi. Dengan sebuah klinometer ia mengamati ujung menara dengan sudut *elevasi* (sudut antara arah pandang dengan arah mendatar/horisontal) sebesar 67,5°. Berapakah tinggi menara jika mata pengamat (Krisna 150 cm dari permukaan tanah?

Penyelesaian:

Situasi pengamatan itu dapat digambar sketsa seperti pada Gambar berikut (satuan jarak meter)

Sesuai yang diketahui, $KM = 15$, $ML = 1{,}5$, $n\angle NKM = 67{,}5°$ dan yang dicari MN.



ΔKMN siku-siku di M.

$$\tan \angle NKM = \frac{MN}{KM}$$

$\Leftrightarrow MN = KM \,.\, \tan \angle NKM$

$\Rightarrow MN = 15 \,.\, \tan 67{,}5°$

$= 15 \,.\, 2{,}3559$

$= 35{,}3385 \approx 35{,}34$

$LN = MN + NL = 35{,}34 + 1{,}5 = 36{,}84$

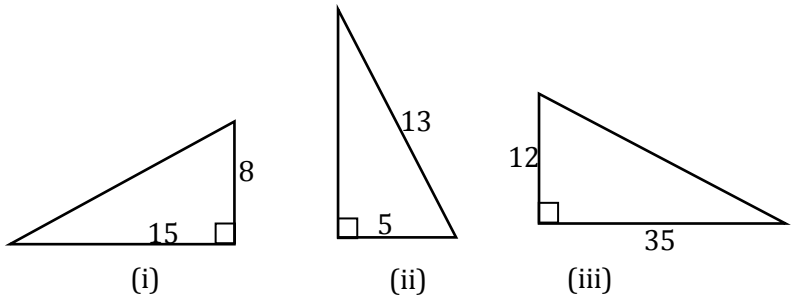
Jadi tinggi menara komunikasi tersebut 36,84 m.

D. Aktivitas Pembelajaran

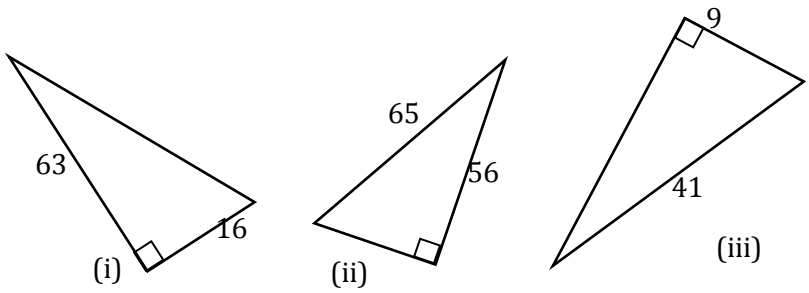
1. Buktikanlah kebenaran identitas-identitas berikut ini
   a. $\tan \alpha \,.\, \cot \alpha = 1$
   b. $\sin \alpha \,.\, \csc \alpha = 1$
   c. $\cos \alpha \,.\, \sec \alpha = 1$
   d. $1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha$
   e. $1 + \cot^2 \alpha = \csc^2 \alpha$
2. Dengan menggunakan segitiga siku-siku yang samakaki dan segitiga samasisi, tentukan semua perbandingan trigonometri untuk sudut 30°, 45°, dan 60°.

E. Latihan/Kasus/Tugas

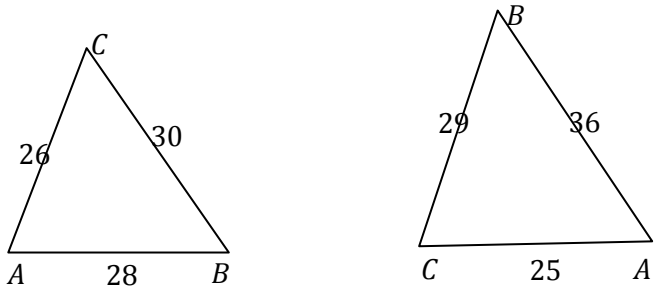
1. Tentukanlah nilai perbandingan trigonometri sudut-sudut lancip dari segitiga-segitiga di bawah ini (namai sendiri sudutnya)



2. Seperti No. 1 untuk segitiga-segitiga berikut



3. Tentukan nilai sin A, cos A, tan A, sin B, cos B, dan tan B dari segitiga-segitiga berikut,



4. Jika α sudut lancip dan sec $\alpha = \frac{41}{40}$. Hitunglah nilai perbandingan trigonometri lainnya.
5. Anang berada di suatu tempat di tepi sungai Barito. Ia melihat suatu objek di seberang sungai arah tegak lurus terhadap tepi sungai. Disusurinya tepi sugai itu 40 m sepanjang tepi sungai dan didapatinya bahwa objek yang dilihatnya tadi berarah 70° terhadap lintasan yang dilaluinya. Berapa lebar sungai di tempat Anang berada?

F. Rangkuman

Trigonometri mengkaji hubungan sisi-sisi pada segitiga siku-siku dikaitkan dengan sudut pada segitiga siku-siku tersebut. Dikenal beberapa perbandingan

trigonometri: sinus, kosinus, tangens, kotangen, sekan, dan kosekan. Karena mengkaji segitiga siku-siku, maka teorema Pythagoras menjadi salah satu alat untuk menentukan perbandingan trigonometri. Perbandingan trigonometri ini merupakan penyederhanaan/generalisasi dari konsep kesebangunan sehingga dapat memecahkan masalah-masalah terkait konsep rasio dan perbandingan.

G. Umpan Balik dan Tindak Lanjut

Setelah mengerjakan latihan, nilailah sendiri keberhasilan Anda. Jika masih kurang dari 80% Anda perlu (1) mencermati kembali uraian materinya dan (2) berlatih melalui pengubahan angka-angka pada Contoh yang diberikan.

KEGIATAN PEMBELAJARAN 3
BANGUN RUANG SISI DATAR

A. Tujuan

Peserta diklat dapat:

1. menjelaskan dengan tepat tentang bangun ruang bidang sisi datar.
2. menjelaskan dengan tepat tentang diagonal-diagonal yang terdapat di dalam bangun ruang.
3. menjelaskan dengan tepat tentang luas permukaan dan volume dari suatu bangun ruang yang bidang sisinya bagian dari bidang datar.

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

Guru dapat:

1. menjelaskan kubus dan sifat-sifatnya sebagai suatu bidang banyak.
2. menjelaskan prisma dan sifat-sifatnya secara umum.
3. menjelaskan balok dan sifat-sifatnya sebagai suatu prisma.
4. menjelaskan limas dan sifat-sifatnya secara umum.
5. menjelaskan diagonal-diagonal dalam kubus.
6. menjelaskan pengukuran diagonal-diagonal dalam kubus.
7. menjelaskan diagonal-diagonal dalam balok.
8. menjelaskan pengukuran diagonal-diagonal dalam balok.
9. menjelaskan luas permukaan bangun ruang bidang sisi datar.
10. menjelaskan pengukuran luas permukaan bangun ruang bidang sisi datar.
11. menjelaskan volume bangun ruang bidang sisi datar.
12. menjelaskan pengukuran volume bangun ruang bidang sisi datar.

C. Uraian Materi

1. Bangun Ruang Sisi Datar

Bangun ruang bidang sisi datar yang dimaksudkan, yaitu bangun ruang yang semua permukaannya merupakan daerah-daerah segi banyak. Bangun ruang bidang sisi datar diklasifikasikan ke dalam tiga jenis, yaitu bidang banyak, prisma, dan limas. Bangun ruang bidang sisi datar yang dipelajari siswa-siswa SMP/MTs, yaitu kubus,

balok, prisma, dan limas. Dalam modul ini Anda akan mempelajari kubus sebagai suatu bidang banyak, balok sebagai suatu prisma, prisma, dan limas.

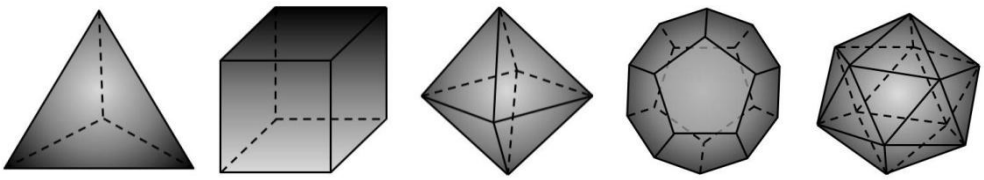
a. Kubus

Kubus merupakan salah satu jenis bidang banyak. Sebelum mempelajari lebih dalam tentang kubus, kita pelajari dulu tentang pengertian bidang banyak.

Definisi Bidang-banyak

> Suatu **bidang-banyak** (*polyhedron*) adalah gabungan dari sejumlah terhingga (*finite*) daerah-daerah segi banyak sedemikian, sehingga: setiap sisi dari suatu daerah segi banyak merupakan sebuah sisi dari tepat sebuah daerah segi banyak yang lain, dan jika sisi-sisi dari daerah-daerah segi banyak tersebut berpotongan, maka sisi-sisi tersebut berpotongan pada satu titik atau bertemu pada sebuah titik.

Berdasarkan pengertian tersebut, suatu bangun ruang yang terbentuk dari beberapa daerah segi banyak disebut sebagai suatu bidang-banyak. Setiap segi banyak pembentuk suatu bidang-banyak disebut dengan permukaan (*face*) atau bidang sisi. Pertemuan antara dua buah bidang sisi pada suatu bidang-banyak disebut dengan rusuk. Daerah segi banyak dari suatu bidang banyak dapat semua berupa daerah segi banyak beraturan atau kombinasi daerah segi banyak berbeda. Bidang-banyak yang semua bidang sisinya berupa daerah segi banyak beraturan dikelompokkan sebagai bidang-banyak beraturan. Dalam Geometri Euclides hanya ada 5 buah bidang banyak beraturan. Gambar 1 berikut merupakan gambar dari 5 buah bidang-banyak beraturan.



(a) **(b)** **(c)** **(d)** **(e)**

Gambar 29. Bidang-banyak-bidang-banyak Beraturan

Sebutan lima bidang banyak beraturan dan bentuk bidang sisi-bidang sisinya dari **Gambar 29** disajikan dalam **Tabel** berikut.

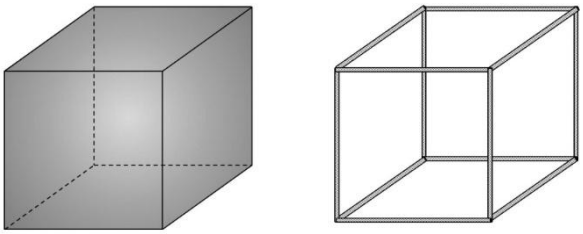
Tabel Lima Bidang banyak Beraturan

Nama bidang-banyak beraturan (*polyhedrä*)		Banyak dan bentuk permukaan/bidang sisi (*face*)
(a) bidang-empat beraturan	*(tetrahedrä)*	4 daerah segitiga samasisi
(b) bidang-enam beraturan	*(hexahedrä)*	6 daerah persegi
(c) bidang-delapan beraturan	*(octahedrä)*	8 daerah segitiga samasisi
(d) bidang-duabelas beraturan	*(dodecahedrä)*	12 daerah segilima beraturan
(e) bidang-duapuluh beraturan	*(icosahedrä)*	20 daerah segitiga samasisi

Definisi Kubus

Kubus merupakan suatu bidang banyak yang terbentuk dari enam buah daerah persegi yang berdimensi/berukuran sama. Dengan kata lain, kubus adalah bidang banyak yang terbentuk dari enam buah daerah persegi yang sepasang-sepasang saling kongruen.

Berdasarkan Definisi Kubus tersebut, kubus diklasifikasikan sebagai bidang banyak-beraturan, dengan sebutan bidangenam-beraturan atau *heksahedra/heksahedron* (dalam bahasa Latin). Jika setiap sisi daerah persegi pembentuk suatu kubus berukuran s, maka kubus tersebut dikatakan berdimensi $s \times s \times s$ atau berdimensi s.



(a) **(b)**

Gambar 30. Kubus dan Kerangka Kubus

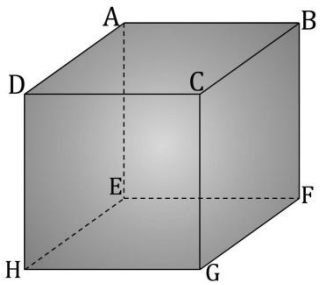
Gambar 30 (a) menunjukkan gambar sebuah kubus yang dimaksud sebagai suatu bidangenam beraturan. Setiap permukaan atau bidang sisi sebuah kubus berupa daerah persegi (bujursangkar).

Gambar garis putus-putus menunjukkan sisi daerah persegi yang tidak kelihatan langsung di depan mata. Ada 6 daerah persegi yang sepasang-sepasang bertemu sisinya, sehingga kubus mempunyai enam buah permukaan atau enam buah bidang sisi. Setiap bidang sisi sebuah kubus berupa daerah persegi, bukan persegi. Setiap bidang sisi kubus, setiap sisinya bertemu/berimpit dengan sisi dari bidang sisi yang lain. Jadi setiap bidang sisi kubus bertemu dengan empat buah bidang sisi yang berbeda dan pertemuannya pada sebuah sisi.

Setiap pertemuan dua buah bidang sisi pada sebuah kubus disebut rusuk kubus. **Gambar 30 (b),** menunjukkan keduabelas rusuk kubus (ditunjukkan rusuk-rusuknya saja dari suatu kubus tanpa bidang sisinya). **Gambar 30 (b)** merupakan gambar alat peraga yang mewujudkan suatu kubus, yang dinamakan alat peraga kerangka kubus. Karena sebuah rusuk pada suatu kubus merupakan sebuah sisi dari suatu daerah persegi pembentuknya, maka setiap rusuk pada sebuah kubus berupa sebuah ruas garis. Setiap dua bidang sisi kubus bertemu pada rusuk kubus, ada enam bidang sisi dalam suatu kubus, sehingga suatu kubus mempunyai 12 rusuk kubus. Untuk pembahasan tentang kubus selanjutnya phrase "rusuk kubus" disingkat dengan kata "rusuk".

Pertemuan setiap tiga buah rusuk pada sebuah kubus berupa sebuah titik, yang dinamakan titik sudut kubus. Karena setiap tiga bidang sisi kubus bertemu di satu titik sudut kubus, maka setiap titik sudut-kubus juga merupakan titik sudut ruang dalam kubus.

Bahwa pada suatu kubus setiap tiga rusuk bertemu pada sebuah titik, dan kubus mempunyai 12 rusuk, sehingga suatu kubus memiliki 8 buah titik sudut kubus atau 8 buah titik sudut ruang dalam kubus. Karena kubus mempunyai 8 buah titik sudut kubus, sehingga diperlukan 8 huruf untuk memberi nama kedelapan titik sudut kubus. Jika setiap titik sudut kubus diberinama, maka nama kubus mengikuti rangkaian nama titik-titik sudutnya.



Gambar 31. Kubus ABCD EFGH

Gambar31 merupakan contoh pemberian nama titik-titik sudut dari suatu kubus. Nama-nama titik sudut kubus digunakan juga untuk menunjukkan nama rusuk-rusuk kubus; dalam hal ini sebagai nama ujung-ujung ruas garis sebagai wujud rusuk kubus.

Gambar 31 menunjukkan gambar kubus ABCD.EFGH, yaitu kubus yang titik-titik sudutnya diberinama A. B, C, D, E, F, G, dan H. Pemberian nama titik dalam contoh ini dipilih huruf-huruf secara urut mengikuti urutan abjad untuk mempermudah penyebutannya. Kubus ABCD.EFGH merupakan gabungan 6 daerah persegi, yaitu

daerah persegi ABCD (bidang sisi ABCD), daerah persegi ADHE (bidang sisi ADHE), daerah persegi ABFE (bidang sisi ABFE), daerah persegi BCGF (bidang sisi BCGF), daerah persegi DCGH (bidang sisi DCGH), dan daerah persegi EFGH (bidang sisi EFGH).

Sebutan bagi kubus ABCD.EFGH pada **Gambar 31** tersebut dapat juga ditulis kubus EFGH.ABCD. Ditulis empat-empat huruf yang dipisahkan dengan titik; "ABCD.EFGH", dengan maksud untuk menunjukkan pembentuknya berupa daerah segiempat. Urutan huruf dalam susunan empat huruf pertama dan empat huruf kedua menunjukkan titik-titik tersebut ujung-ujung rusuknya. Rusuk-rusuk kubus ABCD.EFGH tersebut, yaitu $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{AD}$, $\overline{EF}$, $\overline{FG}$, $\overline{GH}$, $\overline{EH}$, $\overline{AE}$, $\overline{BF}$, $\overline{CG}$, dan $\overline{DH}$.

Setiap dua bidang sisi pada sebuah kubus yang tidak bertemu, dikatakan dua <u>bidang sisi yang berhadapan</u>, dan kedua bidang sisi yang berhadapan tersebut <u>saling sejajar</u>. Dari **Gambar 31:** bidang sisi ABFE berhadapan dengan bidang sisi DCGH, bidang sisi ADHE berhadapan dengan bidang sisi BCGF, bidang sisi ABCD berhadapan dengan bidang sisi EFGH. Adakah pasangan yang lain?

Bidang sisi ABFE yang berhadapan dengan bidang sisi DCGH dapat dikatakan pula bahwa bidang sisi ABFE sejajar dengan bidang sisi DCGH. Bidang sisi ADHE yang berhadapan dengan bidang sisi BCGF dapat dikatakan pula bahwa bidang sisi ADHE sejajar dengan bidang sisi BCGF. Bidang sisi ABCD yang berhadapan dengan bidang sisi EFGH dapat dikatakan pula bahwa bidang sisi ABCD sejajar dengan bidang sisi EFGH.

Dua buah rusuk dalam suatu kubus dapat bertemu/berpotongan atau tidak bertemu. Setiap dua buah rusuk yang bertemu dalam suatu kubus, maka pertemuan keduanya di suatu titik, yaitu pada ujung-ujung rusuk tersebut. Setiap dua buah rusuk yang tidak bertemu dalam suatu kubus, kedua rusuk tersebut dapat berhadapan atau kedua rusuk tersebut bersilangan.

Dalam **Gambar 31** rusuk $\overline{AD}$ dan rusuk $\overline{BC}$, keduanya terletak pada bidang sisi ABCD. Bidang sisi ABCD merupakan suatu daerah persegi ABCD. Dalam daerah persegi ABCD, sisi $\overline{AD}$ dan sisi $\overline{BC}$ saling sejajar. Karena itulah rusuk $\overline{AD}$ dan rusuk $\overline{BC}$ dalam kubus ABCD.EFGH, keduanya saling sejajar. Dalam lambang Geometri dituliskan $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$; rusuk $\overline{AD}$ sejajar dengan rusuk $\overline{BC}$. Coba sebutkan pasangan

lainnya! Perhatikan, bahwa lambang sejajar, yaitu "∥" (bukan "//"), sedangkan lambang tidak sejajar, yaitu "∦".

Dua rusuk yang tidak bertemu/berpotongan dan tidak saling sejajar dalam suatu kubus, kedua rusuk tersebut dikatakan saling bersilangan. Dari **Gambar 31** rusuk $\overline{CG}$ dan rusuk $\overline{AB}$, keduanya tidak bertemu dan juga tidak sejajar. Oleh karena itu rusuk $\overline{CG}$ dan rusuk $\overline{AB}$ dikatakan saling bersilangan, ditulis "$\overline{CG} \nparallel \overline{AB}$". Rusuk $\overline{CG}$ dan rusuk $\overline{AD}$, keduanya tidak bertemu dan juga tidak sejajar. Oleh karena itu rusuk $\overline{CG}$ dan rusuk $\overline{AD}$ juga dikatakan saling bersilangan, ditulis "$\overline{CG} \nparallel \overline{AD}$". Dari **Gambar 31** rusuk $\overline{CG}$ juga tidak bertemu dengan rusuk $\overline{EF}$, dan keduanya juga tidak sejajar. Oleh karena itu rusuk $\overline{CG}$ dan rusuk $\overline{EF}$ juga dikatakan saling bersilangan, ditulis "$\overline{CG} \nparallel \overline{EF}$". Rusuk $\overline{CG}$ tidak bertemu dengan rusuk $\overline{EH}$, dan keduanya juga tidak sejajar. Oleh karena itu rusuk $\overline{CG}$ dan rusuk $\overline{EH}$ juga dikatakan saling bersilangan, ditulis "$\overline{CG} \nparallel \overline{EH}$". Jadi, melalui **Gambar 31**, bertumpu pada sebuah rusuk, yaitu rusuk $\overline{CG}$, terdapat 4 buah rusuk yang bersilangan dengannya. Dengan perkataan lain, dalam kubus ABCD.EFGH, sebuah rusuk berpasangan dengan empat rusuk lain dengan relasi saling bersilangan.

b. Balok dan Prisma

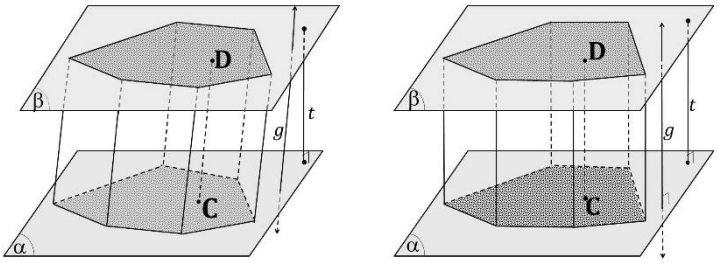
Sebuah balok merupakan sebuah prisma. Tetapi sebuah prisma belum tentu merupakan sebuah balok. Seringkali orang memahami balok dan prisma sebagai dua hal yang terpisah. Oleh karena itu kita pelajari dulu tentang prisma untuk memahami pengertian balok.

<u>Definisi Prisma</u>

Misalkan α dan β adalah dua buah bidang yang saling sejajar, **R** sebuah daerah segi banyak pada bidang-α, dan sebuah garis g yang tidak sejajar terhadap kedua bidang tersebut dan tidak memotong daerah segi banyak tersebut. Untuk setiap titik pada daerah segi banyak **R**, misalnya C, terdapat $\overline{CD}$, suatu ruagaris yang <u>sejajar</u> dengan g sedemikian, sehingga titik D pada bidang-β. Setiap titik pada bidang-β seperti titik D membentuk suatu daerah segi banyak **R'**. Gabungan semua ruas garis tersebut dan interior-interior daerah segi banyak **R** dan **R'** dinamakan suatu **<u>prisma</u>**.

Daerah segi banyak **R** tersebut dinamakan **bidang alas** atau ***base*** dari prisma. Himpunan semua titik yang identik dengan titik **D**, yang terletak pada bidang β tersebut dinamakan **bidang atas** prisma. Jarak antara bidang alas dan bidang atas suatu prisma merupakan tinggi prisma.

Gambar 32 menunjukkan visualisasi dari Definisi Prisma dengan dua kemungkinan. Kemungkinan I, **Gambar 32 (a)**, dan Kemungkinan II **Gambar 32 (b)**.



(a) **(b)**

Gambar 32. Visualisasi dari Definisi Prisma

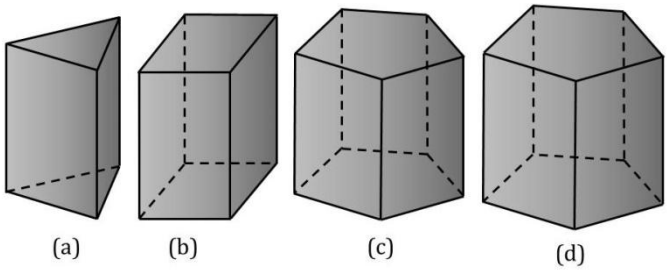
Kemungkinan I, **Gambar 32 (a)**, garis *g* tidak tegak lurus terhadap bidang-α maupun bidang-β, karena bidang-α sejajar dengan bidang β. Kemungkinan II, **Gambar 32 (b)**, garis *g* tegak lurus terhadap bidang α maupun bidang β, karena bidang α sejajar dengan bidang β. Jarak antara bidang α dan bidang β, ditunjukkan dengan gambar ruas garis, berukuran *t*. Jarak antara bidang α dan bidang β tersebut sebagai tinggi prisma.

Setiap titik seperti titik C terletak di daerah segi banyak **R**, artinya titik tersebut terletak pada sisi daerah segi banyak **R** atau titik tersebut terletak di daerah dalam (*interior*) segi banyak **R**. Karena ruas garis, seperti $\overline{CD}$, sejajar terhadap garis *g*, maka setiap titik, seperti titik D, membentuk suatu daerah segi banyak **R'** pada bidang β. Misalkan titik C terletak pada sisi daerah segi banyak **R**, maka titik D juga terletak pada sisi daerah segi banyak **R',** sehingga ruas garis $\overline{CD}$ sejajar dengan garis *g*. Misalkan titik C terletak di daerah dalam daerah segi banyak **R**, maka titik D juga terletak di daerah dalam daerah segi banyak **R',** sehingga ruas garis $\overline{CD}$ sejajar dengan garis *g*.

Berdasarkan penjelasan tentang ruas garis $\overline{CD}$ yang dimaksud dalam Definisi Prisma, cukup jelas bahwa suatu prisma merupakan gabungan ruas garis-ruas garis yang sejajar dengan suatu garis dan ujung-ujung ruas garis-ruas garis tersebut pada dua daerah segi banyak sebagai bidang alas dan bidang atas. Setiap titik pada bidang alas prisma dikorespondensikan oleh ruas garis dengan satu titik pada bidang atas

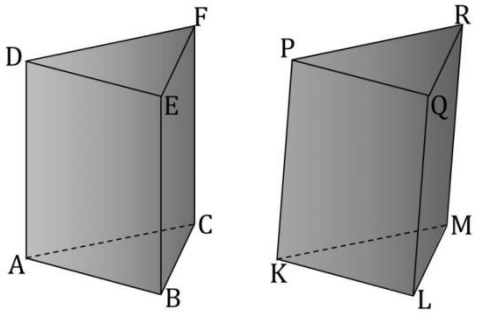
prisma. Sehingga bidang alas dan bidang atas suatu prisma, keduanya saling kongruen.

Prisma-prisma diklasifikasikan menurut bentuk bidang alasnya: prisma yang bidang alasnya berbentuk segitiga dinamakan prisma segitiga (**Gambar33 (a)**), prisma yang bidang alasnya berbentuk segiempat dinamakan prisma segiempat (**Gambar 33 (b)**), prisma yang bidang alasnya berbentuk segilima dinamakan prisma segilima (**Gambar 33 (c)**), prisma yang bidang alasnya berbentuk segienam dinamakan prisma segienam (**Gambar 33 (d)**), dan seterusnya.



Gambar 33. Visualisasi Empat Jenis Prisma

Ada berbagai macam segi banyak, sehingga ada berbagai macam prisma sesuai bidang alasnya. Pemberian nama suatu prisma, dengan memberinama titik sudut-titik sudut bidang alas maupun bidang atas. Nama setiap titik sudut bidang alas maupun bidang atas suatu prisma menggunakan nama dengan huruf capital alphabetic. Sebutan suatu prisma didahului klasifikasinya diikuti nama-nama titik sudut bidang alasnya dan bidang atasnya.



(a) **(b)**

Gambar 34. Prisma-tegak Segitiga ABC.DEF dan Prisma-condong Segitiga KLM.PQR

Misalnya prisma-tegak-segitiga ABC.DEF, prisma-condong-segitiga KLM.PQR; tiga huruf pertama menunjukkan titik sudut-titik sudut bidang alasnya dan tiga huruf berikutnya (dipisahkan dengan tanda titik) menunjukkan titik sudut-titik sudut bidang atas yang berkorespondensi mengikuti rusuk tegaknya.

Definisi ***Rusuk tegak, Bidang sisi, Selimut, Permukaan Prisma***

Rusuk tegak suatu prisma adalah unsur prisma yang berupa ruas garis yang ujung-ujungnya merupakan titik-titik sudut bidang alas dan bidang atas prisma yang berkorespondensi. **Bidang sisi** suatu prisma adalah gabungan unsur-unsur prisma yang ujung-ujungnya merupakan titik-titik pada sisi-sisi bidang alas dan bidang atas prisma tersebut yang berkorespondensi. **Selimut** suatu prisma adalah gabungan semua bidang sisi prisma tersebut. **Permukaan** suatu prisma adalah gabungan dari selimut, bidang alas dan bidang atas prisma tersebut.

Ruas garis-ruas garis pembentuk prisma dapat tegak lurus terhadap bidang alas, dapat juga tidak tegak lurus terhadap bidang alasnya. Jika ruas garis-ruas garis pembentuk prisma tegak lurus terhadap bidang alasnya, maka rusuk tegak-rusuk tegak prisma tersebut tegak lurus terhadap bidang alasnya. Prisma yang semua rusuk tegaknya tegak lurus terhadap bidang alasnya disebut prisma-tegak. Misalnya **Gambar 34 (a)**, gambar suatu prisma-tegak segitiga ABCDEF. Jika ruas garis-ruas garis pembentuk prisma tidak tegak lurus terhadap bidang alasnya, maka rusuk tegak-rusuk tegak prisma tersebut tidak tegak lurus terhadap bidang alasnya. Prisma yang semua rusuk tegaknya tidak tegak lurus terhadap bidang alasnya disebut prisma-miring/prisma-condong. Misalnya **Gambar 34 (b)**, gambar suatu prisma-condong segitiga KLM.PQR.

Untuk memahami definisi bidang alas, bidang atas, rusuk tegak, bidang sisi, selimut, dan permukaan prisma, dalam modul ini penjelasan isi definisi tersebut memanfaatkan prisma segitiga, dengan bantuan **Gambar 34**, yang selanjutnya dianalogikan pada jenis prisma yang lain.

Gambar 34 (a), Prisma-tegak-segitiga ABC.DEF:

a. Bidang alasnya, yaitu daerah segitiga ABC (bidang alas ABC), dan bidang atasnya, yaitu daerah segitiga DEF (bidang atas DEF);
b. Bidang sisi-bidang sisinya, yaitu: daerah persegipanjang ABED (bidang sisi ABED), daerah persegipanjang ACFD (bidang sisi ACFD), daerah persegipanjang BCFE (bidang sisi BCFE);
c. Rusuk tegak-rusuk tegaknya, yaitu: rusuk AD ($\overline{AD}$), rusuk BE ($\overline{BE}$), rusuk CF ($\overline{CF}$);
d. Selimutnya, yaitu gabungan bidang sisi ABED, bidang sisi ACFD, dan bidang sisi BCFE;

e. Permukaannya, yaitu gabungan bidang alas ABC, bidang atas DEF, bidang sisi ABED, bidang sisi ACFD, dan bidang sisi BCFE.

Gambar 34 (b), Prisma-condong-segitiga KLM.PQR:

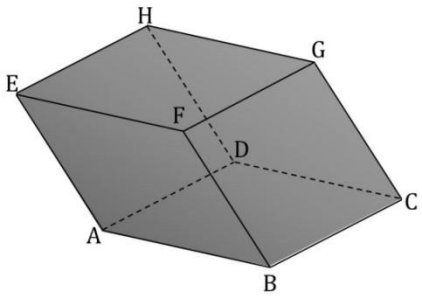
a. Bidang alasnya, yaitu daerah segitiga KLM (bidang alas KLM), dan bidang atasnya, yaitu daerah segitiga PQR (bidang atas PQR);
b. Bidang sisi-bidang sisinya, yaitu: daerah jajargenjang KLQP (bidang sisi KLQP), daerah jajargenjang LMRQ (bidang sisi LMRQ), daerah jajargenjang KMRP (bidang sisi KMRP);
c. Rusuk tegak-rusuk tegaknya, yaitu: rusuk KP ($\overline{KP}$), rusuk LQ ($\overline{LQ}$), rusuk MR ($\overline{MR}$);
d. Selimutnya, yaitu: gabungan bidang sisi KLQP, bidang sisi LMRQ, dan bidang sisi KMRP;
e. Permukaannya, yaitu gabungan bidang alas KLM, bidang atas PQR, bidang sisi KLQP, bidang sisi LMRQ, dan bidang sisi KMRP.

Definisi Paralelepipedum, Paralelepipedum Siku-siku

Suatu paralelepipedum (baca: *parallel-epi-pedum*) adalah suatu prisma yang bidang alas dan bidang atasnya berupa daerah jajargenjang yang saling kongruen dan bidang sisi-bidang sisinya juga berupa daerah jajargenjang.

Suatu paralelepipedum siku-siku adalah paralalelepipedum-tegak yang bidang alas dan bidang atasnya berupa daerah persegipanjang atau suatu prisma-tegak persegipanjang.

Dari definisi paralelepipedum, cukup jelas kiranya, bahwa suatu paralelepipedum merupakan suatu jenis prisma-condong segiempat, atau disebut sebagai prisma-condong jajargenjang. **Gambar 35** merupakan visualisasi dari paralelepipedum.

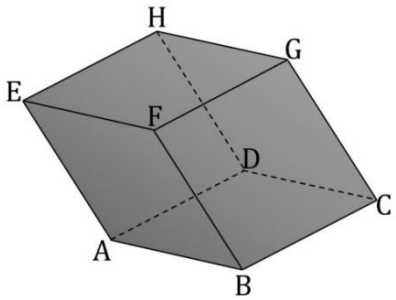


Gambar 35. Paralelepedum ABCD EFGH

Paralelepipedum yang digambarkan dalam **Gambar 35** dinamakan paralelepipedum ABCD.EFGH. Dalam hal ini dipilih daerah jajargenjang ABCD sebagai bidang alas dan daerah jajargenjang EFGH sebagai bidang atas. Keduanya saling kongruen dan sejajar. Empat rusuk tegaknya, yaitu $\overline{AE}$, $\overline{BF}$, $\overline{CG}$, dan $\overline{DH}$. Keempat rusuk tegak tersebut saling kongruen, sehingga $\overline{AE} \cong \overline{BF} \cong \overline{CG} \cong \overline{DH}$.

Dalam paralelepipedum ABCD.EFGH, bidang sisi ABFE, bidang sisi ADHE, bidang sisi BCGF, dan bidang sisi DCGH, masing-masing berupa daerah jajargenjang. Gabungan antara bidang sisi ABFE, bidang sisi ADHE, bidang sisi BCGF, dan bidang sisi DCGH merupakan selimut dari paralelepipedum ABCD.EFGH. Dan permukaan paralel-epipedum ABCD.EFGH adalah gabungan antara bidang alas ABCD, bidang atas EFGH, bidang sisi ABFE, bidang sisi ADHE, bidang sisi BCGF, dan bidang sisi DCGH.

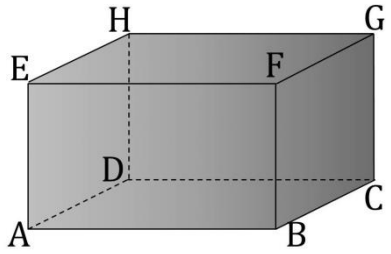
Bidang alas, bidang atas, dan bidang sisi-bidang sisi suatu paralelepipedum berupa daerah jajargenjang. Belahketupat merupakan suatu jajargenjang. Bidang alas, bidang atas, dan bidang sisi-bidang sisi suatu paralelepipedum dapat berupa daerah belahketupat. Suatu paralelepipedum yang bidang alas, bidang atas dan semua bidang sisinya berupa belahketupat dinamakan **rhoemboeder**.



Gambar 36. Rhoemboeder ABCD EFGH

Gambar 36 menunjukkan visualisasi dari suatu rhoemboeder ABCD.EFGH. Dalam **Gambar 36**, setiap daerah segiempat yang terlihat berupa suatu belahketupat. Keenam daerah belahketupat tersebut saling kongruen.

Dalam definisi paralelepipedum disebutkan, bahwa suatu <u>paralelepipedum siku-siku</u> adalah paralalelepipedum-tegak yang bidang alas dan bidang atasnya berupa daerah persegipanjang. Karena paralelepipedum siku-siku merupakan paralel-epipedum tegak, maka keempat rusuk tegaknya tegak lurus terhadap bidang alas maupun bidang atasnya. Hal ini menunjukkan bahwa keempat bidang sisi paralelepipedum siku-siku berupa daerah persegipanjang. Jadi bidang alas, bidang atas, dan semua bidang sisi suatu paralelepipedum siku-siku berupa daerah persegipanjang.



Gambar 37. Balok ABCD EFGH

Suatu paralelepipedum siku-siku disebut juga suatu prisma-tegak persegipanjang. Dalam matematika Indonesia, paralelepipedum siku-siku tersebut dinamakan dengan **balok**. Jadi suatu balok merupakan suatu prisma-tegak persegipanjang, sehingga semua sifat prisma berlaku pada balok.

Pemberian nama suatu balok serupa pemberian nama pada prisma. Misalnya seperti dalam **Gambar 37** yang menunjukkan suatu balok yang setiap titik sudut pada bidang alasnya diberinama A, B, C, dan D, sedangkan setiap titik sudut pada bidang atasnya diberi nama E, F, G, dan H.

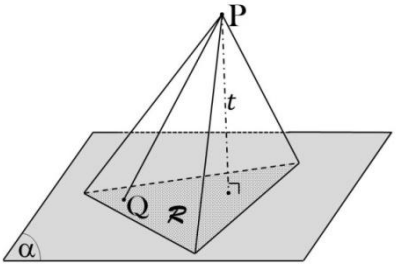
Pada **Gambar 37**., balok ABCD.EFGH mempunyai:

a. Bidang alasnya, yaitu bidang alas ABCD, dan bidang atasnya, yaitu bidang atas EFGH;
b. Bidang sisi-bidang sisinya, yaitu: bidang sisi ABFE, bidang sisi BCGF, bidang sisi CDHG, dan bidang sisi ADHE. Berdasarkan definisi prisma, karena balok merupakan suatu prisma, maka gabungan bidang sisi-bidang sisi balok merupakan selimut balok. Sedangkan permukaan balok adalah gabungan bidang alas, bidang atas, dan bidang sisi-bidang sisi balok.
c. Rusuk tegak-rusuk tegak: rusuk AE ($\overline{AE}$), rusuk BF ($\overline{BF}$), rusuk CG ($\overline{CG}$), rusuk DH ($\overline{DH}$). Berdasarkan definisi prisma, dan balok juga merupakan suatu prisma, maka ruas garis-ruas garis: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{AD}$, $\overline{EF}$, $\overline{FG}$, $\overline{GH}$, $\overline{EH}$, tidak dinyatakan sebagai rusuk. Namun dalam pembelajaran matematika di sekolah kedelapan ruas garis tersebut dinyatakan sebagai rusuk balok. Untuk membedakannya dengan rusuk tegak, kedelapan ruas garis tersebut kita sebut sebagai: rusuk-bidang alas; yaitu: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{AD}$, dan rusuk-bidang atas; yaitu $\overline{EF}$, $\overline{FG}$, $\overline{GH}$, $\overline{EH}$, dari suatu balok ABCD.EFGH.

c. Limas

Definisi Limas

Dipandang suatu bidang α yang memuat sebuah daerah segi banyak $\mathcal{R}$ dan suatu titik P tidak pada bidang α. Untuk setiap titik Q pada $\mathcal{R}$ (pada sisi-sisi maupun di daerah dalam segi banyak) tersebut, ada rusgaris $\overline{PQ}$. Gabungan semua ruas garis-ruas garis tersebut dinamakan **limas**. Jarak antara titik P dan bidang-α adalah tinggi limas tersebut.



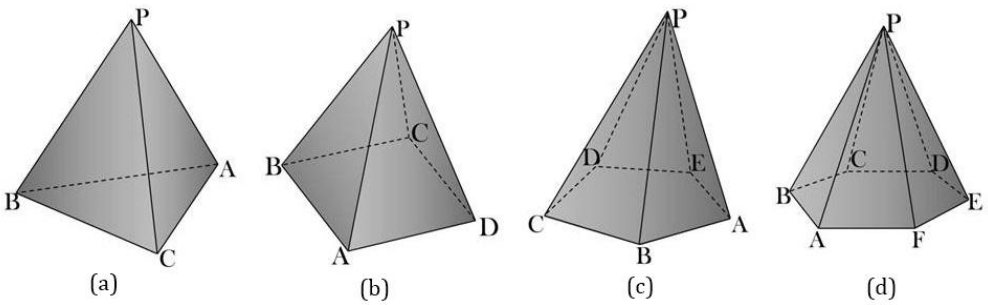
Gambar 38. Visualisasi Definisi Limas

Gambar 38 merupakan visualisasi Definisi Limas, dalam hal ini daerah segi banyak $\mathcal{R}$ dimisalkan daerah segitiga. Dalam definisi limas tersebut: titik P disebut puncak limas, daerah segi banyak $\mathcal{R}$ dinamakan bidang alas.

Daerah segi banyak $\mathcal{R}$, maksudnya bahwa segi banyak apapun beserta semua titik di daerah dalamnya. Jadi bidang alas suatu limas dapat berupa daerah segitiga, daerah segiempat, daerah segilima, daerah segienam, daerah segitujuh, dan seterusnya. Jarak dari puncak limas ke bidang yang memuat bidang alas limas merupakan tinggi limas (dilambangkan dengan ***t***).

Daerah segi banyak $\mathcal{R}$ memiliki sisi-sisi dan titik sudut-titik sudut. Sisi-sisi daerah segi banyak $\mathcal{R}$ dinamakan batas bidang alas. Semua titik sudut daerah segi banyak $\mathcal{R}$ perlu diberinama dengan huruf capital alphabetic. Nama titik puncak limas dan nama-nama titik sudut daerah segi banyak $\mathcal{R}$ digunakan untuk memberinama limas.

Jenis-jenis limas didasarkan dari bentuk daerah segi banyak $\mathcal{R}$. Contoh-contoh limas ditunjukkan dalam **Gambar 39**.



Gambar 39. Contoh-contoh Limas

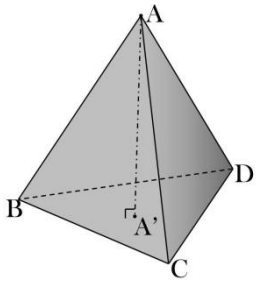
Gambar 39 (a) menunjukkan suatu contoh limas segitiga P.ABC. **Gambar 39 (b)** menunjukkan suatu contoh limas segiempat P.ABCD. **Gambar 39 (c)** menunjukkan suatu contoh limas segilima P.ABCDE. **Gambar 39 (d)** menunjukkan suatu contoh limas segienam P.ABCDEF.

Penulisan susunan huruf capital pada bagian akhir nama limas yang dipisahkan dengan tanda titik, misalkan P.ABCD, menunjukkan huruf pertama sebagai nama puncak limas, dan huruf-huruf berikutnya merupakan titik sudut-titik sudut bidang alas limas. Nama puncak limas tidak harus P, semua huruf capital bisa digunakan, dengan syarat nama puncak limas harus berbeda dengan nama-nama titik sudut bidang alas limas.

Definisi Garis-pelukis, Rusuk tegak, Bidang sisi, Selimut, dan Permukaan Limas

Garis-pelukis limas adalah ruas garis pembentuk limas yang salah satu ujungnya terletak pada sisi bidang alas limas. **Rusuk tegak** limas adalah garis-pelukis limas yang salah satu ujungnya merupakan titik sudut bidang alas limas. **Bidang sisi** limas adalah gabungan dua rusuk tegak yang berdekatan dan semua garis-pelukis di antara dua rusuk tegak tersebut. **Selimut** limas adalah gabungan semua bidang sisi dalam suatu limas. **Permukaan** limas adalah gabungan bidang alas dan semua bidang sisi dalam suatu limas.

Untuk memahami Definisi garis pelukis, rusuk tegak, bidang sisi, selimut, dan permukaan limas tersebut dipilih **Gambar 39 (a)**, yang dalam hal ini memanfaatkan limas segitiga P.ABC. Limas segitiga P.ABC, yaitu limas dengan puncak P dan bidang alasnya daerah segitiga ABC. Beberapa garis pelukis limas segitiga P.ABC, yaitu ruas garis-ruas garis $\overline{PA}$, $\overline{PB}$, $\overline{PC}$, dan misalkan $\overline{PQ}$, dalam hal ini Q titik pada sisi bidang alas ABC. Ketiga rusuk tegak limas segitiga P.ABC, yaitu ruas garis-ruas garis $\overline{PA}$, $\overline{PB}$, dan $\overline{PC}$. Salah satu bidang sisi limas segitiga P.ABC, yaitu daerah segitiga PAC dan dinamakan bidang sisi PAC. Bidang sisi-bidang sisi limas segitiga P.ABC yang lainnya, yaitu daerah segitiga PAB yang dinamakan bidang sisi PAB dan daerah segitiga PBC yang dinamakan bidang sisi PBC. Selimut limas segitiga P.ABC, yaitu gabungan dari bidang sisi PAB, bidang sisi PAC, dan bidang sisi PBC. Permukaan limas segitiga P.ABC, yaitu gabungan dari bidang alas ABC, bidang sisi PAB, bidang sisi PAC, dan bidang sisi PBC.



Gambar 40. Visualisasi Tinggi Limas Segitiga A.BCD

Jarak antara puncak limas dan bidang yang memuat bidang alas limas, atau jarak antara puncak limas dan bidang alas limas dapat dipikirkan sebagai jarak antara puncak limas dan proyeksinya ke bidang yang memuat bidang alas limas.

Gambar 40 menunjukkan proyeksi puncak limas ke bidang yang memuat bidang alas limas; dalam hal ini memanfaatkan limas segitiga A.BCD (limas dengan puncak A dan bidangalasnya berupa daerah segitiga BCD). Jarak antara titik A dan titik A' tersebut sebagai tinggi limas segitiga A.BCD.

Jika proyeksi puncak limas ke bidang yang memuat bidang alas limas terletak pada bidang alas limas, maka limas tersebut dikatakan sebagai **limas-tegak**. Dalam hal ini proyeksi puncak limas dapat terletak di daerah dalam bidang alas, atau terletak pada batas bidang alas, atau berimpit dengan titik sudut bidang alas. Jika proyeksi puncak limas ke bidang yang memuat bidang alas limas terletak di luar bidang alas limas, maka limas tersebut dikatakan sebagai **limas-condong/miring**. Dalam pembelajaran matematika di sekolah, limas tegak inilah yang pada umumnya diajarkan/dipelajari siswa.

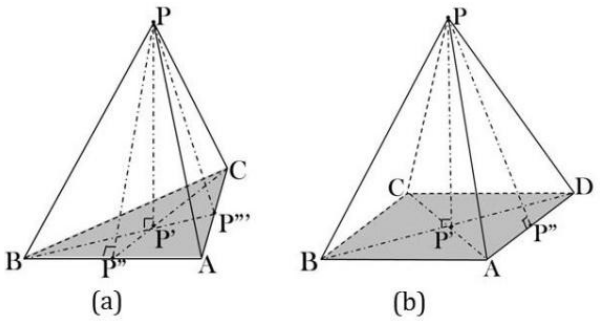
Definisi Limas beraturan, Apothema

> Suatu **limas beraturan** adalah suatu limas yang bidang alasnya berupa daerah segi banyak beraturan, dan proyeksi puncaknya berimpit dengan titik pusat bidang alas limas. **Apothema limas beraturan** adalah jarak antara puncak limas dan batas bidang alas limas. Apothema limas beraturan dilambangkan dengan "*s*", dan tinggi limas dilambangkan dengan "*h*" atau "*t*".

Berdasarkan definisi tersebut, limas beraturan merupakan suatu limas-tegak. Berdasarkan definisi limas beraturan tersebut, maka bidang sisi suatu limas-beraturan berupa daerah segitiga samakaki. Semua bidang sisi suatu limas-beraturan saling kongruen. Apothema merupakan suatu bilangan real positf, dan bukan suatu ruas garis, tetapi panjang ruas garis. Aphotema limas hanya dimiliki

oleh limas beraturan, karena nilainya tunggal untuk suatu limas beraturan (mengapa?).

Berdasarkan definisi tersebut, jika suatu limas merupakan limas tegak, tetapi proyeksi puncaknya tidak berimpit dengan titik pusat bidang alasnya, maka limas tersebut dinamakan limas tak-beraturan. Dalam limas tak-beraturan, bidang sisi-bidang sisinya tidak saling kongruen. Dalam modul ini dan di dalam pembelajaran matematika sekolah limas yang dibahas, yaitu limas beraturan (limas tegak beraturan).



Gambar 41. Dua Limas Beraturan dan Aphotemanya

Gambar 41 menunjukkan visualisasi dua limas beraturan dan aphotemanya. Dalam **Gambar 41 (a)**, yaitu limas segitiga beraturan P.ABC, berpuncak P dan bidang alasnya daerah segitiga samasisi ABC.

Proyeksi titik P ke bidang alasnya adalah titik P', sehingga tinggi limas tersebut adalah t = PP'. Titik P' berimpit dengan titik-pusat daerah segitiga samasisi ABC. Titik-pusat daerah segitiga samasisi ABC, yaitu perpotongan ketiga garisbagi sudut dalam daerah segitiga samasisi ABC. Aphotema limas segitiga samasisi P.ABC divisualisaikan oleh ruas garis $\overline{PP''}$ dan ruas garis $\overline{PP'''}$; dalam hal ini $\overline{PP''} \perp \overline{AB}$ dan $\overline{PP'''} \perp \overline{AC}$. Titik P'' merupakan titik-tengah sisi $\overline{AB}$ dan titik P''' merupakan titik-tengah sisi $\overline{AC}$. Jadi aphotema limas segitiga samasisi P.ABC adalah s = PP'' atau s = PP'''; dapat dipilih salah satu.

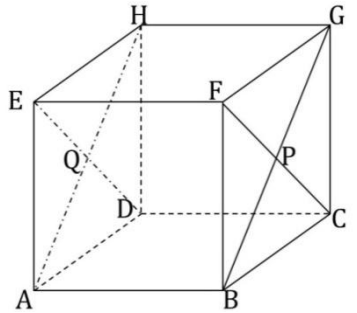
Dalam **Gambar 41 (b)**, yaitu limas segiempat beraturan P.ABCD atau limas persegi P.ABCD, berpuncak P dan bidang alasnya daerah persegi ABCD. Proyeksi titik P ke bidang alasnya adalah titik P', sehingga tinggi limas tersebut adalah t = PP'. Titik P' berimpit dengan titik-pusat daerah persegi ABCD. Titik-pusat persegi ABCD, yaitu perpotongan keempat garisbagi sudut dalam persegi ABCD atau perpotongan kedua diagonal persegi ABCD. Aphotema limas persegi P.ABCD divisualisaikan oleh ruas garis $\overline{PP''}$; dalam hal ini $\overline{PP''} \perp \overline{AD}$. Titik P'' merupakan titik-tengah sisi $\overline{AD}$. Jadi aphotema limas persegi P.ABCD adalah s = PP''.

2. Diagonal-diagonal dalam Kubus da Balok

a. Diagonal-diagonal dalam Kubus

1) Diagonal sisi

Pasangan titik sudut yang berhadapan dalam suatu bidang sisi kubus merupakan dua titik yang berbeda. Kedua titik tersebut pasti dilalui oleh tepat satu garis. Karena itulah dua titik sudut yang berhadapan dalam suatu bidang sisi kubus pasti dilalui oleh tepat sebuah garis. Ruas garis yang ujung-ujungnya merupakan pasangan titik sudut yang berhadapan dalam bidang sisi kubus dinamakan **diagonal sisi** dalam kubus.



Gambar 42. Contoh Diagonal sisi dalam Kubus ABCD.EFGH

Dalam **Gambar 42** ditunjukkan diagonal-diagonal sisi dalam bidang sisi BCGF dan bidang sisi ADHE dalam kubus ABCD.EFGH. Diagonal sisi $\overline{FC}$ dan diagonal sisi $\overline{BG}$ dalam bidang sisi BCGF. Sedangkan diagonal sisi $\overline{ED}$ dan diagonal sisi $\overline{AH}$ dalam bidang sisi ADHE.

Diagonal sisi $\overline{FC}$ dan diagonal sisi $\overline{ED}$, keduanya saling sejajar ($\overline{FC} \parallel \overline{ED}$). Demikian pula antara diagonal sisi $\overline{BG}$ dan diagonal sisi $\overline{AH}$, keduanya juga saling sejajar ($\overline{BG} \parallel \overline{AH}$).

Pada **Gambar 42** terlihat jelas bahwa diagonal sisi $\overline{FC}$ dan diagonal sisi $\overline{ED}$ merupakan dua buah sisi yang berhadapan dalam segiempat EFCD. Sisi-sisi segiempat EFCD, yaitu $\overline{EF}, \overline{FC}, \overline{CD}$, dan $\overline{DE}$. Sisi $\overline{EF}$ dan sisi $\overline{CD}$ merupakan rusuk-rusuk kubus ABCD.EFGH yang saling berhadapan. Keduanya saling sejajar dan saling kongruen. Karena itulah segiempat EFCD merupakan suatu jajargenjang. Akibatnya sisi $\overline{FC}$ dan sisi $\overline{DE}$ keduanya saling sejajar.

Dalam **Gambar 42,** pasangan diagonal sisi $\overline{FC}$ dan diagonal sisi $\overline{BG}$ berpotongan di titik P, sedangkan pasangan $\overline{ED}$ dan diagonal sisi $\overline{AH}$ berpotongan di titik Q. Sepasang diagonal sisi pada satu bidang sisi dalam suatu kubus pasti saling berpotongan.

Gambar 42 juga menunjukkan pasangan diagonal sisi dari dua bidang sisi yang saling berhadapan. Pasangan diagonal sisi $\overline{FC}$ dan diagonal sisi $\overline{ED}$ saling sejajar, juga pasangan diagonal sisi $\overline{BG}$ dan diagonal sisi $\overline{AH}$. Namun pasangan diagonal sisi $\overline{FC}$ dan diagonal sisi $\overline{AH}$ tidak saling sejajar. Demikian juga pasangan diagonal sisi $\overline{BG}$ dan diagonal sisi $\overline{ED}$ tidak saling sejajar. Pasangan diagonal sisi $\overline{FC}$ dan diagonal sisi $\overline{AH}$ dikatakan saling bersilangan, juga pasangan diagonal sisi $\overline{BG}$ dan diagonal sisi $\overline{ED}$.

Panjang diagonal sisi kubus adalah panjang diagonal bidang sisinya. Karena setiap bidang sisi kubus berupa daerah persegi, maka panjang diagonal sisi kubus merupakan panjang diagonal daerah persegi pembentuknya. Jika kubus ABCD.EFGH berdimensi s (panjang rusuknya s), maka panjang setiap diagonal sisinya adalah $s\sqrt{2}$ satuan panjang.

2) Bidang diagonal

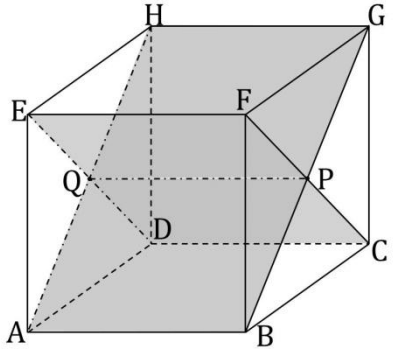
Dari **Gambar 42**, gabungan pasangan diagonal sisi $\overline{FC}$ dan diagonal sisi $\overline{ED}$ yang saling sejajar, dan pasangan rusuk $\overline{EF}$ dan rusuk $\overline{CD}$ yang saling berhadapan merupakan suatu segiempat EFCD. Pasangan diagonal sisi $\overline{FC}$ dan diagonal sisi $\overline{ED}$ saling sejajar juga terletak pada satu bidang. Sehingga segiempat EFCD merupakan segi banyak yang berupa suatu jajargenjang, karena $\overline{FC} \parallel \overline{ED}$, dan $\overline{EF} \parallel \overline{CD}$. Selanjutnya segiempat EFCD kita sebut jajargenjang EFCD.

Diagonal sisi $\overline{FC}$ terletak pada bidang sisi BCGF. Rusuk $\overline{EF}$ tegak lurus terhadap bidang sisi BCGF. Karena itulah diagonal sisi $\overline{FC}$ tegak lurus terhadap rusuk $\overline{EF}$ ($\overline{FC} \perp \overline{EF}$). Rusuk $\overline{CD}$ juga tegak lurus terhadap bidang sisi BCGF. Karena itu diagonal sisi $\overline{FC}$ juga tegak lurus terhadap rusuk $\overline{CD}$ ($\overline{FC} \perp \overline{CD}$). Jadi dalam jajargenjang EFCD terdapat pasangan dua sisi yang tegak lurus terhadap salah satu sisi. Karena itulah jajargenjang EFCD merupakan suatu persegipanjang. Selanjutnya jajargenjang EFCD kita sebut persegipanjang EFCD. Dari analisis tersebut coba Anda analogikan untuk menunjukkan segiempat ABGH dalam kubus ABCD.EFGH merupakan suatu persegipanjang.

Persegipanjang EFCD terletak pada suatu bidang, oleh karena itu ada titik-titik di daerah dalam persegipanjang EFCD. Gabungan persegipanjang EFCD dan semua titik

di dalamnya, dalam kubus ABCD.EFGH dinamakan **bidang diagonal EFCD**. Gabungan persegipanjang ABGH dan semua titik di dalamnya, atau daerah persegipanjang ABGH, dalam kubus ABCD.EFGH dinamakan **bidang diagonal ABGH**.

Bidang diagonal EFCD dan bidang diagonal ABGH ditunjukkan dalam **Gambar 43.** Perpotongan antara diagonal sisi $\overline{FC}$ dan diagonal sisi $\overline{BG}$ berpotongan di titik P, dan antara diagonal sisi $\overline{ED}$ dan diagonal sisi $\overline{AH}$ berpotongan di titik Q, menunjukkan bahwa bidang diagonal EFCD dan bidang diagonal ABGH berpotongan.



Gambar 43. Contoh Bidang diagonal dalam Kubus ABCD EFGH

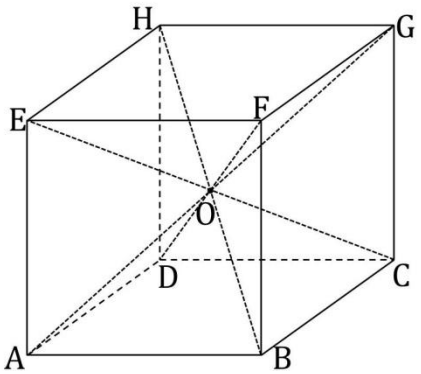
Karena bidang diagonal EFCD dan bidang diagonal ABGH masing-masing merupakan daerah persegipanjang, maka perpotongan antara bidang diagonal EFCD dan bidang diagonal ABGH berupa suatu ruas garis, yaitu $\overline{PQ}$. Hal ini sesuai dengan teori dasar Geometri (Geometri Ruang), bahwa perpotongan dua buah bidang adalah suatu garis. **Gambar 43** juga menunjukkan perpotongan antara bidang diagonal EFCD dan bidang diagonal ABGH dalam kubus. ABCD.EFGH.

Ukuran bidang diagonal suatu kubus adalah luas bidang diagonal tersebut. Karena setiap bidang diagonal dalam suatu kubus berupa daerah persegipanjang, maka luas bidang diagonal dalam suatu kubus adalah luas daerah persegipanjang. Daerah persegipanjang dalam hal ini memiliki sisi-lebar berupa rusuk kubus dan sisi-panjang berupa diagonal sisi kubus. Oleh karena itu, jika suatu kubus berdimensi s, maka ukuran bidang diagonalnya adalah $s^2\sqrt{2}$ satuan luas.

3) Diagonal ruang

Kubus mempunyai empat pasang titik sudut-ruang yang saling berhadapan. Atau dengan perkataan lain, dalam suatu kubus ada empat pasang titik sudut yang berhadapan dalam ruangnya. Pasangan titik sudut yang berhadapan dalam ruang kubus merupakan pasangan dua titik yang berbeda. Karena itulah dua titik sudut

yang berhadapan dalam ruang suatu kubus pasti dilalui oleh tepat sebuah garis. Ruas garis yang ujung-ujungnya merupakan pasangan titik sudut yang berhadapan dalam ruang kubus dinamakan **diagonal ruang** dalam kubus. Dalam ruang suatu kubus terdapat empat pasang titik sudut yang saling berhadapan.



Gambar 44. Keempat Diagonal ruang dalam Kubus ABCD.EFGH

Karena itulah dalam suatu kubus terdapat empat diagonal ruang. Keempat diagonal ruang dalam kubus ABCD.EFGH yaitu: diagonal ruang AG ($\overline{AG}$), diagonal ruang EC ($\overline{EC}$), diagonal ruang BH ($\overline{BH}$), dan diagonal ruang FD ($\overline{FD}$). Keempat diagonal ruang dalam kubus ABCD.EFGH ditunjukkan dalam **Gambar 44.**

Dari **Gambar 44** dipilih diagonal ruang $\overline{AG}$ dan diagonal ruang $\overline{EC}$. Kedua diagonal tersebut terletak dalam ruang kubus dan terletak juga pada bidang diagonal ACGE. Bidang diagonal ACGE berupa daerah persegipanjang. Karena itulah diagonal ruang $\overline{AG}$ dan diagonal ruang $\overline{EC}$ tersebut juga merupakan diagonal daerah persegipanjang ACGE. Berdasarkan sifat kedua diagonal dalam suatu persegipanjang,, maka diagonal ruang $\overline{AG}$ dan diagonal ruang $\overline{EC}$ keduanya saling kongruen, keduanya berpotongan di satu titik, dan diberinama O, dan keduanya saling membagi dua samapanjang di titik perpotongannya. Jadi kita mendapatkan $\overline{AG} \cong \overline{EC}$, $\overline{AG} \cap \overline{EC} = O$, dan $\overline{AO} \cong \overline{CO} \cong \overline{EO} \cong \overline{GO}$.

Jika dari **Gambar 44** dipilih diagonal ruang $\overline{BH}$ dan diagonal ruang $\overline{DF}$, kedua diagonal tersebut terletak dalam ruang kubus dan terletak juga pada bidang diagonal BDHF. Kedua diagonal ruang tersebut saling kongruen, keduanya saling berpotongan dan membagi dua samapanjang di titik perpotongannya, diberi nama O. Jadi kita mendapatkan $\overline{BH} \cong \overline{DF}$, $\overline{BH} \cap \overline{DF} = O$, dan $\overline{BO} \cong \overline{DO} \cong \overline{FO} \cong \overline{HO}$.

Titik O yang merupakan perpotongan antara diagonal ruang $\overline{BH}$ dan diagonal ruang $\overline{DF}$ tersebut sama dengan titik O yang merupakan perpotongan antara diagonal ruang $\overline{AG}$ dan diagonal ruang $\overline{EC}$. Mengapa demikian? Karena sepasang-sepasang dari keempat diagonal ruang dalam kubus saling kongruen dan terletak dalam enam

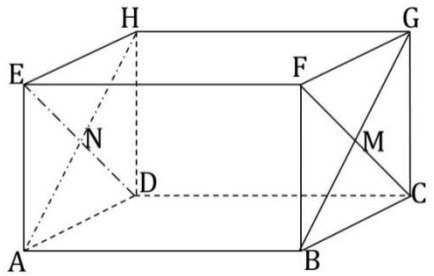
bidang diagonal yang juga saling kongruen dalam kubus ABCD.EFGH. Jadi keempat diagonal ruang dalam kubus berpotongan di satu titik dan saling membagi dua sama panjang.

Ukuran diagonal ruang suatu kubus adalah jarak antara dua titik berhadapan dalam ruang kubus. Karena diagonal ruang dalam kubus merupakan diagonal dari bidang diagonal dalam kubus, maka ukuran diagonal ruang kubus adalah ukuran diagonal dari bidang diagonalnya. Jika suatu kubus berdimensi s, maka ukuran diagonal ruang dalam kubus tersebut adalah $s\sqrt{3}$ satuan panjang.

b. Diagonal-diagonal dalam Balok

Seperti pada sebuah kubus, pada sebuah balok juga dapat dibentuk diagonal sisi, bidang diagonal, dan diagonal ruang. Pengertian dan pembentukan diagonal sisi, bidang diagonal, dan diagonal ruang pada balok identik dengan dalam kubus.

1) Diagonal sisi



Gambar 45. Balok ABCD.EFGH dengan Empat Diagonal sisi

Dalam **Gambar 45** digambarkan 4 buah diagonal sisi dalam balok ABCD.EFGH. Diagonal sisi AH ($\overline{AH}$) pada bidang sisi ADHE dan diagonal sisi BG ($\overline{BG}$) pada bidang sisi BCGF. Kedua diagonal tersebut saling sejajar, $\overline{AH} \parallel \overline{BG}$.

Diagonal sisi DE ($\overline{DE}$) pada bidang sisi ADHE dan diagonal sisi CF ($\overline{CF}$) pada bidang sisi BCGF. Kedua diagonal tersebut juga saling sejajar, $\overline{DE} \parallel \overline{CF}$. Karena bidang sisi balok berupa daerah persegipanjang, dan kedua diagonal sisi merupakan dtersebut iagonal persegipanjang, maka kedua diagonal tersebut berpotongan di satu titik. Diagonal sisi AH dan diagonal sisi DE berpotongan di titik N, sedangkan diagonal sisi BG dan diagonal sisi CF berpotongan di titik M. Kedua diagonal sisi pada setiap bidang sisi balok, saling berpotongan. Kedua diagonal sisi pada suatu bidang sisi balok saling kongruen dan saling berpotongan membagi dua sama (mengapa?).

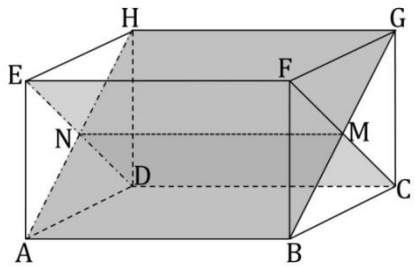
Ukuran/panjang diagonal sisi pada suatu balok adalah ukuran diagonal bidang sisi yang memuat diagonal sisi tersebut. Misalkan suatu balok berdimensi $p \times l \times t$, maka

ada 3 ukuran diagonal sisi pada balok tersebut. Ketiga ukuran diagonal sisi pada balok berdimensi $p \times l \times t$, yaitu $\sqrt{p^2 + l^2}$ satuan panjang, $\sqrt{p^2 + t^2}$ satuan panjang, dan $\sqrt{t^2 + l^2}$ satuan panjang.

2) Bidang diagonal

Dalam balok ABCD.EFGH, diagonal sisi AH sejajar dengan diagonal sisi BG. Oleh karena itu kedua diagonal tersebut terletak pada satu bidang yang melalui sisi AB dari bidang alas ABCD (atau sisi AB dari bidang sisi ABFE) dan sisi HG dari bidang atas EFGH (atau sisi HG dari bidang sisi DCGH). Bidang tersebut dapat kita sebut bidang-ABGH. Irisan bidang-ABGH yang melalui diagonal sisi AH, sisi HG, diagonal sisi BG, dan sisi AB pada balok ABCD.EFGH berupa daerah segiempat ABGH.

Daerah segiempat ABGH tersebut dinamakan **bidang diagonal ABGH** dalam balok ABCD.EFGH. **Gambar 46** merupakan contoh bidang diagonal dalam balok ABCD.EFGH, yaitu bidang diagonal ABGH dan bidang diagonal EFCD.



Gambar 46. Contoh Bidang diagonal dalam Balok ABCD.EFGH

Bidang diagonal ABGH dalam balok ABCD.EFGH yang berupa daerah segiempat merupakan suatu daerah jajargenjang, karena diagonal sisi AH sejajar dengan diagonal sisi BG, dan sisi AB sejajar dengan sisi GH. Sisi AB pada bidang alas ABCD tegak lurus terhadap sisi BC pada bidang alas ABCD juga, karena bidang alas ABCD yang berupa daerah persegipanjang. Sisi AB pada bidang sisi ABFE tegak lurus terhadap sisi BF pada bidang sisi ABFE, karena bidang sisi ABFE berupa daerah persegipanjang. Sisi BF tegak lurus terhadap sisi BC yang keduanya pada bidang sisi BCGF, karena bidang sisi BCGF berupa daerah persegipanjang. Menurut teorema ketegalurusan garis dan bidang, maka sisi AB tegak lurus terhadap bidang sisi BCGF. Diagonal sisi BG terletak pada bidang sisi BCGF. Oleh karena itu sisi AB tegak lurus terhadap diagonal sisi BG ($\overline{AB} \perp \overline{BG}$).

Pada bidang diagonal ABGH yang berupa daerah jajargenjang, telah ditemukan bahwa $\overline{AB} \perp \overline{BG}$. Dalam hal ini $\angle ABG$ dalam jajargenjang ABGH berupa sudut siku-

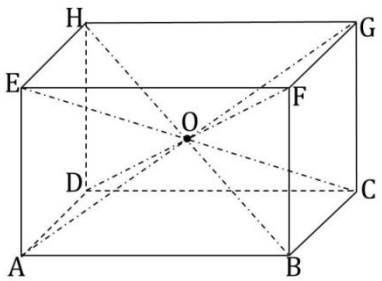
siku. Menurut teorema dalam Geometri Bidang, maka jajargenjang tersebut adalah suatu persegipanjang. Berdasarkan temuan dalam bidang diagonal ABGH yang berupa jajargenjang, bahwa ∠ABG berupa sudut siku-siku, maka kita peroleh bahwa bidang diagonal ABGH berupa daerah persegipanjang. Dengan analisis tersebut, ditemukan bahwa setiap bidang diagonal dalam suatu balok berupa daerah persegipanjang.

Ukuran bidang diagonal dalam suatu balok adalah luas bidang diagonal dalam balok tersebut. Identik dengan ukuran diagonal sisi, ukuran bidang diagonal dalam suatu balok yang berdimensi $p \times l \times t$, ada tiga nilai juga. Ketiga ukuran bidang diagonal dalam suatu balok yang berdimensi $p \times l \times t$, yaitu $p \times \sqrt{l^2 + t^2}$ satuan luas, $l \times \sqrt{p^2 + t^2}$ satuan luas, dan $t \times \sqrt{p^2 + l^2}$ satuan luas.

3) Diagonal ruang

Dalam balok ABCD.EFGH, titik E terletak pada bidang atas EFGH dan terletak pada rusuk tegak AE. Sedangkan titik C terletak pada bidang alas ABCD dan terletak pada rusuk tegak CG. Rusuk tegak AE dan rusuk tegak CG merupakan sisi-sisi yang berhadapan dalam bidang diagonal ACGE. Karena bidang diagonal ACGE berupa daerah persegipanjang, maka ada diagonal yang ujung-ujungnya titik E dan titik C, yaitu diagonal EC ($\overline{EC}$). Diagonal EC terletak di dalam balok ABCD.EFGH yang dinamakan **diagonal ruang EC** dalam balok ABCD.EFGH.

Selain diagonal ruang EC dalam balok ABCD.EFGH juga terdapat diagonal ruang AG ($\overline{AG}$) diagonal ruang DF ($\overline{DF}$), dan diagonal ruang BH ($\overline{BH}$).



Gambar 47. Keempat Diagonal ruang dalam Balok ABCD.EFGH

Identik dalam kubus, suatu balok juga mempunyai 4 diagonal ruang. Keempat diagonal ruang dalam balok ABCD.EFGH ditunjukkan dalam **Gambar 47.** Keempat diagonal ruang dalam balok ABCD.EFGH berpotongan di satu titik, diberinama O, dan saling membagi dua sama.

Ukuran diagonal ruang suatu balok adalah jarak antara dua titik berhadapan dalam ruang balok. Karena diagonal ruang dalam balok merupakan diagonal dari bidang

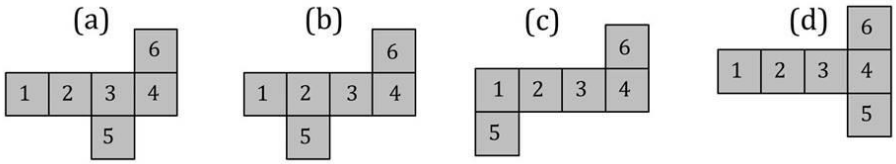
diagonal dalam balok, maka ukuran diagonal ruang balok adalah ukuran diagonal dari bidang diagonalnya. Jika suatu balok berdimensi $p \times l \times t$, maka ukuran diagonal ruang dalam balok tersebut adalah $\sqrt{p^2 + l^2 + t^2}$ satuan panjang.

3. Luas Permukaan Bangun Ruang Bidang Sisi Datar

a. Jaring-jaring dan Luas Permukaan Kubus

1) Jaring-jaring Kubus

Sebuah kubus terbentuk dari 6 buah daerah persegi yang saling kongruen. Keenam daerah persegi pembentuk suatu kubus masing-masing berdimensi/berukuran sama. Susunan atau jaringan enam buah daerah persegi yang dapat dibentuk menjadi sebuah kubus pada sebuah bidang dinamakan **jaring-jaring kubus**.



Gambar 48. Empat Macam Jaring-jaring Kubus Pertama

Empat macam jaring-jaring suatu kubus ditunjukkan dalam **Gambar 48**. Ada 11 macam jaring-jaring kubus. Coba Anda desain ketujuh jaring-jaring kubus berikutnya! Cara penyusunan yang harus diperhatikan, yaitu tidak ada empat sisi dari empat daerah persegi yang bertemu pada satu titik sudut. Mengapa demikian?

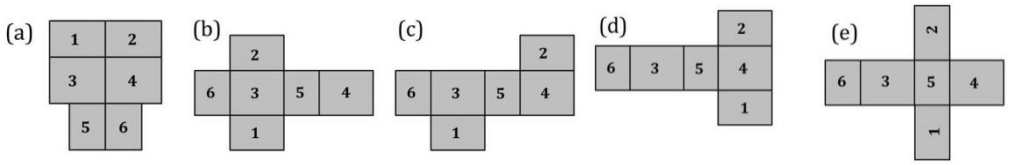
2) Luas Permukaan Kubus

Luas permukaan sebuah kubus adalah enam kali luas sebuah bidang sisi kubus tersebut. Jika sebuah kubus berdimensi s×s×s, atau berdimensi s, (setiap sisi daerah persegi pembentuknya berukuran sepanjang s), maka luas permukaan kubus dirumuskan: $L_{permukaan-kubus} = 6s^2$ (dalam satuan luas).

b. Jaring-jaring dan Luas Permukaan Balok dan Prisma

1) Jaring-jaring Balok dan Prisma

Jaring-jaring balok adalah susunan atau jajaran semua bidang sisi, bidang alas, bidang atas suatu balok. Balok yang dipilih jaring-jaringnya, yaitu balok yang semua bidang sisinya maupun bidang alas dan bidang atasnya berupa daerah persegipanjang. **Gambar 49** merupakan permulaan pembuatan jaring-jaring balok.



Gambar 49 . Penyusunan Jaring-jaring Balok

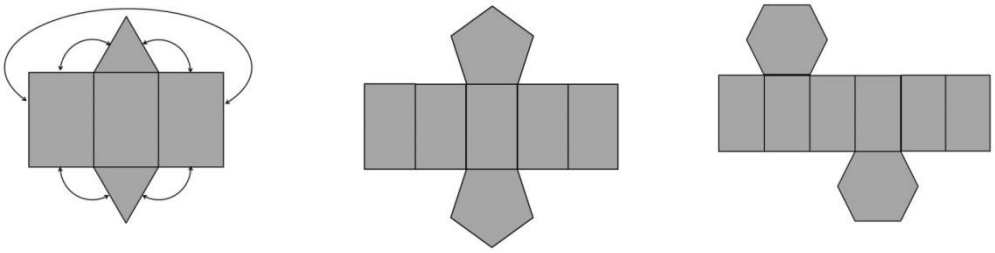
Gambar 49 (a) menunjukkan tiga pasang daerah persegipanjang pembentuk suatu permukaan balok. Daerah persegipanjang-1 kongruen dengan daerah persegipanjang-2, daerah persegipanjang-3 kongruen dengan daerah persegipanjang-4, dan daerah persegipanjang-5 kongruen dengan daerah persegipanjang-6. Sisi panjang daerah persegipanjang-1 kongruen sisi panjang daerah persegipanjang-3. Sisi lebar daerah persegipanjang-1 kongruen sisi lebar daerah persegipanjang-5. Sisi lebar daerah persegipanjang-3 kongruen sisi panjang daerah persegipanjang-5. Usulan bentuk jaring-jaring dari balok disajikan dalam **Gambar 49 (b)**, **Gambar 49 (c)**, **Gambar 49 (d)**, dan **Gambar 49 (e)**.

Apabila dari jaring-jaring tersebut daerah persegipanjang-1 dipilih sebagai bidang alas, maka daerah persegipanjang-2 sebagai bidang atas, dan keempat bidang sisinya, yaitu daerah persegipanjang-6, daerah persegipanjang-3, daerah persegipanjang-5, dan daerah persegipanjang-4, dan tinggi balok tersebut adalah panjang sisi panjang dari daerah persegipanjang-3. Coba Anda berikan alternatif lainnya!

Jaring-jaring prisma adalah susunan atau jajaran bidang sisi-bidang sisi, bidang alas, bidang atas dari suatu prisma yang disajikan pada suatu bidang (bidang datar). Jaring-jaring prisma dapat kita pikirkan sebagai bentangan atau jajaran permukaan prisma tersebut. Identik dengan pembuatan jaring-jaring kubus, prinsip yang harus kita ikuti, yaitu bahwa satu titik sudut dalam susunan tersebut bukan pertemuan empat titik sudut segi banyak atau lebih. Mengapa demikian? Karena setiap titik

sudut dalam prisma merupakan pertemuan tiga titik sudut dari tepat tiga daerah segi banyak.

Ada bermacam-macam prisma, berarti ada bermacam-macam jaring-jaring prisma. Dalam modul ini disulkan tentang bentuk jaring-jaring prisma-tegak segitiga, jaring-jaring prisma-tegak segilima beraturan, dan jaring-jaring prisma-tegak segienam.



(a) **(b)** **(c)**

Gambar 50.

Contoh Jaring-jaring Prisma-tegak Segitiga Samasisi, Prisma-tegak Segilima Beraturan, dan Prisma-tegak Segienam Beraturan

Gambar 50 (a) merupakan jaring-jaring prisma-tegak segitiga samasisi. **Gambar 50 (b)** merupakan jaring-jaring prisma-tegak segilima beraturan. **Gambar 50 (c)** merupakan jaring-jaring prisma-tegak segienam beraturan. Gambar-gambar busur dengan mata anak panah pada ujung-ujungnya menginformasikan bahwa sisi-sisi yang ditunjukkan berukuran sama panjang dan yang dipertemukan untuk membentuk prisma. Dalam usulan tersebut semua bidang sisi dirangkai menjadi satu daerah persegipanjang. Coba Anda berikan gambar-gambar busur pada **Gambar 50 (b)** dan **Gambar 50 (c)**, serupa maknanya dengan **Gambar 50 (a)**!

Anda dapat mengembangkan lagi bentuk jaring-jaring prisma-tegak dan jaring-jaring balok dari usulan-usulan bentuknya yang disajikan dalam modul ini! Modul ini juga tidak membahas khusus tentang bentuk jaring-jaring paralelepipedum dan jaring-jaring rhoemboeder. Anda dapat mengembangkannya sendiri berdasarkan definisi-definisinya.

2) Luas Permukaan Balok dan Prisma

Perhitungan luas permukaan suatu prisma maupun suatu balok, secara umum dinyatakan sebagai jumlah antara luas bidang alas, luas bidang atas, luas semua bidang sisinya. Luas permukaan prisma dapat dirumuskan:

$$L_{permukaan-prisma} = L_{bidang-alas} + L_{bidang-atas} + L_{bidang\ sisi-1} + L_{bidang\ sisi-2} + \cdots + L_{bidang\ sisi-n}$$

Dapat disederhanakan menjadi

$$L_{permukaan-prisma} = 2 \times L_{bidang-alas} + L_{bidang\ sisi-1} + L_{bidang\ sisi-2} + \cdots + L_{bidang\ sisi-n}$$

Nilai *n* tergantung banyak bidang sisi yang dimiliki suatu prisma yang akan ditentukan luas permukaannya. Jika prisma tersebut berupa prisma-tegak segi-*n* beraturan, maka $L_{permukaan-prisma} = 2 \times L_{bidang-alas} + n \times L_{bidang\ sisi-1}$

Sedangkan luas permukaan balok yang berdimensi $\boldsymbol{p \times l \times t}$ dapat dirumuskan:

$$L_{permukaan-balok} = (2 \times p \times l) + (2 \times p \times t) + (2 \times l \times t)$$

$$L_{permukaan-balok} = 2 \times [(p \times l) + (p \times t) + (l \times t)] \qquad \text{(dalam satuan luas)}$$

c. Jaring-jaring dan Luas Permukaan Limas

1) Jaring-jaring Limas

Jaring-jaring limas adalah susunan atau jajaran bidang alas dan semua bidang sisi dari suatu limas yang disajikan pada suatu bidang (bidang datar). Dari pengetahuan kita tentang limas, maka jaring-jaring limas dapat kita pikirkan sebagai bentangan atau jajaran permukaan limas tersebut. Jaring-jaring limas yang disajikan dalam **Gambar 32** adalah jaring-jaring dari limas segitiga samasisi dan limas persegi yang telah divisualisasikan dalam uraian materi tentang limas. Gambar busur lingkaran dengan ujung-ujung digambarkan mata anak panah dimaksudkan, bahwa kedua ruas garis tersebut saling kongruen dan dapat dipertemukan untuk membentuk permukaan limas.

(a) **(b)**

Gambar 51. Jaring-jaring Limas Segitiga Samasisi dan Limas Persegi

Jaring-jaring suatu limas sangat berguna untuk menentukan luas permukaan limas, baik limas tegak beraturan maupun limas tegak tak-beraturan. Bahkan untuk menentukan luas permukaan limas condong pun perlu terwujud jaring-jaringnya.

2) Luas Permukaan Limas

Luas permukaan suatu limas adalah jumlah luas bidang alasnya dan luas semua bidang sisinya. Luas permukaan suatu limas dirumuskan:

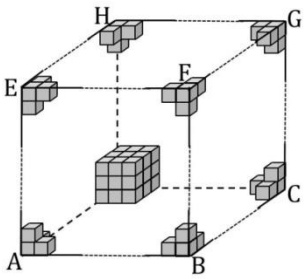
$L_{permukaan\ limas} = L_{bidang-alas} + L_{bidangsisi-1} + L_{bidangsisi-2} + \cdots + L_{bidangsisi-n}$ (dalam satuan luas).

Khusus untuk limas segi-n beraturan, maka rumus di atas dapat disederhanakan menjadi: $\mathrm{L}_{\mathrm{permukaan-limas\ segi-n\ beraturan}} = \mathrm{L}_{\mathrm{segi-n}} + n \times \mathrm{L}_{\mathrm{bidang\ sisi}}$ (dalam satuan luas).

4. Volume Bangun Ruang Bidang sisi Datar

a. Volume Kubus, Balok, dan Prisma

Volume kubus adalah banyak kubus satuan yang memenuhi dalam-ruang kubus. Visualisasi volume sebuah kubus disajikan dalam **Gambar 33**.



Gambar 52. Visualisasi Volume Kubus ABCD.EFGH

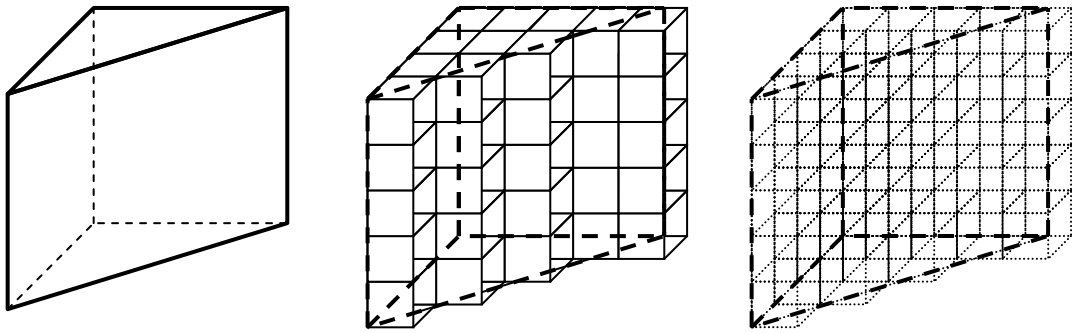
Gambar 52 merupakan visualisasi susunan kubus-kubus satuan (*kubus kecil*), kubus yang berdimensi 1, di dalam ruang kubus ABCD.EFGH. Kubus satuan tersebut berawal di titik sudut D. Jika kubus ABCD,EFGH berdimensi s, maka di antara titik sudut D dan titik sudut C berderet sebanyak s kubus satuan. Deretan s kubus satuan tersebut berjajar sebanyak s jajaran dari titik sudut D hingga titik sudut A atau dari titik sudut C hingga titik sudut B. Jadi pada lapisan pertama (paling bawah) terdapat

s×s kubus satuan. Lapisan s × s kubus satuan tersebut bertumpuk rapat dari titik sudut D hingga titik sudut H. Karena kubus ABCD.EFGH berdimensi s, maka dalam ruang kubus terdapat s lapisan s × s kubus satuan. Jadi dalam ruang kubus ABCD.EFGH terdapat s × s × s kubus satuan. Kubus-kubus satuan sebanyak s × s × s tersebut merupakan volume kubus ABCD.EFGH yang berdimensi s.

Secara umum, jika sebuah kubus berdimensi s, maka volume kubus tersebut dirumuskan: $V_{kubus} = s^3$ (dalam satuan volume).

b. Volume Prisma dan Volume Balok

Volume suatu prisma adalah banyak kubus-pejal satuan yang dapat dibentuk memenuhi ruang dalam prisma tersebut. Dapat dikatakan volume suatu prisma adalah banyak kubus-pejal satuan yang dibentuk dalam ruang suatu prisma. Misalnya, ditunjukkan pada **Gambar 53** !



(a) **(b)** **(c)**

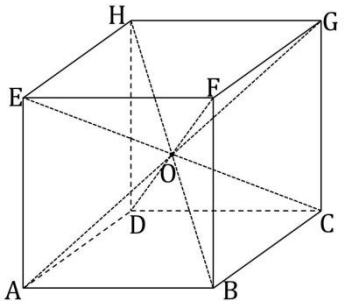
Gambar 53. Visualisasi perhitungan volume prisma-tegak-segitiga

Dengan mengikuti urutan pembentukan/penyusunan kubus-pejal-kubus-pejal satuan pada prisma-tegak-segitiga dalam **Gambar 53**, maka perhitungan volume prisma yang diketahui ukuran bidang alas dan tingginya dapat dirumuskan: $\mathrm{V}_{prisma} = \mathrm{L}_{bidang-alas-prisma} \times \mathrm{tinggi}_{prisma}$ (dalam satuan volume).

Karena suatu balok merupakan suatu prisma, maka perhitungan volume suatu balok identik dengan perhitungan volume prisma. Jika suatu balok berdimensi $p \times l \times t$**,** maka volume suatu balok dapat dirumuskan: $\mathrm{V}_{balok} = \mathrm{L}_{bidang-alas-balok} \times \mathrm{tinggi}_{balok}$ dalam satuan volume, atau $\mathrm{V}_{balok} = p \times l \times t$ (dalam satuan volume).

c. Volume Limas

Volume suatu limas dipikirkan sebagai banyak kubus satuan yang dapat memenuhi ruang dalam limas tersebut. Perhitungan volume suatu limas dapat dilakukan pendekatan dengan bantuan sebuah kubus dengan keempat diagonal ruangnya.



Gambar 54. Kubus dan Keempat Diagonal ruang sebagai Pendekatan Pengukuran Volume Limas

Gambar 54 merupakan visualisasi dari sebuah kubus ABCD.EFGH dengan keempat diagonal ruangnya yang berpotongan di titik O. Dalam kubus ABCD.EFGH tersebut terdapat 6 buah limas persegi, dalam hal ini masing-masing merupakan limas beraturan. Keenam limas tersebut, yaitu limas persegi O.ABCD, limas persegi O.ABFE, limas persegi O.ADHE, limas persegi O.BCGF, limas persegi OCDHG, dan limas persegi O.EFGH. Keenam bidang alas limas tersebut saling kongruen dan semua bidang sisi dari keenam limas tersebut juga saling kongruen (mengapa?).

Misalkan kubus ABCD.EFGH tersebut berdimensi s dan jarak titik O terhadap setiap bidang sisi kubus tersebut adalah t, sebagai tinggi limas. Nilai t untuk setiap limas dari keenam limas tersebut sama (mengapa?). Misalkan dihitung volume limas persegi O.ABCD, dari kubus ABCD.EFGH tersebut, maka perhitungannya:

$$V_{\text{kubus ABCD.EFGH}} = 6 \times V_{\text{limas O.ABCD}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{V}_{\text{limas O.ABCD}} = \frac{1}{6} \times \text{V}_{\text{kubus ABCD.EFGH}} = \frac{1}{6} \times \left[L_{bidang-alas\ kubus} \times tinggi_{kubus}\right]$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{V}_{\text{limas O.ABCD}} = \frac{1}{6} \times \left[L_{bidang-alas\ ABCD} \times s\right]$$

Karena titik O terletak tepat di tengah ruang-dalam kubus ABCD.EFGH tersebut, maka $s = 2t$ atau ukuran rusuk pada kubus ABCD.EFGH samadengan dua kali jarak pusat kubus (titik O) ke bidang sisi kubus tersebut. Selanjutnya $2t$ disubstitusikan ke s pada factor terakhir dari: "$\text{V}_{\text{limas O.ABCD}} = \frac{1}{6} \times \left[L_{bidang-alas\ ABCD} \times s\right]$" diperoleh:

$$V_{\text{limas O.ABCD}} = \frac{1}{6} \times \left[L_{bidang-alas\ ABCD} \times 2t\right] = \frac{1}{3} \times \left[L_{bidang-alas\ ABCD} \times t\right]$$

Karena bidang sisi kubus yang digunakan merupakan bidang alas limas persegi O.ABCD, berarti factor (s × s) pada kalimat matematika terakhir tersebut merupakan luas bidang alas ABCD. Oleh karena itu, kalimat matematika terakhir tadi dapat disederhanakan menjadi:

$$V_{\text{limas O.ABCD}} = \frac{1}{3} \times \left[L_{\text{bidang-alas limas O.ABCD}} \times t\right], \text{ dengan } t = \text{tinggi limas}$$

Berdasarkan pemikiran tersebut, secara umum volume sebuah limas yang diketahui ukuran bidang alas dan tingginya, dirumuskan: $V_{\text{limas.....}} = \frac{1}{3} \times \left[L_{\text{bidang-alas}} \times t\right]$ (dalam satuan volume).

D. Aktifitas Pembelajaran

Aktivitas 1.

Coba Anda cermati ruangan yang berada di tempat kerja Anda! Andaikan keempat dindingnya, langit-langit, dan lantainya diidealisasikan mulus rata. Dalam kondisi idealisasi tersebut, Anda dapat memanfaatkannya sebagai ruang dalam kubus atau balok. Ajaklah siswa-siswa Anda untuk melakukan pengamatan dan pengukuran langsung.

Ambillah sedotan-sedotan minum yang terbuat dari plastik, biasanya berwarna-warni. Sedotan-sedotan minum tadi kita pilih sebagai model ruas garis. Cobalah Anda rangkai sehingga terbentuk kerangka-kerangka kubus, balok, beberapa prisma, dan beberapa limas. Gunakan rangkaian tersebut sebagai bantuan pendalaman materi yang dibahas dalam modul ini.

Aktivitas 2.

Anda telah mempelajari uraian materi tentang diagonal dalam bangun ruang, khusus untuk kubus dan balok. Anda perlu memantabkan pengetahuan Anda tentang diagonal-diagonal dalam kubus dan balok. Buatlah model kerangka kubus dan kerangka balok! Pilihlah sedotan minum sebagai model rusuknya. Buatlah 3 model kerangka kubus dan 3 model kerangka balok.

Lengkapilah model kerangka yang pertama dari kubus dan balok tersebut dengan sepasang diagonal sisinya dari dua bidang sisi yang berhadapan!
Lengkapilah model kerangka yang kedua dari kubus dan balok tersebut dengan sepasang diagonal sisinya dari dua bidang sisi yang berdekatan!
Lengkapilah model kerangka yang ketiga dari kubus dan balok tersebut dengan sepasang diagonal ruangnya!

Aktivitas 3.

Anda telah mempelajari uraian materi tentang perhitungan luas dan volume: kubus, balok, prisma, dan limas. Anda perlu memantabkan pengetahuan Anda tentang bangun ruang tersebut. Keperluan Anda tersebut dapat terpenuhi dengan membuat model-modelnya (alat peraga). Cukup mudah pembuatannya dengan menggunakan kertas karton yang memiliki ketebalan lebih dari 2 mm. Mulailah dengan membuat jaring-jaringnya, dan kemudian dirangkai menjadi modelnya. Untuk merangkai gambar jaring-jaring yang Anda buat, gunakan selotif sebagai perangkainya. Dengan alat peraga tersebut Anda dapat menunjukkan ukuran luas dan volume suatu bangun ruang secara nyata.

E. Latihan/Kasus/Tugas

Bagian 1.

Selesaikan persoalan-persoalan berikut!

1. Jelaskan bahwa sepasang bidang sisi kubus yang bertemu sisinya saling tegak lurus!
2. Bidang alas suatu prisma-tegak berupa daerah segitiga siku-siku samakaki. Sisi siku-siku bidang alas tersebut sama panjang dengan rusuk tegak prisma. Misalkan ada prisma lain, kita sebut prisma kedua, yang ternyata kembaran dari prisma pertama. Seandainya salah satu bidang sisi pertama berimpit seutuhnya dengan salah satu bidang sisi prisma kedua. Bangun ruang apa sajakah yang bisa terjadi?
3. Apakah aphotema dalam suatu limas beraturan merupakan bilangan tunggal?

Bagian 2.

Selesaikan persoalan yang diberikan berikut!

1. Dapatkah dikatakan, bahwa diagonal ruang dalam suatu kubus juga merupakan perpotongan antara dua bidang diagonal?
2. Mengapa diagonal sisi $\overline{FC}$ dan diagonal sisi $\overline{ED}$ dalam kubus ABCD.EFGH dikatakan saling sejajar?
3. Bidang alas dan bidang atas suatu balok berbentuk daerah persegi. Apakah semua bidang diagonalnya saling kongruen?
4. Mengapa setiap pasang diagonal ruang dalam balok, keduanya pasti saling berpotongan dan membagi dua samapanjang?

Bagian 3.

1. Dalam kubus ABCD.EFGH dipilih bidang diagonal EFCD. Misalkan kubus tersebut berdimensi *m*. Berapakah jumlah luas permukaan dari kedua prisma segitiga yang terbentuk dalam kubus tersebut?
2. Dalam balok ABCD.EFGH dipilih semua diagonal ruangnya yang berpotongan di titik O. Misalkan balok tersebut berdimensi AB×AD×AE = 5×4×3.
   a. Berapakah jumlah luas permukaan antara limas O.ABCD dan limas O.ADHE ?
   b. Apakah volume limas O.ABFE adalah seperenam volume balok ABCD.EFGH?

Tugas: Lanjutkan penemuan bentuk jaring-jaring kubus berikutnya, sehingga Anda memiliki 11 bentuk jaring-jaring kubus!

F. Ringkasan

Bangun ruang yang bidang sisinya datar diklasifikasikan sebagai bidang banyak, prisma, dan limas. Kubus merupakan bangun ruang yang diklasifikasikan sebagai suatu bidang banyak beraturan dengan sebutan bidangenam beraturan. Suatu bidang banyak merupakan bangun ruang berongga. Balok merupakan suatu prisma. Prisma memiliki bidang alas dan bidang atas yang merupakan dua daerah segi banyak yang saling kongruen dan sejajar. Daerah segi banyak lainnya yang berupa daerah segiempat selain bidang alas dan bidang atas prisma dinamakan bidang sisi prisma. Limas memiliki satu bidang alas yang berupa daerah segi banyak. Bidang sisi limas berupa daerah segitiga. Gabungan semua bidang sisi dalam prisma atau limas disebut selimutnya. Gabungan bidang alas, bidang atas, dan semua bidang sisi prisma sebagai permukaan prisma. Sedangkan permukaan limas adalah gabungan bidang alas dan semua bidang sisinya.

Diagonal sisi dalam kubus adalah ruas garis yang ujung-ujungnya merupakan dua titik sudut yang berhadapan pada bidang sisi kubus. Diagonal sisi dalam balok adalah ruas garis yang ujung-ujungnya merupakan dua titik sudut yang berhadapan pada bidang sisi balok, atau pada bidang alas balok, atau pada bidang atas balok.

Bidang diagonal dalam kubus (balok) adalah daerah segiempat dalam ruang kubus (balok) yang sepasang sisinya merupakan sepasang rusuk yang berhadapan dan sepasang sisinya yang lain merupakan sepasang diagonal sisi yang berhadapan.

Diagonal ruang dalam kubus (balok) adalah ruas garis yang ujung-ujungnya merupakan dua titik sudut-ruang yang berhadapan di dalam ruang kubus (balok).

Luas permukaan kubus adalah jumlah luas keenam bidang sisi kubus. Luas permukaan prisma/balok adalah jumlah luas bidang alas, luas bidang atas, dan luas selimutnya. Luas permukaan limas adalah jumlah luas bidang alas dan luas selimutnya. Volume kubus/balok/prisma/limas dipikirkan sebagai banyaknya kubus satuan yang memenuhi ruang dalam kubus/balok/prisma/limas.

G. Umpan Balik/Tindak Lanjut

Anda telah mempelajari kubus, balok, prisma, dan limas; diagonal-diagonal dalam bangun ruang, khususnya dalam kubus dan balok, serta jaring-jaring, luas permukaan, dan volume: kubus, balok, prisma, dan limas. Setelah Anda mempelajari modul ini, kiranya Anda dapat mengembangkan pembelajarannya bagi siswa-siswa Anda. Aktifitas belajar yang diusulkan dalam modul ini, kiranya Anda perlu melaksanakannya juga bersama siswa-siswa Anda dalam kegiatan pembelajaran matematika di sekolah. Kemampuan ruang dalam diri siswa akan terbangun dan terpendam, apabila siswa berbuat langsung dengan modelnya (alat peraga) buatannya sendiri.

KEGIATAN PEMBELAJARAN 4

BANGUN RUANG SISI LENGKUNG

A. Tujuan

Peserta dapat:

1. menjelaskan dengan tepat tentang bangun ruang bidang sisi lengkung.
2. menjelaskan dengan tepat tentang luas permukaan dan volume dari suatu bangun ruang yang bidang sisinya berupa bidang-lengkung.

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

Guru dapat:

1. menjelaskan tabung dan sifat-sifatnya.
2. menjelaskan kerucut dan sifat-sifatnya.
3. menjelaskan bola sifat-sifatnya.
4. menjelaskan luas permukaan bangun ruang bidang sisi lengkung.
5. menjelaskan pengukuran luas permukaan bangun ruang bidang sisi lengkung.
6. menjelaskan volume bangun ruang bidang sisi lengkung.
7. menjelaskan pengukuran volume bangun ruang bidang sisi lengkung.

C. Uraian Materi

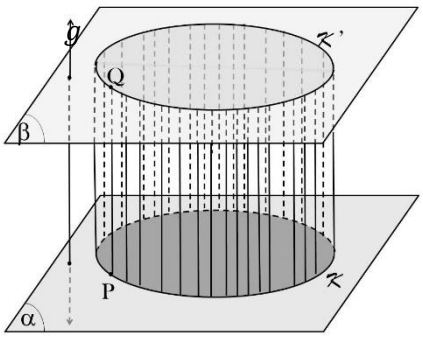
1. Konsep Bangun Ruang Sisi Lengkung

a. Tabung

Perhatikan **Gambar 55.**

<u>Definisi Tabung (*Silinder*)</u>

Misalkan bidang-α dan bidang-β merupakan dua buah bidang sejajar, sebuah kurva tertutup $\mathcal{K}$ pada bidang-α, dan sebuah garis g yang tidak sejajar terhadap kedua bidang tersebut dan tidak memotong kurva $\mathcal{K}$.



Gambar 55. Visualisasi Definisi Tabung/Silinder

Untuk setiap titik pada $\mathcal{K}$, misalkan P, terdapat $\overline{PQ}$, yaitu suatu ruas garis yang sejajar terhadap g sedemikian, sehingga Q pada bidang-β. Untuk setiap titik seperti Q pada bidang-β membentuk suatu kurva tertutup $\mathcal{K}'$. Gabungan semua ruas garis tersebut dan *interior* (daerah-dalam) kurva $\mathcal{K}$ dan $\mathcal{K}'$dinamakan suatu **tabung**/**silinder**.

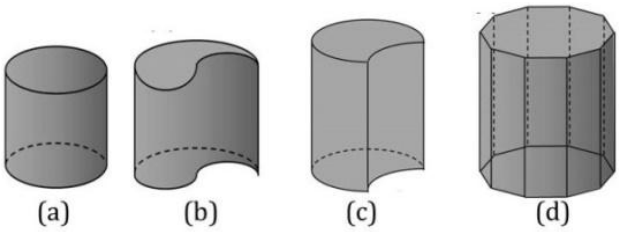
Setiap ruas garis, seperti $\overline{PQ}$, dalam definisi tabung/silinder tersebut dinamakan **unsur** (*element*) dari tabung/silinder tersebut. Ada juga yang menyebutnya sebagai **garis pelukis** tabung/silinder. Garis g dinamakan **garis arah**. Gabungan semua ruas garis tersebut dinamakan **selimut tabung** atau **selimut silinder**. Kurva-kurva-tertutup-sederhana dan daerah dalamnya dinamakan **bidang alas-bidang alas** tabung/silinder. Kedua kurva-tertutup-sederhana tersebut dinamakan **batas-batas** dari bidang alas-bidang alas. Jarak antara kedua bidang alas sebagai **tinggi tabung** atau **tinggi silinder**.

Berdasarkan definisi tersebut dapat dimengerti bahwa suatu tabung merupakan suatu bagian ruang yang hampa/kosong yang dibatasi dua buah daerah bertepi suatu kurva tertutup sederhana dan semua ruas garis yang sejajar yang ujung-ujungnya pada tepi-tepi kurva tersebut.

Gambar 56 menunjukkan beberapa macam tabung/silinder. Ada bermacam-macam bentuk kurva tertutup sederhana. Kurva tertutup sederhana yang biasa dibahas dalam pembelajaran matematika sekolah, yaitu lingkaran dan berbagai segi banyak. Dalam **Gambar 56 (a)** kurva tertutup sederhana sebagai batas bidang alas tabung berbentuk lingkaran. Tabung yang digambarkan tersebut merupakan gambar tabung lingkaran. Dalam **Gambar 56 (b),** dan **(c)** bidang yang dibatasi kurva tertutup sederhana sebagai bidang alasnya. Bentuknya seperti tepi gulungan selembar kertas yang digulung bebas. Sedangkan **Gambar 56 (d)** bidang yang dibatasi segisepuluh tak-beraturan sebaga bidang alas. Tabung yang digambarkan tersebut merupakan permukaan prisma segisepuluh takberaturan.

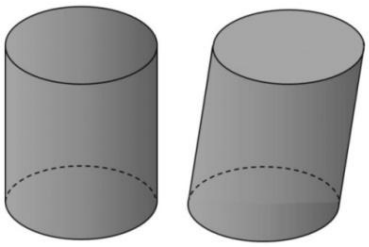
Tabung-tabung atau silinder-silinder diklasifikasi menurut bentuk bidang alasnya.

Jika bidang alas suatu tabung/silinder berupa suatu daerah segi banyak, silinder tersebut dinamakan prisma; paling tepat merupakan permukaan prisma.



Gambar 56. Contoh-contoh Tabung/Silinder

Jika bidang alasnya berupa suatu daerah lingkaran, maka tabung/silinder tersebut dinamakan **tabung-lingkaran/silinder-lingkaran** (*circular cylinder*). Tabung-lingkaran atau silinder lingkaran inilah yang biasa kita kenal dalam pembelajaran matematika sekolah. Tabung/silinder yang dibahas dalam modul ini, yaitu tabung-lingkaran atau silinder-lingkaran, selanjutnya cukup disebut dengan **tabung**. Jika unsur-unsur dari suatu tabung tegak lurus terhadap bidang alasnya, tabung tersebut dinamakan **tabung-tegak**.

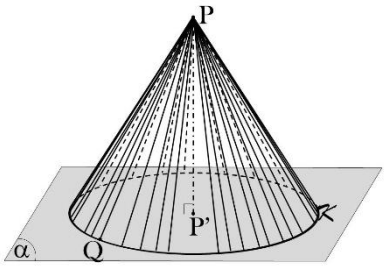

Gambar 57. Tabung-tegak dan Tabung-condong

Jika unsur-unsur dari suatu tabung tidak tegak lurus terhadap bidang alasnya, maka tabung tersebut dinamakan **tabung-miring/tabung-condong**. **Gambar 57** menunjukkan visualisasi tabung-tegak (sebelah kiri) dan tabung-condong (sebelah kanan).

b. Kerucut

Definisi *Kerucut*

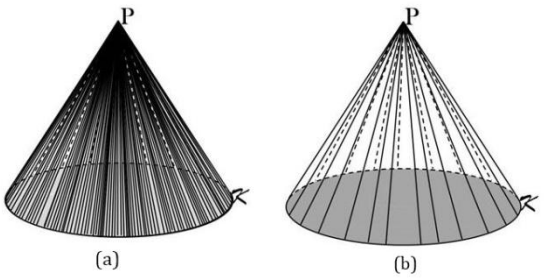
Dipandang suatu bidang-α yang memuat sebuah kurva tertutup sederhana $\mathcal{K}$ dan suatu titik P tidak pada bidang-α. Untuk setiap titik pada kurva $\mathcal{K}$, misalnya Q, terdapat ruas garis $\overline{PQ}$. Gabungan semua ruas garis, seperti $\overline{PQ}$ tersebut beserta kurva $\mathcal{K}$ dan interiornya (daerah dalam kurva $\mathcal{K}$), dinamakan **kerucut**.



Gambar 58. Visualisasi Definisi Kerucut

Gambar 58 merupakan visualisasi dari definisi kerucut. Titik P disebut **puncak** kerucut. Kurva $\mathcal{K}$ dan daerah dalamnya dinamakan **bidang alas** kerucut. Kurva $\mathcal{K}$ disebut **batas** bidang alas. Ruas garis-ruas garis yang membentuk kerucut, seperti $\overline{PQ}$, disebut **unsur-unsur** atau **garis pelukis-garis pelukis** kerucut. Gabungan (himpunan) semua garis pelukis kerucut dinamakan **selimut** kerucut. Garis-pelukis-garis-pelukis yang membentuk kerucut juga <u>bukan rusuk kerucut</u>. Jadi kerucut tidak memiliki rusuk. Jarak dari puncak ke bidang yang memuat bidang alas merupakan **tinggi** kerucut; dalam **Gambar 58**, ditunjukkan sebagai panjang ruas garis $\overline{PP'}$.

Gambar 59 (a) memvisualisasikan selimut kerucut yang berpuncak di titik P dan batas bidang alasnya kurva $\mathcal{K}$. Sedangkan **Gambar 59 (b)** memvisualisasikan bidang alas kerucut yang berpuncak di titik P dan batas bidang alasnya kurva $\mathcal{K}$.



Gambar 59. Visualisasi Selimut dan Bidang alas Kerucut

Gabungan selimut dan bidang alas kerucut itulah yang dimaksud dengan **permukaan** kerucut. Berdasarkan definisi kerucut, dapat dimengerti bahwa kerucut merupakan ruang hampa yang dibatasi satu daerah bertepi suatu kurva tertutup sederhana dan semua ruas garis dari kurva menunju tepat satu titik tertentu.

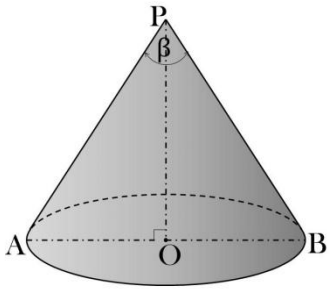
Kerucut dapat diklasifikasikan menurut bentuk bidang alasnya. Jika bidang alasnya berupa daerah lingkaran, maka kerucut tersebut disebut **kerucut-lingkaran**. Jika bidang alasnya berupa daerah segi banyak, maka kerucut tersebut dinamakan limas; lebih tepatnya permukaan limas (mengapa?). Jadi dapat dikatakan, suatu permukaan limas merupakan suatu kerucut yang bidang alasnya berupa daerah segi banyak. Dalam pembelajaran matematika sekolah, kerucut yang dibahas sesungguhnya yaitu kerucut-lingkaran.

Jarak antara puncak kerucut dan bidang yang memuat bidang alas kerucut, atau jarak antara puncak kerucut dan bidang alas kerucut, dapat dipikirkan sebagai jarak antara puncak kerucut dan proyeksinya ke bidang yang memuat bidang alas kerucut. Dalam **Gambar 17** ditunjukkan jarak antara puncak kerucut dan bidang yang memuat bidang alas kerucut sebagai tinggi kerucut. Ada beberapa

kemungkinan proyeksi puncak kerucut ke bidang yang memuat bidang alas kerucut. Dalam pembelajaran kerucut di sekolah menengah proyeksi puncak kerucut ke bidang alasnya adalah pusat lingkaran.

Jika proyeksi puncak kerucut ke bidang yang memuat bidang alas kerucut terletak pada bidang alas kerucut, maka kerucut tersebut diklasifikasikan sebagai **kerucut-tegak**. Mengingat bidang alas kerucut-kerucut tersebut berupa daerah lingkaran, kerucut yang biasa diajarkan kepada siswa lebih tepat disebut sebagai **kerucut-lingkaran-tegak**. Sedangkan jika proyeksi puncak kerucut ke bidang yang memuat bidang alas kerucut terletak di luar bidang alas kerucut, maka kerucut tersebut diklasifikasikan sebagai **kerucut-condong**. Jika bidang alas kerucut-condong berupa daerah lingkaran, maka kerucut tersebut lebih tepat disebut sebagai **kerucut-lingkaran-condong**.

Kerucut yang dibahas dalam pelajaran matematika sekolah, sesungguhnya suatu jenis kerucut-lingkaran-tegak. Pembahasan kerucut dalam modul ini difokuskan pada kerucut-lingkaran-tegak. Untuk selanjutnya dalam bahasan dengan sebutan 'kerucut', yang dimaksudkan adalah 'kerucut-lingkaran-tegak'. Ada tiga kemungkinan proyeksi puncak kerucut ke bidang alasnya. Dalam modul ini kerucut yang dibahas adalah kerucut yang proyeksi puncaknya berimpit dengan titik-pusat bidang alasnya. Ada beberapa jenis kerucut berdasarkan jenis sudut, yang dibentuk oleh sepasang garis pelukis yang ujung-ujungnya merupakan diameter bidang alasnya.



Gambar 60. Visualisasi Penentuan Jenis Kerucut

Dalam **Gambar 60** ditunjukkan sebuah kerucut berpuncak di titik P dan bidang alas berpusat di O. Dalam gambar tersebut ditampilkan juga diameter bidang alasnya, yaitu $\overline{AB}$, dan sepasang garis-pelukis kerucut yang ujung-ujung merupakan ujung diameter, yaitu $\overline{PA}$ dan $\overline{PB}$.

Jenis sudut yang dibentuk oleh kedua garis pelukis inilah, yaitu $\angle APB$, yang digunakan untuk menentukan jenis kerucut. Misalkan besar $\angle APB$ adalah β, $m\angle APB = \beta$. Jika $\angle APB$ merupakan sudut lancip ($0<\beta<90$), maka kerucut tersebut jenis kerucut-lancip. Jika $\angle APB$ merupakan sudut siku-siku ($\beta = 90$), maka kerucut

tersebut jenis kerucut-siku-siku. Dan jika ∠APB merupakan sudut tumpul (90 < β < 180), maka kerucut tersebut jenis kerucut-tumpul.

c. Bola (sphere)

Istilah "bola" digunakan dalam pelajaran matematika di Indonesia. Istilah tersebut disamakan dengan benda dalam kehidupan yang disebut bola (*ball* [*bahasa Inggris*]). Dalam bahasa matematika, istilah tersebut disebut dengan "*sphere*". Model dari sphere berupa bola yang biasa Anda kenal dalam kehidupan.

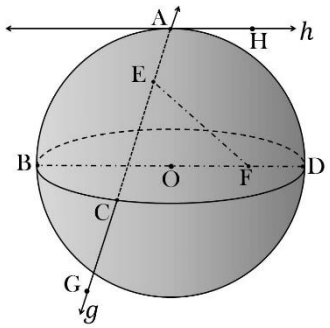
Definisi Bola dan Jari-jari Bola

Bola (***sphere***) adalah himpunan titik-titik yang berjarak sama terhadap suatu titik tertentu dalam ruang. Titik tertentu tersebut disebut **pusat bola**.

Jari-jari (***radius***) suatu bola adalah:

(1) **ruas garis** yang menghubungkan pusat bola dengan suatu titik sebarang pada bola;

(2) **jarak** dari pusat ke bola.



Gambar 61. Bola dan Objek-objek Geometri yang Berkaitan

Gambar 61 menunjukkan definisi bola dan juga jari-jari bola. Dalam gambar tersebut titik O dinamakan pusat bola. Oleh karena itu gambar bola tersebut dapat kita berinama "bola O". Titik-titik A, B, C, dan D merupakan titik-titik pada bola O. Ruas garis-ruas garis $\overline{BO}$ dan $\overline{DO}$ masing-masing merupakan jari-jari bola O, ukuran kedua ruas garis tersebut juga disebut jari-jari bola O.

Misalkan jari-jari bola O tersebut sepanjang r, maka kita dapat melengkapi nama gambar tersebut "bola(O, *r*)"; bola yang berpusat di O dan jari-jarinya *r*. Titik-titik A dan C, keduanya pada bola O, maka jarak dari A ke O dan jarak dari C ke O adalah *r*. Kita dapat menyatakan OA = OB = OC = OD = r, karena jarak dari O ke masing-masing keempat titik tersebut samadengan jari-jari bola O. Identik dalam bahasan lingkaran, jika titik B, titik O, dan titik D, ketiganya segaris, maka ruas garis $\overline{BD}$ disebut **diameter bola O**.

Titik A dan titik C keduanya berbeda. Menurut Teorema Eksistensi Garis, kedua titik tersebut pasti dilalui oleh tepat satu garis. Dalam **Gambar 61**, titik A dan titik C dilalui oleh garis g. Garis g dalam gambar tersebut, dinamakan **garis-potong** pada bola O. Kita juga dapat mengatakan, bahwa garis g memotong/menembus bola O di titik A dan titik C. Ruas garis $\overline{AC}$ dalam gambar tersebut dinamakan talibusur dalam bola O, identik dalam lingkaran. Ruas garis $\overline{BD}$ juga merupakan talibusur dalam bola O, karena titik B dan titik D keduanya pada bola O. Ruas garis $\overline{BD}$ tadi kita sebut diameter bola O, sehingga kita menyatakan bahwa diameter bola adalah talibusur dalam bola yang melalui pusat bola.

Dalam **Gambar 61**, titik A juga dilalui oleh sebuah garis, yaitu garis h. Terhadap bola O, garis h hanya melalui titik A. Identik pada lingkaran, garis h dinamakan **garis singgung** pada bola O. Sifat garis h dalam bola identik pada pada lingkaran, yaitu bahwa garis h tegak lurus terhadap salah satu jari-jari dalam bola O. Dalam hal ini $h \perp \overline{AO}$ dan titik A disebut titik singgung garis h terhadap bola O. Jadi setiap garis yang menyinggung suatu bola, maka garis tersebut memotong bola pada tepat satu titik dan garis tersebut tegak lurus terhadap salah satu jari-jari dari satu titik tersebut.

Dalam **Gambar 61** terdapat juga titik-titik E, F, G, H. Dalam gambar tersebut terlihat jelas bahwa titik G terletak pada garis g, titik H terletak pada garis h, titik E pada talibusur $\overline{AC}$, dan titik F terletak pada diameter $\overline{BD}$. Namun terhadap bola O, titik H dan titik G dikatakan keduanya terletak di **ruang luar** bola O, sedangkan titik E dan titik F terletak di **ruang dalam** bola O. Istilah "ruang luar" dan "ruang dalam" dalam bahasan bola dinyatakan dalam definisi berikut.

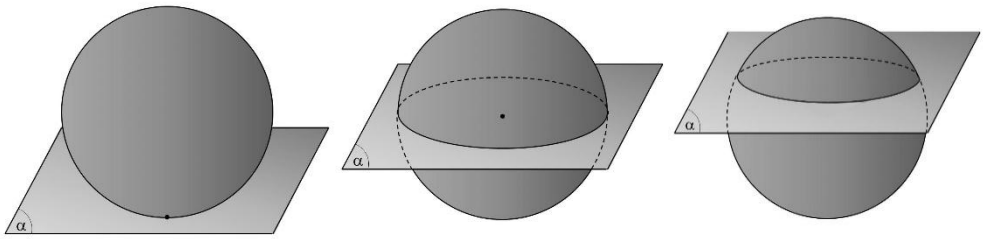
Definisi *Interior* dan *Eksterior* Bola

> ***Interior*** (ruang dalam) dari sebuah bola adalah gabungan pusatnya dan semua titik yang berjarak kurang dari jari-jari bola tersebut. ***Eksterior*** (ruang luar) dari sebuah bola adalah himpunan semua titik yang berjarak lebih dari jari-jari bola tersebut.

Dalam **Gambar 61**, jelas titik O di dalam ruang bola, karena titik O berjarak nol terhadap dirinya sendiri. Titik E dan titik F masing-masing berjarak kurang dari r (jari-jari bola O) terhadap titik O, sehingga keduanya dikatakan terletak di dalam

ruang bola O. Sedangkan titik G dan titik H, berjarak lebih dari *r* terhadap bola O, sehingga keduanya dikatakan terletak di ruang luar bola O.

Berdasarkan definisi bola dan *interior* bola tersebut mudah dimengerti, bahwa bola merupakan bagian ruang yang hampa yang dibatasi oleh gabungan/himpunan semua titik yang berjarak sama terhadap pusat bola. Dengan demikian, kata "permukaan bola" yang biasa diungkapkan dalam pembelajaran matematika, sesungguhnya bola itu sendiri. Bola-bola yang terbuat dari plastic (mulus/licin) tanpa cekungan atau gurat-gurat, yang ada dalam kehidupan sehari-hari, merupakan suatu model bola yang tepat dalam pembelajaran matematika sekolah.



(a) **(b)** **(c)**

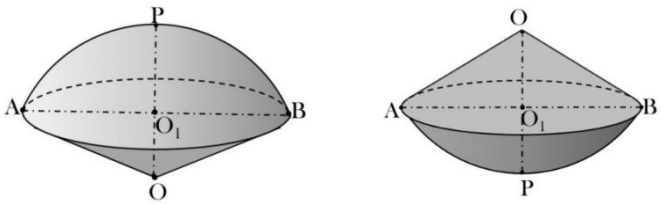
Gambar 62. Tiga Kemungkinan suatu Bidang Memotong suatu Bola

Bagian dari suatu bola maupun bola beserta ruang di dalamnya yang perlu dibahas dalam modul ini, antara lain tembereng-bola dan juring-bola. Tembereng-bola ada di dalam ruang suatu bola akibat dari suatu bidang yang memotong bola tersebut. **Gambar 62** menunjukkan tiga kemungkinan suatu bidang memotong suatu bola.

Gambar 62 (a) menunjukkan bidang α memotong bola tepat di satu titik pada bola, dikatakan bidang α menyinggung suatu bola. **Gambar 62 (b)** menunjukkan bidang-α memotong bola dan melalui pusat bola. Bagian bola yang terletak di atas dan di bawah bidang α masing-masing dinamakan **setengah bola** (*hermisphere*). Potongan bola oleh bidang α yang melalui pusat bola berupa lingkaran yang berpusat pada pusat bola. Lingkaran tersebut dinamakan **lingkaran besar** pada bola. Sedangkan dalam **Gambar 62 (c)** bidang α memotong bola, tetapi bidang α tidak melalui pusat bola. Potongan bola oleh bidang α juga berbentuk lingkaran, lingkaran tersebut dinamakan **lingkaran kecil** pada bola. Bagian bola yang terletak di atas maupun di bawah bidang α dinamakan **bidang lengkung bola**. Gabungan bidang lengkung bola, daerah lingkaran kecil, dan semua titik dalam ruang antara bidang lengkung

bola dan daerah lingkaran kecil pada bola dinamakan **tembereng bola**. Dalam gambar tersebut, tembereng bola yang terletak di atas bidang α disebut tembereng kecil bola, dan yang terletak di bawah bidang α disebut tembereng besar bola.

Lingkaran kecil pada bola merupakan himpunan titik-titik yang terletak pada bola. Oleh karena itu lingkaran kecil tersebut merupakan ujung-ujung jari-jari pada bola. Gabungan semua jari-jari yang melintasi lingkaran kecil pada bola merupakan suatu selimut kerucut-lingkaran-tegak yang berpuncak pada pusat bola. Semua jari-jari yang melintasi lingkaran kecil pada bola sebagai garis pelukis-garis pelukisnya. Gabungan selimut kerucut tersebut dan bidang lengkung pada bola yang dibatasi lingkaran kecilnya, dan semua titik dalam ruang yang dibatasi selimut kerucut dan bidang lengkung dari bola tersebut dinamakan **juring dalam bola**.



(a) **(b)**

Gambar 63. Juring-dalam-bola

Gambar 63 (a) menunjukkan suatu juring dalam bola O yang dipandang dari bidang lengkungnya.

Sedangkan **Gambar 63 (b)** menunjukkan juring dalam bola O yang dipandang dari selimut kerucutnya. Melalui **Gambar 63**, jika lingkaran O_1 semakin kecil atau titik O_1 bergerak mendekati titik P dan membawa daerah lingkarannya, maka juring dalam bola tersebut semakin runcing.

Keberadaan lingkaran besar, bidang lengkung, tembereng bola, dan juring dalam bola yang dibahas tersebut merupakan dasar-dasar untuk mempelajari perhitungan luas bola dan volume bola.

2. Luas Permukaan Bangun Ruang Bidang sisi Lengkung

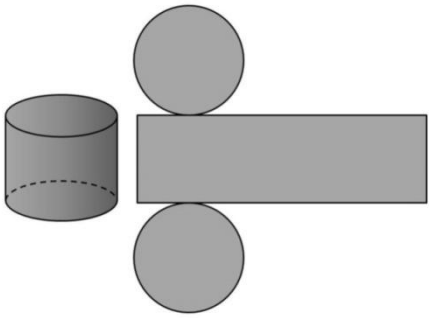
a. Jaring-jaring dan Luas Permukaan Tabung

1) Jaring-jaring Tabung

Dari pengetahuan kita tentang tabung, maka jaring-jaring tabung dapat kita pikirkan sebagai bentangan atau jajaran permukaan tabung tersebut pada bidang datar. Permukaan suatu tabung terdiri dari dua buah daerah lingkaran yang saling

kongruen (berjari-jari sama) dan selimutnya. Bentangan selimut tabung, khususnya tabung-tegak, pada bidang datar berupa daerah persegipanjang (mengapa?). Daerah persegipanjang tersebut mempunyai dimensi $K_{\odot} \times t$. Dalam hal ini $K_{\odot}$ adalah keliling daerah-lingkaran bidang alasnya dan t adalah tinggi tabung.

Misalkan tabung-tegak yang didesain jaring-jaringnya setinggi t dan jari-jari bidang alasnya r. Jaring-jaring tabung tersebut terdiri dari dua daerah lingkaran yang kongruen dengan jari-jari r dan sebuah daerah persegipanjang yang berdimensi $K_{\odot} \times t$. Panjang daerah persegipanjang tersebut adalah $K_{\odot}$ dan lebar daerah persegipanjang tersebut adalah t. Dimensi daerah persegipanjang tersebut dapat disederhanakan menjadi $(2\pi r \times t)$, karena $K_{\odot} = 2\pi r$. Desain jaring-jaring tabung yang dimaksud tersebut disajikan dalam **Gambar 64**.



Gambar 64. Jaring-jaring Tabung-tegak

2) Luas Permukaan Tabung

Luas permukaan tabung adalah jumlah luas kedua bidang alas dan selimutnya. Tabung yang mempunyai jari-jari bidang alasnya r dan tingginya t, luas selimutnya adalah $L_{selimut\ tabung} = 2\pi rt$ (dalam satuan luas). Dari jaring-jaring tabung tersebut, maka perhitungan luas permukaan tabung dapat dirumuskan:

$$L_{\text{permukaan tabung}} = (2 \times L_{\text{bidang alas}}) + L_{\text{selimut}} = (2 \times (\pi r^2)) + (2\pi r \times t)$$

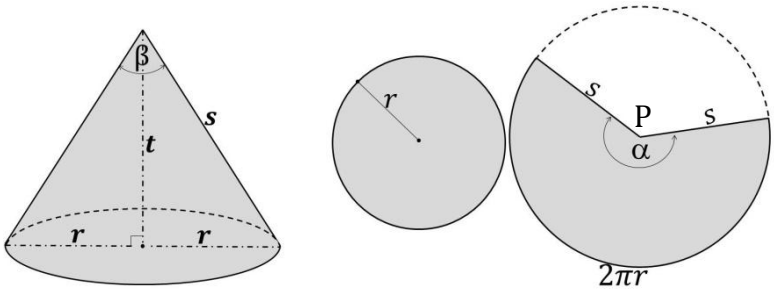
$$\Leftrightarrow \quad L_{\text{permukaan tabung}} = 2\pi r(r + t) \quad \text{(dalam satuan luas)}$$

b. Jaring-jaring dan Luas Permukaan Kerucut

1) Jaring-jaring Kerucut

Jaring-jaring kerucut adalah susunan atau jajaran bidang alas dan selimut dari suatu kerucut yang disajikan pada suatu bidang (bidang datar). Jaring-jaring kerucut dapat kita pikirkan sebagai bentangan atau jajaran permukaan kerucut tersebut.

Permukaan kerucut meliputi selimut-kerucut dan bidang alas-kerucut. Oleh karena itu jaring-jaring kerucut merupakan susunan atau jajaran selimut-kerucut dan bidang alas kerucut pada bidang datar. **Gambar 65** menunjukkan suatu kerucut dengan bidang alas berjari-jari r , dengan tingginya t, dan sketsa jaring-jaringnya.



Gambar 65. Kerucut dan Jaring-jaringnya

Dalam **Gambar 65**, baik gambar kerucutnya (sebelah kiri) maupun permukaannya (sebelah kanan) dilengkapi label ukuran-ukuran yang berkaitan. Label r merupakan jari-jari bidang alas kerucut. Label t merupakan tinggi kerucut. Label s merupakan panjang garis-pelukis kerucut. Label β menunjukkan ukuran sudut antara sepasang garis pelukis di depan suatu diameter bidang alas (jenis kerucut). Label α menunjukkan ukuran busur dari juring selimut kerucut. Label $2\pi r$ menunjukkan keliling bidang alas kerucut dan panjang busur dari juring selimut kerucut.

Berdasarkan definisi kerucut, maka selimut kerucut berupa juring lingkaran yang jari-jarinya sama dengan panjang garis-pelukis kerucut, dan panjang busur-juring lingkaran tersebut samadengan keliling lingkaran bidang alas kerucut. Besar busur juring tersebut, yaitu α, ditentukan oleh perbandingan antara panjang juring dan keliling lingkaran berjari-jari garis pelukis, yaitu s, terhadap sudut satu putaran penuh.

Cara Menentukan Besar Busur Juring Selimut Kerucut

Selimut kerucut berbentuk daerah juring lingkaran yang jari-jarinya samadengan panjang garis pelukis kerucut. Sedangkan panjang garis pelukis suatu kerucut dapat ditentukan berdasarkan jari-jari bidang alas kerucut dan tinggi kerucut. Jika jari-jari bidang alas kerucut adalah r dan tinggi kerucut adalah t, maka perhitungan panjang garis-pelukis kerucut, yaitu s, adalah: $s = \sqrt{r^2 + t^2}$ (mengapa?).

Karena juring lingkaran melibatkan besar busurnya (ukuran sudut pusat lingkaran P), yaitu α (**Gambar 65**), maka untuk melukis selimut kerucut harus mengetahui ukuran sudut pusat lingkaran tersebut (sudut juring besar dalam lingkaran P). Misalkan ukuran sudut pusat lingkaran P yang dimaksud adalah α, maka nilai α dapat ditentukan melalui perhitungan berikut:

$$\alpha = \frac{\text{panjang juring}}{\text{keliling } \odot \text{P}} \times 360 = \frac{2\pi r}{2\pi s} \times 360 = \frac{r}{s} \times 360$$

Jadi $\alpha = \frac{r}{s} \times 360$ dalam satuan derajat.

2) Luas Permukaan Kerucut

Luas permukaan kerucut adalah jumlah luas selimut kerucut dan luas bidang alas kerucut. Suatu kerucut dengan jari-jari bidang alasnya *r* dan tinggi kerucut *t*, dan panjang garis pelukisnya s, maka perhitungan luas permukaan kerucut, yaitu:

$$\text{L}_{permukaan\ kerucut} = \text{L}_{bidang\ alas} + \text{L}_{selimut}$$

$$\Leftrightarrow \text{L}_{permukaan\ kerucut} = \pi r^2 + \left(\frac{\alpha}{360} \times \text{L}_{\odot P}\right) = \pi r^2 + \left(\frac{\frac{r}{s} \times 360}{360} \times \pi s^2\right)$$

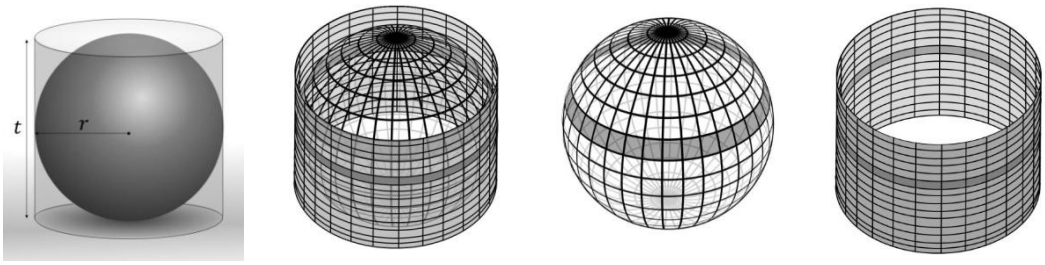
$$\Leftrightarrow \text{L}_{permukaan\ kerucut} = \pi r(r + s)$$

Atau $\text{L}_{permukaan\ kerucut} = \pi r\left(r + \sqrt{r^2 + t^2}\right)$, karena $s = \sqrt{r^2 + t^2}$

c. Luas Bola

Ada beberapa cara menemukan luas bola adalah hasilkali 4π dan kuadrat jari-jarinya. Berdasarkan definisi bola, maka jaring-jaring bola tidak dapat diwujudkan dengan media dimensi dua. Jaring-jaring suatu bola harus diwujudkan dalam bentuk dimensi tiga.

Perhitungan luas bola dapat dilakukan pendekatannya dengan menggunakan daerah-daerah segidua bola. Namun dalam modul ini ditunjukkan pendekatan luas bola dengan menggunakan selimut tabung, yang dilakukan oleh orang-orang Yunani dan tertulis dalam sejarah Matematika. Visualisasi yang diperlukan yaitu, suatu bola yang berada di dalam ruang sebuah tabung. Jari-jari bidang alas tabung samadengan jari-jari bola, dan tinggi tabung samadengan diameter bola. Visualisasi tersebut disajikan dalam **Gambar 66**.

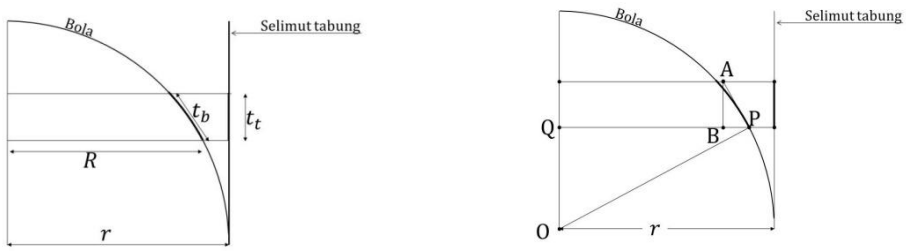


(a) **(b)** **(c)** **(d)**

Gambar 66. Bola dalam Tabung

Gabungan bola dan selimut tabung tersebut, kemudian dipotong-potong tegak lurus bidang alas tabung dan melalui pusat bola. Potongan-potongan berikutnya sejajar dengan bidang alas tabung. Kedua macam potongan tersebut tergambar seperti **Gambar 66 (b)**. Jika bola dan selimut tabung tersebut dipisahkan, maka hasil potongan-potongan pada bola tergambar dalam **Gambar 66 (c)** dan hasil potongan-potongan pada selimut tabung tergambar dalam **Gambar 66 (d).**

Arsiran yang dibuat sebal dalam **Gambar 66**, dimaksudkan sebagai satu lapisan hasil potongan-potongan horisontal pada bola dan selimut tabung untuk menganalisa luas keduanya. Perhitungan luas bola dianalisis melalui sel-sel dalam lapisan tersebut. Setiap sel dalam satu lapisan yang terdapat pada selimut tabung setara dengan daerah persegipanjang. Sedangkan setiap sel dalam satu lapisan yang terdapat pada bola mendekati daerah persegipanjang juga. Sketsa ukuran sel-sel tersebut disajikan dalam **Gambar 67**. Dalam gambar tersebut, t_t menunjukkan tinggi sel satu lapisan pada selimut tabung, t_b menunjukkan tinggi sel satu lapisan pada bola, r menunjukkan jari-jari lingkaran besar pada bola yang samadengan jari-jari bola dan bidang alas tabung, dan R menunjukkan jari-jari lingkaran kecil pada bola.



(a) **(b)**

Gambar 67.

Sketsa Ukuran Sel-sel Hasil Pemotongan-pemotongan pada Bola dan Selimut Tabung

Jumlah luas semua sel yang diarsir tebal pada selimut tabung tersebut adalah $2\pi r t_t$ (mengapa?). Dengan perkataan lain, luas satu lapisan hasil potongan horisontal pada selimut tabung tersebut adalah $L_{satu\ lapisan\ selimut\ tabung} = 2\pi r t_t$. Sedangkan jumlah luas semua sel yang diarsir tebal pada bola tersebut adalah $2\pi R t_b$ (mengapa?). Atau luas satu lapisan hasil potongan horisontal pada bola tersebut adalah $L_{satu\ lapisan\ bola} = 2\pi R t_b$. Luas satu lapisan pada selimut tabung dan satu lapisan pada bola tersebut mendekati sama.

Dalam **Gambar 67 (b)** ΔOPQ ~ ΔPAB (mengapa?). Akibat kesebangunan antara segitiga OPQ dan segitiga PAB, yaitu $\angle$BAP $\cong$ $\angle$OPQ dan $\frac{\text{PA}}{\text{PO}} = \frac{\text{PB}}{\text{OQ}} = \frac{\text{AB}}{\text{PQ}}$. Dari sketsa ukuran-ukuran dalam **Gambar 67 (a)**, kita dapat mensubstitusikannya dalam perbandingan akibat kesebangunan antara ΔOPQ dan ΔPAB. Kita peroleh $\frac{t_b}{r} = \frac{\text{PB}}{\text{OQ}} = \frac{t_t}{R}$. Dari perbandingan tersebut kita peroleh $\frac{t_b}{r} = \frac{t_t}{R}$. Jika kedua ruas perbandingan tersebut dikalikan dengan "rR", maka kita memperoleh $R t_b = r t_t$. Dan jika kedua ruas persamaan tersebut dikalikan dengan 2π, maka kita mendapatkan $2\pi R t_b = 2\pi r t_t$. Ruas kiri persamaan terakhir tersebut adalah luas satu lapisan pada bola, sedangkan ruas kanan persamaan tersebut adalah luas satu lapisan pada selimut tabung. Oleh karena itu kita telah menunjukkan bahwa:

$$L_{satu\ lapisan\ bola} \approx L_{satu\ lapisan\ selimut\ tabung}.$$

Misalkan terdapat n lapisan dari pemotongan-pemotongan pada bola dan selimut tabung. Urutan perhitungannya sebagai berikut:

$$\begin{aligned} L_{\ bola} \approx L_{selimut\ tabung} &\approx L_{lapisan-1} + L_{lapisan-2} + \cdots + L_{lapisan-n} \\ &\approx 2\pi r t_1 + 2\pi r t_2 + \cdots + 2\pi r t_n \approx 2\pi r(t_1 + t_2 + \cdots + t_n) \\ &\approx 2\pi r\ t_{tabung} \approx 2\pi r\ 2r = 4\pi r^2 \end{aligned}$$

Jadi suatu bola yang berjari-jari r, luas bola tersebut adalah: $L_{bola} = 4\pi r^2$ (dalam satuan luas)

3. Volume Bangun Ruang Bidang sisi Lengkung

a. Volume Tabung

Perhitungan volume tabung identik dengan perhitungan volume prisma (mengapa?). Volume tabung yang bidang alasnya berjari-jari r dan tingginya t dirumuskan: $\mathrm{V}_{\text{tabung}} = \mathrm{L}_{\text{bidang-alas}} \times \text{tinggi}_{\text{tabung}}$

$$\mathrm{V}_{\text{tabung}} = \pi r^2 \times t \text{ (dalam satuan volume).}$$

Perhitungan volume tabung tersebut berlaku untuk tabung-tegak (tabung-lingkaran-tegak).

b. Volume Kerucut

Sebuah kerucut terbentuk serupa dengan pembentukan limas, sehingga perhitungan volume kerucut identik dengan perhitungan volume limas. Suatu kerucut dengan jari-jari bidang alasnya r dan tinggi kerucut t, maka perhitungan volume kerucut, yaitu:

$\mathrm{V}_{kerucut} = \frac{1}{3} \times \mathrm{L}_{bidang\ alas} \times \text{tinggi}_{kerucut} = \frac{1}{3} \times (\pi r^2) \times t = \frac{1}{3}\pi r^2 t$ (dalam satuan volume)

Atau $\mathrm{V}_{kerucut} = \frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{s^2 - r^2}$, karena $t = \sqrt{s^2 - r^2}$ (dalam satuan volume)

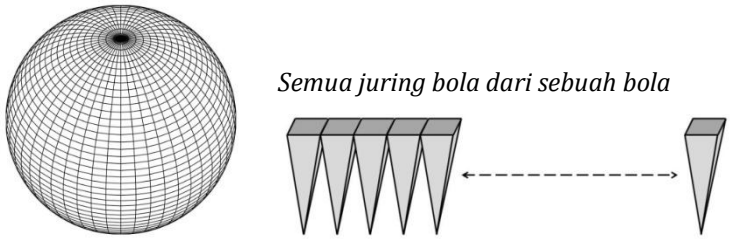
c. Volume Bola

Volume bola adalah banyak kubus satuan yang dapat memenuhi ruang-dalam bola. Meskipun demikian perhitungan volume bola dapat melibatkan jari-jarinya.

Volume suatu bola adalah hasilkali $\frac{4}{3}\pi$ dan pangkat-tiga jari-jarinya.

Misalkan pada suatu bola berjari-jari r lingkaran-lingkaran besar dan lingkaran kecil dibuat seperti dalam **Gambar 68**. Perpotongan-perpotongan antara lingkaran-lingkaran tersebut sedemikian, sehingga pada bola terbentuk sel-sel dan setiap sel berbentuk mendekati daerah segiempat. Setiap titik sudut sel tersebut merupakan ujung jari-jari bola tersebut. Jadi bola tersebut dipotong-potong menjadi juring-juring bola, dan setiap juring bola mendekati limas segiempat.

Perhitungan volume bola dalam hal ini adalah perhitungan volume terhadap bola pejal (bola dan semua titik di dalam ruangnya). Oleh karena itu volume bola yang kita tentukan nilainya sama dengan jumlah volume semua juring bola yang terjadi.



Gambar 68. Sketsa Perhitungan Volume Bola

Dari sketsa yang disajikan dalam **Gambar 68**, jika juring bola yang terbentuk sebanyak *n*, maka kita susun perhitungan volume bola, yaitu:

$$V_{bola} = jumlah\ volume\ semua\ juringbola = V_{juring-1} + V_{juring-2} + \cdots + V_{juring-n}$$

Tembereng juring bola yang kita buat mendekati daerah segiempat. Oleh karena itu setiap juring bola yang terjadi mendekati limas segiempat dengan garis pelukisnya berupa jari-jari bola. Selanjutnya perhitungan volume bola yang kita susun, yaitu:

$$V_{bola} \approx V_{limas-1} + V_{limas-2} + \cdots + V_{limas-n}$$

$$V_{bola} \approx \frac{1}{3}.L_{alas\ limas-1}.t + \frac{1}{3}.L_{alas\ limas-2}.t + \cdots + \frac{1}{3}.L_{alas\ limas-n}.t$$

$$V_{bola} \approx \frac{1}{3}.t(L_{alas\ limas-1} + L_{alas\ limas-2} + \cdots + L_{alas\ limas-n})$$

$$V_{bola} \approx \frac{1}{3}.t.L_{bola}$$

$L_{alas\ limas-1} + L_{alas\ limas-2} + \cdots + L_{alas\ limas-n} = L_{bola}$, karena gabungan semua bidang alas limas tersebut merupakan bola. Jika juring-juring bola atau limas-limas tersebut tak terhitung banyaknya, maka tinggi limas tersebut mendekati jari-jari bola. Dengan demikian, perhitungan volume bola selanjutnya, yaitu:

$$V_{bola} \approx \tfrac{1}{3}r.L_{bola} = \tfrac{1}{3}r.4\pi r^2, \quad \text{(karena } L_{bola} = 4\pi r^2\text{)}.$$

Sehingga $V_{bola} \approx \frac{4}{3}\pi r^3$. Jadi suatu bola yang berjari-jari *r*, volume bola tersebut adalah: $V_{bola} = \frac{4}{3}\pi r^3$ (dalam satuan volume).

D. Aktifitas Pembelajaran

Bagian 1.

Anda telah mempelajari uraian materi tentang tabung, kerucut, dan bola. Anda perlu memantabkan pengetahuan Anda tentang tabung, kerucut, dan bola. Keperluan Anda tersebut dapat terpenuhi dengan memilih benda-benda yang bentuknya menyerupai tabung, kerucut, dan bola. Coba Anda cermati di dalam lingkungan sekitar Anda! Adakah benda-benda alam (bukan buatan manusia) yang dapat dimanfaatkan untuk menjelaskan kepada siswa tentang konsep tabung, kerucut, dan bola?

Bagian 2.

Anda telah mempelajari uraian materi tentang jaring-jaring, perhitungan luas permukaan, dan perhitungan volume dari tabung, kerucut, dan bola. Anda perlu memantabkan pengetahuan Anda dengan mewujudkan secara nyata. Buatlah alat peraga model tabung dan kerucut, dengan bahan kertas BC (manila) atau mika. Mulailah dengan membuat jaring-jaringnya dan kemudian merangkainya menjadi model tabung dan model kerucut. Untuk model bola, gunakan bola plastik yang biasa dipakai mainan anak-anak. Berdasarkan ukuran diameter bola plastik tersebut, pakailah ukuran tersebut untuk menentukan ukuran model tabung dan model kerucut.

E. Latihan/Kasus/Tugas

Bagian 1.

Selesaikan tugas berikut!

1. Kemukakan ide Anda meragakan konsep tabung dan konsep kerucut!
2. Kemukaan ide Anda untuk meragakan bagian-bagian bola yang dipotong oleh suatu bidang!
3. Diskusikan: permukaan tabung, kerucut, maupun bola. Apakah mereka memiliki batas-batas seperti rusuk pada bangun bidang banyak? Jelaskan!

Bagian 2.

1. Analisalah! Bagaimanakah menunjukkan bahwa volume suatu tabung adalah tiga kali volume kerucut?

2. Analisalah! Bagaimanakah menunjukkan luas bola adalah empat kali luas lingkaran-besar pada bola tersebut?
3. Analisalah! Bagaimanakah menunjukkan hubungan antara volume tabung dan volume bola?

F. Ringkasan

Tabung, kerucut, maupun bola merupakan bangun ruang–bangun ruang yang berrongga. Tabung memiliki dua bidang alas yang kongruen dan sejajar, keduanya berupa daerah kurva tertutup sederhana (lingkaran). Ada tabung tegak, ada tabung condong, dipandang dari ketegak lurusan selimut tabung terhadap bidang alasnya.

Kerucut hanya memiliki satu bidang alas yang tepinya dihubungkan oleh selimutnya ke satu titik di luar bidang alasnya. Bidang alas kerucut berupa daerah lingkaran. Ada kerucut-tegak, dan ada pula kerucut-condong, dipandang dari letak proyeksi puncak kerucut ke bidang alasnya. Ada tiga jenis kerucut-tegak, yaitu kerucut-lancip, kerucut-siku-siku, dan kerucut-tumpul. Pengelompokkannya didasarkan dari jenis sudut yang dibentuk oleh dua garis pelukisnya yang ujung-ujungnya merupakan diameter bidang alas kerucut.

Bola juga merupakan bangun ruang berongga. Apabila ada suatu bidang yang berrelasi dengan bola, kemungkinannya yaitu bersinggungan dan berpotongan. Apabila bidang memotong bola dan melalui pusat bola, maka perpotongannya berupa lingkaran besar. Suatu lingkaran-besar pada bola, membelah bola menjadi dua buah setengah bola. Apabila bidang memotong bola dan tidak melalui pusat bola, maka perpotongannya berupa lingkaran-kecil. Jika ada lingkaran kecil pada bola, maka di dalam ruang bola terdapat tembereng-bola, dan pada bola terdapat bidang lengkung bola. Gabungan semua jari-jari yang menghubungkan lingkaran kecil ke pusat bola, dan bidang lengkung bola, berupa juring bola.

Luas permukaan tabung adalah jumlah luas kedua bidang alas tabung dan luas selimutnya. Luas permukaan kerucut adalah jumlah luas bidang alas kerucut dan luas selimutnya. Luas permukaan bola adalah luas bola itu sendiri.

Volume tabung dapat dipikirkan sebagai banyaknya kubus satuan yang memenuhi ruang di dalam tabung. Volume kerucut dapat dipikirkan sebagai banyaknya kubus

satuan yang memenuhi ruang di dalam kerucut. Volume bola dapat dipikirkan sebagai banyaknya kubus satuan yang memenuhi ruang di dalam bola.

G. Umpan Balik/Tindak Lanjut

Anda telah mempelajari bagian bangun ruang sisi lengkung. Sudahkah Anda selesaikan tugas yang diberikan kepada Anda?

Setelah Anda mempelajari konsep bangun ruang, luas permukaan dan volum tabung, kerucut, dan bola dalam kegiatan pembelajaran ini, kiranya Anda dapat mengembangkan pembelajarannya bagi siswa-siswa Anda. Aktifitas belajar yang diusulkan dalam modul ini, Anda perlu melaksanakannya juga bersama siswa-siswa Anda dalam kegiatan pembelajaran matematika di sekolah. Kemampuan ruang dalam diri siswa akan terbangun dan terpendam, apabila siswa berbuat langsung dengan modelnya (alat peraga) buatannya sendiri.

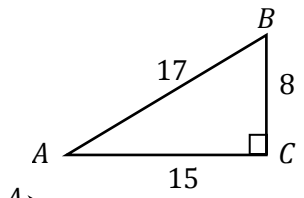
KUNCI JAWABAN LATIHAN

Kegiatan pembelajaran 1.

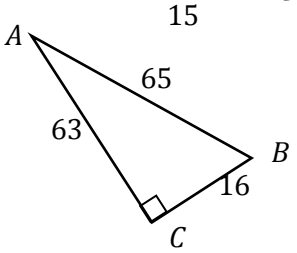
1. a. Refleksi
   b. refleksi
   c. refleksi
   d. rotasi
   e. rotasi
   f. Refleksi dilanjutkan refleksi
   g. rotasi
   h. refleksi
2. $A'(2, 1)$, $B'(-6, 4)$, $C'(-5, 1)$
3. $a + b = 7$
4. (2, 6)
5. a. $R_{O,90°}(-2, 3) = (-3, -2)$ b. $R_{O,270°}(-2, 3) = (3, 2)$.
6. $(-2, 5) \rightarrow (-5, -2)$
7. (5, 2)
8. Hasil transformasi
   a. Titik $A'(-1, -4)$
   b. Titik $A'(10, 1)$
   c. Titik A' (3, 4)
   d. Titik A (3, 2)
9. $2x - y - 4 = 0$
10. $B'(2, -4)$ dan $C'(-8, 6)$

Kegiatan pembelajaran 2.

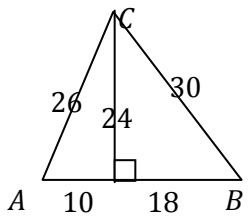
1. Contoh: $\sin A = \cos B = \dfrac{8}{17}$



2. Contoh: $\cos A = \sin B = \dfrac{63}{65}$



3. Contoh: nilai tan $A = \frac{24}{10} = 1{,}2$, dan sin $B = \frac{24}{30} = 0{,}8$



4. Contoh: cos $\alpha = \frac{40}{41}$
5. Lebar sungai ≈ 109,90 m.

Kegiatan pembelajaran 3.

Bagian 1.

1. Gunakan prinsip ketegak lurusan dua bidang dalam teori geometri ruang: garis tegak lurus bidang berarti garis tersebut tegak lurus terhadap semua garis yang terletak pada bidang tersebut. Manfaatkan prinsip tersebut untuk menganalisa ketegak lurusan sepasang bidang sisi suatu kubus, pilih sepasang bidang sisi, pilih salah satu titik sudut dari pertemuan sepasang bidang sisi yang Anda pilih, dan gunakan bidang sisi ketiga yang memuat titik sudut tersebut!
2. Kemungkinan bangun ruang yang terjadi, yaitu kubus, prisma-tegak jajargenjang, dan prisma tegak segitiga siku-siku samakaki.
3. Aphotema pada limas beraturan juga merupakan panjang garis-tinggi bidang sisi limas. Bidang sisi limas merupakan daerah segitiga samakaki. Semua bidang sisi dalam suatu limas saling kongruen, sehingga panjang garis tinggi dari titik puncak ke sisi alas bidang sisi antara bidang sisi yang satu dan bidang sisi lainnya sama panjang.

Bagian 2.

1. Buatlah sketsa kubus ABCD.EFGH, misalnya. Lukislah bidang diagonal ABGH dan bidang diagonal ADFG! Anda bisa mengungkapkan bentuk/wujud perpotongan kedua diagonal tersebut adalah diagonal ruang AG.
2. Kedua diagonal sisi tersebut merupakan sisi-sisi yang berhadapan dalam bidang diagonal EFCD. Bidang diagonal EFCD merupakan daerah persegipanjang.

3. Buatlah sketsa suatu balok yang dimaksud soal dan berilah ukuran-ukuran rusuk-rusuknya pula. Rincilah keenam bidang diagonalnya dan nyatakan dimensinya. Dari rincian tersebut Anda bisa memastikan keenam bidang diagonal tersebut saling kongruen ataukah tidak.
4. Pilih sebuah bidang diagonal dalam balok. Cermati kedua diagonalnya! Anda dapat menunjukkan hubungan bentuk bidang diagonal tersebut dan sifat kedua diagonalnya. Bahwa suatu diagonal ruang dalam balok juga merupakan diagonal dalam suatu bidang diagonal.

Bagian 3.

1. Sketsalah lebih dulu gambar kubus ABCD.EFGH beserta bidang diagonal EFCD, sehingga terbentuk prisma-segitiga siku-siku ADE.BCF dan prisma segitiga siku-siku HDE.GCF. Hitunglah panjang diagonal sisi CF dan diagonal sisi DE, sehingga Anda dapat menentukan luas bidang diagonal AECD. Hitunglah luas permukaan masing-masing prisma segitiga siku-siku tersebut, kemudian jumlahkan hasilnya.
2. Sketsalah lebih dulu gambar balok ABCD.EFGH beserta semua diagonal ruangnya yang berpotongan di O. Dimensi balok AB×AD×AE = 5×4×3, artinya AB = DC = HG = EF = 5, AD = BC = FG = EH = 4, dan AE = BF = CG = DH = 3. Nah cukup mudah bagi Anda untuk melakukan perhitungan luas dan volume yang diminta.

Petunjuk Tugas: Anda dapat memindahkan letak persegi yang diberi nomor seperti dalam gambar contoh jaring-jaring kubus yang diberikan dalam uraian materi.

Kegiatan pembelajaran 4.

Bagian 1.

1. Usulan peragaan untuk konsep tabung dan kerucut:
   a. model ruas garis dapat berupa tusuk sate atau lidi
   b. model bidang dapat berupa gabus/stereofoam
   c. kurva digambar pada gabus, tusuk-sate atau lidi ditancapkan pada gambar kurva.

2. Usulan peragaan untuk bagian bola yang dipotong suatu bidang:
   a. Model bola dapat berupa buah kelapa yang telah dikupas kulitnya, atau bisa juga buah semangka/melon
   b. Model bidang dapat berupa mika-kover atau kertas mengkilat
   c. Pemotongan dilakukan dengan bantuan pisau
3. Bahan diskusi pelajari kembali batas-batas permukaan (bidang lengkung maupun datar) tabung, kerucut, dan bola.

Bagian 2.

1. Untuk melakukan analisa hubungan antara volume tabung, volume kerucut, dan volume bola, cermati pendekatan perhitungan-perhitungannya.
2. Untuk melakukan analisa tentang luas bola, cermati pengertian lingkaran-besar pada bola dan pendekatan perhitungan luas bola.

EVALUASI

Petunjuk: Pilih satu jawaban yang tepat untuk setiap soal dari 4 alternatif jawaban yang disediakan!

1. Transformasi geometris yang mengubah ukuran atau orientasi adalah …

   A. Translasi
   B. Rotasi 180°
   C. Pencerminan
   D. Dilatasi dengan skala 1.

2. Oleh translasi T titik (2,–5) dipetakan ke titik (–1, 8). Peta titik (5, –7) oleh T adalah …

   A. (2, 6)
   B. (2, –4)
   C. (8, –20)
   D. (8, –4)

3. Pencerminan terhadap garis $x = h$ memetakan (3,–2) ke (–5,–2). Oleh pencerminan itu manakah peta (–4,3)?

   A. (12,3)
   B. (8,3)
   C. (4,3)
   D. (–12,3)

4. Oleh suatu rotasi sebesar α rad berpusat di O(0, 0), titik (3, 4) dipetakan ke titik (–4,3). Oleh rotasi sebesar ($\pi + \alpha$) rad, manakah titik hasil (–2,5) oleh rotasi tersebut?

   A. (–5,2)
   B. (–2,5)
   C. (2, –5)
   D. (5,2)

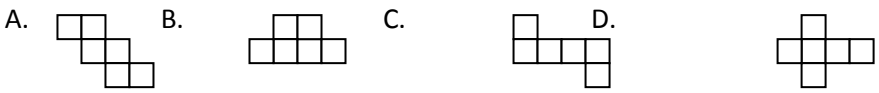
5. Titik (4,–6) adalah titik hasil dilatasi berpusat titik O dari titik (2, –3). Tentukan bayangan titik A(–6, 8).

   A. (–12, 16)
   B. (–8,11)
   C. (–4,5)
   D. (–3,4)

6. Pada segitiga siku-siku diketahui panjang sisi-sisi penyiku adalah 9 dan 40. Jika sudut A di depan sisi 9, maka perbandingan trigonometri cos A = …

   A. 9/41
   B. 9/40
   C. 33/40
   D. 40/41

7. Jika pada segitiga ABC dengan siku-siku di C, dan *a,b,c* berturut-turut panjang sisi di depan sudut A, b, dan C, maka (a+b)b/ac dapat dinyatakan dengan nama perbandingan ....
   A. sin A.cos A.tan A
   B. sin A.cos A.cot A
   C. sin B.cos B.tan B
   D. sin B.cos B.cot B
8. Jarak posisi Amir ke bawah pohon adalah 10 m, dan dari posisinya Amir memandang ujung pohon membentuk sudut 40° terhadap bidang datar. Jika tinggi Amir 2,5 m maka tinggi pohon adalah ... (sin 40° ≈ 0,64, cos 40° ≈ 0,77, tan 40° ≈ 0,84)
   A. 5,9 m
   B. 8,9 m
   C. 10,2 m
   D. 10,9 m
9. Diagonal ruang-diagonal ruang suatu balok PQRS.TUVW, yaitu:
   A. $\overline{PV}, \overline{RW}, \overline{QT}, \overline{SU}$
   B. $\overline{PV}, \overline{RT}, \overline{QW}, \overline{SU}$
   C. $\overline{PU}, \overline{RT}, \overline{QW}, \overline{SV}$
   D. $\overline{PU}, \overline{RW}, \overline{QT}, \overline{SV}$
10. Permukaan prisma-segilima meliputi:
   A. 1 bidang alas dan 5 bidang sisi
   B. 1 bidang alas, 1 bidang atas, 5 bidang sisi
   C. 1 bidang alas dan 5 bidang atas
   D. 1 bidang alas, 1 bidang sisi, dan 5 bidang diagonal
11. Gambar berikut yang bukan merupakan jaring-jaring kubus adalah:



12. Sebuah limas persegi P.QRST, panjang batas bidang alasnya 8 cm, panjang rusuk tegaknya 5 cm. Luas permukaan limas tersebut adalah
   A. 112 cm^2 satuan luas
   B. 160 cm^2 satuan luas
   C. 240 cm^2 satuan luas
   D. 320 cm^2 satuan luas

13. Bentuk selimut kerucut merupakan
    A. daerah lingkaran yang jari-jarinya sama dengan panjang garis-pelukis kerucut
    B. daerah keliling lingkaran yang jari-jarinya sama dengan panjang garis-pelukis kerucut
    C. daerah juring lingkaran yang jari-jarinya sama dengan panjang garis pelukis kerucut
    D. daerah tembereng lingkaran yang jari-jarinya sama dengan panjang garis pelukis kerucut
14. Luas selimut kerucut-lingkaran-tegak yang berjari-jari a dan tingginya p adalah
    A. $\pi p\sqrt{a^2 + p^2}$ satuan luas
    B. $\pi a\sqrt{a^2 + p^2}$ satuan luas
    C. $\pi p\sqrt{p^2 - a^2}$ satuan luas
    D. $\pi a\sqrt{p^2 - a^2}$ satuan luas
15. Volume tabung-lingkaran-tegak yang berjari-jari m dan tingginya n adalah
    A. $\pi\ n\ m^2$ satuan volume
    B. $\pi\ m\ n^2$ satuan volume
    C. $\frac{4}{3}\ \pi\ n\ m^3$ satuan volume
    D. $\frac{4}{3}\ \pi\ m\ n^3$ satuan volume
16. Batas bidang alas suatu limas segienam beraturan adalah
    A. Keenam daerah segitiga samakaki
    B. Daerah segienam beraturan
    C. Segitiga samakaki
    D. Segienam beraturan
17. Jumlah luas semua bidang diagonal dalam kubus yang panjang rusuknya k adalah
    A. $6k^2$ satuan luas
    B. $36k^2$ satuan luas
    C. $6k^2\sqrt{2}$ satuan luas
    D. $36k^2\sqrt{2}$ satuan luas

18. Batas bidang alas suatu tabung merupakan lingkaran-dalam bidang alas suatu balok berdimensi a×b×c, dengan a = b dan c = 3b. Bidang atas tabung tersebut di daerah dalam bidang atas balok. Volume tabung tersebut adalah

    A. $\frac{3}{4}\pi b^3$ satuan volume
    B. $3\pi ab^2$ satuan volume
    C. $\frac{3}{4}\pi abc$ satuan volume
    D. $3\pi abc$ satuan volume

19. Keempat diagonal ruang balok ABCD.EFGH berpotongan di titik O. Jika AB = 6 cm, FG = 10 cm, dan DH = 8 cm, maka OC = ...

    A. $10\sqrt{2}$ cm
    B. $10\sqrt{3}$ cm
    C. $5\sqrt{2}$ cm
    D. $5\sqrt{3}$ cm

20. Di ruang dalam kubus terdapat tabung yang selimutnya menyinggung semua bidang sisi kubus. Bidang alas dan bidang atas tabung berimpit dengan dua bidang sisi kubus yang lain. Di ruang dalam tabung terdapat bola berjari-jari π cm yang menyinggung permukaan tabung. Perbandingan luas antara permukaan kubus, permukaan tabung, dan bola tersebut adalah

    A. $12 : 2 : \pi^2$
    B. $12 : 1 : 2$
    C. $12 : \pi^2 : 2\pi$
    D. $12\pi : \pi^2 : 2$

Kunci Jawab Evaluasi:

No.	Kunci	No.	Kunci	No.	Kunci	No.	Kunci
1	C	6	D	11	B	16	D
2	A	7	B	12	A	17	C
3	A	8	D	13	C	18	A
4	D	9	B	14	B	19	A
5	A	10	B	15	A	20	C

PENUTUP

Kegiatan pembelajaran ini disusun untuk memantabkan pengetahuan peserta dalam memahami transformasi geometris, pengantar trigonometri, dan bentuk-bentuk dalam Geometri Ruang. Materi disajikan sedemikian dan disesuaikan pengalaman belajar Matematika dalam diri siswa SMP/MTs. Pemaparan materi disajikan secara deskriptif analitik dengan harapan mudah dimengerti oleh peserta. Untuk geometri ruang, pemaparan materi disajikan dengan memanfaatkan contoh yang disajikan juga dalam bentuk dua dimensi. Penulis merasa tulisan ini masih kurang mendalam sebagai penguasaan Anda dalam menelusuri kubus, prisma, dan limas.

Ada beberapa visualisasi/ilustrasi dari beberapa kemungkinan bentuk bangun ruang yang tidak sajikan dalam modul ini. Penulis berharap peserta dapat mewujudkan kemungkinan bentuk bangun ruang yang dipaparkan dalam modul ini dalam sajian tiga dimensinya. Dari pengalaman penulis, wujud tiga dimensi dari bentuk bangun ruang memudahkan siswa mempelajari kerumitan dalam geometri ruang.

DAFTAR PUSTAKA

A. Rochaeli. 1952. *Stereomatra*. Djakarta: Jajasan Pembangunan.

Boyd, Cindy J., etc. 2008. *Geometry*. USA: Glenco, The McGraw-Hill, Inc.

Clapham, Christopher and Nicholson, James (1996) *The Concise Oxford Dictionary of Mathematics*. New York: Oxford University Press Inc

Clemens, Stanley R., etc. 1984. *Geometry with Applications and Problem Solvings*. Canada: Addison Wesley Publishing Company.

Fagiel, M. 1987. *The Geometry Problem Solver, Plane-Solid-Analytic*. New York: Research and Education Association.

Gellert Wet al,(Editors) (1989). *The VNR Concise Encyclopedia of Mathematics*, second edition. New York: Van Nostrand Reinhold,

Gorini, Catherine A. (2009). *The Facts On File Geometry Handbook*, Revised Edition Fairfield: Infobase Publishing

Nielsen KL and Vanlonkhuyzen JH. 1949. *Spherical Geometry.* Dalam An Outline Plane and Spherical Trigonometry. New York: Barnes & Noble, Inc.

Keedy, Mervin L., etc. 1967. *Exploring Geometry*. New York: Holt, Rinehart and Winston, Inc.

Larson. R, Boswell.L, Kanold, TD. And Stiff, L (2007). *Geometry*. McDougal Littell Company

Travers, Kenneth J., etc. 1987. *GEOMETRY*. River Forest, Illionis: Laidlaw Brothers, A Division of Doubleday & Company, Inc.

Vanthijn, Kobus, Rawuh. 1952. *Ilmu Ukur Ruang*. Jakarta: J.B. Wolters Groningen.

http://www.mcdougallittell.com

http://euler.slu.edu/escher/index.php/Introduction_to_Symmetry

http://study.com/academy/practice/quiz-worksheet-symmetry-in-math.html

http://study.com/academy/lesson/reflection-rotation-translation.html

https://en.wikipedia.org/wiki/Symmetry_in_biology

GLOSARIUM

Transformasi	:	Perubahan
Translasi	:	Pergeseran/perpindahan, dengan orientasi/arah tetap.
Dilatasi	:	Perbesaran atau perkecilan, dengan orientasi/arah tetap.
Refleksi	:	Pencerminan, memungkinkan perubahan orientasi/arah
Rotasi	:	Perputaran, memungkinkan perubahan orientasi/arah
Isometri	:	Berukuran tetap (tidak berubah)
Invarian	:	Tetap (posisi tidak berubah)
Perbandingan	:	Ratio, hasil bagi 2 kuantitas
sin	:	sinus, perbandingan sisi di depan sudut segitiga siku-siku terhadap sisi miring.
cos	:	cosinus, perbandingan sisi di samping sudut segitiga siku-siku terhadap sisi miring.
tan	:	tangens, perbandingan sisi di depan sudut segitiga siku-siku terhadap di sampingnya.
cot	:	cotangens, cot A = 1/tan A
sec	:	secan, sec A = 1/ cos A
csc	:	Cosecan, csc A = 1/ sin A
klinometer	:	alat untuk mengukur besar kemiringan sudut
Bidang banyak	:	Polihedron, bangun ruang bersisi bidang datar.
Diagonal	:	Garis yang menghubungkan titik sudut tak se-sisi
Prisma	:	Bangun ruang yang dibatasi 2 bangun datar dan beberapa jajargenjang yang menghubungkannya
Limas	:	Bangun ruang yang dibatasi seuah bidang datar dan beberapa segitiga yang terhubung di satu titik.
Paralel epipedum	:	Prisma jajargenjang

Rhomboeder	:	Paralel epipedum yang semua sisinya belah ketupat
Apotema	:	Jarak titik puncak limas ke rusuk sisi alas.
Jaring-jaring	:	Bangun datar hasil “bukaan” bangun ruang berdasarkan rusuk-rusuknya.
Garis pelukis	:	Ruas-ruas garis yang menghubungkan titik puncak kerucut dan sisi alasnya.

TUT WURI HANDAYANI