GURU PEMBELAJAR

MODUL PELATIHAN MATEMATIKA SMA

KELOMPOK KOMPETENSI B

PEDAGOGIK

TEORI BELAJAR

PROFESIONAL

RELASI, FUNGSI, PERSAMAAN DAN PERTIDAKSAMAAN

DIREKTORAT JENDERAL GURU DAN TENAGA KEPENDIDIKAN
KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
2016

Kata Sambutan

Peran guru professional dalam pembelajaran sangat penting sebagai kunci keberhasilan belajar siswa. Guru professional adalah guru yang kompeten membangun proses pembelajaran yang baik sehingga dapat menghasilkan pendidikan yang berkualitas. Hal tersebut menjadikan guru sebagai komponen yang menjadi fokus perhatian pemerintah pusat maupun pemerintah daerah dalam meningkatkan mutu pendidikan terutama menyangkut kompetensi guru.

Pengembangan profesionalitas guru melalui program Guru Pembelajar (GP) merupakan upaya peningkatan kompetensi untuk semua guru. Sejalan dengan hal tersebut, pemetaan kompetensi guru telah dilakukan melalui uji kompetensi guru (UKG) untuk kompetensi pedagogik dan professional pada akhir tahun 2015. Hasil UKG menunjukan peta kekuatan dan kelemahan kompetensi guru dalam penguasaan pengetahuan. Peta kompetensi guru tersebut dikelompokan menjadi 10 (sepuluh) kelompok kompetensi. Tindak lanjut pelaksanaan UKG diwujudkan dalam bentuk pelatihan guru paska UKG melalui program Guru Pembelajar. Tujuannya untuk meningkatkan kompetensi guru sebagai agen perubahan dan sumber belajar utama bagi peserta didik. Program Guru Pembelajar dilaksanakan melalui pola tatap muka, daring (*online*) dan campuran (*blended*) tatap muka dengan online.

Pusat Pengembangan dan Pemberdayaan Pendidik dan Tenaga Kependidikan (PPPPTK), Lembaga Pengembangan dan Pemberdayaan Pendidik dan Tenaga Kependidikan Kelautan Perikanan Teknologi Informasi dan Komunikasi (LP3TK KPTK), dan Lembaga Pengembangan dan Pemberdayaan Kepala Sekolah (LP2KS) merupakan Unit Pelaksana Teknis dilingkungan Direktorat Jenderal Guru dan Tenaga Kependidikan yang bertanggung jawab dalam mengembangkan perangkat dan melaksanakan peningkatan kompetensi guru sesuai bidangnya. Adapun perangkat pembelajaran yang dikembangkan tersebut adalah modul untuk program Guru Pembelajar (GP) tatap muka dan

GP *online* untuk semua mata pelajaran dan kelompok kompetensi. Dengan modul ini diharapkan program GP memberikan sumbangan yang sangat besar dalam peningkatan kualitas kompetensi guru.

Mari kita sukseskan program GP ini untuk mewujudkan Guru Mulia Karena Karya.

Jakarta, Februari 2016
Direktur Jenderal,

Sumarna Surapranata
NIP. 195908011985031002

GURU PEMBELAJAR

MODUL PELATIHAN

MATEMATIKA SMA

KELOMPOK KOMPETENSI B

PEDAGOGIK

TEORI BELAJAR

DIREKTORAT JENDERAL GURU DAN TENAGA KEPENDIDIKAN

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN

2016

Penulis:
Dr. R. Rosnawati, M.Si, 08164220779, email: rosnawati.slamet@gmail.com

Penelaah:
Dr. Pradnyo Wijayanti, M.Pd., 08125986823, email: pradnyowijayanti@unesa.ac.id

Ilustrator:
Yogi Rostana

Kata Pengantar

Peningkatan kualitas pendidikan saat ini menjadi prioritas, baik oleh pemerintah pusat maupun daerah. Salah satu komponen yang menjadi fokus perhatian adalah peningkatan kompetensi guru. Peran guru dalam pembelajaran di kelas merupakan kunci keberhasilan untuk mendukung keberhasilan belajar siswa. Guru yang profesional dituntut mampu membangun proses pembelajaran yang baik sehingga dapat menghasilkan *output* dan *outcome* pendidikan yang berkualitas.

Dalam rangka memetakan kompetensi guru, telah dilaksanakan Uji Kompetensi Guru (UKG) Tahun 2015. UKG tersebut dilaksanakan bagi semua guru, baik yang sudah bersertifikat maupun belum bersertifikat untuk memperoleh gambaran objektif kompetensi guru, baik professional maupun pedagogik. Hasil UKG kemudian ditindaklanjuti melalui Program Guru Pembelajar sehingga diharapkan kompetensi guru yang masih belum optimal dapat ditingkatkan. Salah satu Program Guru Pembelajaran dilaksanakan melalui pendidikan dan pelatihan (Diklat) Guru Pembelajar.

PPPPTK Matematika sebagai Unit Pelaksana Teknis Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan dibawah pembinaan Direktorat Jenderal Guru dan Tenaga Kependidikan mendapat tugas untuk menyusun modul guna mendukung pelaksanaan Diklat Guru Pembelajar. Modul ini diharapkan dapat menjadi sumber belajar bagi guru dalam meningkatkan kompetensinya sehingga mampu mengambil tanggungjawab profesi dengan sebaik-baiknya.

Yogyakarta, Maret 2016

Kepala PPPPTK Matematika,

Dr. Dra. Daswatia Astuty, M.Pd.

NIP. 196002231985032001

Daftar Isi

Daftar Gambar

Halaman

Pendahuluan

A. Latar Belakang

Merujuk pada Peraturan Menteri Pendayagunaan Aparatur Negara dan Reformasi Birokrasi (Permenpan dan RB) Nomor 16 tahun 2009 tentang Jabatan Fungsional Guru dan Angka Kreditnya memuculkan paradigma baru profesi guru. Konsekuensinya adalah guru dituntut melakukan pengem-bangan keprofesian secara terus menerus (berkelanjutan) sehingga guru dapat menjalankan tugas dan fungsinya secara profesional. Dengan demikian guru diharapkan selalu mengembangkan diri, selalu belajar agar dapat membelajarkan peserta didik atau dengan kata lain guru sebagai guru pembelajar.

Guru pembelajar selalu menyiapkan rencana penyampaian bahan ajar, yang mempertimbangkan kemampuan peserta didik, dan tidak mendominasi interaksi di dalam kelas. Ia menempatkan diri sebagai teman, fasilitator dan konselor bagi siswa. Singkatnya, guru pembelajar memberikan peluang kepada peserta didik untuk mencoba belajar dengan kemampuan sendiri, atau dalam bekerja sama dengan temannya.

Berkaitan dengan hal ini dikembangkan modul guru pembelajar. Modul Guru Pembelajar adalah substansi materi yang dikemas guna membantu guru mencapai kompetensi yang telah ditetapkan, terutama kompetensi pedagogik dan kompetensi profesional. Modul Guru Pembelajar pada intinya merupakan model bahan belajar (*learning material*) yang menuntut peserta pelatihan untuk belajar lebih mandiri dan aktif.

Salah satu kompetensi yang harus dikuasai guru adalah pemahaman terkait dengan bagaimana peserta didik belajar. Oleh karena itu dalam modul ini dijabarkan materi terkait dengan teori belajar tingkah laku, teori belajar kognitif, dan teori belajar social.

B. Tujuan

1. Peserta diklat atau pembaca memahami beberapa teori belajartingkah laku dan penerapannya dalam pemeblajaran matematika.
2. Peserta diklat atau pembaca memahami beberapa teori belajar kognitif dan penerapannya dalam pembelajaran matematika.
3. Peserta diklat atau pembaca memahami beberapa teori belajar social dan penerapannya dalam pembelajaran matematika.

C. Peta Kompetensi

1. Menguasai teori belajar tingkah laku dan prinsip-prinsip pembelajaran yang mendidik
2. Menguasai teori belajar kognitif dan prinsip-prinsip pembelajaran yang mendidik
3. Menguasai teori belajar sosial dan prinsip-prinsip pembelajaran yang mendidik

D. Ruang Lingkup

Untuk mencapai kompetensi yang telah ditetapkan, lingkup materi yang dikembangkan adalah sebagai berikut:

1. Teori belajar tingkah laku (behavior) dan penerapannya.
2. Teori belajar kognitif dan penerapannya.
3. Teori belajar sosial dan penerapannya.

E. Saran Cara Penggunaan Modul

Untuk memanfaatkan bahan belajar ini, peserta diklat atau pembaca perlu membaca petunjuk belajar ini beserta dengan evaluasinya.

1. Untuk keperluan diklat

Jika bahan belajar ini digunakan dalam kegiatan diklat maka sebaiknya fasilitator menyusun poin-poin bahan belajar ini untuk dijadikan sebagai bahan tayang. Selanjutnya peserta melakukan kegiatan atau pengerjaan tugas sesuai dengan langkah-langkah sebagai berikut:

- Fasilitator menyampaikan poin-poin kegiatan yang akan dilakukan

- Peserta diklat mengerjakan tugas atau latihan yang didampingi fasilitator. Upayakan permasalahan tuntas dibahas dalam kegiatan ini. Untuk membantu penyelesaian tugas, peserta dapat merujuk bahan bacaan yang ada di bagian akhir bahan belajar ini. Sangat dimungkinkan juga peserta/pembaca mencari referensi dari bahan bacaan lain atau sumber lain.

- Selanjutnya, cocokan hasil pengerjaan evaluasi dengan alternatif kunci jawaban. Untuk melihat ketercapaian kompetensi dan langkah apa yang mesti dilakukan silahkan lihat bagian tindak lanjut.

2. Untuk keperluan referensi sendiri

Jika bahan belajar ini digunakan untuk keperluan referensi secara mandiri, maka pembaca perlu memulainya secara urut dari bagian pertama sampai bagian evaluasi. Sangat disarankan untuk tidak membuka kunci jawaban terlebih dahulu sebelum pembaca mencermati keseluruhan isi bahan belajar.

Kegiatan Pembelajaran 1

Teori Belajar Tingkah Laku

A. Tujuan

Secara umum tujuan yang dicapai setelah peserta diklat dan pembaca pada umumnya mempelajari Kegiatan Belajar-1 ini adalah memahami teori belajar tingkah laku (behavior). Teori belajar yang akan dibahas dalam paham behaviorisme adalah teori yang dikembangkan oleh Pavlop, Skiner dan Thorndike. Salah satu tokoh teori belajar tingkah laku lainnya adalah Robert M. Gagne yang lebih dikenal dengan sebutan Gagne. Gagne dikenal luas karena teori-teorinya yang berkait dengan objek-objek langsung matematika dan hirarki belajar. Dengam mengambil kelebihan dan mengetahui kelemahan dari teori ini diharapkan peserta diklat dan pembaca pada umumnya dapat menggunakannya dalam kegiatan pembelajaran. Secara rinci tujuan yang ingin dicapai adalah sebagai berikut.

1. Peserta diklat dapat menjelaskan teori *connectionism*
2. Peserta diklat dapat menjelaskan teori *classical conditioning*
3. Peserta diklat dapat menjelaskan teori *operant conditioning*
4. Peserta diklat dapat menjelaskan beberapa implikasi dari teori *connectionism* , *classical conditioning* , *operant conditioning* dan terhadap pembelajaran matematika.

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

1. Menjelaskan teori connectionism
2. Menjelaskan teori classical conditioning
3. Menjelaskan teori operant conditioning
4. menjelaskan pentingnya memberi latihan dan PR kepada para siswa.
5. memberi contoh fakta, konsep, prinsip, dan keterampilan (*skill*).
6. menyebutkan beberapa implikasi dari teori para penganut psikologi tingkah laku terhadap pembelajaran matematika.

C. Uraian Materi

1. Teori Belajar Tingkah Laku (*Behaviorisme*)

Paham behaviorisme memandang belajar sebagai perkayaan/penambahan materi pengetahuan (material) dan atau perkayaan pola-pola respon perilaku baru (*behavior*). Paham ini berasumsi bahwa pada saat kelahiran jiwa manusia itu laksana tabula rasa (papan tulis bersih yang belum ditulisi) atau laksana bejana kosong yang masih harus diisi agar dapat berfungsi. Oleh karena itu dalam konteks ini, belajar dapat diartikan sebagai suatu proses pengisian jiwa dengan pengetahuan dan pengalaman sebanyak-banyaknya melalui hafalan.

Teori belajar yang akan dibahas dalam paham behaviorisme adalah teori yang dikembangkan oleh Thorndike, Pavlop, Skinner, dan Gagne. Beberapa hukum belajar yang menganut paham behaviorisme adalah sebagai berikut:

1) Teori *Connectionism*

Teori ini dikembangkan oleh Edward Lee Thorndike yang menjelaskan bahwa terdapat kesamaan antara proses belajar dalam diri hewan dan manusia. Kesamaan tersebut yaitu adanya hubungan atau koneksi antara kesan yangditangkap oleh pancaindera atau stimulus (S) dengan perbuatan atau Response (R) Thorendike mengajukan tiga hukum dasar tentang perilaku belajar.

a. *Law of Readiness* menjelaskan tentang adanya hubungan antara kesiapan seseorang dalam merespon, menerima atau menolak terhadap stimulus yang diberikan. Maka pembelajaran dapat berlangsung secara efektif dan efisien apabila peserta didik telah memiliki kesiapan belajar.

b. L*aw of Exercise* menjelaskan bahwa hubungan antara stimulus (S) dan tindakan (R) akan menjadi lebih kuat jika hubungan tersebut dilakukan berulang-ulang, sebaiknya hubungan tersebut akan melemah jika jarang dilakukan. Dalam hal ini menekankan pentingnya latihan atau pengulangan dalam menggunakan materi yang sedang dipelajari untuk memperkuat penguasaan siswa terhadap materi pelajaran tersebut.

c. *Law of Effect*, artinya bahwa jika sebuah respon menghasilkan efek yang memuaskan, maka hubungan stimulus-respon akan semakin kuat. Sebaliknya semakin tidak memuaskannya efek dari respon maka semakin lemah pula hubungan yang terjadi antara stimulus-respons. Aplikasi dari teori ini dalam pembelajaran adalah penerapan prinsip hadiah atau reward dan sanksi atau hukuman atau punishment dalam pembelajaran.

2). Teori *Classical Conditioning*

Teori ini dikembangkan oleh Ivan Petrovich Pavlop (1972) yang menjelaskan bahwa proses belajar diri seseorang adalah suatu respon akan berlangsung sebagai akibat dari terjadinya pengasosiasian ganjaran sebagai kondisi dan rangsangan sebagi stimulus yang mendahului ganjaran tersebut.

3). Teori *Operant Conditioning*

Teori ini dikembangkan oleh B.F Skinner yang menjelaskan terdapat dua macam respon yang berbeda yaitu *respondent response* (*reflexive response*) dan operant response (*instrumental response*). Respondent respon yaitu respon tertentu yang ditimbulkan oleh stimulus tertentu, sedangkan *operant response* yaitu respon yang timbulnya diikuti oleh munculnya perangsang-perangsang lain.

Skinner berpendapat bahwa tingkah laku abnormal berkembang dengan prinsip yang sama dengan perkembangan tingkah laku yang normal. Oleh karena itu, tingkah laku yang abnormal dapat diganti dengan tingkah laku normal dengan cara sederhana yaitu memanipulasi lingkungan.

Penting untuk dicatat bahwa, tingkah laku yang tidak dikehendaki dapat diperkuat tanpa sengaja dengan kesatuan atau keterdekatan *reinforcement*. *Reinforcement* yang langsung bisa dinikmati untuk memenuhi kebutuhan disebut sebagai penguat primer *(primary reinforcer atau unconditioned reinforcer)* yaitu makanan atau minuman. Namun menurut Skinner, hanya sedikit tingkah laku manusia yang berhubungan dengan penguat primer. Umumnya tingkah laku manusia berhubungan dengan penguat *sekunder (secondary reinforcer atau conditioned reinforcer)* seperti uang dan kehormatan.

Dalam konteks pembelajaran, kelainan tingkah laku adalah kegagalan belajar. Kegagalan tersebut dapat berupa:

a. Kekurangan tingkah laku *(behavior deficit).* Tidak memiliki repertoir respon yang dikehendaki karena miskin *reinforcement*

b. Kesalahan penguatan *(schedules reinforcement error).* Pilihan res-ponnya tepat, tetapi *reinforcement* diterima secara tidak benar sehingga organisme cenderung memakai respon yang tidak dikehendaki

c. Kesalahan memahami stimulus *(failure in discriminating stimulus).* Orang gagal dalam memilah tanda-tanda yang ada pada stimulus sehingga stimulus yang benar dihubungkan dengan hukuman sedangkan yang salah dihubungkan dengan *reinforcement.* Akibatnya akan terjadi pembentukan tingkah laku yang tidak dikehendaki.

d. Merespon secara salah *(inapropriate set of response).* Ketidakmampuan mengenali penanda spesifik suatu stimulus, sehingga akhirnya orang mengembangkan respon yang salah karena justru respon tersebut yang mendapat *reinforcement*

Dapat disimpulkan bahwa kegagalan belajar harus dipahami melalui sejarah *reinforcement* yang diterima seseorang. Menurut teori ini kegagalan belajar tersebut dapat diganti dengan cara memanipulasi *reinforcement* lingkungan mengikuti pengkondisian operan dan klasikal. Untuk mengatasi kegagalan siswa dalam belajar matematika, dilakukan dengan mengubah pengkondisian belajar matematika yang telah diberikan sebelumnya.

4). Teori Belajar Gagne

Menurut Robert M Gagne, belajar merupakan proses yang memungkinkan manusia mengubah tingkah laku secara permanen, sedemikian sehingga perubahan yang sama tidak akan terjadi pada keadaan yang baru.Gagne dikenal luas karena teori-teorinya yang berkait dengan objek-objek langsung matematika dan hirarki belajar. Selain itu, Gagne mengemukakan kematangan tidak diperoleh melalui belajar, karena perubahan tingkah laku yang terjadi merupakan akibat dari pertumbuhan struktur pada diri manusia tersebut.

Gagne menggunakan matematika sebagai sarana untuk menyajikan dan mengaplikasi teori-teorinya tentang belajar. Menurut Gagne, objek belajar matematika terdiri dari objek langsung dan objek tak langsung. Objek tak langsung adalah berpikir logis, kemampuan menyelidiki, kemampuan memecahkan masalah, disiplin pribadi dan apresiasi pada struktur matematika. Sedangkan objek langsung belajar matematika adalah fakta, konsep, prinsip, dan keterampilan.

1) Fakta (*fact*) adalah perjanjian-perjanjian dalam matematika seperti simbol-simbol matematika, kaitan simbol “5” dengan kata “lima” merupakan contoh fakta.

2) Konsep *(concept)* adalah ide abstrak yang memungkinkan kita mengelompokkan objek ke dalam contoh dan bukan contoh. Himpunan, segitiga, kubus, belah ketupat, lingkaran dan jari-jari adalah merupakan konsep dalam matematika.

3) Prinsip *(principle)* merupakan objek yang paling kompleks. Prinsip adalah sederetan konsep beserta dengan hubungan diantara konsep-konsep tersebut. Contohnya, rumus luas selimut tabung di atas. Pada rumus tersebut, terdapat beberapa konsep yang digunakan, yaitu konsep luas (L), konsep ukuran sisinya, yaitu panjang selimut yang berupa keliling lingkaran (2πr) dan lebar selimut yang merupakan tinggi tabung (t). Seorang siswa dinyatakan telah memahami prinsip luas selimut tabung jika ia: (1) ingat rumus atau prinsip yang bersesuaian; (2) memahami beberapa konsep yang digunakan serta lambang atau notasinya; dan (3) dapat menggunakan rumus atau prinsip yang bersesuaian pada situasi yang tepat.

4) Keterampilan *(skills)* adalah kemampuan memberikan jawaban yang benar dan cepat. Misalnya pembagian cara singkat, penjumlahan pecahan dan perkalian pecahan.

Gagne mengklasifikasikan tingkah laku manusia sebagai hasil belajar yang sangat bervariasi dan berbeda. Keterampilan-keterampilan yang dapat diamati sebagai hasil-hasil belajar disebut kemampuan-kemampuan atau disebut juga kapabilitas. Gagne mengemukakan ada 5 kategori hasil belajar yaitu: informasi verbal, keterampilan Intelektual, strategi kognitif, sikap,keterampilan motorik.

Gagne memberikan dasar tentang cara mengurutkan materi pembelajaran dengan selalu menanyakan pertanyaan seperti ini: “Pengetahuan apa yang lebih dahulu harus dikuasai siswa agar ia berhasil mempelajari suatu pengetahuan tertentu?” Setelah mendapat jawabannya, ia harus bertanya lagi seperti pertanyaan di atas tadi untuk mendapatkan pengetahuan prasyarat yang harus dikuasai dan dipelajari siswa sebelum ia mempelajari pengetahuan tersebut. Begitu seterusnya sampai didapat urut-urutan pengetahuan dari yang paling sederhana sampai yang paling kompleks.

2. Penerapan Teori Belajar Tingkah Laku

Sebagaimana disampaikan di bagian depan, para penganut psikologi tingkah laku (*behaviorism*), memandang belajar sebagai hasil dari pembentukan hubungan antara rangsangan dari luar (*stimulus*) seperti '2 + 2' dan balasan dari siswa (*response*) seperti '4' yang dapat diamati. Mereka berpendapat bahwa semakin sering hubungan antara rangsangan dan balasan terjadi, maka akan semakin kuatlah hubungan keduanya (*law of exercise*). Karena itu, para penganut teori belajar tingkah laku sering menggunakan cara tubian (*drill*).

Di sekolah seringkali kita jumpai guru-guru yang memberikan *drill* kepada siswa untuk berlatih soal-soal, cara-cara tersebut harus dicermati secara lebih kritis. Proses penggunaan drill yang menekankan kepada siswa agar lebih terampil tentu saja tidak salah, namun apabila hal itu dilakukan dengan mengabaikan proses pemahaman maka penggunaan drill menjadi tidak tepat.

Sebagai contoh, siswa yang diberikan drill untuk mengerjakan soal-soal integral tentu tanpa diberikan pemahaman mengenai konsep integral tentu maka hal ini hanya akan memberikan kemampuan siswa untuk mengerjakan soal tapi tidak memahami konsep integral itu sendiri. Namun, jika siswa sudah faham tentang konsep integral, maka drill dapat mengambil peran untuk membuat siswa lebih terampil dalam integral tentu. Perlu dipikirakan juga untuk memberikan penguatan (*reinforcement*) maupun sanksi (*punishment*) dalam memberikan drill ini.

D. Aktivitas Pembelajaran

Kegiatan 1

Pernahkan Anda menyaksikan sirkus di televisi? Bagaimana cara mengajari binatang-binatang yang ada sehingga mereka dapat melakukan tugasnya dengan baik? Dapatkah cara tersebut digunakan untuk siswa kita? (Misalnya supaya kelas yang diampu yang tadinya kurang tertib menjadi lebih tertib) Dalam hal apa saja hal ini dapat digunakan? Mengapa?

Jawab

Kegiatan 2

Dalam pembelajaran matematika Pak Budi selalu memberikan latihan dan PR. Kajilah hal tersebut dengan menggunakan sudut pandang teori belajar tingkah laku. Jelaskan mengapa guru harus memberikan latihan dan PR ini!

Jawab:

Kegiatan 3

Bagaimana menerapkan teori belajar tingkah laku pada siswa SMA tentang pembiasaan sikap disiplin dengan tidak mengabaikan pembelajaran yang menyenangkan.

Jawab:

E. Latihan/Kasus/Tugas

Tes Formatif 3

Berilah tanda silang (X) pada jawaban yang Anda anggap benar

1. Kemampuan manusis yang dibawa sejak lahir adalah ....
   A. Insting
   B. Refleks
   C. Dorongan lapar
   D. One-trial learning

2. Berikut adalah penyebab ditemukannya kegagalan belajar menurut teori operan condition, ***kecuali*** ....
   A. Kesalahan pemberian waktu penguatan
   B. Kesalahan memahami stimulus
   C. Merespon secara salah
   D. Memberikan stimulus yang salah

3. Berikut adalah tokoh pengembang teori belajar perilaku, ***kecuali*** ....
   A. Thorendike
   B. Skinner
   C. Gagne
   D. Piaget

4. Berikut adalah hukum yang ada pada teori connectionism, ***kecuali*** ....
   A. Law of Readiness
   B. Law of Exercise
   C. Law of Effect
   D. Law of Practice

5. Memperbanyak melakukan latihan dan pengulangan dalam belajar merupakan contoh dari salah satu hukum belajar dalam teoti connectionism, yaitu ….
   A. Law of Readiness
   B. Law of Exercise
   C. Law of Effect
   D. Law of Practice

6. Contoh dari *Law of Readiness* adalah ….

   A. Membaca materi yang akan dipelajari sebelumnya di rumah

   B. Guru memberikan feedback setiap kali siswa mengumoulkan tugas

   C. Guru memberikan latihan soal di kelas

   D. Guru memberikan motivasi untuk menarik perhatian siswa si kelas

7. Menurut teori connectionism tingkah laku individu berasal dari hubungan antara ....

   A. stimulus dan respon

   B. kebiasaan dan tuntutan

   C. lingkungan dan individu

   D. instink dan dorongan (motivasi)

8. Menurut Gagne matematika terdiri dari objek langsung dan objek tak langsung. Berikut ini termasuk dalam objek langsung, ***kecuali***....

   A. fakta

   B. konsep

   C. prinsip

   D. definisi

9. Berikut adalah konsep di dalam matematika, ***kecuali*** ....

   A. Himpunan

   B. Lingkaran

   C. Kalkulus

   D. Differensial

10. Kelemahan teori behaviorisme dalam proses pembelajaran adalah ….

    A. Pembelajar difokuskan terjadap tujuan yang jelas

    B. Dapat diterapkan pada anak yang masih membutuhkan dominasi orang tua

    C. Proses pembelajaran manusia di analogikan dengan perilaku hewan

    D. Pembelajaran menekankan pada perolehan kemampuan psikomotor

F. Rangkuman

1. Teori belajar behaviorisme memandang belajar sebagai penambagan materi/pengetahuan. Paham ini berasumsi bahwa pada saat kelahiran jiwa manusia itu laksana tabula rasa (papan tulis bersih yang belum ditulisi) atau laksana bejana kosong yang masih harus diisi agar dapat berfungsi.

2. Teori ini terdiri atas tiga rumpun yaitu teori koneksionisme, teori kondisioning klasik, dan teori operant kondisioning.

3. Teori koneksionisme adalah teori yang menyatakan bahwa Pembentukan hubungan stimulus-respon perlu dilakukan berulang-ulang. Tokoh yang terkenal dalam mengembangkan teori ini adalah Edward L. Thorndike. Hasil penelitiannya dikenal dengan t*rial and error.* Menurut connectionism belajar merupakan proses pembentukan koneksi-koneksi antara stimulus da respon. Thorndike mengemukakan tiga hukum dalam belajar yaitu *Law of Readiness*, *Law of Exercise*, dan *Law of Effect.*

4. Teori Belajar Kondisioning yang dipelopori oleh Ivan P Pavlo menyumbangkan gagasan dan pikirannya dalam bidang ilmu psikologi. Pendapatnya mengenai refleks berkondisi, adalah akibat dari hasil pekerjaannya yang secara keseluruhan berbeda-beda di setiap tempat. Teori belajar classical conditioning kadang-kadang disebut juga respont conditioning atau Pavlovian Conditioning, merupakan teori belajar katagori Stimulus-Respon (S-R) tipe S. Esensi berlakunya classical conditioning adalah adanya dua stimulus yang berpasangan. Satu stimulus yang dinamakan conditioned stimulus (CS) atau kita sebut saja stimulus yang berkondisi.

5. Teori belajar operant kondisioning menyatakan bahwa respon individu tidak hanya terjadi karena adanya rangsangan dari lingkungan, akan tetapi dapat juga terjadi kaerna sesuatu di lingkungan yang tidak diketahui atau tidak disadari. Menurut skinner bahwa unsure terpenting dalam belajar adalah penguatan (*reinforcement*). Penguatan tersbut terbagi menjadi dua yaitu bentuk penguatan yang bersifat positif dan negatif.

6. Menurut Gagne, objek belajar matematika terdiri dari objek langsung dan objek tak langsung. Objek tak langsung adalah berpikir logis, kemampuan menyelidiki, kemampuan memecahkan masalah, disiplin pribadi dan apresiasi pada struktur

matematika. Sedangkan objek langsung belajar matematika adalah fakta, keterampilan, konsep dan prinsip

7. Hiraki belajar berupa urut-urutan pengetahuan dari yang paling sederhana sampai yang paling kompleks sangat penting diketahui guru, sehingga dengan hiraki belajar tersebut, para guru akan dapat memfasilitasi siswanya dalam proses pembelajaran.

G. Umpan Balik dan Tindak Lanjut

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 3 yang terdapat pada bagian akhir unit ini. Hitunglah ketepatan jawaban tersebut dengan cara memberi skor masing-masing soal dengan rentangan 0-10. Kemudian gunakan rumus berikut ini untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda dalam mempelajari Kegiatan Belajar 1 ini.

Rumus:

$$\text{Tingkat penguasaan: } \frac{\text{Jumlah skor kelima jawaban}}{50} \times 100\ \%$$

Arti tingkat penguasaan yang Anda capai:

90 – 100	:	Baik sekali
80 – 89	:	Baik
70 – 79	:	Cukup
< 70	:	Kurang

Jika tingkat penguasaan Anda minimal 80%, maka Anda dinyatakan berhasil dengan baik. Anda dapat melanjutkan untuk mempelajari Unit berikutnya. Sebaliknya, bila tingkat penguasaan Anda kurang dari 80%, silakan pelajari kembali uraian yang terdapat dalam subunit sebelumnya, khususnya bagian yang belum Anda kuasai.

Kegiatan Belajar 2

Teori Belajar Kognitif

A. Tujuan

Secara umum tujuan yang dicapai setelah peserta diklat dan pembaca pada umumnya mempelajari Kegiatan Belajar-2 ini adalah memahami teori belajar kognitif. Teori belajar yang akan dibahas dalam teori perkembangan kognitif adalah teori belajar Piaget, teori Gestalt, teori pengolahan informasi. Dengam mengambil kelebihan dan mengetahui kelemahan dari teori ini diharapkan peserta didik dan pembaca pada umumnya dapat menggunakannya dalam kegiatan pembelajaran. Secara rinci tujuan yang ingin dicapai adalah sebagai berikut.

1. Peserta diklat dapat menjelaskan teori perkembangan kognitif Piaget
2. Peserta diklat dapat menjelaskan teori gestalt
3. Peserta diklat dapat menjelaskan teori pengolahan informasi

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

1. Menjelaskan teori perkembangan kognitif Piaget
2. Menjelaskan teori Gestalt
3. Menjelaskan teori pengolahan informasi

C. Uraian Materi

1. Teori Belajar Kognitif

Dalam teori belajar kognitif berpendapat, bahwa tingkah laku seseorang tidak hanya dikontrol oleh "*reward*" dan "*reinforcement*". Menurut teori ini belajar adalah perubahan persepsi dan pemahaman yang tidak selalu berbentuk tingkah laku yang dapat diamati dan dapat diikut. Pengertian kognisi sendiri sebenarnya meliputi aspek-aspek struktur intelek yang dipergunakan untuk mengetahui sesuatu. Asumsi teori kognitif ini adalah bahwa setiap orang telah memiliki pengetahuan dan pengalaman yang telah tertata dalam bentuk struktur kognitif yang dimilikinya.

Proses belajar akan berjalan dengan baik jika materi pelajaran atau informasi baru beradaptasi dengan struktur kognitif yang telah dimiliki seseorang.

Dalam situasi belajar, sesorang terlibat langsung dalam situasi itu dan memperoleh "*insight*" untuk pemecahan masalah. Kaum kognitif berpandangan, bahwa tingkah laku seseorang lebih bergantung kepada "*insight*" terhadap hubungan-hubungan yang ada di dalam suatu situasi. Mereka memberi tekanan pada faktor-faktor yang mempengaruhi pengamatan.Tokoh pada kelompok teori belajar kognitif ini adalah para ahli jiwa aliran kognitifis. Menurut pendapat mereka, tingkah laku sesorang senantiasa didasarkan pada kognisi, yaitu tindakan mengenal atau memikirkan situasi di mana tingkah laku itu terjadi.Teori belajar yang akan dibahas dalam modul ini adalah teori Pieget, teori Gestalt, teori pemrosesan informasi.

1). Teori Belajar Piaget

Jean Piaget dilahirkan pada tanggal 9 Agustus 1896 di Neuchatel, kota Universitas di Swiss dan meninggal pada tanggal 16 September 1980. Piaget terkenal dengan teori perkembangan kognitifnya yang berpengaruh penting terhadap dunia pendidikan. Ia menyatakan bahwa perkembangan kognitif bukan hanya hasil kematangan organism, bukan pula pengaruh lingkungan sekitar melaiknkan hasil interaksi diantara keduanya. Lebih jauh dikatakan bahwa anak/individu dapat membagun secara aktif dunia kognitif mereka sendiri.

Seorang individu dalam hidupnya selalu berinteraksi dengan lingkungan. Dengan berinteraksi tersebut, seseorang akan memperoleh skema-skema yang akan membentuk struktur kognitif sebagai schemata (schemas). Skema berupa kategori pengetahuan yang membantu dalam menginterpretasi dan memahami dunia. Skema juga menggambarkan tindakan baik secara mental maupun fisik yang terlibat dalam memahami atau mengetahui sesuatu. Sehingga dalam pandangan Piaget, skema mencakup baik kategori pengetahuan maupun proses perolehan pengetahuan tersebut. Piagetsendiri mengemukakan bahwa perkembangan kognitif bukan hanya hasil kematangan organisme, bukan pula pengaruh lingkungan saja, melainkan interaksi antara keduanya. Jadi kognisi ialah penyesuaian terhadap objek-objek yang ada di lingkungannya, yang merupakan proses interaksi yang dinamis.

Piaget menggunakan skema sebagai variabel perantara favoritnya. Secara sederhana skemata dapat dipandang sebagai kumpulan konsep atau kategori yang digunakan individu ketika ia berinteraksi dengan lingkungan.Skema ini merupakan struktur kognitif yang senantiasa berkembang dan berubah.Hill (2009) menyatakan schemata mata adalah cara mempersepsi, memahami, dan berpikir tentang dunia. Pikiran harus memiliki suatu skema yang berfungsi melakukan adaptasi dengan lingkungan dan menata lingkungan itu secara intelektual.

Adaptasi adalah penyesuaian terhadap lingkungan. Proses adaptasi berisi dua kegiatan yaitu menggabungkan atau mengintegrasikan pengetahuan yang diterima oleh manusia yang disebut asimilasi dan mengubah struktur pengetahuan yang sudah dimiliki dengan struktur pengetahuan baru, sehingga akan terjadi keseimbangan (*equilibrium*). Dua kegiatan prosesadaptasi dijelaskan dalam uraian berikut ini.

a. Asimilasi

Proses asimilasi adalah proses memahami pengalaman-pengalaman baru dari segi skema yang ada. Asimilasi pada dasarnya tidak mengubah skemata, tetapi mempengaruhi pertumbuhan skemata. Asimilasi terjadi secara kontinu dalam perkembangan kehidupan intelektual anak. Dengan demikian, asimilasi merupakan proses kognitif individu dalam usahanya mengadaptasi diri dengan lingkungannya.

b. Akomodasi

Akomodasi adalah proses pemodifikasian skema yang ada agar sesuai dengan situasi baru. Proses pemodifikasian tersebut menghasilkan terbentuknya skema baru dan berubahnya skema lama. Disini tampak terjadi perubahan kualitatif, sedangkan asimilasi terjadi perubahan kuantitatif. Jadi pada hakikatnya akomodasi menyebabkan terjadinya perubahan atau pengembangan skemata. Sebelum terjadi akomodasi, dalam asimilasi ketika anak menerima stimulus yang baru, struktur mentalnya menjadi goyah atau disebut tidak stabil. Bersamaan terjadinya akomodasi, maka struktur mental tersebut menjadi stabil lagi. Begitu ada stimulus baru lagi, maka struktur mentalnya akan kembali goyah dan selanjutnya setelah terjadi akomodasi akan stabil lagi. Begitulah proses asimilasi dan akomodasi terjadi terus-menerus dan menjadikan manusia berkembang bersama dengan waktu dan bertambahnya pengalaman. Jadi, dalam proses asimilasi stimulus dipaksa untuk memasuki salah satu yang cocok dalam struktur mental individu yang bersangkutan. Sebaliknya, dalam akomodasi individu dipaksa mengubah struktur mentalnya agar cocok dengan stimulus yang baru itu. Dengan kata lain, asimilasi dan akomodasi secara terkoordinasi dan terintegrasi menjadi penyebab terjadinya adaptasi intelektual dan perkembangan struktur intelektual.

Dalam proses adaptasi terhadap lingkungan, individu berusaha untuk mencapai struktur mental yang stabil. Stabil dalam artian adanya keseimbangan antara proses asimilasi dan proses akomodasi. Seandainya hanya terjadi asimilasi secara kontinu, maka yang bersangkutan hanya memiliki beberapa skemata global dan ia tidak mampu melihat perbedaan antara berbagai hal. Sebaliknya, jika hanya akomodasi saja yang terjadi secara kontinu, maka individu akan hanya memiliki skemata yang kecil-kecil saja, dan mereka tidak memiliki skemata yang umum. Individu tersebut tidak akan bisa melihat persamaan-persamaan di antara berbagai hal. Itulah sebabnya, ada keserasian di antara asimilasi dan akomodasi yang oleh Jean Piaget disebut dengan ekuilibrasi.

2). Teori Gestalt

Teori kognitif kedua yang akan dibahas dinamakan teori Gestalt yangdikembangkan oleh Max Wertheirmer, Kurt Koffka, dan Wolfgang Kohler.Eksperimen yang dilakukan Wertheirmer meneliti persepsi yang terintegrasi dalam gerak. Eksperimen Kohler meneliti tentang insignt pada simpanse.Eksperimen ini menyimpulkan adanya suatu tilikan (*insight*) terhadap unsur-unsuryang terkait dalam pemecahan suatu masalah. Artinya unsur suatu objek atauperistiwa akan memberikan makna apabila individu mampu melihat hubunganantara satu unsur dengan unsur yang lain dalam satu keseluruhan.

Istilah "Gestalt " berasal dari bahasa Jerman yang artinya adalah bentuk atau konfigurasi. Pokok pandangan Gestalt ini bahwa objek atau peristiwa tertentu akandipandang sebagai keseluruhan yang terorganisasikan. Dalam mengorganisasikanmelibatkan suatu bentuk (*figure*) yaitu apa yang menjadi pusat pengamatan danberlawanan dengan latar (*ground*) yaitu sesuatu yang melatarbelakangi suatubentuk sehingga bentuk itu tampak sebagai sesuatu yang bermakna.

Pokok pandangan gestalt berawal dari beberapa asumsi dasar, yaitu:membedakan adanya perilaku “molar” dan perilaku “molecular”. Perilaku molecular adalah perilaku dalam bentukkeluarnya kelenjar atau kontraksi otot, sedangkan perilaku “molar“ adalah perilakudalam keterkaitannya dengan lingkungan luar, seperti berlari, berjalan, mengikutikuliah, bermain sepakbola, dan lain-lain. Perilaku molar ini lebihmempunyai maknadibandingkan perilaku molecular.

Hal yang penting dalam mempelajari perilaku adalah membedakanantara lingkungan geografis dengan lingkungan behavioral. Lingkungan geografisadalah lingkungan yang sebenarnya ada, sedangkan lingkungan behavioral adalahlingkungan yang merujuk kepada sesuatu yang nampak. Misalnya jika melihatgunung dari kejauhan seolah tampak sangat indah (ini adalah bentuk lingkunganbehavioral), padahal sebenarnya jika kita mendekati gunung sebenarnya gunung itupenuh dengan hutan lebat dan binatang buas (ini dinamakan lingkungan geografis).

Organisme tidak akan memberiakan reaksi terhadap rangsangan lokal atauunsur-unsur atau suatu bagian peristiwa, akan tetapi mereaksi terhadap suatukeseluruhan objek atau peristiwa.

Pemberian makna terhadap suatu rangsangan sensori, yaitusuatu proses yang dinamis dalam memberikan tafsiran terhadap rangsangan yangditerima.

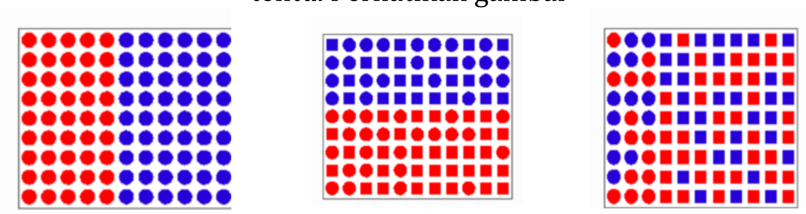
Menurut Koffka terdapat tujuh prinsiporganisasi yang terpenting, yaitu:

1. Hubungan bentuk dan latar (*figure-ground relationship*), prinsip inimenganggap bahwa setiap bidang pengamatan dapat dibagi dua yaitubentuk dan latar belakang. Bila figure dan latar bersifat samar-samar, makaakan terjadi penafsiran yang kabur. Sebagai contoh perhatikan gambar berikut ini.

2. Kedekatan (*proximity*), menyatakan bahwa unsur-unsur yang salingberdekatan dengan ruang dan waktu dalam budang pengamatan akandipandang sebagai satu bentuk tertentu. Contoh lihat gambar berikut,elemen yang ditempatkan dekat satu sama lain akan sering dianggap sebagai satu kelompok. Kedekatan elemen menyatukan mereka bersama-sama dan akan membantu untuk membentuk sosok dalam gambar.

(a) (b)

3. Kesamaan (*similarity*), menyatakan bahwa sesuatu yang memiliki kesamaancenderung akan dipandang sebagai suatu objek yang saling memiliki; Arah bersama (*common direction*), mengimplikasikan bahwa unsur-unsurbidang pengamatan yang berada dalam arah yang sama senderung akandipersepsi sebagai suatu figure atau bentuk tertentu. Perhatikan gambar berikut.



(b) (b) (c)

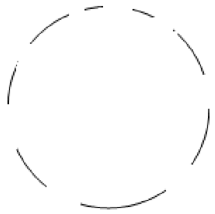
Pada gambar (a) tampak sebagai dua kolom, sedangkan pada (b) tampak sebagai dua baris, sedangkan gambar pada (c) warna lebih mendominasi dari pada bentuk.

4. Kesederhanaan (*simplicity*), menyatakan bahwa orang cenderung menatabidang pengamatannya dalam bentuk sederhana, penampilan regular dancenderung membentuk keseluruhan yang baik berdasarkan susunansimetris dan keteraturan. Sebagai ilustrasi perhatikan gambar berikut.

(b) (b)

Pada gambar (a) tampak sebagai kombinasi persegi dan segitiga, bukan tidak dipandang sebagai kombinasi bangun lain yang lebih kompleks. Begitu pula dengan gambar (b) sebagai tampak rangkaian seri dari lingkaran dan bukan rangkaian dari bangun lain yang lebih kompleks.

5. Ketertutupan (*closure*), menyatakan bahwa orang cenderung akan mengisikekosongan suatu pola objek atau pengalaman yang tidak lengkap.



(a)

(b)

Pada gambar (a) adalah lingkaran dan gambar (b) trapesium

Dalam pandangan Gestalt bahwa pembelajaran merupakan suatu fenomenakognitif yang melibatkan persepsi terhadap suatu benda, orang, atau peristiwadalam cara-cara yang berbeda. Bahwa transformasi atau perubahan seseorang darisesuatu yang tidak tahu menjadi memiliki kemampuan berlangsung dengan cepat.

Manusia akan dengan mudah dan efektif melakukan suatu pembelajaran apabilamemiliki kemampuan melihat unsur-unsur yang terdapat dalam suatu objek atauperistiwa tertentu, serta mampu melihat hubungan dan keterkaitannya untukmenjadi suatu keseluruhan.

Aplikasi teori Gestalt terhadap proses pembelajaran adalah:

1) Pengalaman tilikan (*insight*), dalam proses pembelajaran sebaiknya pesertadidik memiliki kemampuan memandang sesuatu secara keseluru-han.Untuk itu perlu ada bantuan dari guru dalam mengembangkan kemampuantersebut melalui kemampuan dalam memecahkan masalah dengan dilihatdari berbagai sudut pandang.

2) Pembelajaran bermakna (*meaningful learning*), dalam proses pembelajaranhendaknya selalu dihubungkan dengan peristiwa atau objek yang pernahatau sering dialami siswa, sehingga dalam proses pemecahan masalah

akanlebih memberikan kemudahan kepada siswa untuk mencari solusinya,sehingga lebih bermakna.

3) Perilaku bertujuan (*purposive behavior*), dalam proses pembelajaransebaiknya siswa mengetahui tujuan mereka mempelajari suatu materi agarproses pembelajaran menjadi efektif, karena memudahkan guru menggiringsiswa kearah pencapaian tujuan tersebut. Untuk itu pada awal prosespembelajaran sebaiknya guru mengemukakan tujuan pembelajaran agarsiswa mengetahui arah capaian pembelajaran tersebut.

4) Prinsip ruang hidup (*life space*), dalam proses pembelajaran sebaiknya guruselalu menghubungkan antara proses pembelajaran dengan tuntutan dankebutuhan lingkungan. Materi pelajaran yang disampaikan hendaknyamemiliki padanan dan kaitan dengan situasi dan kondisi yang terjadi dililngkungannya.

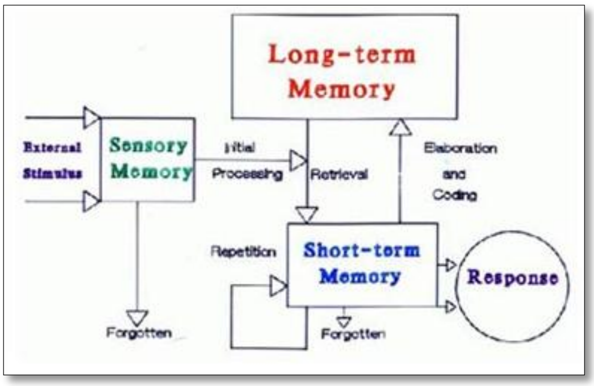
5) Transfer dalam pembelajaran (*transfer of knowledge*), dalam prosespembelajaran sebaiknya guru membantu siswa untuk menguasai prinsip-prinsippokok dari materi yang akan diajarkannya, tujuannya agar siswadapat menerapkannya dalam situasi-situasi lain yang mungkin berbedasifatnya.

Beberapa kritikan terhadap teori gestal adalah bahwa *insight* tidak dapat dianggap sebagai prototype belajar. Pebelajar tidak dapat mempelajari nama tanam-tanaman atau binatang-binatang dengan insignt. Begitu pula dengan bila kita ingin mengajarkan membaca. Pemahaman baru terjadi bila belajar dilakukan dengan pemecahan masalah.

3). Teori Pengolahan Informasi

Pada dasarnya, teori pengolahan informasi melihat bahwa perilaku dan proses belajar dapat digambarkan sebagai masuknya informasi dari luar ke dalam sistem memory dan kemudian dikeluarkan dalam bentuk output.Teori ini berpijak pada tiga asumsi yaitu: bahwa antara stimulus dan respon terdapat suatu seri tahapan pemprosesan informasi di mana pada masing-masing tahapan dibutuhkan sejumlah waktu tertentu; stimulus yang diproses melalui tahapan-tahapan tadi akan mengalami perubahan bentuk ataupun isinya; dan salah satu dari tahapan mempunyai kapasitas yang terbatas.

Atkinson dan Shiffrin (1968) mengajukan suatu teori atau model tentang pemrosesan informasi dalam memori manusia yang menyatakan bahwa informasi diproses dan disimpan dalam 3 (tiga) tahapan, yaitu *Sensory Memory*, *Short-term Memory*, dan *Long-term Memory* (Huit, 2003; Flavell, 1985; Woolfolk, 2004; Gagne, 1985). Model pemrosesan informasi Atkinson dan Shiffrin ini dapat digambarkan dengan diagram sebagai berikut:



Gambar 3. Model Pemrosesan Informasi

Komponen-komponen pemrosesan informasi dipilah menjadi berdasarkan perbedaan fungsi, kapasitas, bentuk informasi, serta proses terjadinya "lupa". Ketiga komponen itu adalah sebagai berikut.

a. Memori indra (sensory memory)

Ketika rangsangan lingkungan mengenai indra penerima, maka rangsangan tersebut diubah ke dalam impulse persyarafan dan inforrmasi yang terkandung dalam rangsangan tadi dapat bertahan sekitar satu detik setelah rangsangan tadi diakhiri. Sistem penerima menahan informasi lingkungan untuk periode yang singkat disebut memori indra atau memori penyimpan *(sensory store).* Karena keterbatasan kemampuan dan banyaknya informasi yang masuk, tidak semua informasi bisa diolah. Informasi yang baru saja diterima ini disimpan dalam suatu ruang sementara (*buffer*) yang disebut *sensory memory*. Durasi suatu informasi dapat tersimpan di dalam *sensory memory* ini sangat singkat, kurang dari 1/2 sekon untuk informasi visual dan sekitar 3 sekon untuk informasi audio. Tahap pemrosesan informasi tahap pertama ini sangat penting karena menjadi syarat untuk dapat melakukan pemrosesan informasi di tahap berikutnya

Meskipun setiap sistem penginderaan mempunyai kemampuan untuk menyimpan informasi dalam waktu singkat, tetapi hanya sistem visual dan auditori saja yang diberi perhatian lebih besar, sebab keduanya merupakan indra pokok yang berhubungan dengan pengetahuan kita tentang lingkungan. Dalam hubungannya dengan kedua indra tersebut dapat dibedakan antara *iconic store* dan *echoic store. Iconic store* menunjuk pada kerja *sensory memory* yang berhubungan dengan penglihatan, sedangkan *echoic store* menunjuk pada kerja *sensory rnemory* yang berhubungan dengan pendengaran.

Pembelajar akan memberikan perhatian yang lebih terhadap informasi jika informasi tersebut memiliki *fitur* atau ciri khas yang menarik dan jika informasi tersebut mampu mengaktifkan pola pengetahuan yang telah dimiliki sebelumnya (*prior knowledge*).

b. *Short Term Memory atau Working Memory*

Short-term memory atau *working memory* berhubungan dengan apa yang sedang dipikirkan seseorang pada suatu saat ketika menerima stimulus dari lingkungan.Contohnya, jika Anda sedang melihat-lihat alamat pada buku telepon, maka akan terasa bahwa semua nama dan alamat di halaman itu seolah ada dalam *sensory memory* kita untuk sekitar satu detik. Kemudian, hanya alamat yang Anda inginkan yang kemudian akan diingat dan akan disimpan dalam *short-term memory* yang akan segera hilang dalam 15-20 detik; waktu yang cukup lama untuk mendapat selembar kertas dan pensil untuk mencatatnya.

Durasi penyimpanan di dalam *short-term memory* ini akan bertambah lama, bisa menjadi sampai 20 menit, jika terdapat pengulangan informasi. Informasi yang masuk ke dalam *short-term memory* berangsur-angsur menghilang ketika informasi tersebut tidak lagi diperlukan. Jika informasi dalam *short-term memory* ini terus digunakan, maka lama-kelamaan informasi tersebut akan masuk ke dalam tahapan penyimpanan informasi berikutnya, yaitu *long-term memory*

c. *Long-term Memory*

Long-term memory merupakan memory penyimpanan yang relatif permanen, yang dapat menyimpan informasi meskipun informasi tersebut mungkin tidak diperlukan lagi. Informasi yang tersimpan di dalam *long-term memory* diorganisir ke dalam bentuk struktur pengetahuan tertentu, atau yang disebut dengan *schema*. *Schema* mengelompokkan elemen-elemen informasi sesuai dengan bagaimana nantinya informasi tersebut akan digunakan, sehingga *schema* memfasilitasi akses informasi di waktu mendatang ketika akan digunakan (proses memanggil kembali informasi). Dengan demikian, keahlian seseorang berasal dari pengetahuan yang tersimpan dalam bentuk *schema* di dalam *long-term memory*, bukan dari kemampuannya untuk melibatkan diri dengan elemen-elemen informasi yang belum terorganisasi di dalam *long-term memory* (Merrienboer dan Sweller, 2005)

Sekali memori jangka panjang terbentuk, maka informasi dan pengalaman baru akan diproses dan ditindaki sesuai dengan memori yang kita miliki. Sekali lagi, skemata atau program yang sudah kita pelajari dan disimpan dalam memori inilah yang menentukan informasi yang sesuai dengan situasi luar akan ditarik kembali dan digunakan.

Kapasitas penyimpanan dalam *long-term memory* ini dapat dikatakan tak terbatas besarnya dengan durasi penyimpanan seumur hidup. Kapasitas penyimpanan disebut tak terbatas dalam arti bahwa tidak ada seseorang pun yang pernah kekurangan "ruang" untuk menyimpan informasi baru, berapa pun umur orang tersebut. Durasi penyimpanan seumur hidup diartikan sebagai informasi yang sudah masuk di dalam *long-term memory* tidak akan pernah hilang, meskipun bisa saja terjadi informasi tersebut tidak berhasil diambil kembali (*retrieval*) karena beberapa alasan.

2. Penerapan Teori Belajar Kognitif

Sebagaimana disampaikan pada pembahasan atas, para penganut teori belajar kognitif (*cognitive science*) lebih fokus pada terbentuknya proses mengaitkan antara pengetahuan yang sudah dimiliki seseorang di dalam struktur kognitifnya dengan pengalaman barunya. Menurut Piaget, struktur kognitif atau skemata (*schema*) adalah suatu organisasi mental tingkat tinggi yang terbentuk pada saat orang itu berinterkasi dengan lingkungannya. Dua proses yang sangat penting adalah asimilasi dan akomodasi. Sejalan dengan itu, Ausubel menginginkan proses pembelajaran di kelas-kelas adalah suatu pembelajaran yang bermakna (*meaningful learning*) yaitu suatu pembelajaran di mana pengetahuan atau pengalaman yang baru dapat terkait dengan pengetahuan lama yang sudah ada di dalam struktur kognitif seseorang. Untuk membantu terjadinya pembelajaran bermakna, Bruner menyarankan agar proses pembelajaran melalui tiga tahap berikut, yaitu: (1) tahap enaktif, (2) tahap ikonik, dan (3) tahap simbolik. Bagiaan modul ini akan membahas secara lebih terinci penerapan tiga terori belajar itu di kelas.

1) Aktivitas Pembelajaran

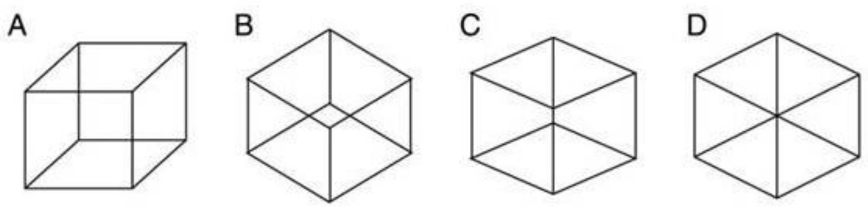
Kegiatan 1

Pilihlan satu topik untuk mengajarkan matematika. Sajikan sebuah masalah terkait dengan topik yang Anda pilih. Tuliskan beberapa kemungkinan strategi yang digunakan siswa dalam memecahkan masalah tersebut. Bilamana asimilasi terjadi pada siswa? Bilamana akomodasi terjadi pada siswa?Jelaskan.

Jawab

Kegiatan 2

Perhatikan gambar kubus berikut ini



Dapatkah semua gambar tersebut digunakan dalam pembelajaran terkait dengan kubus? Gambar yang mana yang lebih memberigambaran dimensi dari kubus yang sebenarnya? Bagaimana hal tersebut dijelaskan dengan teori belajar?

Jawab

2) Latihan/Kasus/Tugas

Tugas

Carilah sumber belajar terkait dengan toeri belajar Ausubel. Teori belajar Ausubel menitikberatkan pada bagaimana seseorang memperoleh pengetahuannya. Menurut Ausubel terdapat 2 jenis belajar yaitu belajar hafalan (*rote-learning*) dan belajar bermakna (*meaningful-learning*).

Beri penjelasan terkait belajar dan belajar bermakna serta berikan contohnya dalam belajar matematika.

3) Rangkuman

1. Menurut teori kognitif belajar adalah perubahan persepsi dan pemahaman yang tidak selalu berbentuk tingkah laku yang dapat diamati dan dapat diikut.

2. Proses belajar akan berjalan dengan baik jika materi pelajaran atau informasi baru beradaptasi dengan struktur kognitif yang telah dimiliki seseorang.Proses adaptasi berisi dua kegiatan yaitu asimilasi dan akomodasi.

3. Teori Gestalt menyatakan unsur suatu objek atau peristiwa akan memberikan makna apabila individu mampu melihat hubungan antara satu unsur dengan unsur yang lain dalam satu keseluruhan.Dalam mengorganisasikan melibatkan suatu bentuk (*figure*) yaitu apa yang menjadi pusat pengamatan dan berlawanan dengan latar (*ground*) yaitu sesuatu yang melatarbelakangi suatu bentuk sehingga bentuk itu nampak sebagai sesuatu yang bermakna.

4. Teori pengolahan informasi melihat bahwa perilaku dan proses belajar mengikuti pola umum yang telah diakui kebenarannya dalam proses yang dapat digambarkan sebagai masuknya informasi dari luar ke dalam sistem memory dan kemudian dikeluarkan dalam bentuk output. Salah satu teori atau model tentang pemrosesan informasi dalam memori manusia yang menyatakan bahwa informasi diproses dan disimpan dalam 3 (tiga) tahapan, yaitu *Sensory Memory*, *Short-term Memory*, dan *Long-term Memory*.

4) Umpan Balik dan Tindak Lanjut

<u>Formatif I</u>

Berilah tanda silang (X) pada jawaban yang Anda anggap benar

1. Teori belajar yang menganut asumsi bahwa setiap orang memiliki pengetahuan dan pengalaman yang telah tertata dalam bentuk struktur kognitif yang dimiliki adalah ….
   A. Teori belajar kognitif
   B. Teori belajar readinnes
   C. Teori belajar perilaku
   D. Teori belajar sosial
2. Durasi maksimum suatu informasi dapat tersimpan di dalam *sensory memory*adalah ….
   A. ½ detik
   B. 1 detik
   C. 2 detik
   D. 3 detik
3. Proses pemodifikasian skema yang ada agar sesuai dengan situasi baru adalah ….
   A. Skemata
   B. similarity
   C. Asimilasi
   D. Akomodasi

4. Yang bukan merupakan tokoh pengembang teori gestalt adalah ….

   A. Kurt Koffka
   B. Ivan Pavlov
   C. MaxWertheirmer
   D. Wolfgang Kohler

5. Berikut adalah komponen dalam pemrosesan informasi yang akan menyimpan informasi dengan kapasitas tidak terbatas adalah ….

   A. *wide-memory*
   B. *short-term memory*
   C. *long-term memory*
   D. *sensory-term memory*

6. Tiga tahapan model pemrosesan informasi dalam memori manusia menurut teori pemrosesan informasiadalah ….

   A. *Sort-term memory*, *sensory memory*, dan *long-term memory*
   B. *Sensory memory*, *short-term memory*, dan *long-term memory*.
   C. *Sort-term memory*, *middle memory*, dan *long-term memory*
   D. *Sensory memory*,*middlememory*, dan *long-term memory*.

7. Berikut adalah aplikasi teori Gestalt terhadap proses pembelajaran, ***<u>kecuali</u>*** ....

   A. Pengalaman tilikan (insight)
   B. Pembelajaran bermakna
   C. Prinsi ruang hidup
   D. Pembelajaran dengan media

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban yang terdapat pada bagian akhir unit ini. Hitunglah ketepatan jawaban tersebut dengan cara memberi skor masing-masing soal dengan rentangan 0-10. Kemudian gunakan rumus berikut ini untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda dalam mempelajari materi ini.

Rumus:

$$\text{Tingkat penguasaan: } \frac{\text{Jumlah skor kelima jawaban}}{50} \times 100\ \%$$

Arti tingkat penguasaan yang Anda capai:

90 – 100	=	Baik sekali
80 – 89	=	Baik
70 – 79	=	Cukup
< 70	=	kurang

Jika tingkat penguasaan Anda minimal 80%, maka Anda dinyatakan berhasil dengan baik. Anda dapat melanjutkan untuk mempelajari Unit berikutnya. Sebaliknya, bila tingkat penguasaan Anda kurang dari 80%, silakan pelajari kembali uraian yang terdapat dalam subunit sebelumnya, khususnya bagian yang belum Anda kuasai.

Kegiatan Pembelajaran 3

Teori Belajar Sosial

A. Tujuan

Secara umum tujuan yang dicapai setelah peserta diklat dan pembaca pada umumnya mempelajari kegiatan belajar-3 ini adalah memahami teori belajar sosial. Teori yang akan dibahas dalam teori belajar sosial adalah teori belajar sosial Bandura dan teori perkembangan Vygotsky. Dengan mengambil kelebihan dan mengetahui kelemahan dari teori ini diharapkan peserta didik dan pembaca pada umumnya dapat menggunakannya dalam kegiatan pembelajaran. Secara rinci tujuan yang ingin dicapai adalah sebagai berikut.

1. Peserta diklat dapat menjelaskan teori sosial Bandura.
2. Peserta diklat dapat menjelaskan ZPD.
3. Peserta diklat dapat menjelaskan *scaffolding*.

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

1. Menjelaskan teori sosial Bandura
2. Menjelaskan ZPD
3. Menjelaskan Scaffolding

C. Uraian Materi

1. Teori Belajar Sosial

Teori belajar sosial (*sosial learning theory*) adalah sebuah teori belajar yang relatif masih baru dibandingkan dengan teori-teori belajar lainnya. Teori Pembelajaran Sosial merupakan perluasan dari teori belajar perilaku yang tradisional (behaviorisme).Teori belajar sosial telah memberi penekanan tentang bagaimana perilaku manusia dipengaruhi oleh lingkungan sekitar melalui penguatan (*reinforcement*) dan pembelajaran peniruan serta cara berfikir yang dimiliki terhadap sesuatu dan juga sebaliknya, yaitu bagaimana tingkah laku dipengaruhi orang yang ada disekitar dan menghasilkan penguatan (*reinforcement*) dan peluang untuk diperhatikan oleh orang lain (*observational opportunity).* Teori pembelajaran sosial ini dikembangkan oleh Albert Bandura.

Albert Bandura dilahirkan di Mundare Northern Alberta Kanada, pada 04 Desember 1925. Masa kecil dan remajanya dihabiskan di desa kecil dan juga mendapat pendidikan disana. Pada tahun 1949 beliau mendapat pendidikan di University of British Columbia, dalam jurusan psikologi. Dia memperoleh gelar Master di dalam bidang psikologi pada tahun 1951 dan setahun kemudian ia juga meraih gelar doktor (Ph.D). Bandura menyelesaikan program doktornya dalam bidang psikologi klinik, setelah lulus ia bekerja di Standford University.Beliau banyak terjun dalam pendekatan teori pembelajaran untuk meneliti tingkah laku manusia dan tertarik pada nilai eksperimen.

1. Teori Belajar Sosial Bandura

Berbeda dengan penganut Behaviorisme lainnya,Bandura memandang Perilaku individu tidak semata-mata refleks otomatis atas stimulus (S-R Bond), melainkan juga akibat reaksi yang timbul sebagai hasil interaksi antara lingkungan dengan skema kognitif individu itu sendiri. Prinsip dasar belajar menurut teori ini, bahwa yang dipelajari individu terutama dalam belajar sosial dan moral terjadi melalui peniruan (*imitation*) dan penyajian contoh perilaku (*modeling*). Teori ini juga masih memandang pentingnya *conditioning*. Melalui pemberian *reward* dan *punishment,* seorang individu akan berfikir dan memutuskan perilaku sosial mana yang perlu dilakukan.

Menurut Bandura, proses mengamati dan meniru perilaku dan sikap orang lain sebagai model merupakan tindakan belajar. Teori Bandura menjelaskan perilaku manusia dalam konteks interaksi timbal balik yang berkesinambungan antara kognitif, perilaku dan pengaruh lingkungan. Kondisi lingkungan sekitar individu sangat berpengaruh pada pola belajar sosial jenis ini. Teori belajar ini juga dikembangkan untuk menjelaskan bagaimana seseorang belajar dalam keadaan atau lingkungan sebenarnya. Bandura (1977) menghipotesiskan bahwa tingkah laku, lingkungan dan kejadian-kejadian internal pada pelajar yang mempengaruhi persepsi dan aksi merupakan hubungan yang saling berpengaruh atau berkaitan (interlocking). Menurut Albert Bandura lagi, tingkah laku sering dievaluasi, yaitu bebas dari timbal balik sehingga boleh mengubah kesan-kesan personal seseorang.

Albert Bandura dan Richard Walters (1959, 1963) telah melakukan eksperimen pada anak – anak yang juga berkenaan dengan peniruan. Hasil eksperimen mereka mendapati, bahwa peniruan dapat berlaku hanya melalui pengamatan terhadap perilaku model (orang yang ditiru) meskipun pengamatan itu tidak dilakukan terus menerus. Proses belajar semacam ini disebut "observationallearning" atau pembelajaran melalui pengamatan.

Bandura (1971), kemudian menyarankan agar teori pembelajaran sosial diperbaiki memandang teori pembelajaran sosial yang sebelumnya hanya mementingkan perilaku tanpa mempertimbangan aspek mental seseorang. Menurut Bandura, perlakuan seseorang adalah hasil interaksi faktor dalam diri(kognitif) dan lingkungan. pandangan ini menjelaskan, beliau telah mengemukakan teori pembelajaran peniruan, dalam teori ini beliau telah menjalankan kajian bersama Walter (1963) terhadap perlakuan anak-anak apabila mereka menonton orang dewasa yang melakukan adegan pemukulan, baik dengan palu besi dan bahan lain yang lebih keras dan melakukan pemukulan sambil menjerit-jerit dalam video. Setelah menonton video anak-anak ini diarah bermain di kamar permainan dan terdapat patung seperti yang ditayangkan dalam video. Setelah anak-anak tersebut melihat patung tersebut,mereka menirukan aksi-aksi yang dilakukan oleh orang yang mereka tonton dalam video.

Berdasarkan teori ini terdapat beberapa cara peniruan yaitu meniru secara langsung yang dapat diaplikasikan dalam pembelajaran. Contohnya guru membuat demostrasi cara membuat model kubus dengan menggunakan kertas kalender bekas, dan pelajar meniru secara langsung. Seterusnya proses peniruan melalui contoh tingkah laku. Contohnya anak-anak meniru tingkah laku bersorak dilapangan, jadi tingkah laku bersorak merupakan contoh perilaku di lapangan. Keadaan sebaliknya jika anak-anak bersorak di dalam kelas sewaktu guru mengajar,semestinya guru akan memarahi dan memberi tahu tingkahlaku yang dilakukan tidak dibenarkan dalam keadaan tersebut, jadi tingkah laku tersebut menjadi contoh perilaku dalam situasi tersebut.

Proses peniruan yang seterusnya ialah elisitasi. Proses ini timbul apabila seseorang melihat perubahan pada orang lain. Contohnya seorang anak-anak melihat temannya melukis kupu-kupu dan timbul keinginan dalam diri anak-anak tersebut untuk melukis kupu-kupu. Oleh karena itu, peniruan berlaku apabila anak-anak tersebut melihat temannya melukis kupu-kupu.

2. Teory Vygotsky

Lev Vygotsky (1896-1934) seorang psikolog berkebangsaan Rusia, mengajukan teori bahwa perolehan pengetahuan dan perkembangan kognitif seseorang sejalan dengan teori sosiogenesis. Artinya, pengetahuan dan perkembangan kognitif individu berasal dari sumber-sumber sosial di luar dirinya. Hal ini tidak berarti bahwa individu bersikap pasif dalam perkembangan kognitifnya, tetapi Vygotsky juga menekankan pentingnya peran aktif seseorang dalam mengkonstruksi pengetahuannya. Maka teori Vygotsky sebenarnya lebih tepat disebut dengan pendekatan sosiokonstruktivisme. Maksudnya, perkembangan kognitif seseorang disamping ditentukan oleh individu sendiri secara aktif, juga oleh lingkungan sosial secara aktif pula.

Vygotsky percaya bahwa beragam perwujudan dari kenyataan digunakan untuk beragam tujuan dalam konteks yang berbeda-beda. Pengetahuan tidak dapat dipisahkan dari aktivitas di mana pengetahuan itu dikonstruksikan, dan di mana makna diciptakan, serta dari komunitas budaya di mana pengetahuan didiseminasikan dan diterapkan. Melalui aktivitas, interaksi sosial, tersebut penciptaan makna terjadi. Pada dasarnya Vigotsky setuju dengan teori Piaget bahwa perkembangan kognitif terjadi secara bertahap dan dicirikan dengan gaya berpikir yang berbeda-beda, akan tetapi Vygotsky tidak setuju dengan pandangan Piaget bahwa anak menjelajahi dunianya sendirian dan membentuk gambara realitasya sendirian, karena menurut Vygotsky suatu pengetahuan tidak hanya didapat oleh anak itu sendiri melainkan mendapat bantuan dari lingkungannya juga.

Karya Vygotsky didasarkan pada pada tiga ide utama, yiatu :

a. intelektual berkembang pada saat individu menghadapi ide-ide baru dan sulit mengaitkan ide-ide tersebut dengan apa yang mereka ketahui;

b. interaksi dengan orang lain memperkaya perkembangan intelektual; dan

c. guru adalah bertindak sebagai seorang fasilitator dan mediator pembelajaran siswa.

Menurut Vygotsky, belajar adalah sebuah proses yang melibatkan dua elemen penting. Pertama, belajar merupakan proses secara biologi sebagai proses dasar. Kedua, proses secara psikologisial sebagai proses yang lebih tinggi dan essensinya berkaitan dengan lingkungan sosial budaya. Sehingga, lanjut Vygotsky, munculnya perilaku seseorang adalah karena intervening kedua elemen tersebut. Pada saat seseorang mendapatkan stimulus dari lingkungannya, ia akan menggunakan fisiknya berupa alat inderanya untuk menangkap atau menyerap stimulus tersebut, kemudian dengan menggunakan saraf otaknya informasi yang telah diterima tersebut diolah. Keterlibatan alat indera dalam menyerap stimulus dan saraf otak dalam mengelola informasi yang diperoleh merupakan proses secara fisik-psikologi sebagai elemen dasar dalam belajar.

Pengetahuan yang telah ada sebagai hasil dari proses elemen dasar ini akan lebih berkembang ketika mereka berinteraksi dengan lingkungan sosial budaya mereka. Oleh karena itu, Vygotsky sangat menekankan pentingnya peran interaksi sosial bagi perkembangan belajar seseorang.

Menurut Vygotsky, fungsi mental tingkat tinggi biasanya ada dalam percakapan atau komunikasi dan kerja sama di antara individu-individu (proses sosialisasi) sebelum akhirnya itu berada dalam diri individu (internalisasi). Oleh karena itu, pada saat seseorang berbagi pengetahuan dengan orang lain, dan akhirnya pengetahuan itu menjadi pengetahuan personal, disebut dengan*private speech*.

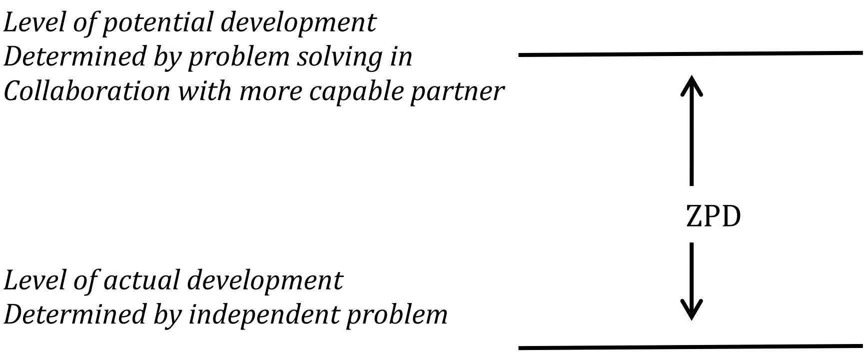
Vygotsky ingin menjelaskan bahwa adanya kesadaran sebagai akhir dari sosialisasi tersebut. Dalam belajar bahasa, misalnya ucapan pertama kita dengan orang lain adalah bertujuan untuk komunikasi, akan tetapi sekali kita menguasainya, ucapan atau bahasa itu akan terinternalisasi dalam diri kita dan menjadi *inner speech* atau *private speech*. *Private speech* ini dapat diamati saat seorang anak sering berbicara dengan dirinya sendiri, terutama jika ia dihadapkan dengan tugas-tugas sulit. Namun demikian, sebagaimana studi-studi dilakukan, anak-anak yang sering menggunakan *privatespeech* ketika menghadapi tugas-tugas yang kompleks ini lebih efektif memecahkan tugas-tugas daripada anak-anak yang kurang menggunakan *private speech*.

Sumbangan psikologi kognitif berakar dari teori-teori yang menjelaskan bagaimana otak bekerja dan bagaimana individu memperoleh dan memproses informasi. Pandangan yang ditawarkan Vygotsky dan para ahli psikologi kognitif yang lebih mutakhir adalah penting dalam memahami penggunaan-penggunaan strategi belajar karena tiga alasan. Pertama, mereka menggarisbawahi peran penting pengetahuan dalam proses belajar. Dua, mereka membantu kita memahami pengetahuan dan perbedaan antara berbagai jenis pengetahuan. Tiga, mereka membantu menjelaskan bagaimana pengetahuan diperoleh manusia dan diproses di dalam sistem memori otak.

Vygotsky juga menekankan bagaimana anak-anak dibantu berkembang dengan bimbingan dari orang-orang yang sudah terampil di dalam bidang-bidang tersebut. Penekanan Vygotsky pada peran kebudayaan dan sosial di dalam perkembangan kognitif berbeda dengan teori Piaget tentang anak sebagai ilmuwan kecil yang kesepian. Karena Piaget memandang anak-anak sebagai pembelajaran lewat penemuan individual. Sedangkan Vygotsky lebih banyak menekankan peranan orang dewasa dan anak anak lain dalam memudahkan perkembangan anak.

Menurut Vygotsky, anak-anak lahir dengan fungsi mental yang relatif dasar seperti kemampuan untuk memahami dunia luar dan memusatkan perhatian. Namun, anak-anak tidak banyak memiliki fungsi mental yang lebih tinggi. Interaksi dalam lingkungan sekolah (institusional) memberi kepada anak suatu norma-norma perilaku dan sosial yang luas untuk membimbing hidupnya. Level interpersonal memiliki suatu pengaruh yang lebih langsung pada kefungsian mental anak. Menurut Vygotsky keterampilan-keterampilan dalam keberfungsian mental berkembang melalui interaksi sosial langsung. Melalui pengoranisasian pengalaman-pengalaman interaksi sosial yang berada dalam suatu latar belakang kebudayaan ini. Perkembangan anak menjadi matang.

Vygotsky mengemukakan konsepnya tentang zona perkembangan proksimal *(Zone Of Proximal Development),* yaitu: jarak antara perkembangan actual dengan perkembangan potensial. Tingkat perkembangan aktual tampak dari kemampuan seseorang untuk menyelesaikan tugas-tugas atau memecahkan berbagai masalah secara mandiri. Sedangkan tingkat perkembangan potensial tampak dari kemampuan seseorang untuk menyelesaikan tugas-tugas dan memecahkan masalah ketika di bawah bimbingan orang dewasa atau ketika berkolaborasi dengan teman sebayanya yang lebih berkompeten. Konsep Vygotsky mengenai *ZPD* digambarkan sebagai berikut.



Gambar 4 *Zone of Proximal Development*

Zona perkembangan proksimal diartikan sebagai fungsi-fungsi atau kemampuan-kemampuan yang belum matang yang masih berada di dalam proses pematangan. Gagasan Vygotsky tentang zona perkembangan proksimal ini mendasari perkembangan teori belajar dan pembelajaran untuk meningkatkan kualitas dan mengoptimalkan perkembangan kognitif anak. Beberapa konsep kunci yang perlu dicatat adalah bahwa perkembangan dan belajar bersifat saling terkait, perkembangan kemampuan seseorang tidak dapat dipisahkan dari konteks sosial, dan sebagian bentuk fundamental dalam belajar adalah partisipasi dalam kegiatan sosial.

Berpijak pada konsep zona proksimal, maka sebelum terjadi internalisasi atau sebelum kemampuan potensial terbentuk, anak perlu dibantu dalam proses belajarnya. Orang dewasa atau teman sebaya yang lebih berkompeten perlu membantu dengan berbagai cara seperti memberikan contoh, memberikan *feedback,* menarik kesimpulan, diskusi, dan sebagainya dalam rangka perkembangan kemampuannya.

Teori *Scaffolding* pertama kali diperkenalkan di akhir 1950-an oleh Jerome Bruner, seorang psikolog kognitif. Dia menggunakan istilah untuk menggambarkan anak-anak muda dalam akuisisi bahasa. Anak-anak pertama kali mulai belajar berbicara melalui bantuan orang tua mereka, secara naluriah anak-anak telah memiliki struktur untuk belajar barbahasa. *Scaffolding* merupakan interaksi antara orang-orang dewasa dan anak-anak yang memungkinkan anak-anak untuk melaksanakan sesuatu di luar usaha mandirinya. Cazden menyatakan bahwa *"scaffolding* sebagai kerangka kerja sementara untuk aktivitas dalam penyelesaian"

Konstruksi *scaffolding* terjadi pada peserta didik yang tidak dapat mengartikulasikan atau menjelajahi belajar secara mandiri. *Scaffolding* dipersiapkan oleh pembelajar untuk tidak mengubah sifat atau tingkat kesulitan dari tugas, melainkan dengan *scaffolding* yang disediakan memungkinkan peserta didik untuk berhasil menyelesaikan tugas.

Definisikan *scaffolding* sebagai bantuan yang besar kepada seorang anak selama tahap-tahap awal pembelajaran dan kemudian mengurangi bantuan tersebut dan memberikan kesempatan kepada anak tersebut untuk mengerjakan pekerjaannya sendiri dan mengambil alih tanggung jawab pekerjaan itu. Bantuan yang diberikan guru dapat berupa petunjuk, peringatan, dorongan menguraikan masalah kedalam bentuk lain yang memungkinkan siswa dapat mandiri.

2. Penerapan Teori Belajar Sosial

Berdasarkan teori *Zone of Proximal Development* dari Vygotsky serta teori *scaffolding* dari Bruner, proses perubahan dari tahapan perkembangan aktual ke perkembangan potensial bisa terjadi sebagai akibat adanya interaksi antara individu dengan individu lain yang mempunyai kemampuan lebih. Oleh karena itu, guru memegang peranan penting dalam menciptakan suasana pembelajaran yang dapat menunjang peningkatan pemahaman siswa sehingga siswa mampu mencapai perkembangan potensialnya. Ketika siswa telah mampu mencapai perkembangan potensialnya, maka siswa tersebut telah mampu berpikir matematika tingkat tinggi.

Agar implementasi pembelajaran dapat mencapai hasil yang memuaskan, maka teori pembelajaran Vygotsky-Bruner yakni *ZPD* dan *scaffolding* perlu dijadikan sebagai landasan utama. Hal yang tak kalah penting, di dalam perencanaan guru perlu menyiapkan bahan ajar yang tepat dan relevan. Bahan ajar yang digunakan harus dirancang oleh guru ke dalam bentuk soal pemecahan masalah yang memungkinkan disajikan di awal pembelajaran. Hal ini sesuai dengan pernyataan dari Hoffman dan Ritchie (1997) (Lie, 2010) bahwa*Scaffolding* selalu digunakan untuk mendukung pembelajaran berbasis masalah (PBL).

Setelah guru menyiapkan perencanaan pembelajaran dengan matang, selanjutnya guru mulai mengatur pelaksanaan kegiatan pembelajaran di dalam kelas. Langkah-langkah kegiatan pembelajaran sebagai berikut.

a. Kegiatan Awal

1) Guru mengkondisikan siswa untuk siap memulai pembelajaran

2) Guru melakukan apersepsi dan memberikan motivasi kepada siswa

3) Mengajukan suatu konteks permasalahan

b.Kegiatan Inti

1) Setelah siswa memahami konteks permasalahan, kemudian siswa diberi lembar kegiatan

2) Pada 15 menit pertama siswa diberikan kesempatan untuk menelaah dan menyelesaikan jawaban secara individual.

3) Kemudian ±25menit selanjutnya siswa diminta untuk menyelesaikan jawaban secara berkelompok heterogen (2-4 orang). Hal ini dimaksudkan agar anak dapat berinteraksi dan saling bertukar pemikiran. Secara tidak langsung dalam kegiatan ini intervensi dapat terjadi antara siswa dengan siswa lain di dalam satu kelompok. Disamping itu, guru juga dapat melakukan teknik *scaffolding* dengan tepat selama proses kegiatan

4) Perwakilan kelompok mempresentasikan hasil pekerjaan mereka.

c.Kegiatan Akhir

1) Guru bersama siswa menyimpulkan materi yang dipelajari

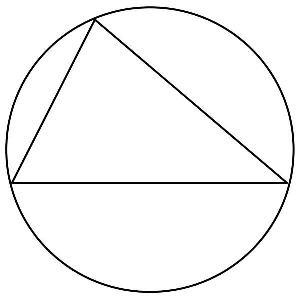
2) Guru menutup pembelajaran

Penilaian prestasi aspek kognitif dilakukan melalui pemberian pre tes dan pos tes yang harus dikerjakan oleh siswa pada awal tindakan dan akhir pelaksanaan tindakan. Pada dasarnya penilaian ditujukan untuk melihat sampai di mana tingkat keberhasilan teknik *scaffolding* dalam meningkatkan perkembangan siswa dari perkembangan aktualnya ke perkembangan potensialnya. Sehingga ia mampu berpikir tingkat tinggi.

D. Aktivitas Pembelajaran

Kegiatan 1

Siswa kelas XI mengalami kesulitan dalam menemukan rumus sinus dengan bantuan lingkaran luar segitiga sebagai berikut.



Bagaimana bantuan yang harus diberikan guru agar siswa tersebut dapat menemukan rumus aturan sinus?

Jawab

Kegiatan 2

Agar potensi actual setiap siswa dalam kelas tentunya beragam, bagaimana anda membuat pengaturan, agar siswa yang kurang mendapat bantuan (*scaffolding*) dari teman lain yang lebih mampu? Bagaimana pula anda menghadapi siswa yang sudah memiliki kemampuan tinggi, apakah tidak perlu diberi bantuan agar ZPD tercapai?

Jawab

E. Latihan/Kasus/Tugas

Formatif 5

1. Teori belajar yang memberi penekanan tentang perilaku manusia sebagai hasil interaksi faktor dalam diri(kognitif) dan lingkungan adalah ….

   A. Teori belajar tingkah laku
   B. Teori belajar kognitif
   C. Teori belajar sosial
   D. Teori belajar behaviorism

2. Belajar sebagai hasil meniru aktivitas orang lain merupakan salah satu hipotesis yang diajukan oleh ….

   A. Gagne
   B. Bruner
   C. Bandura
   D. Ausubel

3. Lev Vygotsky (1896-1934) seorang psikolog berkebangsaan Rusia, mengajukan teori bahwa perkembangan kognitif seseorang sejalan dengan teori sosiogenesis artinya ….

A. Lingkungan sosial sangat berpengaruh pada sikap anak dalam belajar
B. pengetahuan dan perkembangan kognitif individu berasal dari sumber-sumber sosial di luar dirinya
C. Sumber-sumber sosial sangat berpengaruh pada peningkatan penguatan perilaku
D. Adanya interaksi dari luar yang mempengaruhi perilaku

4. Menurut Vygotsky fungsi guru di dalam kelas adalah sebagai ….

A. Pendidik dan pengajar
B. Fasilitator dan mediator
C. Motivator dan mediator
D. Pendidik dan evaluator

5. Jarak antara kemampuan actual dan kemampuan potensial adalah makna dari istilah ….

A. Scaffolding
B. *Zone Of Proximal Development*
C. Assimilation
D. *sosial learning*

F. Rangkuman

1. Bandura (1977) menghipotesiskan bahwa tingkah laku, lingkungan dan kejadian-kejadian internal pada pelajar yang mempengaruhi persepsi dan aksi merupakan hubungan yang saling berpengaruh atau berkaitan (interlocking). Menurut Albert Bandura lagi, tingkah laku sering dievaluasi, yaitu bebas dari timbal balik sehingga boleh mengubah kesan-kesan personal seseorang

2. Menurut Vygotsky suatu pengetahuan tidak hanya didapat oleh anak itu sendiri melainkan mendapat bantuan dari lingkungannya juga. Karya Vygotsky didasarkan pada pada tiga ide utama, yiatu : (1) intelektual berkembang pada saat individu

menghadapi ide-ide baru dan sulit mengaitkan ide-ide tersebut dengan apa yang mereka ketahui; (2) interaksi dengan orang lain memperkaya perkembangan intelektual; dan (3) peran utama guru adalah bertindak sebagai seorang pembantu dan mediator pembelajaran siswa.

3. Zona perkembangan proksimal atau *Zone of Proximal Development* adalah jarak antara tingkat perkembangan aktual (kemampuan seseorang untuk menyelesaikan tugas-tugas atau memecahkan berbagai masalah secara mandiri) dengan tingkat perkembangan potensial (kemampuan seseorang untuk menyelesaikan tugas-tugas dan memecahkan masalah ketika di bawah bimbingan orang dewasa atau ketika berkolaborasi dengan teman sebayanya yang lebih berkompeten).

4. *Scaffolding* adalah dukungan pembelajar kepada peserta didik untuk membantunya menyelesaikan proses belajar yang tidak dapat diselesaikannya sendiri.

G. Umpan Balik dan Tindak Lanjut

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban yang terdapat pada bagian akhir unit ini. Hitunglah ketepatan jawaban tersebut dengan cara memberi skor masing-masing soal dengan rentangan 0-10. Kemudian gunakan rumus berikut ini untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda dalam mempelajari materi ini.

Rumus:

$$\text{Tingkat penguasaan: } \frac{\text{Jumlah skor kelima jawaban}}{50} \times 100\ \%$$

Arti tingkat penguasaan yang Anda capai:

– 100	:	k sekali
– 89	:	k
– 79	:	kup
0	:	rang

Jika tingkat penguasaan Anda minimal 80%, maka Anda dinyatakan berhasil dengan baik. Anda dapat melanjutkan untuk mempelajari Unit berikutnya. Sebaliknya, bila tingkat penguasaan Anda kurang dari 80%, silakan pelajari kembali uraian yang terdapat dalam subunit sebelumnya, khususnya bagian yang belum Anda kuasai.

Kunci Jawaban

Kunci Jawaban Kegiatan Belajar 1

1. A
2. D
3. D
4. D
5. B
6. A
7. A
8. D
9. D
10. C

Kunci Jawaban Kegiatan Belajar 2

1. A
2. D
3. C
4. B
5. C
6. B
7. C

Kunci Jawaban Kegiatan Belajar 3

1. C
2. C
3. B
4. B
5. B

Evaluasi Sumatif

Berilah tanda silang (X) pada jawaban yang Anda anggap benar

1. Paham belajar menurut paham behaviorisme adalah….
   A. Belajar sebagai proses asimilasi
   B. Belajar sebagai penambahan materi pengetahuan
   C. Belajar sebagai upaya mengkaitkan dengan konstruk pengetahuan siswa
   D. Belajar sebagai upaya mencerdaskan siswa

2. Menurut Gagne, objek dalam materika terdiri dari objek langsung dan objek tak langsung. Berikut adalah objek tak langsung dalam matematika, ***kecuali***….
   A. Berpikir logis
   B. Kemampuan menyelidiki
   C. Apresiasi terhadap struktur matematika
   D. Konsep dan prinsip

3. Memperbanyak melakukan latihan dan pengulangan dalam belajar merupa-kan contoh dari salah satu hukum belajar dalam teoti connectionism, yaitu ….
   A. Law of Readiness
   B. Law of Practice
   C. Law of Effect
   D. Law of Exercise

4. Paham yang mendefinisikan bahwa anak sebagai kertas putih, yang belum berisi tulisan adalah ….
   A. Behaviorisem
   B. Konktrutivisme
   C. Konstruktivis
   D. Sosial

5. Berikut adalah tokoh pengembang teori belajar kognitif, ***kecuali***....
   A. Wertheirmer
   B. Thorndike
   C. Kohler
   D. Piaget

6. Teori belajar yang menganut asumsi bahwa setiap orang memiliki pengetahuan dan pengalaman yang telah tertata dalam bentuk struktur kognitif yang dimiliki adalah….
   A. Teori belajar kognitif
   B. Teori belajar readinnes
   C. Teori belajar perilaku
   D. Teori belajar sosial
7. Durasi suatu informasi dapat tersimpan di dalam *sensory memory*adalah ….
   A. ½ detik
   B. ¼ detik
   C. 4 detik
   D. 5 detik
8. Proses memahami pengalaman-pengalaman baru dari segi skema yang adaadalah ….
   A. Skemata
   B. similarity
   C. Asimilasi
   D. Akomodasi
9. Proses memahami pengalaman-pengalaman baru dari segi skema yang ada ....
   A. Skemata
   B. similarity
   C. Asimilasi
   D. Akomodasi
10. Yang bukan merupakan tokoh pengembang teori gestalt adalah ….
   A. Kurt Koffka
   B. Ivan Pavlov
   C. MaxWertheirmer
   D. Wolfgang Kohler
11. Tiga tahapan model pemrosesan informasi dalam memori manusia menurut teori pemrosesan informasi adalah ...
   A. sort-term memory, *sensory memory*, dan *long-term memory*

B. sensory memory, *short-term memory*, dan *long-term memory*.

C. sort-term memory, *middle memory*, dan *long-term memory*

D. sensory memory,*middlememory*, dan *long-term memory*.

12. Dalam pembelajaran matematika, penggunaan metode pembelajaran yang berpusat pada siswa dilakukan agar pengetahuan dapat diingat siswa hingga pada tahap….
    A. sort-term memory
    B. middle memory
    C. long-term memory
    D. akomodation memory

13. Berikut adalah perkembangan kognitif seseorang menurut teori belajar sosial Vygotsky ....
    A. Perkembangan kognitif seseorang ditentukan oleh faktor genetika dan kemampuan belajar secara aktif
    B. Perkembangan kognitif seseorang ditentukan oleh faktor genetika dan lingkungan keluarga
    C. Perkembangan kognitif seseorang ditentukan oleh individu sendiri secara aktif dan oleh lingkungan sosial secara aktif pula
    D. Perkembangan kognitif seseorang ditentukan oleh individu sendiri secara aktif dan oleh guru selaku pendidik secara aktif pula

14. Berdasarkan prinsip belajar dari teori belajar social, salah satu setting pembelajaran didalam kelas adalah ….
    A. Belajar mandiri
    B. Kooperatif
    C. Belajar mandiri
    D. Tugas mandiri

15. Tingkat kemampuan seseorang untuk menyelesaikan masalah ketika di bawah bimbingan orang dewasa adalah ….
    A. Perkembangan actual
    B. Perkembangan potensial
    C. Perkembangan maximal
    D. Perkembangan minimum

Penutup

Dengan membahas teori belajar behavior, teori belajar kognitif dan teori belajar sosial, bapak/ibu guru memahami bagaimana proses belajar dari peserta didik dipandang dari ketiga teori tersebut. Modul ini tidak hanya membicarakan masalah teoritis, namum contoh dari teori tersebut yang dapat digunakan saat proses belajar mengajar berlangsung.

Pada akhirnya, mudah-mudahan modul ini dapat memberi masukan kepada Bapak/ibu guru untuk dapat mengembangkan kompetensinya, disamping guru juga harus secara aktif berupaya mencari kegiatan untuk pengembangan dirinya. Dengan tersedianya bahan ini akan membantu bapak/ibu guru untuk meningkatkan kompetensinya yang akan terlihat pada peningkatan nilai UKG.

Daftar Pustaka

Arends, R.I. 2008. Learning to teach. Terjemahan. Yogyakarta: Pustaka Pelajar.

Bjorklund, D.F. (2005). *Children's Thinking*. Belmort, CA: Wadsworth Thomson Learning.

Hamilton, R. and Ghatala, E. 1997. Learning and Instruction. New York: McGraw-Hill, Inc

Hurlock, E. (1996). *Psikologi Perkembangan. Edisi Kelima.* (Terjemahan). Jakarta: Erlangga.

Hilgard, Ernest Ropiequet. 1975.*Theories Of Learning: The Century Psychologi Series.* Printice-Hall. Inc., and Englewood Cliffs, N.J

http://www.lifecircles-inc.com/Learningtheories/behaviorism/Skinner.html

Seto Mulyadi (2002a). *Menjadikan Anak Yang Terbaik Menuju Milenium III.* Makalah Disampaikan dalarn Seminar yang diselenggarakan oleh RS. Mitra Keluarga Bekasi

Glosarium

Intelligence quotient (IQ)	:	Komputasi umur mental seseorang yang dibagi dengan umur kronologisnya dan dikalikan dengan 100
Multiple inteligensi	:	inteligensi/kecerdasan jamak meliputi dela-pan macam inteligensi yang terpisah: *linguis-tic, logical-mathematical, spatial, musical, bodily-kinesthetic, interpersonal, intraperso-nal, dan naturalist*.
Gaya belajar	:	cara yang cenderung terus-menerus dipakai siswa dalam mempelajari suatu materi pelajaran.

GURU PEMBELAJAR

MODUL PELATIHAN

MATEMATIKA SMA

KELOMPOK KOMPETENSI B

PROFESIONAL

RELASI, FUNGSI, PERSAMAAN DAN PERTIDAKSAMAAN

DIREKTORAT JENDERAL GURU DAN TENAGA KEPENDIDIKAN

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN

2016

Penulis:
Drs. Markaban, M.Si., 081328759138, Email: mar_kaban@yahoo.com
Sigit Tri Guntoro, M.Si., 081328431558, Email: sigittri92@yahoo.co.id
Dra. Puji Iryanti, M.Sc.Ed., 082243437577, Email: emelotirto@yahoo.com
Untung Trisna Suwaji, S.Pd, M.Si., 081328047171, Email: ontongts@yahoo.com
Wiworo, S.Si, MM, 08562875885, Email: percussionline@yahoo.com

Penelaah:
Farikhin, 082133369088, Email: farikhin.math.undip@gmail.com

Ilustrator:
Yogi Rostana

Kata Pengantar

Peningkatan kualitas pendidikan saat ini menjadi prioritas, baik oleh pemerintah pusat maupun daerah. Salah satu komponen yang menjadi fokus perhatian adalah peningkatan kompetensi guru. Peran guru dalam pembelajaran di kelas merupakan kunci keberhasilan untuk mendukung keberhasilan belajar siswa. Guru yang profesional dituntut mampu membangun proses pembelajaran yang baik sehingga dapat menghasilkan *output* dan *outcome* pendidikan yang berkualitas.

Dalam rangka memetakan kompetensi guru, telah dilaksanakan Uji Kompetensi Guru (UKG) Tahun 2015. UKG tersebut dilaksanakan bagi semua guru, baik yang sudah bersertifikat maupun belum bersertifikat untuk memperoleh gambaran objektif kompetensi guru, baik professional maupun pedagogik. Hasil UKG kemudian ditindaklanjuti melalui Program Guru Pembelajar sehingga diharapkan kompetensi guru yang masih belum optimal dapat ditingkatkan. Salah satu Program Guru Pembelajaran dilaksanakan melalui pendidikan dan pelatihan (Diklat) Guru Pembelajar.

PPPPTK Matematika sebagai Unit Pelaksana Teknis Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan dibawah pembinaan Direktorat Jenderal Guru dan Tenaga Kependidikan mendapat tugas untuk menyusun modul guna mendukung pelaksanaan Diklat Guru Pembelajar. Modul ini diharapkan dapat menjadi sumber belajar bagi guru dalam meningkatkan kompetensinya sehingga mampu mengambil tanggungjawab profesi dengan sebaik-baiknya.

Yogyakarta, Maret 2016

Kepala PPPPTK Matematika,

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
PUSAT PENGEMBANGAN DAN PEMBERDAYAAN PENDIDIK DAN TENAGA KEPENDIDIKAN MATEMATIKA

Dr. Dra. Daswatia Astuty, M.Pd.

NIP. 196002231985032001

Daftar Isi

Pendahuluan

A. Latar Belakang

Merujuk pada Peraturan Menteri Pendayagunaan Aparatur Negara dan Reformasi Birokrasi (Permenpan dan RB) Nomor 16 tahun 2009 tentang Jabatan Fungsional Guru dan Angka Kreditnya memuculkan paradigma baru profesi guru. Konsekuensinya adalah guru dituntut melakukan pengembangan keprofesian berkelanjutan (PKB) sehingga guru dapat menjalankan tugas dan fungsinya secara profesional. Masih merujuk pada Permenpan dan RB tersebut, pengembangan keprofesian berkelanjutan meliputi kegiatan pengembangan diri yaitu diklat fungsional dan kegiatan kolektif guru serta publikasi ilmiah dan karya inovasi. Dengan demikian sebenarnya guru pasti akan mencari kegiatan seperti yang tertuang dalam peraturan tersebut.

Berkaitan dengan hal ini pemerintah harus menyediakan atau paling tidak memfasilitasi kegiatan dimana guru terus dapat mengembangkan kompetensinya, disamping guru juga harus secara aktif berupaya mencari kegiatan untuk pengembangan dirinya. Salah satu upaya pemerintah adalah diklat pasca uji kompetensi guru (UKG). Diklat yang dimaksud disini adalah pelatihan terhadap kompetensi guru yang perlu ditingkatkan didasarkan pada uji kompetensinya.

Khusus untuk modul ini, meskipun dapat dimanfaatkan secara mandiri, sebenarnya modul ini akan digunakan dalam kegiatan diklat pasca UKG. Karena dimanfaatkan untuk kegiatan diklat maka didalamnya memuat kegiatan-kegiatan yang berisikan aktifitas pada saat diklat. Kegiatan-kegiatan tersebut (baik diklat maupun mandiri) dilakukan agar kompetensi guru meningkat yang akan terlihat pada peningkatan nilai UKG.

B. Tujuan

Tujauan disusunnya modul ini adalah untuk memfasilitasi guru dalam rangka pengembangan keprofesian berkelanjutan (PKB) baik secara mandiri maupun melalui kediklatan. Jika modul ini digunakan dalam kediklatan maka fasilitator dan peserta diklat dapat secara bersama memanfaatkan modul ini untuk pembelajaran di kelas dengan alur kegiatan sesuai dengan skenario fasilitator. Namun bila guru ingin mempelajari modul ini secara mandiri maka kegiatannya harus dimulai dari awal sampai akhir.

C. Peta Kompetensi

Menggunakan fungsi dalam menerapkan konsep fungsi, konsep komposisi fungsi dan invers fungsi dalam menyelesaikan masalah nyata.

Menggunakan konsep-konsep aljabar dalam menentukan model matematika dari masalah nyata, mengaplikasikan konsep program linear dalam menyelesaikan masalah nyata dan menggunakan diskriminan untuk menyelesaikan masalah persamaan kuadrat

D. Ruang Lingkup

Pokok-pokok materi di dalam modul relasi, fungsi, persamaan dan pertidaksamaan ini meliputi konsep relasi dan fungsi, beberapa fungsi aljabar, komposisi fungsi dan fungsi invers, fungsi eksponen dan logaritma, fungsi polinomial, fungsi pecah dan grafiknya, persamaan dan pertidaksamaan linier dan kuadrat serta persamaan irrasional maupun persamaan dan pertidaksamaan mutlak.

E. Saran Cara Penggunaan Modul

Modul ini dapat digunakan untuk dua keperluan yaitu untuk diklat atau kegiatan mandiri.

1. Untuk keperluan diklat

   Jika modul ini digunakan dalam kegiatan diklat maka sebaiknya fasilitator menyusun poin-poin penting untuk dijadikan sebagai bahan tayang. Selanjutnya peserta melakukan kegiatan atau pengerjaan tugas sesuai dengan yang sudah dirancang dalam bahan modul ini. Sebagai alternatif, langkah pembelajaran yang dapat dilakukan adalah:

   - Fasilitator menyampaikan poin-poin kegiatan akan dilakukan
   - Peserta diklat membaca materi, mengerjakan bagian aktifitas, menyelesaikan tugas atau latihan yang didampingi fasilitator.
   - Selanjutnya, cocokan hasil pengerjaan pengerjaan peserta dengan kunci jawaban. Untuk melihat ketercapaian kompetensi dan langkah apa yang mesti dilakukan silahkan lihat bagian tindak lanjut.

Upayakan permasalahan tuntas dibahas dalam kegiatan ini. Sangat dimungkinkan dalam kegiatan ini, peserta maupun fasilitator mencari referensi dari bahan bacaan lain atau sumber lain.

2. Untuk kegiatan mandiri

   Jika modul ini digunakan untuk keperluan kegiatan secara mandiri maka pembaca perlu memulainya secara urut dari bagian pertama sampai bagian akhir. Sangat disarankan untuk tidak membuka kunci jawaban terlebih dahulu sebelum mengerjakan semua latihan pada suatu bagian kegiatan belajar.

Kegiatan Pembelajaran (KB)

Pada modul ini akan dibahas tentang Relasi, Fungsi, Persamaan dan Pertidaksamaan yang dikemas dalam beberapa Kegiatan Pembelajaran (KB) sebagai berikut.

KB 1: Relasi dan Fungsi

A. Tujuan

Tujuan kegiatan pembelajaran ini adalah untuk memberikan pemahaman kepada pembaca terkait dengan konsep relasi dan fungsi, jenis-jenis fungsi, beberapa fungsi aljabar, dan fungsi eksponen maupun logaritma serta dapat memanfaatkannya dalam penyelesaian masalah.

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

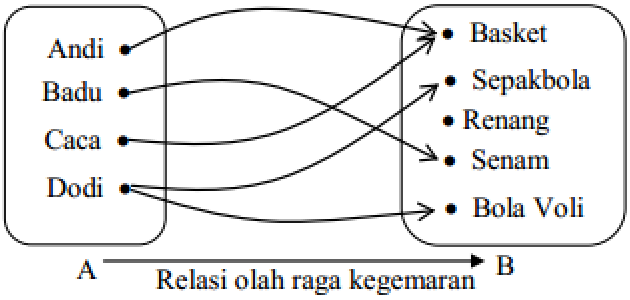
Setelah membaca dan mengikuti serangkaian kegiatan pada bagian ini, pembaca diharapkan mampu

1. Menjelaskan konsep relasi dan fungsi.
2. Membedakan fungsi surjektif, injektif, dan bijektif.
3. Menyelesaikan soal terkait fungsi linier, kuadrat dan rasional.
4. Menyelesaikan soal terkait fungsi eksponen dan logaritma

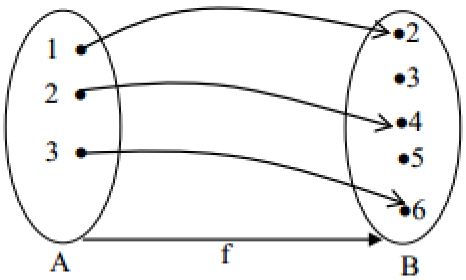
C. Uraian Materi

1. Pengertian Relasi dan Fungsi

Relasi antara dua himpunan misalnya himpunan A dan B, adalah aturan yang memasangkan atau memetakan anggota-anggota himpunan A dengan himpunan B. Relasi tersebut biasanya dinyatakan dengan diagram panah, diagram Cartesius atau dengan himpunan pasangan berurutan. Sebagai contoh relasi antara nama peserta didik dengan olah raga kegemaran ditunjukkan dalam diagram panah berikut.



Dari diagram panah di atas ada nama peserta didik yang memiliki lebih dari satu cabang olah raga kegemaran, yaitu Dodi gemar sepak bola dan bola voli.
Sekarang perhatikan relasi dari himpunan $A = \{1,2,3\}$ ke himpunan $B = \{2,3,4,5,6\}$ yang ditunjukkan dalam diagram panah berikut.

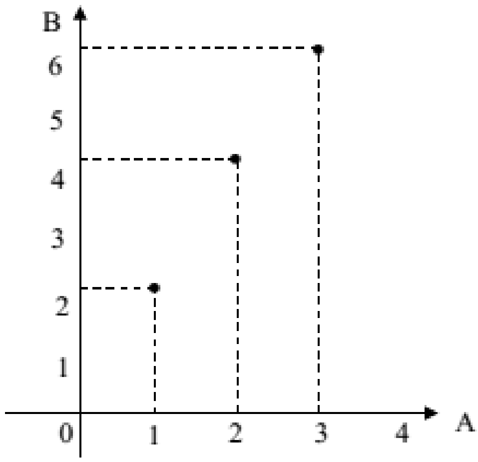


Dari diagram panah di atas terdapat relasi yang memasangkan setiap elemen dari A secara tunggal dengan elemen pada B. Relasi fungsional ini sering disingkat fungsi atau pemetaan (*mapping*) yang didefinisikan sebagai berikut.

Definisi: *Suatu fungsi f dari himpunan A ke himpunan B adalah suatu relasi yang memasangkan setiap elemen dari A secara tunggal , dengan elemen pada himpunan B.*

Ditulis $f : A \to B$ dibaca "fungsi f memetakan A ke B"

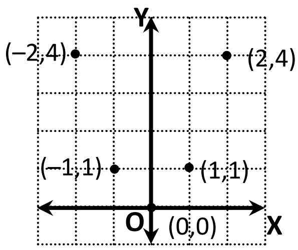
Dengan demikian fungsi yang ditunjukkan dengan diagram panah di atas dapat dinotasikan dengan $f: x \to 2x, x \in A$. Fungsi ini bila dinyatakan dalam himpunan pasangan berurutan yaitu $\{(1,2), (2,4), (3,6)\}$ dan bila digambarkan dengan diagram kartesius sebagai berikut.



Apabila f memetakan suatu elemen $x \in A$ ke suatu $y \in B$ dikatakan bahwa y adalah peta dari x oleh f dinotasikan dengan $f(x)$, dan biasa ditulis dengan $f : x \rightarrow f(x)$, sedangkan x biasa disebut prapeta dari $f(x)$.

Himpunan A dinamakan daerah asal (domain) dari fungsi f, sedangkan himpunan B disebut daerah kawan (kodomain) dan himpunan dari semua peta di B dinamakan daerah hasil (range) dari fungsi f tersebut.

Contoh 1:



Grafik di samping menyajikan sebuah fungsi, namakanlah fungsinya adalah f.

Misalnya domainnya D_f dan rangenya R_f maka fungsi itu dapat didefinisikan $f : x \rightarrow f(x) = x^2$.

- $D_f = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $R_f = \{0, 1, 4\}$.
- 4 disebut bayangan (peta) dari 2 dan dari –2. Karena $f(2) = 4$ dan juga $f(-2) = 4$.
- – 2 dan 2 disebut prapeta dari f, dan dilambangkan $f^{-1}(4) = 2$ atau – 2.
- Nilai f bernilai 0 untuk $x = 0$. Nilai yang menyebabkan f bernilai 0 disebut pembuat nol atau harga nol fungsi. Misalnya: $f(x) = x^2 - 2x$, maka ada dua pembuat nol yaitu 0 dan 2.

Contoh 2:

Diketahui $A = \{x \mid -3 \le x < 3,\ x \in R\}$ dan suatu fungsi $f : A \rightarrow R$

Ditentukan oleh rumus $f(x) = x^2 + 1$

a. Carilah $f(-1)$, $f(0)$ dan prapeta dari 5

b. Dengan melukis grafik, tentukan daerah hasil dari fungsi f.

c. Jelaskan bahwa f adalah suatu fungsi.

Jawab:

a. $f(x) = x^2 + 1 \Rightarrow f(-1) = (-1)^2 + 1 = 2$

$$f(0) = 0^2 + 1 = 1$$

Prapeta dari 5 $\Rightarrow x^2 + 1 = 5 \;\Leftrightarrow\; x^2 = 4 \;\Leftrightarrow\; x = \pm 2$

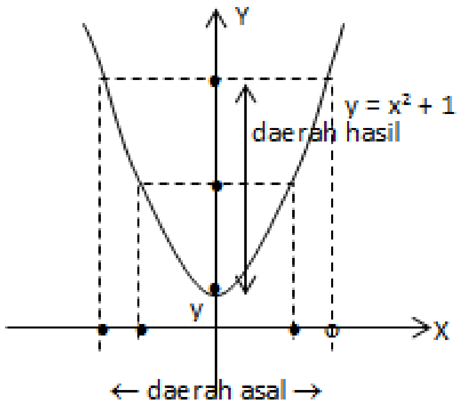
Sehingga prapeta dari 5 adalah 2 atau –2

b. Dibuat grafik $y = x^2 + 1$

$f(-3) = (-3)^2 + 1 = 10$

$f(3) = (3)^2 + 1 = 10$

titik balik (0,1)



Jadi daerah hasil dari fungsi f adalah:

R = $\{ y \mid 1 \le y \le 10, y \in R \}$, karena nilai f(x) = y terletak pada interval tersebut sebagaimana terlihat pada sumbu y.

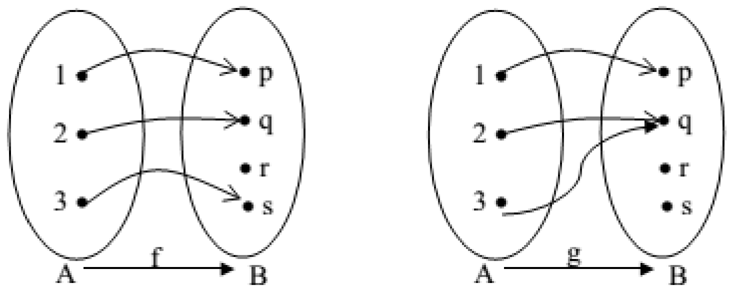
c. Karena f suatu relasi dimana setiap elemen pada domain A (sumbu x) dipasangkan secara tunggal maka f merupakan fungsi.

2. Jenis-jenis Fungsi

Dengan memperhatikan elemen-elemen pada domain dan kodomain yang direlasikan dalam suatu fungsi, maka kita mengenal jenis fungsi yakni sebagai berikut:

1) Injektif (Satu-satu)

Perhatikan fungsi f dan g dari himpunan $A = \{1,2,3\}$ dan himpunan $B = \{p,q,r,s\}$ digambarkan pada diagram panah berikut.



Fungsi satu-satu Bukan fungsi satu-satu

Fungsi $f: A \to B$ disebut fungsi injektif (satu-satu), jika untuk setiap $a_1, a_2 \epsilon A$ dan $a_1 \neq a_2$ akan berlaku $f(a_1) \neq f(a_2)$ atau jika $f(a_1) = f(a_2)$ maka $a_1 = a_2$, sedangkan fungsi $g: A \to B$ bukan fungsi injektif. Mengapa? Diskusikan!

Contoh:

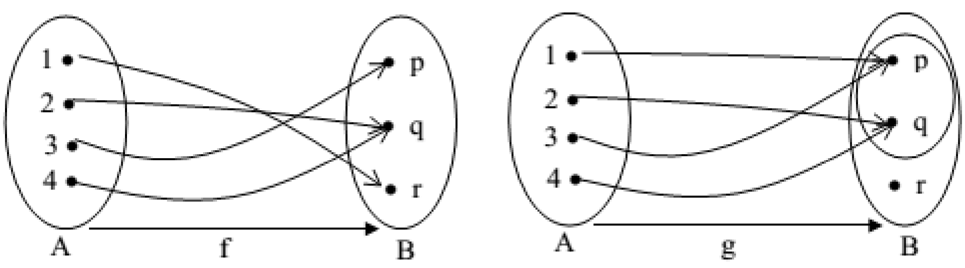
1). Fungsi f pada R yang didefinisikan dengan $f(x) = 2x$ adalah fungsi satu-satu, sebab kelipatan dua dari setiap dua bilangan yang berlainan adalah berlainan pula.

2). Fungsi f pada R yang didefinisikan dengan $f(x) = x^2$ bukan suatu fungsi satu-satu sebab $f(-2) = f(2)$.

2) Surjektif (Onto)

Misalkan f suatu fungsi yang memetakan A ke B maka daerah hasil $f(A)$ dari fungsi f adalah himpunan bagian dari B, atau $f(A) \subset$ B, fungsi ini kita kenal dengan nama fungsi into (ke dalam). Jika $f(A) = B$, yang berarti setiap elemen di B pasti merupakan peta dari sekurang-kurangnya satu elemen di A maka kita katakan f adalah suatu fungsi surjektif atau "f memetakan A onto B"

Perhatikan fungsi f dan g dari himpunan A = {1,2,3,4} ke dalam himpunan B = {p,q,r} yang digambarkan dalam diagram panah berikut:



Fungsi onto (surjektif) Fungsi into

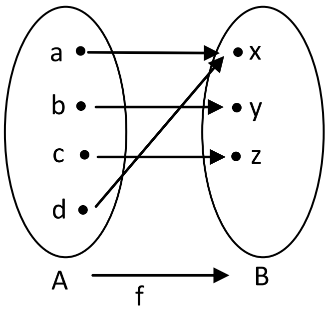
Fungsi $f: A \to B$ disebut fungsi *onto* atau fungsi surjektif karena untuk setiap $b \epsilon B$ sekurang-kurangnya terdapat satu $a \epsilon A$ sedemikian hingga $b = f(a)$. Dengan kata lain fungsi $f: A \to B$ disebut sebagai fungsi surjektif jika daerah hasil fungsi f sama dengan himpunan B.

Fungsi $g: A \to B$ disebut fungsi into karena ada $b \epsilon B$ yang tidak memiliki prapeta di A. Dengan kata lain fungsi $g: A \to B$ disebut sebagai fungsi into jika daerah hasil fungsi g merupakan himpunan bagian dari B.

Contoh:

(i). Fungsi $f: R \to R$ yang didefinisikan dengan rumus $f(x) = x^2$ bukan fungsi yang onto karena himpunan bilangan negatif tidak dimuat oleh hasil fungsi tersebut.

(i).

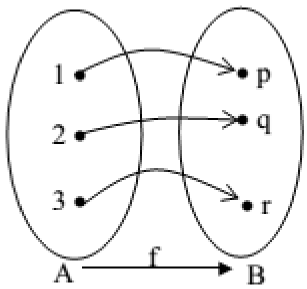


Misal $A = \{a, b, c, d\}$ dan $B = \{x, y, z\}$ dan fungsi $f: A \to B$ disamping adalah suatu fungsi yang surjektif karena daerah hasil f adalah sama dengan kodomain dari f (himpunan B).

3) Bijektif (Korespondensi Satu-satu)

Suatu fungsi $f: A \to B$ sedemikian rupa sehingga f merupakan fungsi yang injektif dan surjektif sekaligus, maka dikatakan "f adalah fungsi yang bijektif" atau " A dan B berada dalam korespondensi satu-satu".

Perhatikan fungsi f dari himpunan $A = \{1,2,3\}$ dan himpunan $B = \{p, q, r\}$ digambarkan pada diagram panah berikut.

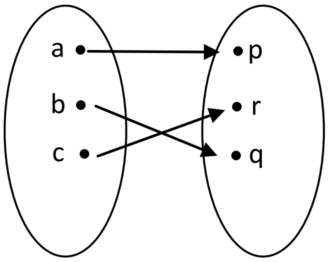


Fungsi bijektif

Fungsi $f: A \to B$ merupakan fungsi bijektif karena setiap anggota dalam himpunan A dipasangkan dengan tepat satu anggota dalam himpunan B, demikian juga sebaliknya, tiap anggota dalam himpunan B dipasangkan dengan tepat satu anggota dalam himpunan A. Dalam fungsi yang demikian ini banyaknya elemen A sama dengan banyaknya elemen B

Contoh:

1)



Relasi dari himpunan A = {a, b, c} ke himpunan $B = \{p, q, r\}$ yang didefinisikan sebagai diagram di samping adalah suatu fungsi yang bijektif.

2). Fungsi f yang memasangkan setiap negara di dunia dengan ibu kota negara-negara di dunia adalah fungsi korespondensi satu-satu (fungsi bijektif), karena tidak ada satu kotapun yang menjadi ibu kota dua negara yang berlainan.

3. Fungsi Aljabar

Beberapa fungsi aljabar yang kita bicarakan berikut ini antara lain:

1) Fungsi Linier dan Grafik Fungsi Linier

Bentuk fungsi linier $f(x) = ax + b$, dengan a, b konstan dan a ≠ 0, maka pembuat nol fungsi, yaitu $ax + b = 0$ merupakan bentuk umum persamaan linier dengan satu peubah.

Grafik fungsi linear berbentuk garis lurus dengan persamaan $y = ax + b$, dengan a, b konstan dan a ≠ 0. Untuk menggambar grafik fungsi linier bisa dilakukan dengan dua cara yaitu dengan membuat tabel dan dengan menentukan titik potong dengan sumbu x dan sumbu y

Contoh: Gambarlah grafik fungsi $y = 2x + 3$

Penyelesaian:

- Dengan membuat tabel: $y = 2x + 3$

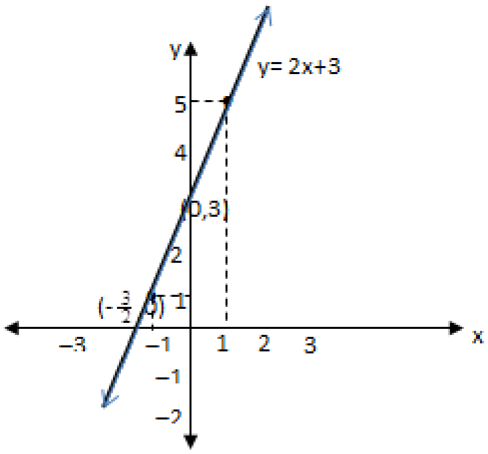
x	-1	0	1
y	1	3	5

Dari tabel diperoleh titik-titik berupa pasangan koordinat, kemudian dihubungkan, sehingga membentuk garis lurus.

- Dengan menentukan titik-titik potong dengan sumbu x dan sumbu y

x	$-\frac{3}{2}$	0
y	0	3

Kedua titik potong tersebut dihubungkan sehingga membentuk garis lurus seperti yang ditunjukkan pada gambar berikut.

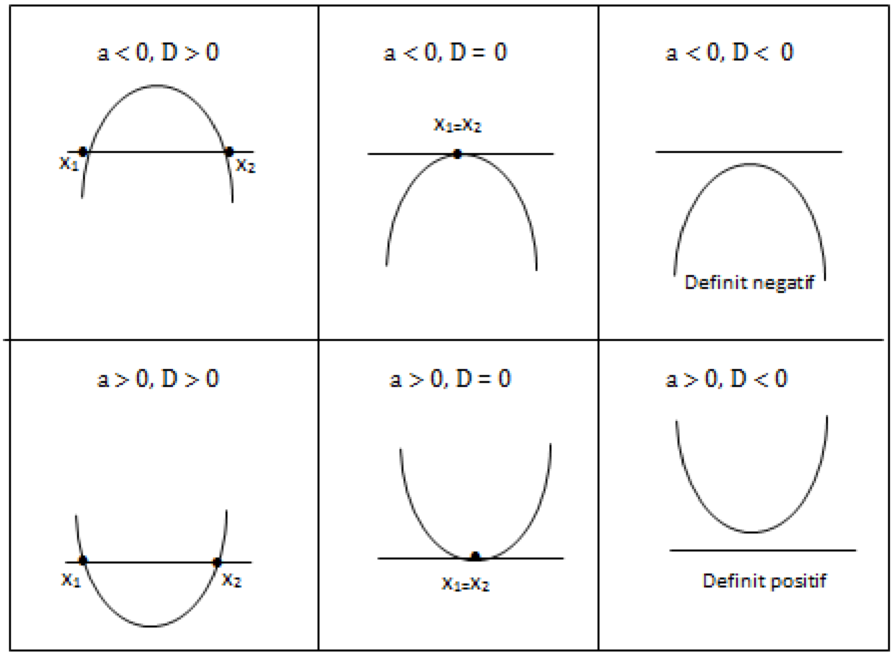


2) Fungsi Kuadrat dan Grafik Fungsi Kuadrat

Bentuk umum fungsi kuadrat adalah $f(x) = ax^2 + bx + c$, dengan $a, b, c \in R$ dan $a \neq 0$

Grafik fungsi kuadrat berbentuk parabola dengan persamaan $y = ax^2 + bx + c$, dengan a,b,c ∈ R dan a ≠ 0. Jika a > 0, parabola terbuka ke atas sehingga mempunyai titik balik minimum, dan jika a < 0 parabola terbuka ke bawah sehingga mempunyai titik balik maksimum.

Jika ditinjau dari nilai a dan D (diskriminan D = b^2 − 4ac) maka sketsa grafik parabola sebagai berikut:



Untuk menentukan puncak parabola dari grafik fungsi kuadrat dapat dijabarkan sebagai berikut

$$
\begin{aligned}
y &= ax^2 + bx + c \\
&= a\left(x^2 + \tfrac{b}{a}x\right) + c \\
&= a\left\{x^2 + \tfrac{b}{a}x + \left(\tfrac{b}{2a}\right)^2\right\} - \tfrac{b^2}{4a} + c \\
&= a\left(x + \tfrac{b}{2a}\right)^2 - \tfrac{b^2-4ac}{4a} \\
&= a\left(x - \left(\tfrac{-b}{2a}\right)\right)^2 + \tfrac{b^2-4ac}{-4a} \\
&= a\left(x - x_P\right)^2 + y_P
\end{aligned}
$$

Maka Puncak Parabola P($\dfrac{-b}{2a}, \dfrac{D}{-4a}$)

Langkah-langkah dalam menggambar grafik fungsi kuadrat $y = ax^2 + bx + c$

1. Tentukan pembuat nol fungsi, sehingga $y = 0$ atau $f(x) = 0$

   Pembuat nol fungsi dari persamaan $y = ax^2 + bx + c$ diperoleh jika $ax^2 + bx + c = 0$. Sehingga diperoleh nilai x yang memenuhi $ax^2 + bx + c = 0$. Nilai ini tidak lain adalah absis titik potong dengan sumbu x, sedangkan untuk menentukan titik potong dengan sumbu y, dapat dilakukan dengan mensubstitusikan nilai x tadi pada persamaan kuadrat semula.

2. Tentukan sumbu simetri $x = \frac{-b}{2a}$

3. Tentukan titik puncak P (x,y) dengan $x = \frac{-b}{2a}$ dan $y = \frac{D}{-4a}$

4. Gambarlah sketsa grafiknya

Contoh:

Gambarlah sketsa grafik fungsi $y = x^2 - 6x + 5$

Penyelesaian :

a. Menentukan pembuat nol fungsi, dengan pemfaktoran diperoleh :

$$x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x - 5) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ atau } x = 5$$

b. Menentukan sumbu simetri $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2.1} = \frac{6}{2} = 3$

c. Menentukan titik puncak $P(x, y)$

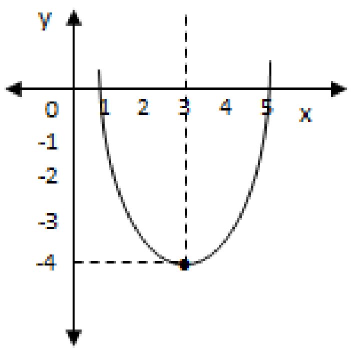
Karena nilai x sudah diperoleh maka tinggal mencari nilai y dengan substitusi $x = 3$ pada fungsi semula

$y = 3^2 - 6\ (3) + 5$

$= 9 - 18 + 8 = -4$

Jadi puncak parabola adalah titik (3, −4)

Sketsa grafiknya seperti pada gambar berikut ini.



3) Fungsi Rasional dan Grafik Fungsi Rasional

Fungsi rasional (*rational functions*) kadang-kadang juga disebut sebagai fungsi pecah. Fungsi pecah adalah fungsi yang dirumuskan oleh $\boldsymbol{f(x)} = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ dengan P(x) dan Q (x) yang merupakan suku banyak dalam x dan Q(x) $\neq$ 0 pada domainnya.

Misalnya, $f(x) = \dfrac{5}{x}$, $f(x) = \dfrac{x^2+4x+3}{3x-5}$ dan $f(x) = \dfrac{x^2+4x+3}{x^2+3x-5}$

Jika diketahui fungsi $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, maka nilai-nilai x yang menyebabkan $f(x) = 0$ disebut nilai nol dari fungsi $f(x)$. Nilai nol disebut juga pembuat nol atau harga nol. Dapat dibuktikan bahwa jika $f(x) = 0$, maka juga P(x)= 0. Jadi, untuk mencari nilai nol fungsi $f(x)$= $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, cukup dicari nilai-nilai yang menyebabkan P(x)= 0. Namun perlu diingat bahwa nilai x yang menyebabkan P(x) = 0 belum tentu merupakan nilai nol fungsi $f(x)$. Ini terjadi jika nilai x tersebut ternyata juga membuat Q(x)= 0. Untuk x yang bersama-sama membuat P(x) dan Q(x) bernilai nol menyebabkan $f(x)$ mempunyai nilai tak tentu. Misalnya, pada $f(x) = \dfrac{x^2+x-2}{x^2+2x-3}$, nilai x = 1 bukan nilai nol dari fungsi f(x) sekalipun untuk P(x) = x^2+ x - 2 berlaku P(1)= 0. Ini karena juga berlaku Q(1)= 0, sehingga f(1) bernilai tak tentu.

Tentu saja tidak setiap fungsi pecah mempunyai nilai nol. Ini terjadi kalau P(x) tidak mungkin berharga nol.

Seperti diketahui, nilai nol suatu fungsi berkaitan dengan koordinat titik potong grafik dengan sumbu X. Jadi, jika x = a adalah nilai nol dari fungsi f(x), maka (a,0) adalah koordinat titik potong grafik dengan sumbu X.

Selain dikenal nilai nol, dalam fungsi pecah ada nilai kutub yaitu nilai pembuat nol Q(x). Nilai kutub ini menyebabkan fungsi rasional memiliki nilai tak terdefinisi atau nilai tak tentu, oleh karena itu nilai-nilai kutub tidak menjadi anggota daerah definisi.

Nilai nol dan nilai kutub fungsi pecah dapat dipakai untuk menentukan di interval mana fungsi tersebut berharga positif atau negatif, cara mencarinya dengan sifat atau prinsip penyelesaian pertidaksamaan.

Grafik fungsi pecah beraneka bentuknya tergantung dari persamaan fungsinya. Langkah-langkah untuk membuat sketsa grafik fungsi pecah dapat dilakukan sebagai berikut:

- Menentukan titik-titik potong dengan sumbu x dan sumbu y
- Menentukan jenis-jenis asimptot diantaranya adalah:
  - Asimptot tegak, diperoleh bila penyebut bernilai nol
  - Asimptot datar, diperoleh bila x $\rightarrow$ ~
  - Asimptot miring, hanya untuk jenis fungsi rasional yang pembilangnya mempunyai derajat lebih tinggi satu daripada penyebutnya
- Membuat tabel yang menunjukkan dimana fungsi bernilai positif (grafik terletak di atas sumbu x) dan bernilai negatif (grafik terletak di bawah sumbu x)
- Menentukan nilai ekstrim fungsi (bila ada)
- Menentukan titik-titik bantu (jika perlu)
- Mensketsa kurvanya

Contoh 1:

Diketahui fungsi $f(x) = \dfrac{x^2+4x+8}{3x-5}$. Pada fungsi itu, nilai diskriminan dari persamaan $x^2+4x+8=0$ adalah D = 4^2 – (4)(1)(8) = 16 – 32 = -16 < 0

Karena D < 0, maka $f(x) = \dfrac{x^2+4x+8}{3x-5}$ tidak mempunyai nilai nol. Ini berarti juga grafik $f(x)$ tidak memotong sumbu x.

Contoh 2:

Sketsa grafik $f(x) = \dfrac{3x}{x^2+5x+4}$

Penyelesaian:

Untuk membuat skesa grafik fungsi dengan langkah – langkah :

1. Titik potong dengan sumbu x dan sumbu y adalah (0,0)
2. Asimptot – asimptot :

- tegak, diperoleh bila $x^2+5x+4=0$

$$(x+4)(x+1)=0$$

$$x=-4 \text{ atau } x=-1$$

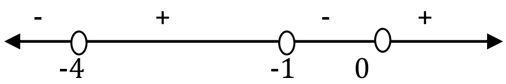
Jadi asimptot tegak adalah garis $x=-4$ dan $x=-1$

- datar, $f(x) = y = \dfrac{3x}{x^2 + 5x + 4} = \dfrac{x^2(\frac{3}{x})}{x^2(1 + \frac{5}{x} + \frac{4}{x^2})} = \dfrac{\frac{3}{x}}{1 + \frac{5}{x} + \frac{4}{x^2}}$

  untuk $x \to \sim$ maka $\dfrac{1}{x} \to 0$ Sehingga $y = \dfrac{3.0}{1 + 5.0 + 4.0} = \dfrac{0}{1} = 0$

  Jadi asimptot datar adalah garis y = 0

3. Sumbu x dibagi menjadi 4 interval oleh titik potong sumbu x dan asimptot tegak. Tentukan tanda f (x) untuk masing-masing interval



4. Nilai ekstrim

   Misal $f\ (x)$ mempunyai nilai ekstrim p. Dengan demikian $p = \dfrac{3x}{x^2 + 5x + 4}$

   $\Leftrightarrow px^2 + 5px + 4p - 3x = 0$

   $\Leftrightarrow px^2 + (5p - 3)x + 4p = 0$

   Syarat supaya persamaan kuadrat mempunyai akar-akar adalah D ≥ 0 sehingga :

   $(5p - 3)^2 - 4p\ (4p) \geq 0 \Leftrightarrow 25p^2 - 30p + 9 - 16p^2 \geq 0$

   $\Leftrightarrow 9p^2 - 30p + 9 \geq 0$

   $\Leftrightarrow 3p^2 - 10p + 3 \geq 0$

   $\Leftrightarrow (3p - 1)\ (p - 3) \geq 0$

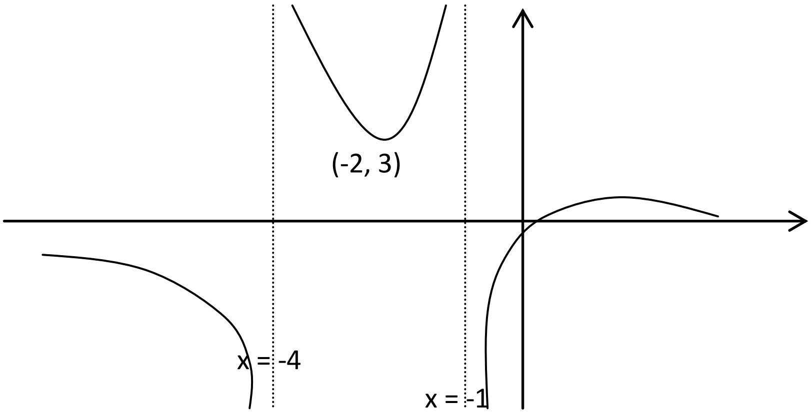
   Sehingga $p = y \leq \dfrac{1}{3}$ atau $p = y \geq 3$

   Ini menunjukkan nilai ekstrim minimum $y = 3$ dan nilai ekstrim maksimum $y = \dfrac{1}{3}$. Untuk menentukan titik maksimum dan minimum, subtitusi nilai ekstrim maksimum dan minimum ke dalam $f(x)$, diperoleh titik ekstrim minimum (-2,3) dan titik ekstrim maksimum $(2, \dfrac{1}{3})$

5. Titik-titik bantu

x	-6	-5	-3	$-2\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{2}$	1	2	3
y	$-1\frac{4}{5}$	$-3\frac{3}{4}$	$4\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{3}$	$3\frac{3}{5}$	$3\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{9}{28}$

6. Sketsa grafik



4. Fungsi Eksponen dan Logaritma

1) Fungsi Eksponen dan Grafiknya

Perhatikan perkembangan banyaknya amuba yang dinyatakan dalam tabel sebagai berikut :

Periode awal	0 (awal)	1	2	3	4	5	……	X
Banyak amuba	1	2	4	8	16	32	……	
Bentuk pangkat	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	……	2^x

Pada bentuk urutan dari baris ke-1 dengan baris ke-3 di atas merepresentasikan suatu fungsi satu-satu dengan domain bilangan asli.

Fungsi $f: x \rightarrow f(x) = 2^x$ merupakan salah satu fungsi eksponen, sehingga perkembangan amuba tersebut merupakan salah satu contoh dari fungsi eksponen yang domainnya adalah bilangan cacah. Perubahan panas, perubahan sifat logam karena pendinginan dari waktu ke waktu ternyata juga terkait dengan fungsi eksponen, sedangkan waktu berjalan secara kontinyu, bukan diskrit. Ini mengindikasikan bahwa domain fungsi eksponensial dapat merupakan himpunan bilangan real. Peluruhan zat radioaktif juga merupakan contoh peristiwa alam yang mengikuti sifat fungsi eksponen.

Fungsi $f: x \rightarrow a^x$, dengan $a > 0$ dan $a \neq 1$ disebut fungsi eksponen, yang mempunyai domain bilangan real dan range bilangan positif.

Fungsi f: $x \to a^x$, untuk $a > 1$ adalah fungsi naik dan jika $0 < a < 1$ maka fungsi turun. Karena range dari f adalah bilangan positif dan $a^0 = 1$, maka grafik fungsi $f : x \to a^x$ untuk $a > 0$ terletak di atas sumbu x dan melalui titik (0,1).

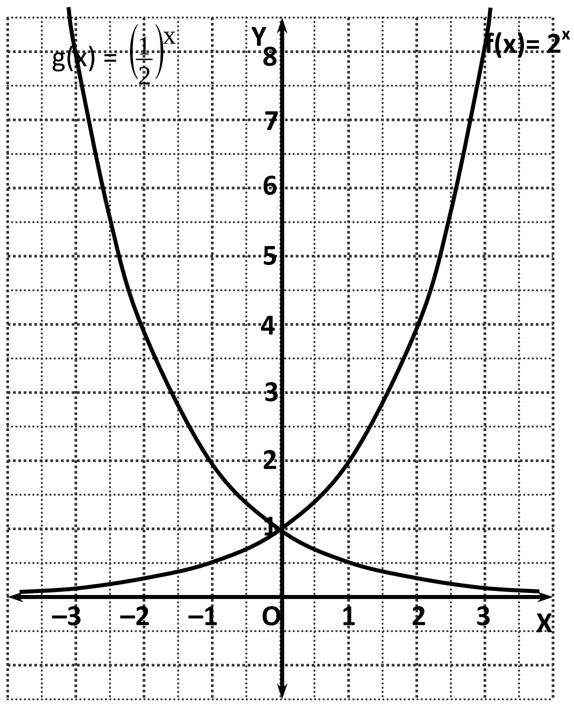
Grafik fungsi $f : x \to a^x$ dan $g : x \to a^{-x}$ akan simetris terhadap sumbu y

Dengan demikian bentuk umum fungsi eksponen adalah $f : x \to a^x$ atau $f(x) = a^x$ dengan $a > 0$ dan $a \neq 1$

Pada fungsi eksponen yaitu $f(x) = a^x$, berlaku:

1. x disebut peubah dan daerah asal (domain) dari fungsi eksponen adalah himpunan bilangan real yaitu $D_f : \{x \mid -\infty < x < +\infty, x \in R\}$.
2. a disebut bilangan pokok fungsi dengan syarat $a > 0$ dan $a \neq 1$ dengan demikian berlaku $0 < a < 1$ dan $a > 1$. Apabila $0 < a < 1$ maka grafiknya turun, sedangkan apabila $a > 1$ maka grafiknya naik.

Untuk menggambar sketsa grafik fungsi eksponen dengan cara menentukan beberapa titik yang mudah, kemudian beberapa titik digambar pada koordinat kartesius dan melalui titik-titik tersebut dibuat kurva yang mulus, misalnya grafik fungsi $f(x) = 2^x$ dan $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ dapat digambarkan sebagai berikut:



Pada gambar tersebut terlihat bahwa:

1) Kedua grafik melalui titik (0, 1)
2) Kedua grafik simetris terhadap sumbu Y
3) Grafik f: $x \to 2^x$ merupakan grafik naik/mendaki dan grafik g: $x \to \left(\frac{1}{2}\right)^x$ merupakan grafik yang menurun, dan keduanya berada di atas sumbu X (nilai fungsi senantiasa positif)

Contoh:

Sepotong logam mendingin menurut rumus $T = T_o \times e^{-1,2t}$ dengan T selisih suhu logam dengan udara sekitarnya setelah t menit, dan T_o selisih permulaan. Bila suhu logam semula 400°C dan suhu udara 30°C, tentukanlah suhu logam itu sesudah 2 menit.

Jawab:

$T_o = 400 - 30 = 370$

$T = T_o \times e^{-1,2t}$

$= 370 \times (2,71828182)^{-1,2\times 2}$

$= 370 \times (2,71828182)^{-2,4}$

$= 370 \times 0,090717953966946907550588662154598 3$

$= 33,565642967770355793717804997201 4$

Jadi suhu logam setelah 2 menit ≈ (30 + 33,57)°C = 63,57°C

2. Fungsi Logaritma dan Grafiknya

Dari fungsi $f : x \to a^x$ yang mempunyai domain bilangan real dan range bilangan real positif. Fungsi tersebut bijektif dari R ke R^+ sehingga mempunyai invers $f^{-1}: R^+ \to R$ Yaitu setiap $x \in R$ mempunyai peta tunggal $y \in R^+$ dan sebaliknya $y \in R^+$ mempunyai peta tunggal $x \in R$.

Jadi fungsi $f : x \to a^x$ mempunyai invers f^{-1} sehingga dari $y = a^x \Leftrightarrow {}^a\log y = x$ diperoleh : $f^{-1}(x) = {}^a\log x$ dan $f^{-1}(y) = {}^a\log y$.

Fungsi invers ini disebut fungsi logaritma yang mempunyai domain himpunan bilangan positif R^+ dan range himpunan bilangan real R Berarti fungsi $f^{-1} : x \to {}^a\log x$ adalah fungsi invers dari fungsi $f : x \to a^x$ Fungsi – fungsi tersebut grafiknya simetris terhadap garis y = x sehingga setiap titik (q,p) pada grafik y = ${}^{a}\log x$ merupakan peta titik (p,q) pada grafik y = a^x

Dalam logaritma ${}^{a}\log x$ diisyaratkan a > 0 dan a ≠ 1, serta x > 0

Fungsi logaritma merupakan invers dari fungsi eksponen. Fugsi logaritma dapat dicari nilai fungsinya untuk domain $0 < x < \infty$.

Dengan demikian secara umum bentuk umum fungsi logaritma adalah:

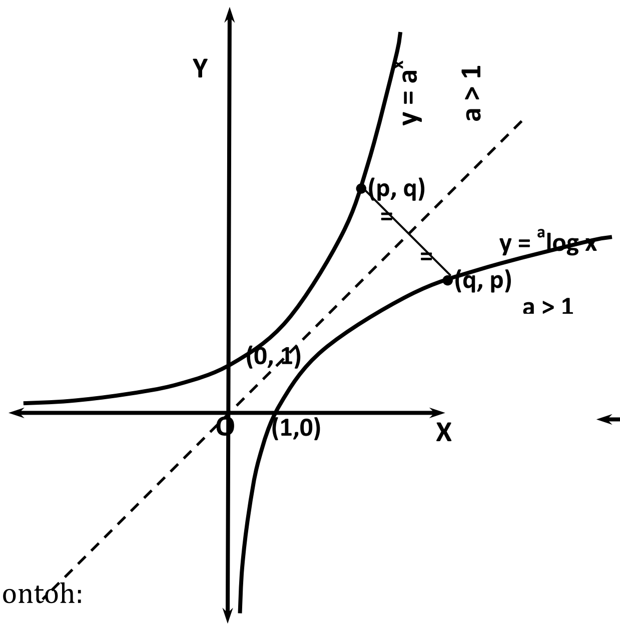
$f : x \rightarrow {}^{a}\log x$ atau $f(x) = {}^{a}\log x$ dengan $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$ dan $x \in R$

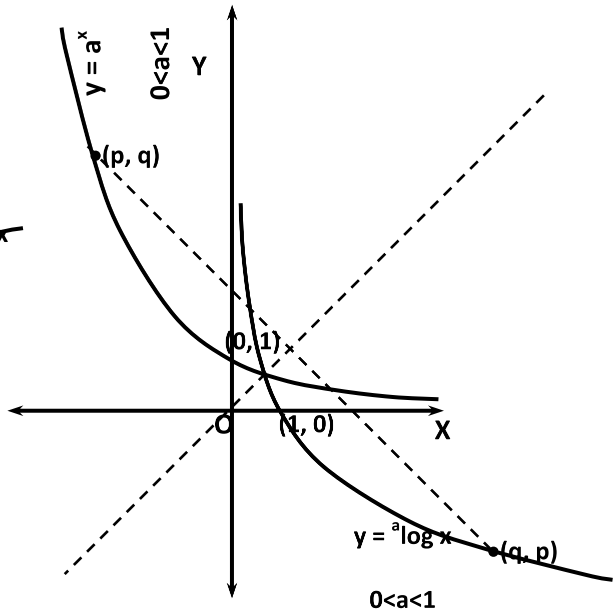
Dari bentuk umum di atas dapat diambil pengertian sebaga berikut:

1. Daerah asal (domain) dari fungsi logaritma adalah $Df : \{x | x > 0, x \in R\}$.
2. a disebut bilangan pokok (basis) logaritma dengan syarat $a > 0$ dan $a \neq 1$ dengan demikian berlaku $0 < a < 1$ dan $a > 1$.
3. Daerah hasil (range) dari fungsi logaritma adalah
   $Rf : \{y | -\infty < y < +\infty, y \in R\}$

Grafik fungsi logaritma $f(x) = {}^{a}\log x$ selalu memotong sumbu X di titik (1,0) dan tidak pernah memotong sumbu Y. Apabila $0 < a < 1$ maka grafiknya turun, sedangkan apabila $a > 1$ maka grafiknya naik.

Berdasar kenyataan bahwa fungsi eksponen dan fungsi logaritma yang pokok eksponen dan pokok logaritmanya sama adalah fungsi yang saling invers, maka grafik kedua fungsi tersebut saling simetris terhadap grafik fungsi identitas, yaitu f(x) = x yang persamaannya y = x. Karena itu maka setiap titik (q, p) pada grafik y = ${}^{a}\log x$ merupakan peta titik (p, q) pada grafik y = a^x. Hal ini dapat ditunjukkan seperti pada gambar berikut.





Contoh:

Kerja suatu motor (ω) dirumuskan dengan $\omega = \ln V_2 - \ln V_1$. Diketahui $V_1=0{,}01$; $V_2=0{,}5$ dan log 5 = 0,6989. Tentukan besarnya kerja motor tersebut.

Jawab:

$$\omega = \ln V_2 - \ln V_1 = \ln \frac{V_2}{V_1} = \ln 50 = 2{,}303 \log 50$$

$$= 2{,}303\ (\log 5 + \log 10) = 2{,}303.\ 1{,}6989 = 3{,}9126$$

Jadi besarnya kerja motor adalah 3,9126 joule

D. Aktivitas Pembelajaran

Jawablah pertanyaan LK1 ini, dan apabila ada masalah diskusikanlah dengan teman.

LK 1

1. Apa yang dimaksud dengan relasi dan fungsi? Jelaskan dan berikan contohnya!

2. Jelaskan perbedaan dari fungsi Surjektif, Injektif dan Bijektif dan berikan contohnya masing-masing!

3. Diberikan soal “Sebuah minimarker milik koperasi siswa menawarkan satu jenis barang dengan harga Rp. 300.000,00. Pada tingkat harga tersebut jumlah yang ditawarkan 450 buah. Sedangkan pada tingkat harga Rp. 450.000,00 jumlah barang yang ditawarkan 825 buah. Tentukan fungsi penawaran barang tersebut apabila fungsi linier dan gambarkan grafiknya”. Jawablah soal tersebut dan berikan satu contoh fungsi linier dalam kehidupan sehari-hari!

4. Diberikan soal “Sebuah perusahaan bus memiliki 8000 penumpang per hari dengan tarip tetap untuk jauh dekat 2000 rupiah. Untuk mengantisipasi kenaikan biaya operasional, perusahaan tersebut mengadakan survey terhadap pelanggan. Hasilnya adalah untuk setiap kenaikan 500 rupiah, pelanggan akan berkurang 800 per hari. Berapa rupiah kenaikan tarip yang harus diterapkan untuk memaksimalkan pendapatan perusahaan?”. Jawablah soal tersebut dan berikan satu contoh fungsi kuadrat dalam kehidupan sehari-hari!

5. Bagaimana menentukan koordinat titik puncak dari sebuah parabola $y = ax^2 + bx + c$. Jelaskan dan berilah contoh fungsi kuadrat dengan sketsa grafiknya!

6. Bagaimana langkah-langkah membuat sketsa grafik fungsi pecah. Kemudian sketsalah grafik f (x) = $\dfrac{x^2 - 4}{x - 1}$

7. Berikan satu contoh fungsi eksponen dan logaritma serta bagaimana bentuk sketsa grafiknya!

8. Sketlah grafik fungsi yang persamaannya $y = 4^x$ dan $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ dalam satu sistem koordinat dan berikan sifat umum grafik fungsi $f: x \to a^x$, dan $g: x \to a^{-x}$

E. Latihan

1. Suatu fungsi $f: R \to R$ ditentukan oleh $f(x) = x^2 + 2$
   a). Tentukan $f(-1)$.
   b). Tentukan a jika $f(a) = 27$
   c). Anggota manakah dari daerah asal yang mempunyai peta 11 ?
   d). Tentukan daerah hasil fungsi f.
2. Suatu fungsi mempunyai sifat $f(2x+3) = 2f(x)+3$ untuk setiap nilai x. Jika $f(0) = 6$, berapakah nilai $f(9)$?
3. Manakah yang merupakan fungsi injektif, surjektif, atau bijektif dari fungsi dengan domain {1, 2, 3, 4}, yang didefinisikan sebagai berikut?
   b. R = {(1, 1), (2, 3), (3, 5), (4, 7); jika kodomainnya {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}
   c. R = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 1); jika kodomainnya {1, 2, 3}
   d. R = {(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1); jika kodomainnya {1, 2, 3, 4}
   e. R = {(1, 1), (2, 2), (3, 2), (4, 4); jika kodomainnya {1, 2, 3, 4, 5, 6}
4. Gambarkan fungsi linier $f(x) = 6 - x$ yang mempunyai batas $-2 \leq x \leq 6$. Tentukan pula titik potong sumbu x dan y serta berapa koefisien arah dari fungsi tersebut.
5. Sebuah pabrik detergen dapat menjual 10.000 sachet per minggu, jika harganya Rp. 1.200,00 per sachet. Akan tetapi penjualan bertambah menjadi 12.000 sachet, jika harganya diturunkan menjadi Rp. 1.100,00 per sachet. Tentukan hubungan permintaan apabila dianggap hubungan itu linier.
6. Diketahui fungsi dengan persamaan $y = 3x^2 + x - 4$. Tentukan titik potong grafiknya dengan sumbu-sumbu koordinat, titik ekstremnya, sumbu simetrinya, dan kemudian gambarlah grafiknya.
7. Suatu fungsi keuntungan dari perusahaan suatu barang dinyatakan dalam bentuk fungsi kuadrat. Pimpinan Bagian Pembukuan memperkirakan bahwa jika jumlah yang dijual nol unit perusahaan rugi Rp 10.000.000,00, jika yang dijual 6.000 unit perusahaan mendapat untung Rp. 8.000.000,00, dan jika yang dijual 8.000 unit perusahaan mendapat untung Rp. 6.000.000,00. Tentukan fungsi kuadrat tersebut dan gambarkan sebagai fungsi dari unit yang dijual dalam suatu diagram!
8. Tentukan asymtut tegak dari grafik fungsi $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - x - 2}$

9. Sketsalah grafik fungsi $f(x) = \frac{2x+5}{x-1}$

10. Sejumlah bakteri ditempatkan pada suatu tempat yang diberi kondisi khusus sedemikian sehingga setiap 1000 bakteri dalam selang waktu t jam berkembang menjadi 1000×4^t.

    a. Berapa banyak bakteri (yang semula 1000) itu dalam waktu:

    (i) 30 menit pertama (ii) 2 jam pertama

    b. Dalam berapa jam 1000 bakteri itu menjadi 64000?

F. Rangkuman

1. Suatu fungsi f dari himpunan A ke himpunan B adalah suatu relasi yang mengawankan atau memasangkan setiap anggota x dari himpunan A ke hanya satu anggota y dari himpunan B.
2. Suatu fungsi $f: A \to B$ adalah fungsi injektif apabila $a_1 \neq a_2$ berakibat $f(a_1) \neq f(a_2)$ atau ekuivalen jika $f(a_1) = f(a_2)$ berakibat $a_1 = a_2$.
3. Suatu fungsi $f: A \to B$ maka apabila $f(A) \subset B$ dinamakan fungsi into (ke dalam). Jika $f(A) = B$ dikatakan f adalah suatu fungsi surjektif atau "f memetakan A onto B"
4. Suatu fungsi $f: A \to B$ merupakan fungsi yang injektif dan surjektif sekaligus, maka dikatakan "f adalah fungsi yang bijektif" atau " A dan B berada dalam korespondensi satu-satu".
5. Bentuk umum fungsi linier adalah $f: x \to ax + b$, dimana $a, b \in R$ dan $a \neq 0$. Grafik fungsi linier berbentuk garis lurus.
6. Bentuk umum fungsi kuadrat adalah $f: x \to ax^2 + bx + c$ dengan $a, b, c \in R$ dan $a \neq 0$. Grafik fungsi kuadrat dengan persamaan $y = ax^2 + bx + c$ berbentuk parabola dan sumbu simetri $x = \frac{-b}{2a}$, serta titik puncak P ($\frac{-b}{2a}$, $\frac{D}{-4a}$) dengan nilai diskriminan $D = b^2 - 4ac$.
7. Fungsi pecah adalah fungsi yang dirumuskan oleh $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ dengan P(x) dan Q (x) yang merupakan suku banyak dalam x dan Q(x) $\neq$ 0 pada domainnya.
8. Langkah-langkah untuk membuat sketsa grafik fungsi pecah dapat dilakukan sebagai berikut:

- Menentukan titik-titik potong dengan sumbu x dan sumbu y
- Menentukan asimptot datar, tegak dan miring
- Membuat tabel yang menunjukkan dimana fungsi bernilai positif (grafik terletak di atas sumbu x) dan bernilai negatif (grafik terletak di bawah sumbu x)
- Menentukan nilai ekstrim fungsi

9. Ada beberapa jenis-jenis asimptot pada fungsi pecah diantaranya adalah:
   - Asimptot tegak, diperoleh bila penyebut bernilai nol
   - Asimptot datar, diperoleh bila x $\rightarrow\ \sim$
   - Asimptot miring, hanya untuk jenis fungsi rasional yang pembilangnya mempunyai derajat lebih tinggi satu daripada penyebutnya
10. Fungsi f: x $\rightarrow$ ax , dengan a > 0 dan a ≠ 1 disebut fungsi eksponen, yang mempunyai domain bilangan real dan range bilangan positif.
11. Grafik fungsi f: x $\rightarrow$ ax , apabila $0 < a < 1$ maka grafiknya turun, sedangkan apabila $a > 1$ maka grafiknya naik.
12. Fungsi $f : x \rightarrow {}^{a}\log x$ atau $f(x) = {}^{a}\log x$ dengan a > 0 , a ≠ 1, x > 0 dan $x \in R$ disebut fungsi logaritma
13. Grafik fungsi logaritma $f(x) = {}^{a}\log x$ selalu memotong sumbu X di titik (1,0) dan tidak pernah memotong sumbu Y. Apabila $0 < a < 1$ maka grafiknya turun, sedangkan apabila $a > 1$ maka grafiknya naik.

G. Umpan Balik dan Tindak Lanjut

Evaluasi diri

Untuk mengukur ketercapaian peserta diklat dalam mempelajari modul ini lakukan evaluasi diri sebagai berikut secara jujur

Petunjuk:

Evaluasi diri dengan cara mengerjakan soal latihan/tugas yang terdiri dari sepuluh soal. Pada masing-masing soal, pengerjaan yang benar mendapatkan skor maksimal 10. Jadi skor total 100. Capaian kompetensi (CK) dirumuskan sebagai

$$CK = \frac{Skor\ yang\ diperoleh}{100} \times 100\%$$

Setelah mengerjakan semua soal latihan/tugas, cocokkan jawaban Anda dengan kunci jawaban yang telah disajikan untuk mengukur capaian kompetensi (CK).

Tindak Lanjut

Seperti telah dijelaskan pada bagian sebelumnya bahwa evaluasi yang dilakukan oleh diri sendiri secara jujur adalah kunci keberhasilan mengukur capaian kompetensi (CK). Berkaitan dengan itu, pertimbangkan hal berikut.

Perolehan CK (dalam %)	Deskripsi dan tindak lanjut
$91 \leq \text{CK} \leq 100$	Sangat Baik, berarti Anda benar-benar memahami pengertian relasi dan fungsi. Selanjutnya kembangkan pengetahuan dan tuangkan dalam pembelajaran.
$76 \leq \text{CK} < 91$	Baik, berarti Anda cukup memahami pengertian relasi dan fungsi walaupun ada beberapa bagian yang perlu dipelajari lagi. Selanjutnya pelajari lagi beberapa bagian yang dirasakan belum begitu dipahami.
$50 \leq \text{CK} < 76$	Cukup, berarti Anda belum cukup memahami pengertian relasi dan fungsi. Oleh karena itu Anda perlu mempelajari lagi bagian yang belum dikuasai dan menambah referensi dari sumber lain.
$\text{CK} < 50$	Kurang, berarti Anda belum dapat memahami pengertian relasi dan fungsi. Oleh karena itu Anda perlu mempelajari lagi dari awal dan menambah referensi dari sumber lain.

H. Kunci Jawaban

1. a). $f(-1) = 3$

   b). $a = \pm 5$

   c). $x = \pm 3$

   d). Daerah hasil fungsi f adalah $Rf = \{y \backslash y \quad y \geq 2;\ y \in R\}$

2. Nilai dari $f(9) = 33$

3. Dengan bantuan diagram panah fungsi tersebut adalah

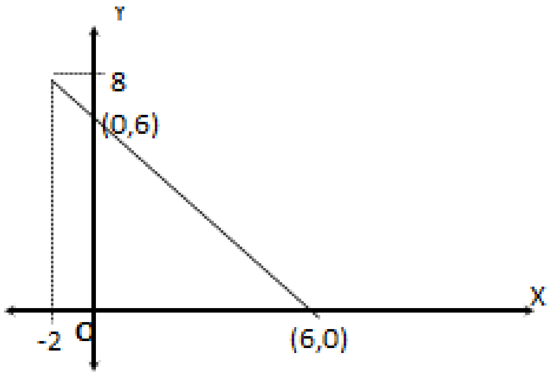
   a). Injektif

   b). Surjektif (Onto)

c). Bijektif

d). Fungsi Into

4. Grafiknya sebagai berikut:



Koefisien arahnya -1

5. Hubungan permintaannya adalah dengan persamaan:

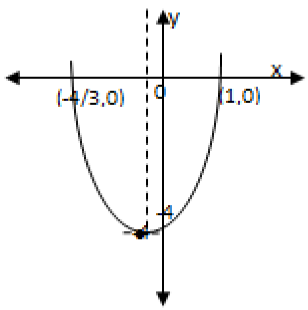
$$P = 600x + 6000000$$

6. Titik potong grafik dengan sumbu x adalah $\left(-\frac{4}{3}, 0\right)$ dan $(1{,}0)$ dan dengan sumbu y adalah $(0, -4)$

Sumbu simetri $x = \frac{-1}{6}$

Menentukan titik ekstrem/puncak $P(x, y)$
Puncak parabola adalah titik $(\frac{-1}{6}, -4\frac{1}{12})$

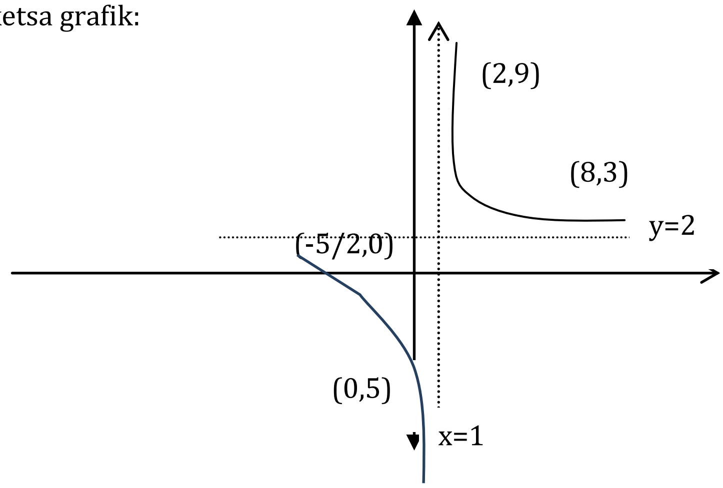
Sketsa grafiknya:



7. Persamaan: $y = -\frac{1}{2}x^2 + 6000\,x - 10000000$

8. Asymtut tegak adalah garis $x = -1$ dan $x = 2$

9 Sketsa grafik:



10. a. (i). Untuk $t = \frac{1}{2}$ banyaknya bakteri menjadi $1000 \times 4^t = 1000 \times 4^{\frac{1}{2}} = 2000$

(ii). Untuk $\boldsymbol{t = 2}$ banyaknya bakteri menjadi $1000 \times 4^2 = \mathbf{1000 \times 16 = 16000}$

b .$\mathbf{1000 \times 4^{\boldsymbol{t}} = 64000 \Leftrightarrow 4^{\boldsymbol{t}} = 64 \Leftrightarrow \boldsymbol{t} = 3}$

Jadi dalam waktu 3 jam bakteri menjadi 64000

KB 2 : Komposisi Fungsi Dan Fungsi Invers

A. Tujuan

Tujuan kegiatan pembelajaran ini adalah untuk memberikan pemahaman kepada pembaca terkait dengan konsep komposisi fungsi dan fungsi invers, prosedur penyelesaian komposisi fungsi dan fungsi invers, dan memanfaatkannya dalam penyelesaian masalah.

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

Setelah membaca dan mengikuti serangkaian kegiatan pada bagian ini, pembaca diharapkan mampu

1. Menjelaskan konsep komposisi fungsi dan fungsi invers.
2. Menentukan penyelesaian komposisi fungsi.
3. Menentukan penyelesaian fungsi invers.

C. Uraian Materi

1. Aljabar Fungsi

Sebelum membahas komposisi fungsi, terlebih dulu kita membahas tentang aljabar fungsi. Umumnya, aljabar fungsi meliputi beberapa jenis, yaitu:

1) Jumlah dan Selisih Dua Fungsi

Apabila f dan g masing-masing adalah fungsi dengan domain D_f dan D_g dan peta-peta $f(x)$ dan $g(x)$ ada pada kedua domain tersebut maka :

1). Jumlah fungsi f dan g ditulis dengan simbol $f+g$ adalah suatu fungsi:

$f+g: x \rightarrow f(x)+g(x)$

2). Selisih fungsi f dan g ditulis dengan simbol $f-g$ adalah suatu fungsi:

$f-g: x \rightarrow f(x)-g(x)$

Adapun domain dari $f+g$ dan $f-g$ adalah irisan dari D_f dan D_g ($D_f \cap D_g$)

Contoh:

Diketahui fungsi f dan g masing-masing pada R yang didefinisikan dengan $f(x)=x^2$ dan $g(x)=2x+3$.

Tentukan: a). $f+g$

b). $f-g$

c). prapeta dari 12 untuk fungsi $f-g$

Jawab:

a). $f + g: x \to f(x) + g(x) = x^2 + (\ 2x + 3\ ) = x^2 + 2x + 3$

Jadi $(\ f + g)(x) = x^2 + 2x + 3$

b). $f - g: x \ \to f(x) - g(x) = x^2 - (\ 2x + 3) = x^2 - \ 2x - 3$

Jadi $(\ f - g)(x) = x^2 - 2x - 3$

c). $(\ f - g)(x) = 12 \ \Rightarrow x^2 - 2x - 3 \ = 12$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 15 = 0$

$\Leftrightarrow (x + 3)(x - 5) = 0$

$\Leftrightarrow x = -3 \ atau \ x = 5$

Jadi prapeta dari 12 untuk fungsi $f - g$ adalah $x = -3$ atau $x = 5$

2) Perkalian dan Pembagian Dua Fungsi

Apabila f dan g masing-masing adalah fungsi dengan domain D_f dan D_g dan peta-peta $f(x)$ dan $g(x)$ ada pada kedua domain tersebut maka :

1). Hasil kali fungsi f dan g ditulis dengan $f \times g$ didefinisikan dengan :

$f \times g: x \to f(x) \times g(x)$

2). Hasil bagi fungsi f dan g ditulis dengan $\frac{f}{g}$ didefinisikan dengan :

$$\frac{f}{g} : x \to \frac{f(x)}{g(x)} \text{ dengan } g(x) \neq 0$$

Adapun domain dari $f \times g$ dan $\frac{f}{g}$ adalah irisan dari D_f dan D_g $(D_f \cap D_g)$

Contoh :

Diketahui fungsi f dan g masing-masing pada R yang ditentukan oleh $f(x) = 2x + 3$ dan $g(x) = \ x - 1$. Tentukan :

a). rumus fungsi $f \ \times \ g$ dan $(\ f \times g\ )(2)$

b). rumus fungsi $\frac{f}{g}$ dan domain $\frac{f}{g}$

Jawab :

a). $f \times g \ : \ x \to f(x) \times g(x) = (\ 2x + 3\ )(\ x - 1\ ) = \ 2x^2 + x - 3$

Jadi rumus fungsi $(f \times g)(x) = 2x^2 + x - 3$ dan $(f \times g)(2) = 7$

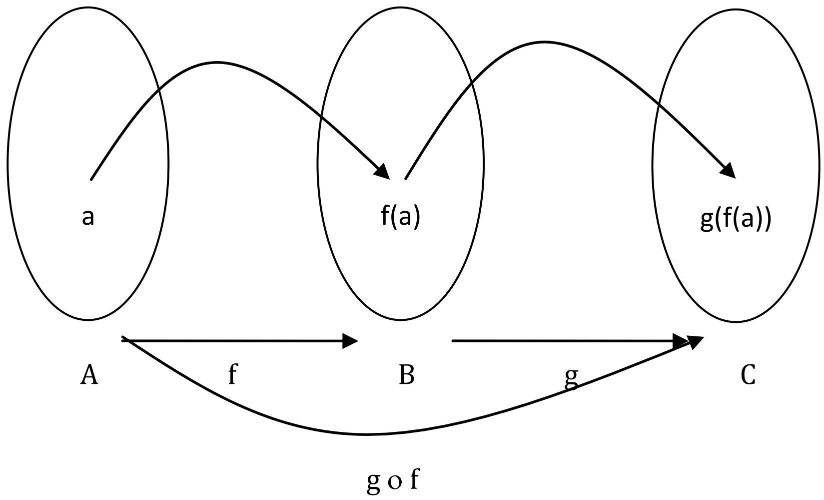
b). $\frac{f}{g} : x \to \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x + 3}{x - 1}$

Jadi rumus fungsi $\frac{f}{g}(x) = \frac{2x+3}{x-1}$ dan domain dari fungsi $\frac{f}{g}$ adalah

$D_f \cap D_g = R - \{\, x \mid x - 1 = 0 \,\} = \{\, x \mid x \in R, x \neq 1 \,\}$

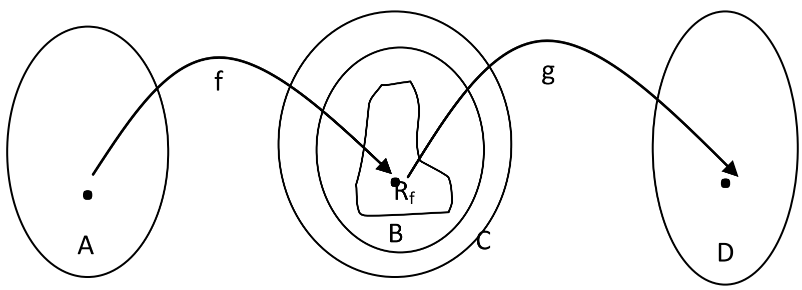
2. Komposisi Fungsi

Misalkan fungsi f memetakan himpunan A ke dalam himpunan B, dan fungsi g memetakan himpunan B ke dalam C sebagaimana ilustrasi di bawah ini :



Untuk $a \in A$ maka petanya $f(a)$ berada di B yang juga merupakan domain dari fungsi g, oleh sebab itu pasti diperoleh peta dari $f(a)$ di bawah pemetaan g yaitu $g(f(a))$. Dengan demikian kita mempunyai suatu aturan yang menentukan setiap elemen $a \in A$ dengan tepat satu elemen $g(f(a)) \in C$. Fungsi baru inilah yang disebut fungsi komposisi dari f dan g, yang dinyatakan dengan notasi gof (dibaca "g bundaran f").

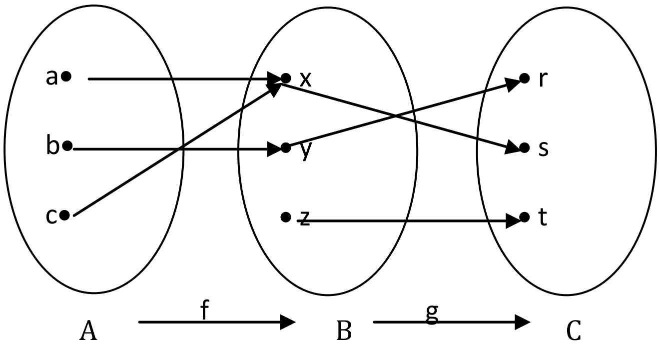
Secara singkat, jika $f: A \rightarrow B$, dan $g: B \rightarrow C$ maka kita definisikan suatu fungsi komposisi $gof: A \rightarrow C$ sedemikian hingga $(gof)(a) = g(f(a))$. Perhatikan bahwa fungsi komposisi gof adalah penggandaan fungsi yang mengerjakan f dahulu, baru kemudian mengerjakan g.



Dengan memperhatikan definisi dari fungsi komposisi di atas, dua fungsi $f: A \rightarrow B$, dan $g: C \rightarrow D$ dapat diperoleh fungsi komposisi gof apabila daerah hasil dari fungsi f atau R_f merupakan himpunan bagian dari C (domain g atau D_g). Demikian juga agar diperoleh fungsi komposisi fog maka syaratnya daerah hasil dari fungsi g yakni R_g haruslah menjadi himpunan bagian dari domain f, yaitu $R_g \subset A$

Contoh 1:

Misalkan $f: A \rightarrow B$ dan $g: B \rightarrow C$ yang didefinisikan sebagai berikut:



$(gof): A \rightarrow C$ ditentukan oleh :

$(gof)\ (a) = g\ (f(a)) = g\ (x) = s$

$(gof)\ (b) = g\ (f(b)) = g\ (y) = r$

$(gof)\ (c) = g\ (f(c)) = g\ (z) = s$

Contoh 2:

Fungsi $f: R \rightarrow R$, $g: R \rightarrow R$ dan $h: R \rightarrow R$ yang didefinisikan oleh rumus

$f(x) = x + 2$, $g\ (x) = 3x^2$ dan $h(x) = 2x - 3$

Tentukan : a) $(gof)(1)$ dan $(fogoh)(1)$

b) rumus untuk $(gof), (fog)$ dan $(fogoh)$

Jawab :

a. $(gof)(1) = g\ (f(1)) = g(1 + 2) = g(3) = 3(3^2) = 27$

$(fogoh)(1) = f(g(h(1))) = f(g(-1)) = f\ (3) = 3 + 2 = 5$

b. $(gof): x \rightarrow (gof)(x) = g\ (f(x)) = g(x + 2) = 3(x + 2)^2 = 3x^2 + 12x + 12$

Sehingga $(gof): x \rightarrow 3x^2 + 12x + 12$.

$(fog): x \rightarrow (fog)(x) = f(g(x)) = f(3x^2) = 3x^2 + 2$

Sehingga $(fog): x \rightarrow 3x^2 + 2$.

$(fogoh): x \rightarrow (fogoh)(x) = f(g(h(x)))$

$= f(g(2x - 3))$

$= f(3(2x - 3)^2 = f(12x^2 - 36x + 27)$

$= 12x^2 - 36x + 29$

Sehingga $(f o g o h): x \to 12x^2 - 36x + 29$.

Contoh 3:

Fungsi $f: R \to R$ dan $g: \{x \mid x \geq 1, x \in R\} \to R$ didefinisikan oleh rumus $f(x) = x + 2$, dan $g(x) = \sqrt{x-1}$. Selidiki apakah $g o f$ ada, jika tidak ada tentukan domain dari f dan g agar diperoleh $g o f$.

Jawab :

Karena daerah hasil dari fungsi f atau R_f tidak merupakan himpunan bagian dari domain g, yaitu $R_f \supset D_g$ sehingga $g o f$ tidak dapat didefinisikan, misalnya $f(2) = 4$ dan $4 \in D_g$, tetapi $f(-2) = 0$ dan $0 \notin D_g$.

Agar diperoleh $g o f$ maka daerah hasil dari fungsi f harus merupakan himpunan bagian dari domain g . Dari fungsi $g(x) = \sqrt{x-1}$ dengan domain D_g = $\{x \mid x \geq 1, x \in R\}$ sedang $(g o f)(x) = g\,(f(x)) = g(x+2) = \sqrt{(x+2)-1} = \sqrt{x+1}$.

Dengan demikian domain dari f, yaitu D_f diperoleh dari $x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$.

Jadi, $D_f = \{x \mid x \geq -1, x \in R\}$.

3. Sifat-sifat Komposisi Fungsi

Dua buah fungsi f dan g dikatakan sama ($f = g$) apabila kedua fungsi tersebut mempunyai domain yang sama. Dan setiap elemen di domain $a \in D$ diperoleh peta yang sama dari kedua fungsi, yaitu $f(a) = g(a)$. Dari definisi kesamaan fungsi didapat sifat-sifat komposisi fungsi sebagai berikut .

1). Komposisi fungsi tidak bersifat komutatif (contoh 2b di atas bahwa $g o f \neq f o g$).

2). Komposisi fungsi bersifat asosiatif $f o (g o h) = (f o g) o h$.

3). Fungsi I yang memetakan $I: x \to x$ disebut fungsi identitas atau fungsi netral sehingga $I o f = f o I = f$.

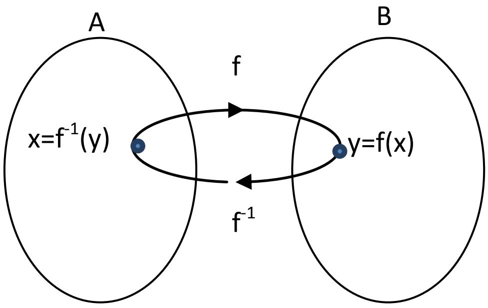
4). Jika untuk fungsi $f: x \to f(x)$ dan fungsi $g: x \to g(x)$ yang terdefinisi pada suatu domain sedemikian sehingga diperoleh $f o g = g o f = I$ dengan I fungsi identitas maka g dapat dikatakan sebagai fungsi invers dari f ditulis dengan notasi f^{-1}.

Jadi $f o f^{-1} = f^{-1} o f = I$.

4. Fungsi Invers

1) Pengertian Invers Fungsi dan Fungsi Invers

Perhatikan gambar sebagai berikut :



Pada gambar di atas fungsi $f: A \longrightarrow B$ dengan $f = \{(x, y)/y = f(x),\ x \in A$ dan $y \in B\}$ dan misalkan relasi $g: B \longrightarrow A$ dengan $g = \{(y, x)/x = g(y),\ x \in A$ dan $y \in B\}$ maka g adalah **invers dari fungsi *f*** ditulis f^{-1}. Jika relasi f^{-1} merupakan fungsi maka f^{-1} disebut **fungsi invers.** Syarat suatu fungsi memiliki fungsi invers adalah jika fungsi tersebut berkorespodensi satu-satu. Jika relasi f^{-1} bukan merupakan fungsi maka f^{-1} disebut invers dari f saja.

Dari uraian diatas, misalkan f adalah suatu fungsi dari A ke dalam B. Pada umumnya $f^{-1}(b)$ untuk suatu $b \in B$ dapat terdiri lebih dari satu elemen atau mungkin tidak ada. Jika f: $A \to B$ adalah suatu fungsi yang bijektif, maka untuk setiap $b \in B$, invers $f^{-1}(b)$ akan terdiri dari sebuah elemen tunggal dalam A. Dengan demikian kita mendapatkan suatu aturan yang menetapkan untuk setiap $b \in B$ dengan suatu elemen tunggal $f^{-1}(b)$ dalam A. Oleh sebab itu f^{-1} adalah suatu fungsi dari B ke dalam A, dan kita tulis fungsi $f^{-1} : B \to A$.

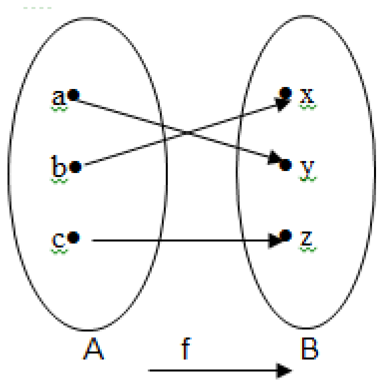
Disini fungsi f^{-1} kita sebut " fungsi invers dari f "

Catatan: Suatu fungsi f: $A \to B$ akan diperoleh fungsi invers f: $B \to A$ hanya apabila f suatu fungsi yang bijektif, injektif dan surjektif sekaligus

Secara umum jika f adalah fungsi bijektif maka f menentukan setiap $x \in A$ ke $y \in B$, dan f^{-1} menentukan setiap $y \in B$ ke $x \in A$, sehingga: $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$

Contoh :

Misalkan $f: A \to B$ didefinisikan sebagaimana diagram panah berikut :



maka :

$f^{-1}(x) = b$

$f^{-1}(y) = a$

$f^{-1}(z) = c$

2) Menentukan Fungsi Invers

Telah diuraikan sebelumnya bahwa jika f dan f^{-1} adalah fungsi-fungsi yang saling invers, maka $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$

Untuk menentukan rumus fungsi invers dari fungsi f dapat dilakukan langkah-langkah:

- Memisalkan $f(x) = y$
- Menyatakan x dalam y
- Menentukan rumus dari $f^{-1}(x)$ dengan mengingat $f^{-1}(y) = x$ dan mengganti variable y dengan x

Contoh 1:

Tentukan fungsi invers dari $f(x) = ax + b$

Penyelesaian: misal : $f(x) = y \Rightarrow y = ax + b \Leftrightarrow ax = y - b$

$$\Leftrightarrow x = \frac{y-b}{a}$$

$$\Leftrightarrow f^{-1}(y) = \frac{y-b}{a}$$

Jadi, jika $f(x) = ax + b$, maka $f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$

Contoh 2:

Tentukan invers dari $f(x) = ax^2 + bx + c$

Penyelesaian: misal $f(x) = y$ maka dapat dijabarkan

$$y = ax^2 + bx + c \Leftrightarrow ax^2 + bx = y - c$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{y-c}{a}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{y-c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{y-c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\Leftrightarrow = \frac{4a\,(y-c)}{4a^2} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\Leftrightarrow = \frac{4ay - 4ac + b^2}{4a^2}$$

$$\Leftrightarrow = \frac{4ay + b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right) = \pm\sqrt{\frac{4ay + b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right) = \pm\frac{\sqrt{4ay + b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{4ay + b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{4ay + b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Leftrightarrow f^{-1}(y) = \frac{-b \pm \sqrt{4ay + b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Leftrightarrow f^{-1}(x) = \frac{-b \pm \sqrt{4ax + b^2 - 4ac}}{2a}$$

Jadi, jika $f(x) = ax^2 + bx + c$, maka inversnya $f^{-1}(x) = \dfrac{-b \pm \sqrt{4ax + b^2 - 4ac}}{2a}$

(bukan merupakan fungsi)

Catatan:

Tidak semua fungsi memiliki fungsi invers, tetapi memiliki invers

Contoh 3:

Tentukan invers dari $f(x) = \sqrt[n]{ax+b}$

Penyelesaian: misal $f(x) = y$ maka dapat dijabarkan

$$f(x) = \sqrt[n]{ax+b}$$

$$y = \sqrt[n]{ax+b}$$

$$\Leftrightarrow y^n = ax + b$$

$$\Leftrightarrow ax = y^n - b$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{y^n - b}{a}$$

$$\Leftrightarrow f^{-1}(y) = \frac{y^n - b}{a}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x^n - b}{a}$$

Jadi jika $f(x) = \sqrt[n]{ax+b}$, maka $f^{-1}(x) = \dfrac{x^n - b}{a}$

3) Invers dari Fungsi Komposisi

Misalkan fungsi h merupakan fungsi komposisi dari fungsi f dan g ditulis $h = gof$ maka invers dari fungsi h adalah fungsi invers dari fungsi komposisi h dapat ditulis dengan notasi $h^{-1} = (gof)^{-1}$.

Untuk menentukan fungsi $(gof)^{-1}$ jika masing-masing fungsi f dan g diketahui, salah satu jalan yang dapat ditempuh dengan menentukan terlebih dahulu fungsi komposisi gof kemudian menetukan fungsi inversnya. Dapat juga karena dari sifat komposisi fungsi bahwa $(gof)^{-1}$ adalah fungsi yang jika dikomposisikan dengan gof akan diperoleh fungsi identitas I(x) = x, yaitu $(gof)^{-1}o(gof) = I$ sehinga akan kita dapatkan suatu sifat bahwa : $(gof)^{-1} = f^{-1} o\, g^{-1}$ (Buktikan !)

Contoh :

Jika f dan g adalah fungsi pada R yang didefinisikan $f(x) = x + 3$ dan $g(x) = 2x - 1$. Tentukan : a). f^{-1} dan g^{-1}

b). $g^{-1} o\, f^{-1}$ dan $f^{-1} o\, g^{-1}$

c). $(gof)^{-1}$ dan $(fog)^{-1}$

Jawab :

a). $f^{-1}(x) = x - 3$ dan $g^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{2}$

b). $(g^{-1} o\, f^{-1})(x) = g^{-1}(f^{-1}(x)) = g^{-1}(x - 3) = \dfrac{(x - 3) + 1}{2} = \dfrac{x - 2}{2}$

$(f^{-1} o\, g^{-1})(x) = f^{-1}(g^{-1}(x)) = f^{-1}(\dfrac{x+1}{2}) = \dfrac{x+1}{2} - 3 = \dfrac{x - 5}{2}$

c). $(go\, f)(x) = g(f(x)) = g(x + 3) = 2(x + 3) - 1 = 2x + 5$

Misalkan : $(gof)(x) = y$

$\Leftrightarrow 2x + 5 = y \Leftrightarrow 2x = y - 5 \Leftrightarrow x = \dfrac{y - 5}{2} \Leftrightarrow (gof)^{-1}(x) = \dfrac{x - 5}{2}$

Jadi $(go\, f)^{-1}(x) = \dfrac{x - 5}{2}$

$(f\, o\, g)(x) = f(g(x)) = f(2x - 1) = (2x - 1) + 3 = 2x + 2$

Misalkan $(f\, o g)(x) = y$

$\Leftrightarrow 2x + 2 = y \Leftrightarrow 2x = y - 2 \Leftrightarrow x = \dfrac{y - 2}{2} \Leftrightarrow (fog)^{-1}(x) = \dfrac{x - 2}{2}$

Jadi $(fo\, g)^{-1}(x) = \dfrac{x - 2}{2}$

D. Aktifitas Pembelajaran

Jawablah pertanyaan LK2 ini, dan apabila ada masalah diskusikanlah dengan teman.

LK 2

1. Buatlah contoh suatu fungsi $f(x)$ dan $g(x)$, kemudian tentukan rumus yang menyatakan fungsi $f(x) + g(x)$, fungsi $f(x) - g(x)$, fungsi $f(x) \times g(x)$, dan fungsi $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

2. Apa yang dimaksud dengan komposisi fungsi? Jelaskan dan berikan contohnya dalam kehidupan sehari-hari!

3. Jelaskan perbedaan antara invers fungsi dengan fungsi invers dan bagaimana cara menentukan fungsi invers? Jelaskan dan berikan contohnya!

4. Tentukan fungsi invers dari:
   a. fungsi f(x) = ax + b
   b. fungsi f(x) = $\dfrac{ax+b}{cx+d}$; $x \neq \dfrac{-d}{c}$
   c. fungsi f(x) = $ax^2 + bx + c$

d. fungsi $f(x) = \sqrt[n]{ax + b}$

5. Bagaimana cara menentukan fungsi invers dari fungsi komposisi? Jelaskan dan berikan contohnya!

E. Latihan

1. Jika fungsi f dan g terdefinisi pada bilangan real , yang didefinisikan $f(x) = 2x - 1$, dan $g(x) = x + 3$ maka tentukan :
   a) Rumus fungsi $f - g$
   b) Derah hasil dari $f \times g$
   c) Rumus fungsi $\frac{f}{g}$ dan domain dari $\frac{f}{g}$
2. Fungsi $f: R \rightarrow R$ dan $g: R \rightarrow R$ ditentukan oleh $f(x) = 3 - 2x$ dan $g(x) = x^2 + 1$
   a). Tentukan rumus fungsi $(gof)(x)$ dan $(fog)(x)$
   b). Tentukan (gof)(2) dan (fog)(2)
   c). Jika $(gof)(x) = 2$, tentukan x !
3. Fungsi f, g, h adalah terdefinisi pada bilangan real , yang didefinisikan $f(x) = x + 2$, $g(x) = 2x - 3$ dan $h(x) = x^2$

a) Tentukan rumus fungsi $(g o f)(x)$ dan $(f o g)(x)$

b) Tentukan rumus fungsi $(g o f)^{-1}(x)$ dan $(f o g)^{-1}(x)$.

c) Tentukan rumus fungsi komposisi $(f o g o h)(x)$ dan $(h o g o f)(x)$

d) Carilah x sebagai peta dari $(f o g o h)(x) = 7$ dan $(h o g o f)(x) = 9$

4. Tentukan fungsi invers dari :

a). $f(x) = 3x + 5$ c). $f(x) = \dfrac{2x+4}{3x-6}$

b). $f(x) = x^2 - 4x + 9$ d). $f(x) = \sqrt{x - \dfrac{2}{5}}$

5. Diketahui $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$, $x \neq 3$ Tentukan nilai a, jika $f^{-1}(a) = 4$

F. Rangkuman

1. Apabila f dan g masing-masing adalah fungsi dengan domain D_f dan D_g dan peta-peta $f(x)$ dan $g(x)$ ada pada kedua domain tersebut maka:

   1). Jumlah fungsi f dan g ditulis dengan simbol $f + g$ adalah suatu fungsi: $f + g : x \to f(x) + g(x)$

   2). Selisih fungsi f dan g ditulis dengan simbol $f - g$ adalah suatu fungsi: $f - g : x \to f(x) - g(x)$

   3). Hasil kali fungsi f dan g ditulis dengan $f \times g$ didefinisikan dengan $f \times g : x \to f(x) \times g(x)$

   4). Hasil bagi fungsi f dan g ditulis dengan $\dfrac{f}{g}$ didefinisikan dengan:

   $\dfrac{f}{g} : x \to \dfrac{f(x)}{g(x)}$ dengan $g(x) \neq 0$

2. Jika suatu fungsi $f : A \to B$, dan $g : B \to C$ maka didefinisikan suatu fungsi komposisi $g \circ f : A \to C$ sedemikian hingga $(g o f)(x) = g(f(x))$.

3. Dua fungsi $f : A \to B$, dan $g : C \to D$ dapat diperoleh fungsi komposisi $g o f$ apabila daerah hasil dari fungsi f atau R_f merupakan himpunan bagian dari C (domain g atau D_g)

4. Sifat-sifat komposisi fungsi sebagai berikut :

   a). Komposisi fungsi tidak bersifat komutatif

   b). Komposisi fungsi bersifat asosiatif

c). Jika untuk fungsi f : x → f(x) dan fungsi g : x → g(x) yang terdefinisi pada suatu domain sedemikian sehingga fog = gof = I dengan I fungsi identitas maka g dikatakan sebagai fungsi invers dari f atau sebaliknya.

5. Suatu fungsi f: A →B akan diperoleh fungsi invers f^{-1}: B→ A hanya apabila f suatu fungsi yang bijektif dan f menentukan setiap x∈A ke y∈B, dan f^{-1} menentukan setiap y∈B ke x∈A atau f(x) = y ⇔ f^{-1} (y) = x
6. Invers fungsi komposisi dapat ditentukan dengan sifat: $(gof)^{-1} = f^{-1} o\, g^{-1}$

G. Umpan Balik dan Tindak Lanjut

Evaluasi diri

Untuk mengukur ketercapaian peserta diklat dalam mempelajari modul ini lakukan evaluasi diri sebagai berikut secara jujur

Petunjuk:

Evaluasi diri dengan cara mengerjakan soal latihan/tugas yang terdiri dari lima soal. Pada masing-masing soal, pengerjaan yang benar mendapatkan skor maksimal 10. Jadi skor total 50. Capaian kompetensi (CK) dirumuskan sebagai

$$CK = \frac{Skor\ yang\ diperoleh}{50} \times 100\%$$

Setelah mengerjakan semua soal latihan/tugas, cocokkan jawaban Anda dengan kunci jawaban yang telah disajikan untuk mengukur capaian kompetensi (CK).

Tindak Lanjut

Seperti telah dijelaskan pada bagian sebelumnya bahwa evaluasi yang dilakukan oleh diri sendiri secara jujur adalah kunci keberhasilan mengukur capaian kompetensi (CK). Berkaitan dengan itu, pertimbangkan hal berikut.

Perolehan CK (dalam %)	Deskripsi dan tindak lanjut
$91 \le CK \le 100$	Sangat Baik, berarti Anda benar-benar memahami konsep komposisi fungsi dan fungsi invers. Selanjutnya kembangkan pengetahuan dan tuangkan dalam pembelajaran.
$76 \le CK < 91$	Baik, berarti Anda cukup memahami konsep komposisi fungsi dan fungsi invers walaupun ada beberapa bagian

	yang perlu dipelajari lagi. Selanjutnya pelajari lagi beberapa bagian yang dirasakan belum begitu dipahami.
$50 \leq \text{CK} < 76$	Cukup, berarti Anda belum cukup memahami konsep komposisi fungsi dan fungsi invers. Oleh karena itu Anda perlu mempelajari lagi bagian yang belum dikuasai dan menambah referensi dari sumber lain.relasi dan fungsi
$\text{CK} < 50$	Kurang, berarti Anda belum dapat memahami pengertian relasi dan fungsi. Oleh karena itu Anda perlu mempelajari lagi dari awal dan menambah referensi dari sumber lain.

H. Kunci Jawaban

1. a). $(f - g)(x) = f(x) - g(x) = (2x - 1) - (x + 3) = x - 4$

   b). Derah hasil dari $f \times g$ adalah irisan dari daerah asal fungi f dan daerah asal fungsi g yaitu bilangan real

   c). rumus fungsi $\frac{f}{g}(x) = \frac{2x - 1}{x + 3}$ dan domain dari fungsi $\frac{f}{g}$ adalah

   $D_f \cap D_g = R - \{ x \mid x + 3 = 0 \} = \{ x \mid x \in R, x \neq -3 \}$

2. a). $(g \circ f)(x) = 4x^2 - 12x + 10$

   $(f \circ g)(x) = 1 - 2x^2$

   $(g \circ f)(2) = 2$

   $(f \circ g)(2) = -7$

   b). $x = 1 \; atau \; x = 2$

3. a). $(g \circ f)(x) = 2x + 1$

   $(f \circ g)(x) = 2x - 1$

   b). $(g \circ f)^{-1}(x) = \frac{x - 1}{2}$

   $(f \circ g)^{-1}(x) = \frac{x + 1}{2}$

   c). $(f \circ g \circ h)(x) = 2x^2 - 1$

   $(h \circ g \circ f)(x) = 4x^2 + 4x + 1$

   d). $(f \circ g \circ h)(x) = 7 \Leftrightarrow x = \pm 2$

   $(h \circ g \circ f)(x) = 9 \Leftrightarrow x = 1 \; atau \; x = -2$

4. a). $f^{-1}(x) = \dfrac{x - 5}{3}$

   b). $f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x - 5}$, $x \geq 5$ atau $f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{x - 5}$, $x \geq 5$.

   c). $f^{-1}(x) = \dfrac{-4 - 6x}{2 - 3x}$

   d). $f^{-1}(x) = x^2 + \frac{2}{5}$

5. $f^{-1}(a) = 4 \Leftrightarrow \frac{-1-3a}{2-a} = 4 \Leftrightarrow a = 9$

KB 3: Fungsi Polinomial

A. Tujuan

Tujuan kegiatan pembelajaran ini adalah untuk memberikan pemahaman kepada pembaca terkait dengan konsep fungsi polinomial, prosedur penyelesaian fungsi polinomial, dan memanfaatkannya dalam penyelesaian masalah.

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

Setelah membaca dan mengikuti serangkaian kegiatan pada bagian ini, pembaca diharapkan mampu

1. Menjelaskan konsep fungsi polinomial.
2. Menentukan penyelesaian suku banyak.
3. Menentukan penyelesaian pembagian suku banyak.

C. Uraian Materi

1. Nilai dan Derajat Suku Banyak

Suku banyak dengan derajat n dapat dinyatakan sebagai suatu fungsi yang dapat dinyatakan sebagai bentuk umum sebagai berikut

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

di mana n ϵ bilangan cacah dan $a_n \neq 0$

Sebagai contoh fungsi polinomial berderajat 4 adalah seperti $f(x) = x^4 + 3x^3 - x^2 + 7x + 25$

Untuk menentukan nilai suku banyak dapat dilakukan dengan dua cara berikut.

1. Cara Substitusi

Mencari nilai suku banyak dengan menggunakan cara substitusi adalah dengan memasukkan nilai variabel yang diberikan ke dalam suku banyak. Contoh:

Hitunglah nilai f(x)=$2x^3+4x^2-18$ untuk x=3.

Penyelesaian:

Nilai f(x)=$2x^3+4x^2-18$ untuk x=3 adalah f(3)=$2.3^3+4.3^2-18$

=54+36-18=72

Jadi, nilai suku banyak untuk x = 3 adalah 72

2. Cara Horner

Menentukan nilai suku banyak dengan menggunakan cara Horner lebih mudah dibandingkan dengan cara substitusi. Untuk lebih memahami, perhatikan uraian berikut.

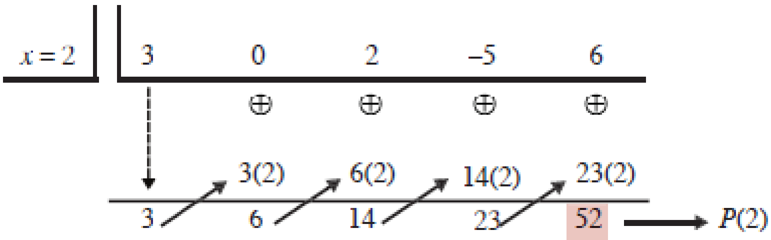
Misalkan $P(x) = 3x^4 + 2x^2 - 5x + 6$, maka dapat dijabarkan sebagai berikut

$$\begin{aligned} P(x) &= 3x^4 + 2x^2 - 5x + 6 \\ &= 3x^4 + 0x^3 + 2x^2 - 5x + 6 \\ &= (3x^3 + 0x^2 + 2x - 5)\,x + 6 \\ &= [(3x^2 + 0x + 2)\,x - 5]\,x + 6 \\ &= [[(3x + 0)x + 2]\,x - 5]\,x + 6 \qquad \ldots(1) \end{aligned}$$

Jika nilai $x = 2$ disubstitusikan pada persamaan (1) maka $P(2)$ secara bertahap diperoleh sebagai berikut.

$$\begin{aligned} P(2) &= \big[[(3.2 + 0).2 + 2].2 - 5\big].2 + 6 \\ &= \big[[6.2 + 2].2 - 5\big].2 + 6 \\ &= [14.2 - 5].2 + 6 \\ &= 23.2 + 6 \\ &= 52 \end{aligned}$$

Dari urutan pengerjaan diatas dapat disajikan secara metode Horner sebagai berikut



Jadi nilai suku banyak $P(x)$ untuk $x = 2$ adalah 52

Apa bedanya dengan $P(2) = 3(16) + 2.4 - 5.2 + 6$

$$= 48 + 8 - 10 + 6 = 52$$

Derajat Suku Banyak pada Hasil Bagi dan Sisa Pembagian

Jika suku banyak $f(x)$ berderajat n dibagi oleh fungsi berderajat m akan menghasilkan hasil bagi berderajat $(n - m)$ dan sisa pembagian berderajat $(m - 1)$.

Contoh Soal

Tentukan derajat dari hasil bagi dan sisa pembagian suku banyak berikut.

$(2x^3 + 3x^2 + 5)$ dibagi $(x + 1)$

Penyelesaian:

Dengan cara bersusun diperoleh sebagai berikut.

$$
\begin{array}{r@{\,}l}
 & 2x^2 + x - 1 \\
x+1 & \overline{)\,2x^3 + 3x^2 + 0x + 5} \\
 & \underline{2x^3 + 2x^2} \quad - \\
 & \qquad\quad x^2 + 0x + 5 \\
 & \qquad\quad \underline{x^2 + \quad x} \quad - \\
 & \qquad\qquad\quad -x + 5 \\
 & \qquad\qquad\quad \underline{-x - 1} \quad - \\
 & \qquad\qquad\qquad\; 6
\end{array}
$$

Terlihat bahwa $(2x^2 + x - 1)$ sebagai hasil bagi dan berderajat 2 dengan sisa pembagiannya adalah 6.

2. Pembagian Suku Banyak

Sebagaimana operasi pembagian pada bilangan biasa, dalam operasi pembagian pada suku banyak, hubungan antara Yang Dibagi, Pembagi, Hasil Bagi dan Sisa Pembagian adalah sebagai berikut:

Yang Dibagi = Pembagi x Hasil Bagi + Sisa

Dengan memperhatikan pernyataan di atas, maka pada fungsi poilnomial didapat hubungan sebagai berikut:

$$f(x) = p(x).h(x) + s(x)$$

dimana: $f(x)$ sebagai yang mau dibagi

$p(x)$ sebagai pembagi

$h(x)$ sebagai hasil bagi

$s(x)$ sebagai sisa

Pembagian Suku Banyak oleh $(x - k)$

Untuk memahami konsep pembagian suku banyak oleh $(x - k)$ perhatikan contoh berikut.

Contoh:

Tentukan hasil bagi dan sisa pembagian suku banyak $2x^3 + 3x^2 + 5$ dibagi $x + 1$

Penyelesaian:

Untuk menentukan hasil bagi dan sisa pembagian dari suku banyak dapat dilakukan dengan beberapa cara diantaranya dengan:

1. Cara susun

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2 + x - 1 \\
\hline
x+1 & 2x^3 + 3x^2 + 0x + 5 \\
 & \underline{2x^3 + 2x^2} \quad - \\
 & \qquad\quad x^2 + 0x \\
 & \qquad\quad \underline{x^2 + \ \ x} \quad - \\
 & \qquad\qquad\quad -x + 5 \\
 & \qquad\qquad\quad \underline{-x - 1} \quad - \\
 & \qquad\qquad\qquad\quad 6
\end{array}
$$

Jadi hasil bagi suku banyak $(2x^3 + 3x^2 + 5\ )$ dibagi $(x + 1)$ adalah $(2x^2 + x - 1)$ dan sisa pembagiannya adalah 6

2. Cara Horner

Langkah-langkah untuk menentukan hasil bagi dan sisa dari pembagian suku banyak oleh $(x - k)$ dengan cara Horner adalah sama dengan langkah-langkah dalam menentukan nilai suku banyak yang telah diberikan seperti contoh di atas, yaitu dengan memasukkan nilai k ke dalam operasi Horner. Dengan mengambil contoh di atas, perhatikan berikut ini.

$$
\begin{array}{c|cccc}
-1 & 2 & 3 & 0 & 5 \\
 & & -2 & -1 & 1 \\
\hline
 & \underbrace{2 \quad 1 \quad -1}_{\text{hasil bagi}} & & & \underset{\text{sisa}}{\boxed{6}}
\end{array}
$$

Dari penyelesaian tersebut diperoleh $2x^2 + x - 1$ sebagai hasil bagi berderajat 2 dan sisa pembagiannya adalah 6.

Dari contoh di atas maka sesuai dengan teorema bahwa:

Jika $f(x)$ dibagi dengan $(x - k)$ maka sisa pembagiannya adalah $f(k)$

Bukti:

$$f(x) = (x - k).h(x) + sisa$$

Substitusi $x = k$ ke persamaan

$$f(x) = (x - k).h(x) + sisa$$

Didapat

$$f(k) = (k - k).h(x) + sisa$$

$$f(k) = \text{sisa (terbukti)}$$

Pembagian Suku Banyak oleh $(\boldsymbol{ax - b})$

Perhatikan pembagian suku banyak oleh $(x - k)$ di atas, dan pandang pembagian $f(x)$ dengan $\left(x - \frac{b}{a}\right)$, maka menurut teorema sisa dapat ditulis:

$$f(x) = \left(x - \frac{b}{a}\right).h(x) + sisa$$

$$f(x) = \left(x - \frac{b}{a}\right).h(x) + f(\frac{b}{a})$$

$$f(x) = \frac{a}{a}\left(x - \frac{b}{a}\right).h(x) + f(\frac{b}{a})$$

$$f(x) = a\left(x - \frac{b}{a}\right).\frac{h(x)}{a} + f(\frac{b}{a})$$

$$f(x) = (ax - b).\frac{h(x)}{a} + f(\frac{b}{a})$$

Hal itu menunjukkan bahwa jika $f(x)$ dibagi oleh $(ax - b)$ maka hasil baginya $\frac{h(x)}{a}$ dan sisanya $f(x)$

Contoh:

Apabila fungsi $f(x)$ habis dibagi oleh $(3x + 1)$ dan jika $f(x)$ dibagi $(x - 2)$ bersisa 7. Tentukan sisanya jika dibagi $3x^2 - 5x - 2$.

Penyelesaian:

$f(x)$ habis dibagi $(3x + 1)$ berarti $f(-\frac{1}{3}) = 0$

$f(x)$ dibagi $(x - 2)$ mempunyai sisa 7 berarti $f(2) = 7$

Misalkan f(x) dibagi $3x^2 - 5x - 2$ sisanya adalah $ax + b$

Maka:

$$f(x) = h(x)(3x^2 - 5x - 2) + ax + b$$

$$f(x) = h(x)(3x + 1)(x - 2) + ax + b$$

$$f(2) = 0 + 2a + b = 7$$

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = \underline{0 - \frac{1}{3}a + b = 0} \quad -$$

$$a = 3 \Rightarrow b = 1$$

Jadi sisanya adalah $3x + 1$

D. Aktivitas Pembelajaran

Jawablah pertanyaan LK3 ini, dan apabila ada masalah diskusikanlah dengan teman..

LK 3

1. Apa yang dimaksud dengan fungsi polinomial? Jelaskan dan berikan contohnya!

2. Apa yang dimaksud dengan derajat suku banyak? Jelaskan dan berikan contohnya!

3. Bagaimana cara menentukan nilai suku banyak? Jelaskan dan berilah contohnya!

4. Misalkan $f(x)$ adalah suku banyak, $(x-k)$ adalah pembagi untuk $f(x)$ dan $h(x)$ adalah hasil baginya serta $f(k)$ adalah sisa pembagian, tentukan persamaan yang menunjukkan hubungan antara $f(x)$ dengan $(x-k)$, $h(x)$ dan $f(k)$!

5. Buatlah contoh soal pembagian suku banyak oleh bentuk linier $(x - c)$, kemudian selesaikanlah menggunakan cara susun dan cara Horner!

6. Buatlah contoh soal pembagian suku banyak oleh bentuk linier $(ax - b)$, kemudian selesaikanlah menggunakan cara susun dan cara Horner!

E. Latihan

1. Tentukan nilai p agar pembagian $(6x^2 + 7x - 5):(px - 1)$ menghasilkan sisa pembagian yang bernilai 0

2. Fungsi f(x) habis jika dibagi $(x-2)$ dan sisa 5 jika dibagi $(2x+1)$. Tentukan sisanya jika dibagi $2x^2-3x-2$.
3. Hitunglah p jika $2x^3-5x^2-4x+p$ habis dibagi $x+1$
4. Jika salah satu akar dari persamaan suku banyak $x^3+4x^2+x-6=0$ adalah $x=1$, tentukan akar-akar yang lain
5. Jika $f(x)$ dibagi oleh x^2-5x+6 sisanya $2x+1$. Tentukan sisanya jika $f(x)$ dibagi oleh $x-3$

F. Rangkuman

1. Bentuk umum suku banyak dengan derajat n dapat dinyatakan sebagai

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0,$$

di mana n∈ bilangan cacah dan $a_n \neq 0$

2. Hubungan antara yang dibagi, pembagi, hasil bagi dan sisa pada fungsi polinomial adalah $f(x) = p(x).h(x) + s(x)$

dimana: $f(x)$ sebagai yang mau dibagi
$p(x)$ sebagai pembagi
$h(x)$ sebagai hasil bagi
$s(x)$ sebagai sisa

3. Jika suku banyak $f(x)$ berderajat n dibagi oleh fungsi berderajat m akan menghasilkan hasil bagi berderajat $(n-m)$ dan sisa pembagian berderajat $(m-1)$
4. Jika suku banyak $f(x)$ dibagi dengan $(x-k)$ maka sisa pembagiannya adalah $f(k)$
5. Jika suku banyak $f(x)$ dibagi dengan $(ax-b)$ maka sisa pembagiannya adalah $f\left(\frac{b}{a}\right)$

G. Umpan Balik dan Tindak Lanjut

Evaluasi diri

Untuk mengukur ketercapaian peserta diklat dalam mempelajari modul ini lakukan evaluasi diri sebagai berikut secara jujur

Petunjuk:

Evaluasi diri dengan cara mengerjakan soal latihan/tugas yang terdiri dari lima soal. Pada masing-masing soal, pengerjaan yang benar mendapatkan skor maksimal 10. Jadi skor total 50. Capaian kompetensi (CK) dirumuskan sebagai

$$CK = \frac{Skor\ yang\ diperoleh}{50} \times 100\%$$

Setelah mengerjakan semua soal latihan/tugas, cocokkan jawaban Anda dengan kunci jawaban yang telah disajikan untuk mengukur capaian kompetensi (CK).

Tindak Lanjut

Seperti telah dijelaskan pada bagian sebelumnya bahwa evaluasi yang dilakukan oleh diri sendiri secara jujur adalah kunci keberhasilan mengukur capaian kompetensi (CK). Berkaitan dengan itu, pertimbangkan hal berikut.

Perolehan CK (dalam %)	Deskripsi dan tindak lanjut
$91 \leq \text{CK} \leq 100$	Sangat Baik, berarti Anda benar-benar memahami konsep fungsi polinomial. Selanjutnya kembangkan pengetahuan dan tuangkan dalam pembelajaran.
$76 \leq \text{CK} < 91$	Baik, berarti Anda cukup memahami konsep fungsi polinomial walaupun ada beberapa bagian yang perlu dipelajari lagi. Selanjutnya pelajari lagi beberapa bagian yang dirasakan belum begitu dipahami.
$50 \leq \text{CK} < 76$	Cukup, berarti Anda belum cukup memahami konsep fungsi polinomial. Oleh karena itu Anda perlu mempelajari lagi bagian yang belum dikuasai dan menambah referensi dari sumber lain.relasi dan fungsi
$\text{CK} < 50$	Kurang, berarti Anda belum dapat memahami konsep fungsi polinomial. Oleh karena itu Anda perlu mempelajari lagi dari awal dan menambah referensi dari sumber lain.

H. Kunci Jawaban

1. $p = \frac{-3}{5}$ atau $p = 2$
2. Sisanya adalah $-2x + 4$
3. $p = 3$
4. akar-akar yang lain adalah $x = -2$ atau $x = -3$
5. Sisanya adalah 7

KB4 : Sistem Persamaan dan Pertidaksamaan Linear

A. Tujuan

Kegiatan belajar ini mempunyai tujuan utama yaitu memberikan pemahaman kepada peserta diklat atau pembaca berkaitan dengan sistem persamaan dan sistem pertidaksamaan linear. Selain itu jelas bahwa kegiatan belajar ini sekaligus memberikan pemahaman berkaitan dengan persamaan dan pertidaksamaan linear itu sendiri. Adapun tujuan lebih lanjut adalah untuk memberikan pemahaman berkaitan dengan program linear.

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

Setelah membaca dan mengikuti serangkaian kegiatan pada modul ini, peserta diklat atau pembaca mampu

1. menjelaskan pengertian persamaan dan pertidaksamaan linear
2. membedakan persamaan dan sistem persamaan linear
3. membedakan pertidaksamaan dan sistem pertidaksamaan linear
4. menentukan penyelesaian persamaan dan sistem persamaan linear
5. menentukan penyelesaian pertidaksamaan linear dan sistem pertidaksamaan linear
6. menyelesaikan masalah program linear

C. Uraian Materi

1. Pengertian Persamaan dan Pertidaksamaan Linear

Sebelum membahas tentang **sistem persamaan linear** terlebih dahulu kita bicarakan **persamaan linear dan penyelesaiannya**.

Perhatikan persamaan–persamaan dibawah ini.

(i) $x + y = 4$

(ii) $2x = 6$

(iii) $y = 5x - 2$

(iv) $x^2 = 0$

(v) $3x^2 - 2x = 1$

Persamaan nomer (i), (ii), dan (iii) adalah persamaan linear. Khususnya untuk (i) dan (iii) disebut persamaan linear dua variabel sedangkan (ii) disebut persamaan linear satu variabel. Untuk persamaan (iv) dan (v) dinamakan persamaan kuadrat. Mengapa penamaannya demikian? Lihat aktifitas 1.

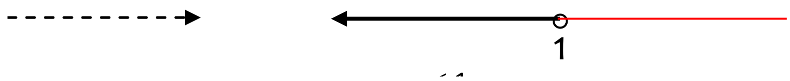
Bentuk umum persamaan linear dua variabel adalah

$$\boldsymbol{ax + by = c}, \qquad a, b, c \text{ bilangan real dengan } a \neq 0, b \neq 0$$

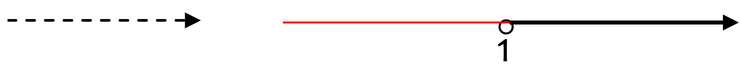
Menentukan penyelesaian (solusi) persamaan suatu persamaan linear adalah menentukan semua nilai pengganti variabel sehingga pernyataan menjadi benar. Misalkan kita ingin menyelesaikan persamaan $\boldsymbol{ax + by = c}$ maka pekerjaan kita selanjutnya adalah menentukan nilai x dan y sehingga pernyataan $\boldsymbol{ax + by = c}$ bernilai benar. Sebagai contoh, diberikan persamaan linear $2x + y = 5$. Maka untuk $x = 2$ dan $y = 1$ merupakan penyelesaian persamaan karena $2(2) + 1 = 5$. Demikian pula $x = 0$ dan $y = 5$ juga merupakan penyelesaian persamaan tersebut karena $2(0) + 5 = 5$ merupakan pernyataan yang benar. Tetapi untuk untuk $x = 2$ dan $y = 3$ bukan merupakan penyelesaian karena $2(2) + 3 = 5$ adalah pernyataan yang salah. Ditinjau dari banyaknya penyelesaian, persamaan linear di atas mempunyai solusi yang tidak tunggal. Sekarang perhatikan persamaan linear $2x = 6$. Jelas bahwa $x = 3$ adalah solusi dari persamaan ini karena $2(3) = 6$ pernyataan yang benar. Apakah ada solusi lain selain $x = 3$? Jawabanya adalah tidak. Mengapa demikian? Lihat aktifitas 2a dan aktifitas 2b. Selanjutnya, berkaitan dengan garis bilangan perhatikan contoh berikut ini.

(a). $x = 1$

(b). $x < 1$



(c). $x > 1$



Perhatikan bahwa sembarang titik pada garis bilangan katakan a maka hanya satu dari pernyataan berikut yang benar .

(i) $a = 1$,

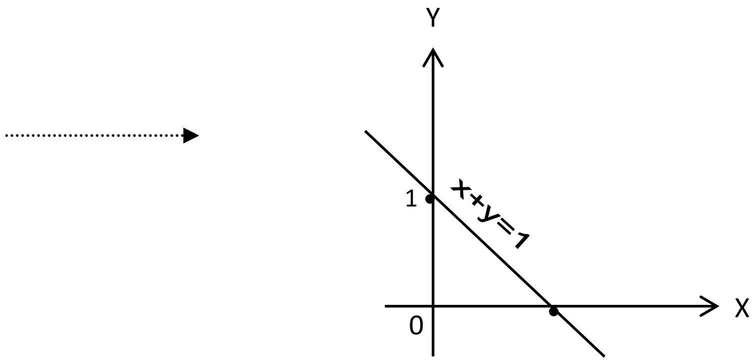
(ii) $a < 1$ (sebelah kiri 1),

(iii) $a > 1$ (sebelah kanan 1)

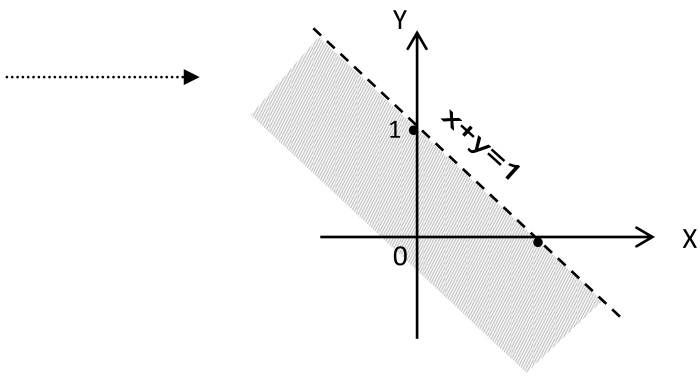
Hal ini menunjukkan bahwa dengan menetapkan suatu titik tertentu misalkan x pada garis bilangan maka garis bilangan akan terbagi menjadi 3 daerah yaitu tepat di x, kurang dari x dan lebih dari x.

Sementara itu, berkaitan dengan luasan pada bidang, perhatikan contoh berikut ini.

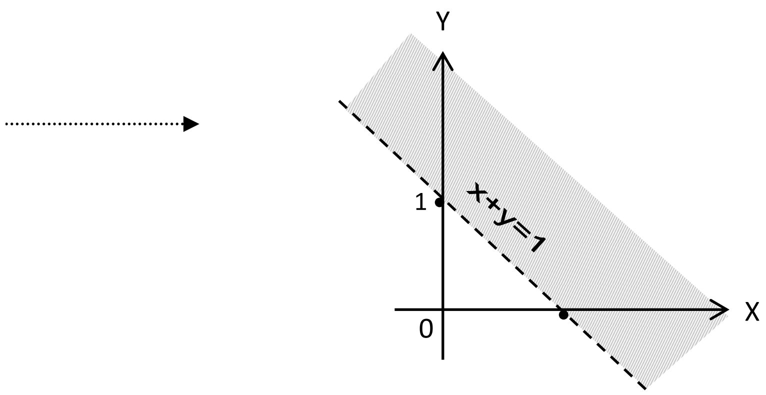
(a) $x + y = 1$



(b) $x + y < 1$



(c) $x + y > 1$



Berkaitan dengan contoh tersebut perhatikan bahwa untuk sembarang titik (x, y) pada bidang maka hanya satu dari pernyataan berikut yang benar.

(i) $x + y = 1$ (tepat pada garis)

(ii) $x + y < 1$ (di kiri garis)

(iii) $x + y > 1$ (di kanan garis)

Ingat lagi bahwa titik-titik (p, g) pada garis $x + y = 1$ menandakan bahwa $p + g = 1$ merupakan pernyataaan yang benar.

Contoh tersebut memberikan gambaran bahwa dengan menetapkan suatu garis tertentu pada bidang, misalkan garis $ax + by = c$ maka garis ini akan membagi bidang menjadi 3 bagian yaitu satu daerah tepat pada garis dan dua daerah disebelah kiri garis dan sebelah kanan garis. Kalimat <u>sebelah kiri</u> dan <u>sebelah kanan</u> garis ini hanya istilah saja sehingga dibolehkan mengatakan sebelah bawah atau sebelah atas garis. Daerah sebelah kiri garis merupakan daerah dimana pasangan titik (x, y) pada daerah tersebut memenuhi $x + y < 1$. Demikian pula untuk daerah di sebelah kanan garis. Inilah sebenarnya hakekat dari penyelesaian pertidaksamaan linear. Bagimana jika garisnya horizontal atau vertikal? Lihat <u>aktifitas 3a</u> dan <u>aktifitas 3b</u>.

2. Sistem persamaan linear

Suatu sistem persamaan linear dibentuk oleh persamaan–persamaan linear.

Perhatikan contoh–contoh di bawah ini

1. $\left.\begin{aligned} 5x + 2y &= 9 \\ 2x - 3y &= -4 \end{aligned}\right\}$

2. $\left\{\begin{aligned} x &= 5y \\ y &= 2x \end{aligned}\right.$

3. $\begin{aligned} x + y &= 2 \\ x &= 4 - y \end{aligned}$

4. $\begin{aligned} 3x + 5y &= 4 \\ 6x + 10y &= 2 \end{aligned}$

5. $\begin{aligned} -3x + 4y &= 0 \\ 6x &= 8y \end{aligned}$

6. $$3x + 5y = 15$$
$$x + \frac{5}{3}y = 5$$

Perhatikan bahwa tanda " } " maupun " { "hanya untuk mempertegas bahwa yang disajikan adalah suatu sistem persamaan sehingga tanda tersebut tidak wajib ditulis. Selain itu ada pula yang menyusun suatu persamaan linear disajikan dalam satu baris. Misalnya untuk contoh nomor 1 disajikan dengan $5x + 2y = 9$; $2x - 3y = -4$.

Sistem persamaan linear tidak selalu mempunyai penyelesaian tunggal. Pada contoh di atas sistem persamaan linear nomor 1 dan 2 mempunyai penyelesaian tunggal. Sistem persamaan linear nomor 3 dan 4 tidak memiliki penyelesaian (*inconsisten*). Sedangkan sistem persamaan linear nomer 5 dan 6 memiliki tak hingga banyak penyelesaian. Ini artinya suatu suatu sistem persamaan linear tidak tergantung pada ada atau tidak ada penyelesaiaannya. Lihat aktifitas 4

3. Menyelesaikan Sistem Persamaan Linear

Seperti yang telah singgung pada bagian sebelumnya, secara identik menyelesaikan sistem persamaan linear adalah menentukan semua nilai pengganti variabel sehingga memenuhi persamaan linear pembentuknya. Misalkan diberikan sistem persamaan linear $ax + by = k$; $cx + dy = l$ maka menyelesaikan sistem persamaan linear adalah menentukan semua pasangan nilai x dan y yang memenuhi sekaligus kedua persamaan tersebut. Contoh sistem persamaan linear $2x + 3y = 8$; $4x + 3y = 10$. Perhatikan bahwa pasangan $x = 1$ dan $y = 2$ yang biasa ditulis (1,2) memenuhi kedua persamaan. Ini berarti (1,2) merupakan salah satu solusi sistem persamaan tersebut. Apakah ada solusi lain? Jika digambar dalam kordinat kartesius, apakah kedua garis berpotongan? Lihat aktifitas 5.

Berikut adalah beberapa cara untuk menyelesaikan sistem persamaan linear

- Metode Eliminasi

Contoh:

1. Selesaikan sistem persamaan

$$3x - 5y = 1$$

$x + y = 3$

Jawab:

Eliminasi x

$$
\begin{array}{rcl|l|l}
3x - 5y & = & 1 & \times 1 & \cancel{3x} - 5y = 1 \\
x + y & = & 3 & \times 3 & \cancel{3x} + 3y = 9 \quad - \\
 & & & & -8y = -8 \\
 & & & & y = 1
\end{array}
$$

Selanjutnya eliminasi y

$$
\begin{array}{rcl|l|l}
3x - 5y & = & 1 & \times 1 & 3x - 5y = 1 \\
x + y & = & 3 & \times 5 & 5x + 5y = 15 \quad + \\
 & & & & 8x = 16 \\
 & & & & x = 2
\end{array}
$$

Jadi penyelesaiannya adalah $x = 2$ dan $y = 1$.

- Metode Substitusi

Contoh:

1. Selesaikan sistem persamaan

$x - 5y = 1$

$2x + y = 13$

Jawab:

$x - 5y = 1 \Leftrightarrow x = 1 + 5y$

Dari $2x + y = 13$, untuk $x = 1 + 5y$

$2(1 + 5y) + y = 13$

$2 + 10y + y = 13$

$11y = 11$

$y = 1$

Dengan mengganti $y = 1$ pada $x - 5y = 1$ diperoleh $x = 6$

Jadi penyelesaiannya adalah $x = 6$ dan $y = 1$

- Metode Campuran Eliminasi dan Substitusi

Contoh:

Selesaikan sistem persamaan

1. $2x - 3y = 10$

   $x + 4y = -6$

   Jawab:

$$
\begin{array}{rl|c|rl}
2x - 3y &= 7 & \times 1 & \cancel{2x} - 3y &= 10 \\
x + 4y &= -6 & \times 2 & \cancel{2x} + 8y &= -12 \quad - \\
\hline
 & & & -11y &= 22 \\
 & & & y &= -2
\end{array}
$$

   Selanjutnya hasil ini disubstitusi ke persamaan $x + 4y = -6$

   $x + 4(-2) = -6$

   $x + (-8) = -6$

   $x = 2.$ Jadi penyelesaiannya adalah $x = 2$ dan $y = -2$

4. Pertidaksamaan Linear

Sebelum membahas sistem persamaan linear, akan lebih baik jika kita paham mahir terlebih dahulu mengenai menggambar garis

<u>Contoh :</u>

1. Gambarlah garis
   a. $x + 2y = 4$
   b. $x - 2y = 0$

Jawab:

a. $x + 2y = 4$

– Titik potong terhadap sumbu-y

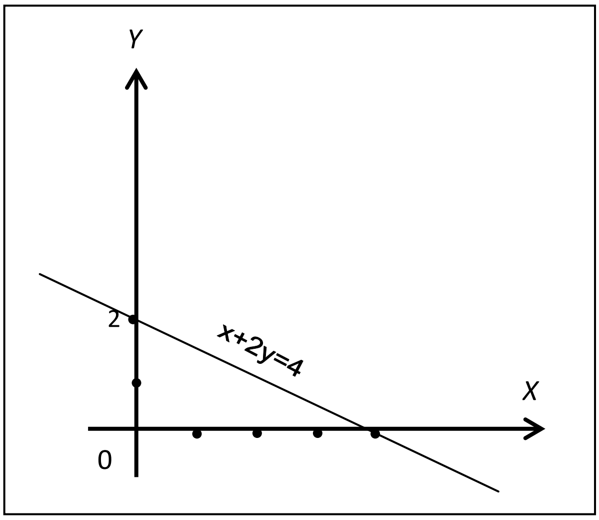
$x = 0 \Rightarrow 0 + 2y = 4$

$\Rightarrow y = 2$ Jadi garis memotong sumbu Y di titik (0,2)

– Titik potong terhadap sumbu$-x$

$y = 0 \Rightarrow x + 2(0) = 4$

$\Rightarrow x = 4$ Jadi garis memotong sumbu X di titik (4,0)



b. $x - 2y = 0$

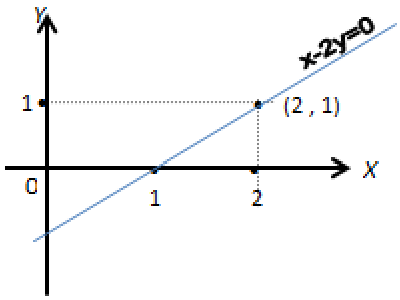
$x = 0 \Rightarrow 0 - 2y = 0$

$\Rightarrow y = 0$ Jadi garis melalui titik pangkal (0,0)

Kemudian dipilih titik sembarang,

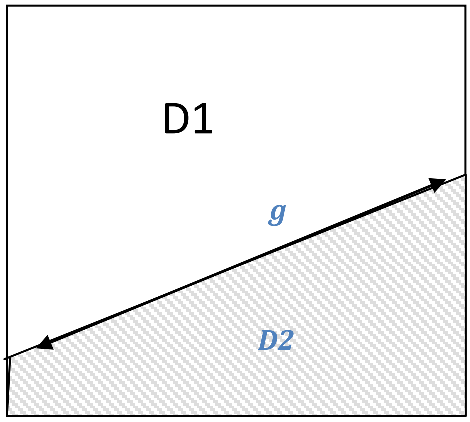
misalnya $x = 2$ maka diperoleh $2 - 2y = 0$

$\Rightarrow y = 1$ Jadi garis melalui titik (2,1)



Dalam bagian sebelumnya telah dibahas mengenai penyelesaian persamaan linear dan sistem persamaan linear. Bagian berikut akan membahas mengenai penyelesaian pertidaksamaan linear sebelum menuju ke penyelesaian sistem pertidaksamaan linear. Penyelesaian pertidaksamaan linear (dalam gambar) sering disebut sebagai daerah penyelesaian. Ada juga yang menyebutkan himpunan penyelesaian

Perhatikan bahwa garis akan membagi daerah menjadi dua bagian yaitu daerah 1 (D1) dan daerah 2 (D2) seperti diperlihatkan dalam gambar



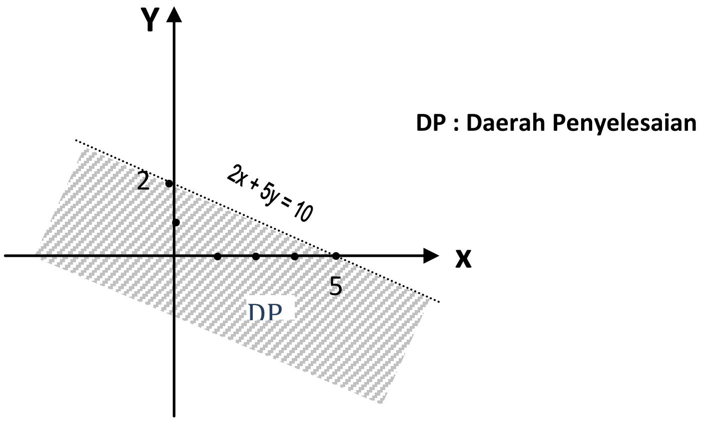
Bila garis g disajikan dalam bentuk $ax + by = k$ maka D1 merupakan kumpulan titik (x, y) dimana $ax + by < k$, D2 merupakan kumpulan titik (x, y) dimana $ax + by > k$, atau sebaliknya.

Untuk mencari daerah penyelesaian $x < k$, atau $y < k$ tidak terlalu sulit sebab garis $x = k$ atau $y = k$ sejajar dengan sumbu koordinat.

<u>Contoh</u>:

1. Tentukan daerah penyelesaian $2x + 5y < 10$

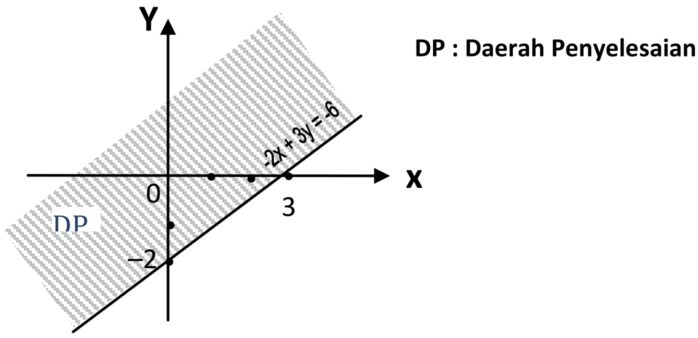
   Jawab:
   Gambar terlebih dahulu garis $2x + 5y = 10$
   Kemudian diarsir (untuk menandai) daerah penyelesaiannya, yaitu dengan mencoba sembarang titik di luar garis. Misalnya diambil titik (0,0), maka $2(0) + 5(0) < 10$. Berarti titik (0,0) berada pada daerah penyelesaian



2. Tentukan daerah penyelesaian $-2x + 3y \geq -6$

Jawab:

Pertama digambar garis $-2x + 3y = -6$. Kemudian dicoba titik (0,0).



Hasilnya $-2(0) + 3(0) \geq -6$. Berarti titik (0,0) berada pada daerah penyelesaian.

Perlu diperhatikan perbedaan gambar daerah penyelesaian antara pertidaksamaan yang menggunakan tanda "≤" dengan"<" atau tanda ">" dengan "≥". Bedakan antara "-------" dengan "_______"

Ada cara yang mudah untuk menentukan daerah penyelesaian tanpa harus mencoba titik. Yaitu:

- Pertidaksamaan dibuat sedemikian hingga koefisien variabel x positif
- Jika tanda pertidaksamaan (setelah koefisien x positif) "<" atau "≤" maka daerah penyelesaiannya berada di sebelah kiri garis

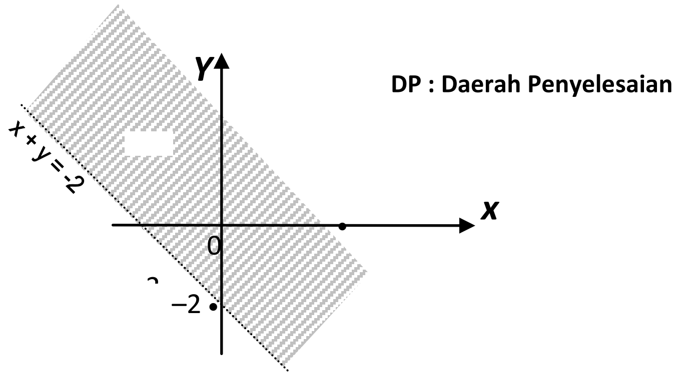
- Jika tanda pertidaksamaan (setelah koefisien x positif) "$>$" atau "$\geq$" maka daerah penyelesaiannya berada di sebelah kanan garis

Contoh:

1. Tentukan penyelesaian pertidaksamaan $x + y > -2$

   Jawab:

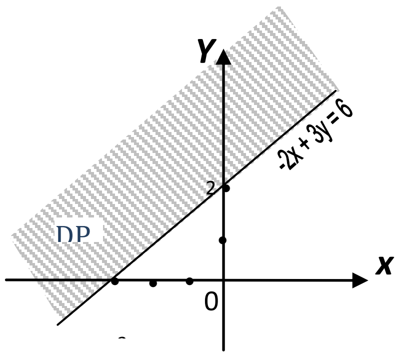
   Pertama, digambar garisnya terlebih dahulu.



Karena koefisien variabel x sudah positif dan pertidaksamaan memuat tanda "$>$" maka daerah penyelesaiannya berada di sebelah kanan garis.

2. Tentukan daerah penyelesaian pertidaksamaan $-2x + 3y \geq 6$

   Jawab:



Pertama digambar garisnya terlebih dahulu. Kemudian koefisien variabel x dirubah jadi positif, $-2x + 3y \geq 6 \Leftrightarrow 2x - 3y \leq -6$. Karena pertidaksamaan terakhir memuat tanda "$\leq$" maka daerah penyelesaiannya berada di sebelah kiri garis.

5. Sistem Pertidaksamaan Linear

Identik dengan pengertian pada sistem persamaan linear, sistem pertidaksamaan linear dibentuk oleh pertidaksamaan–pertidaksamaan linear.

Sistem pertidaksamaan linear dapat memiliki penyelesaian (ada daerah penyelesaian) dan dapat juga tidak memiliki penyelesaian (tidak ada daerah penyelesaian). Daerah penyelesaian yang dimaksud dapat berupa titik, garis atau luasan.

<u>Contoh</u>**:**

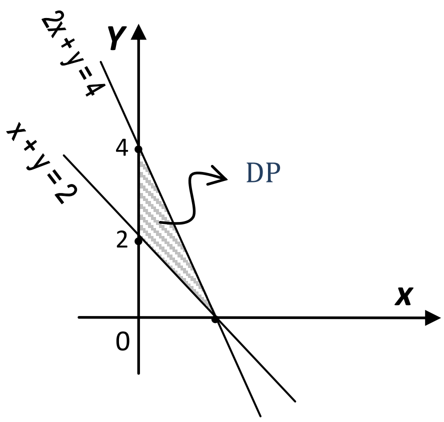
1. Tentukan daerah penyelesaian dari sistem pertidaksamaan

   $x + y \geq 2,\ 2x + y \leq 4,\ x \geq 0$

   Jawab:

   Untuk menentukan daerah penyelesaian pertidaksamaan telah dipaparkan pada bagian sebelumnya. Yaitu mencari luasan atau daerah yang memenuhi $x + y \geq 2,\ 2x + y \leq 4$, dan $x \geq 0$.

   Jelas bahwa penyelesaian sistem pertidaksamaan diatas merupakan irisan dari daerah-daerah penyelesaian pertidaksamaan penyusunnya.

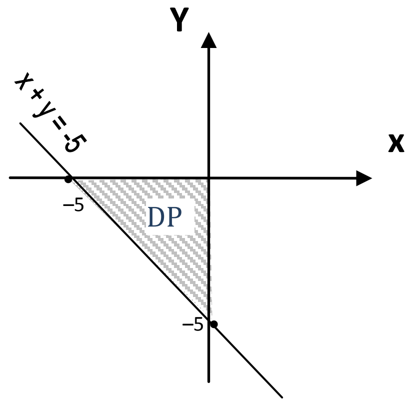


Sehingga penyelesaian dari sistem pertidaksamaan di atas adalah

2. Tentukan daerah penyelesaian dari sistem pertidaksamaan

   $x + y \geq -5,\ x \leq 0,\ y \leq 0$

   Jawab:



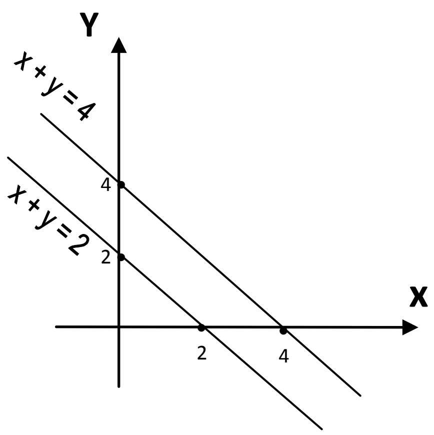
Identik dengan penyelesaian contoh soal no.1 di atas didapatkan penyelesaian

3. Tentukan daerah penyelesaian dari sistem pertidaksamaan

$x + y \leq 2, \quad x + y \geq 4$

Jawab:

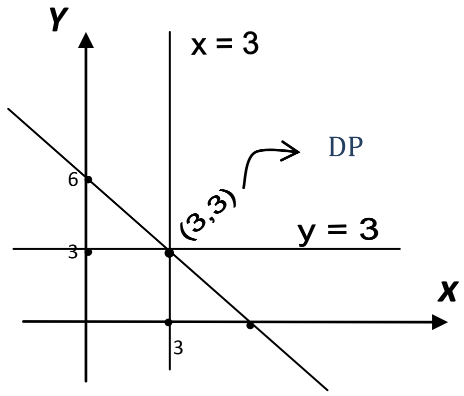
Sistem pertidaksamaan ini tidak memiliki daerah penyelesaian sebab tidak ada irisan daerah penyelesaian pertidaksamaan penyusun sistemnya. Jadi jika digambarkan hasilnya adalah



4. Tentukan daerah penyelesaian dari sistem pertidaksamaan

$x + y \geq 6, \; x \leq 3, \; y \leq 3$

Jawab:



Identik dengan cara penyelesaian sebelumnya diperoleh hasil

Jadi penyelesaian sistem pertidaksamaan diatas berupa titik, yaitu titik (3,3).

6. Program Linear

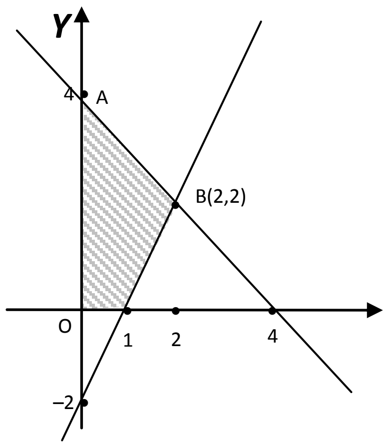
Pogram linear adalah suatu metode mencari nilai optimum (maksimum atau minimum) dari bentuk linear pada daerah yang dibatasi oleh sistem pertidaksamaan linear. Fungsi yang akan dicari nilai optimumnya disebut sebagai fungsi sasaran. Sistem pertidaksamaan linear yang menyertai program linear sering diistilahkan sebagai kendala. Sedangkan daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan linear disebut daerah fisibel.

Contoh**:**

1. Tentukan nilai maksimum fungsi sasaran $f(x, y) = 5x + y$ jika diberikan kendala $x + y \leq 4$, $2x - y \leq 2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$

   Jawab:

   Terlebih dahulu ditentukan daerah penyelesaian dari kendalanya yaitu



Kemudian dicari nilai fungsi sasaran pada titik–titik sudut. (**Mengapa hanya di titik sudutnya?**)

(x, y)	A(0,4)	B(2,2)	C(1,0)	O(0,0)
$f(x, y) = 5x + y$	4	12	5	0

Ternyata $f(x, y)$ maksimum di titik $B(2,2)$ dengan nilai 12

7. Menggunakan garis selidik

Dalam mencari nilai optimum suatu fungsi sasaran tidak harus mencoba semua titik pada daerah penyelesaian, karena cara ini tidak efisien. Oleh karena itu perlu adanya garis selidik yang berguna untuk menentukan titik mana yang menjadikan fungsi sasaran optimum.

1. Tentukan daerah penyelesaiannya terlebih dahulu.
2. Jadikan fungsi sasaran sedemikian hingga koefisien variabel x berharga positif (jika sebelumnya negatif).
3. Dibuat garis selidik $ax + by = 0$ dengan a koefisien variabel x fungsi sasaran dan b koefisien variabel y fungsi sasaran.
4. – Untuk mencari nilai maksimum, garis selidik digeser ke kanan sampai titik paling ujung dari daerah penyelesaian. Titik inilah yang menyebabkan nilai maksimum fungsi sasaran
   – Untuk menentukan nilai minimum, garis selidik digeser ke kiri sampai titik paling ujung dari daerah penyelesaian. Inilah titik yang menyebabkan nilai minimum fungsi sasaran.

Catatan:

Dalam hal poin 2, jika awalnya mencari nilai maksimum maka pengerjaan selanjutnya adalah mencari nilai minimum fungsi sasaran yang baru, demikian pula jika awalnya mencari nilai minimum maka pengerjaan selanjutnya mencari nilai maksimum fungsi sasaran yang baru.

Artinya mencari nilai maksimum $f(x, y)$ sama dengan mencari nilai minimum $-f(x, y)$, demikian juga mencari nilai minimum $f(x, y)$ sama dengan menentukan nilai maksimum $-f(x, y)$.

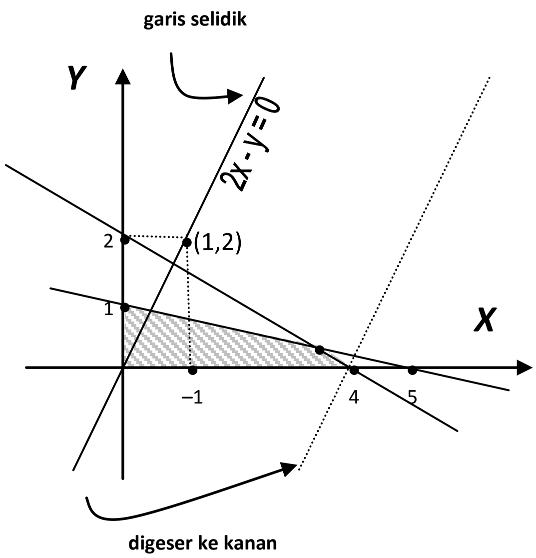
<u>Contoh</u>:

1. Dengan menggunakan garis selidik tentukan nilai minimum

$f(x, y) = -2x + y$, jika kendalanya $x + 2y \leq 4$, $2x + 5y \leq 10$, $x \geq 0$, $y \geq 0$

Jawab:

Mencari nilai minimum $f(x, y) = -2x + y$ sama dengan mencari nilai maksimum $-f(x, y) = 2x - y$. Garis selidiknya adalah garis $2x - y = 0$ Kemudian garis selidik tersebut digeser ke kanan sampai ujung daerah penyelesaian. Hasilnya dapat digambarkan sebagai berikut:



Dari gambar terlihat bahwa nilai maksimum fungsi sasaran $-f(x, y)$ maksimum di titik (4,0) dengan nilai $-f(x, y) = 2x - y = 2(4) - 0 = 8$

Karena $-f(x, y) = 8$ maka $f(x, y) = -8$. Jadi nilai minimum $f(x, y) = -2x + y$ adalah –8 dan titik yang menyebabkan nilai fungsi minimum adalah titik (4,0).

D. Aktivitas Pembelajaran

<u>Aktivitas 1:</u>

Perhatikan persamaan berikut.

1. $x^2 + y = 3$
2. $x^3 = 4$
3. $x - y^3 + 4 = 2x + y$

4. $x - y = 4$
5. $2x - 3y = 5$

Dari persamaan tersebut, diskusikan penamaan persamaannya ditinjau dari derajat dan variabelnya

Aktivitas 2a:

Persaman linear satu variabel $3x = 6$ mempunyai penyelesaian diantaranya adalah $x = 2$. Diskusikan apakah ada nilai x lain yang merupakan penyelesaian persamaan tersebut?

Aktivitas 2b:

Persaman linear dua variabel $3x + 4y = 11$ mempunyai penyelesaian diantaranya adalah $x = 1$ dan $y = 2$, atau ditulis dengan $(x, y) = (1,2)$. Diskusikan apakah ada nilai (x, y) lain yang merupakan penyelesaian persamaan tersebut?

Aktivitas 3:

Gambarlah garis $y = 1$, kemudian arsirlah daerah $y > 1$. Diskusikan apakah penyelesaiannya berada diatas garis $y = 1$?

Aktivitas 3b:

Gambarlah garis $2x + 3y = 6$. Diskusikan apakah garis ini membagi daerah menjadi tiga bagian yaitu $2x + 3y = 6, 2x + 3y < 6$ dan $2x + 3y > 6$.

Aktivitas 4:

Kita tahu bahwa sistem persamaan dibentuk dari persamaan-persamaan.

Diskusikan apakah berikut ini merupakan suatu sistem persamaan linear?

a. $x + 2y = 4$
   $x + 2y = 4$

b. $2x = 5$
   $x + 3y = 5$

c. $x + y = 5$
   $x + y = 2$

Aktivitas 5:

Lakukan diskusi berkaitan dengan permasalahan berikut.

Perhatikan bahwa (1,2) merupakan salah satu nilai yang mememnuhi sistem persamaan linear $2x + 3y = 8; 4x + 3y = 10$. Apakah hanya (1,2) saja? Selanjutnya gambarlah penyajian persamaan tersebut pada kordinat kartesius. Apakah penyelesaiannya merupakan perpotongan garis?

E. Latihan

Kerjakan soal-soal berikut ini.

1. Selesaikan sistem persamaan

   a. $4x + 2y = 3; x - y = \frac{1}{2}$

   b. $\frac{3}{x} - \frac{1}{y} = 4$; $\frac{5}{x} + \frac{2}{y} = 14$

2. Selisih uang Lia dan Rahmat adalah Rp 50.000,– Jika masing–masing ditambah Rp 5.000,– perbandingan uang mereka 1:3. Berapa jumlah uang mereka?

3. Gambarlahh daerah penyelesaian dari pertidaksamaan

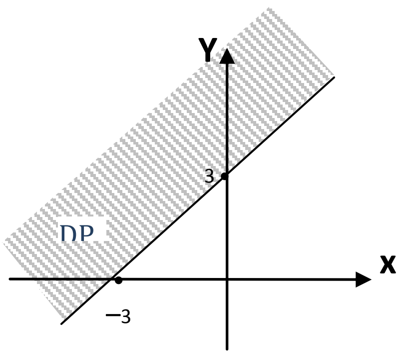
   a. $x \leq 2y - 3$

   b. $x < y$

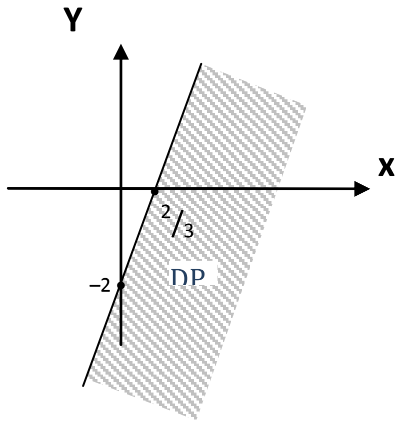
4. Gambarlah daerah penyelesaian pertidaksamaan $-2 < x \leq 8$

5. Tentukan pertidaksamaan linear yang memiliki daerah penyelesaian seperti pada gambar berikut

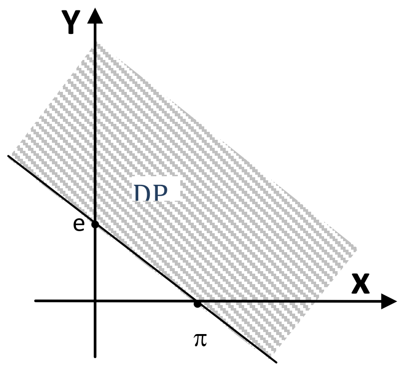
   a.



   b.



c.



F. Rangkuman

Bentuk umum persamaan linear dua variabel adalah $\boldsymbol{ax + by = c}$**,** dimana a, b, c bilangan real dengan $a \neq 0, b \neq 0$. Menentukan penyelesaian (solusi) persamaan suatu persamaan linear adalah menentukan semua nilai pengganti variabel sehingga pernyataan menjadi benar.

Berkaitan dengan garis pada bidang, menetapkan suatu garis tertentu pada bidang, akan mengakibatkan garis membagi bidang menjadi 3 bagian yaitu satu daerah tepat pada garis dan dua daerah disebelah kiri garis dan sebelah kanan garis. Kalimat <u>sebelah kiri</u> dan <u>sebelah kanan</u> garis ini hanya istilah saja sehingga dibolehkan mengatakan sebelah bawah atau sebelah atas garis.

Suatu sistem persamaan linear dibentuk oleh persamaan–persamaan linear. Sistem persamaan linear tidak selalu mempunyai penyelesaian tunggal. Artinya suatu sistem persamaan linear dapat mempunyai lebih dari satu penyelesaian bahkan mungkin tidak mempunyai penyelesaian.

Suatu sistem pertidaksamaan linear dibentuk oleh pertidaksamaan–pertidaksamaan linear. Menyelesaikan sistem pertidaksamaan linear adalah menentukan daerah dimana semua titik pada daerah tersebut memenuhi semua pertidaksamaan pembentuknya.

Pogram linear adalah suatu metode mencari nilai optimum (maksimum atau minimum) dari bentuk linear pada daerah yang dibatasi oleh sistem pertidaksamaan linear. Fungsi yang akan dicari nilai optimumnya disebut sebagai fungsi sasaran. Sistem pertidaksamaan linear yang menyertai program linear sering diistilahkan sebagai kendala. Sedangkan daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan linear disebut daerah fisibel.

G. Umpan Balik dan Tindak Lanjut

Evaluasi diri

Untuk mengukur ketercapaian peserta diklat dalam mempelajari modul ini lakukan evaluasi diri sebagai berikut secara jujur

Petunjuk:

Evaluasi diri dengan cara mengerjakan soal latihan yang terdiri dari lima soal. Pada masing-masing soal, pengerjaan yang benar mendapatkan skor maksimal 10. Jadi skor total 50. Capaian kompetensi (CK) dirumuskan sebagai

$$CK = \frac{Skor\ yang\ diperoleh}{50} \times 100\%$$

Setelah mengerjakan semua soal latihan/tugas, cocokkan jawaban Anda dengan kunci jawaban yang telah disajikan untuk mengukur capaian kompetensi (CK).

Tindak Lanjut

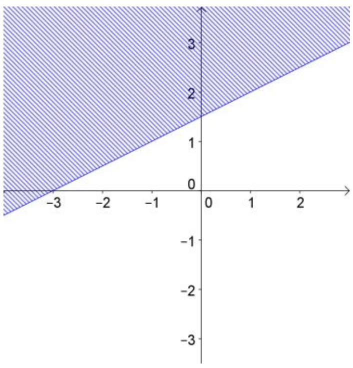
Seperti telah dijelaskan pada bagian sebelumnya bahwa evaluasi yang dilakukan oleh diri sendiri secara jujur adalah kunci keberhasilan mengukur capaian kompetensi (CK). Berkaitan dengan itu, pertimbangkan hal berikut.

Perolehan CK (dalam %)	Deskripsi dan tindak lanjut
$91 \le \text{CK} \le 100$	Sangat Baik, berarti Anda benar-benar memahami konsep sistem persamaan dan pertidaksamaan linier. Selanjutnya

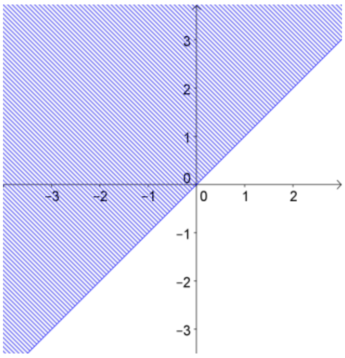
	kembangkan pengetahuan dan tuangkan dalam pembelajaran.
$76 \leq CK < 91$	Baik, berarti Anda cukup memahami konsep sistem persamaan dan pertidaksamaan linier walaupun ada beberapa bagian yang perlu dipelajari lagi. Selanjutnya pelajari lagi beberapa bagian yang dirasakan belum begitu dipahami.
$50 \leq CK < 76$	Cukup, berarti Anda belum cukup memahami konsep sistem persamaan dan pertidaksamaan linier. Oleh karena itu Anda perlu mempelajari lagi bagian yang belum dikuasai dan menambah referensi dari sumber lain.relasi dan fungsi
$CK < 50$	Kurang, berarti Anda belum dapat memahami konsep sistem persamaan dan pertidaksamaan linier. Oleh karena itu Anda perlu mempelajari lagi dari awal dan menambah referensi dari sumber lain.

H. Kunci Jawaban

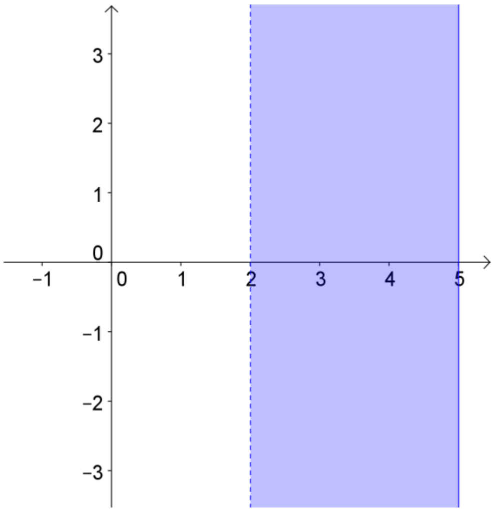
1. a. $(\frac{2}{3}, \frac{1}{6})$ b. $(\frac{11}{20}, \frac{11}{27})$
2. Rp 90.000,-
3. . a



b. .



4.



5. $x - y \leq -3$, b. $-3x + y \leq -2$, c. $ex + \pi y \leq e\pi$

KB5 : Persamaan dan Pertidaksamaan Kuadrat

A. Tujuan

Tujuan kegiatan pembelajaran ini adalah untuk memberikan pemahaman kepada pembaca terkait dengan konsep persamaan dan pertidaksamaan kuadrat, prosedur penyelesaian persamaan dan pertidaksamaan kuadrat, dan memanfaatkannya dalam penyelesaian masalah.

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

Setelah membaca dan mengikuti serangkaian kegiatan pada bagian ini, pembaca diharapkan mampu

1. menjelaskan konsep persamaan dan pertidaksamaan kuadrat,
2. menyelesaikan persamaan dan pertidaksamaan kuadrat,
3. membentuk persamaan kuadrat dengan kondisi tertentu,
4. menggunakan diskriminan untuk menyelesaikan masalah persamaan kuadrat
5. menyelesaikan masalah yang melibatkan persamaan dan pertidaksamaan kuadrat.

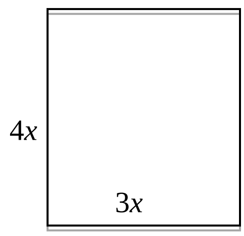
C. Uraian Materi

Persamaan kuadrat dalam kehidupan sehari-hari

Masalah 1:

Untuk mengabadikan saat berkumpul bersama keluarga sewaktu merayakan ulang tahunnya, Kaka dan keluarganya berfoto bersama. Kemudian foto itu dicetak berbentuk persegi panjang dengan perbandingan lebar dan panjang foto 3 : 4. Luas foto adalah 12 dm^2. Berapa ukuran panjang dan lebar foto tersebut dalam cm?

Untuk mempermudah penyelesaian pertanyaan di atas kita menggambar sketsa dari masalah ukuran foto di atas. Kita gambarkan persegi panjang dengan perbandingan lebar dengan panjang 3 : 4 yang diwakili oleh $3x : 4x$ dengan x adalah variabel.



Diperoleh luas (L):

$L = (3x).(4x)$

$\Leftrightarrow 1200 = 12x^2$ .... *substitusi luas dalam satuan cm²*

$\Leftrightarrow 100 = x^2$

$\Leftrightarrow x = 10$ ..... *diambil bilangan positif karena ukuran panjang*

lebar $= 3x = 3(10) = 30$

panjang $= 4x = 4(10) = 40$

Jadi, panjang foto adalah 40 cm dan lebarnya adalah 30 cm.

Masalah 2:

Asri dan Berti senang membaca buku. Dari koleksi masing-masing, ada beberapa buku yang belum mereka baca. Jumlah buku yang belum dibaca oleh mereka berdua15. Masing-masing Kemudian membaca sebanyak 3 buku. Hasil kali banyak buku yang belum mereka baca sekarang adalah 20. Berapakah banyak buku yang belum dibaca masing-masing pada awalnya?

Kita tidak mengetahui banyak buku mereka masing-masing pada awalnya. Oleh karena itu dimisalkan banyak buku yang belum dibaca Asri adalah x dan banyak buku yang belum dibaca Berti y. Dengan demikian berlaku:

$$x + y = 15 \Leftrightarrow y = 15 - x$$

Masing-masing membaca 3 buku dengan hasil kali banyak buku yang belum dibaca menjadi 20. Diperoleh :

$$(x-3)(15-x-3) = 20$$
$$\Leftrightarrow (x-3)(12-x) = 20$$
$$\Leftrightarrow 12x - x^2 - 36 + 3x - 20 = 0$$
$$\Leftrightarrow -x^2 + 15x - 56 = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 15x + 56 = 0$$ ...... *bagaimana menyelesaikan persamaan ini?*

Untuk menyelesaikan dua masalah diatas ternyata kita menghadapi suatu persamaan dengan pangkat tertinggi variabelnya adalah dua. Persamaan seperti ini disebut persamaan kuadrat.

1. Menyelesaikan persamaan kuadrat

Bentuk umum persamaan kuadrat adalah

$ax^2 + bx + c = 0$ dimana a, b, dan c bilangan *real* (nyata) dengan $a \neq 0$.

Persamaan kuadrat dalam konteks ukuran foto x^2 =100, kalau diubah ke bentuk umum menjadi:

$x^2 - 100 = 0$ atau $x^2 + 0\,x - 100 = 0$ dengan $a = 1$, $b = 0$ dan $c = -100$

Beberapa metode yang sangat dikenal untuk menyelesaikan persamaan kuadrat adalah dengan memfaktorkan, dan menggunakan rumus persamaan kuadrat. Penyelesaian yang diperoleh disebut juga akar-akar dari persamaan kuadrat.

a. Memfaktorkan

Contoh 1:

Selesaikan persamaan kuadrat $x^2 - 15x + 56 = 0$

Penyelesaian:

$x^2 - 15x + 56 = 0$ .... *untuk memfaktorkan, cari 2 bilangan p dan q, dengan p+q = –15 dan pq = 56. Bilangan–bilangan itu adalah –7 dan –8.*

$\Leftrightarrow (x - 7)(x - 8) = 0$ ..... *ingat* $a \times b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ *atau* $b = 0$

$\Leftrightarrow x - 7 = 0$ atau $x - 8 = 0$

$\Leftrightarrow x = 7$ atau $x = 8$

Jadi, penyelesaian $x^2 - 15x + 56 = 0$ adalah 7 dan 8. Himpunan penyelesaiannya adalah {7, 8}.

Contoh 2:

Tentukan akar-akar persamaan kuadrat $5x^2 + 9x - 2 = 0$.

Penyelesaian:

untuk a > 1 kita dapat menggunakan cara seperti pada contoh 1 atau menggunakan cara seperti berikut.

$5x^2 + 9x - 2 = \frac{(5x+p)(5x+q)}{5} = 0$ … *dimana p+q = 9 dan pq =(5)(−2)= −10.*

Diperoleh p = 10 dan q = −1.

$5x^2 + 9x - 2 = \frac{(5x+10)(5x-1)}{5} = \frac{5(x+2)(5x-1)}{5} = (x+2)(5x-1) = 0$

$\Leftrightarrow x + 2 = 0$ atau $5x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = -2$ atau $x = \frac{1}{5}$

Jadi, akar-akar $5x^2 + 9x - 2 = 0$ adalah −2 dan $\frac{1}{5}$. Himpunan penyelesaiannya adalah $\{-2, \frac{1}{5}\}$.

b. Menggunakan rumus persamaan kuadrat

Perhatikan bentuk umum persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ dimana a, b, dan c bilangan nyata dengan $a \neq 0$.

$ax^2 + bx + c = 0$ ….. *dibagi dengan a. Mengapa boleh*?

$\Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$

Ruas kiri akan dibuat menjadi bentuk kuadrat sempurna. Oleh karena itu masing-masing ruas ditambah dengan $(\frac{b}{2a})^2$.

$\Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + (\frac{b}{2a})^2 = -\frac{c}{a} + (\frac{b}{2a})^2$

$\Leftrightarrow (x + \frac{b}{2a})^2 = -\frac{c}{a} + (\frac{b}{2a})^2$

$\Leftrightarrow (x + \frac{b}{2a})^2 = -\frac{c}{a} + (\frac{b}{2a})^2$

$\Leftrightarrow (x + \frac{b}{2a})^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$

$\Leftrightarrow (x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$

$\Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$

$\Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$

$\Leftrightarrow x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ………… *Rumus akar-akar persamaan kuadrat*

Contoh 3:

Selesaikan persamaan kuadrat $6x^2 = 2 - x$ menggunakan rumus persamaan kuadrat.

Penyelesaian:

$6x^2 = 2 - x$

$\Leftrightarrow\ 6x^2 + x - 2 = 0$; a = 6, b = 1 dan c = −2

$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-1\pm\sqrt{1^2-4(6)(-2)}}{2(6)} = \frac{-1\pm\sqrt{49}}{12}$

$x_1 = \frac{1}{2}$ dan $x_2 = \frac{-2}{3}$

Jadi, penyelesaian dari $6x^2 = 2 - x$ adalah $\frac{1}{2}$ dan $\frac{-2}{3}$.

2. Jenis akar-akar persamaan kuadrat

Gunakan rumus persamaan kuadrat $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ untuk mencari akar-akar dari :

a. $x^2 + 6x + 9 = 0$
b. $x^2 + 6x + 8 = 0$
c. $x^2 + 6x + 6 = 0$
d. $x^2 + 6x + 12 = 0$

Akar –akar dari persamaan no. 1 adalah $x_1 = x_2 = -3$.

Akar –akar dari persamaan no. 2 adalah $x_1 = -4$ dan $x_2 = -2$.

Akar –akar dari persamaan no. 3 adalah $x_1 = -3 + \sqrt{3}$ dan $x_2 = -3 - \sqrt{3}$.

Akar –akar dari persamaan no. 4 adalah $x_1 = -3 + \sqrt{-12}$ dan $x_2 = -3 - \sqrt{-12}$.

Apa yang menyebabkan diperoleh hasil yang bervariasi seperti di bawah ini ?

- dua akar nyata yang nilainya sama,

- dua akar yang berbeda dan nyata, dengan variasi bilangan rasional dan irasional
- akar-akar bilangan imajiner atau bilangan kompleks yaitu gabungan bilangan nyata dan imajiner.

Analisis dari rumus persamaan kuadrat menunjukkan bahwa jenis akar-akar sangat tergantung kepada nilai $b^2 - 4ac$. Untuk selanjutnya, bentuk $b^2 - 4ac$ disebut **diskriminan, dilambangkan *D*.**

- Dalam persamaan no. 1, $D = 0$, $\sqrt{D} = 0$, sehingga menyebabkan akar-akarnya nyata (*real*) dan sama atau sering disebut kembar.
- Dalam persamaan no. 2, $D = 4$, yang merupakan bentuk kuadrat lebih dari nol, dan menyebabkan ada dua akar nyata yang berbeda.
- Dalam persamaan no. 3, $D = 12$ yang bukan merupakan bentuk kuadrat, $\sqrt{D} = 2\sqrt{3}$ menyebabkan akar-akar nyata irasional.
- Dalam persamaan no. 4, $D = -12$, $\sqrt{D} = \sqrt{-12}$ menyebabkan akar-akar bilangan kompleks.

3. Jumlah, dan hasil kali akar-akar persamaan kuadrat

Akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ adalah x_1 dan x_2. Dengan menggunakan rumus persamaan kuadrat $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ diperoleh

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ dan } x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Jumlah akar-akar: $\boldsymbol{x_1 + x_2} = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \boldsymbol{\frac{-b}{a}}$

Hasil kali akar-akar: $\boldsymbol{x_1\, x_2} = \left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$

$$= \frac{1}{4a^2}(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})$$

$$= \frac{1}{4a^2}((-b)^2 - (\sqrt{b^2 - 4ac})^2)$$

$$= \frac{1}{4a^2}(b^2 - (b^2 - 4ac) = \frac{4ac}{4a^2} = \boldsymbol{\frac{c}{a}}$$

4. Menyusun suatu persamaan kuadrat

Suatu persamaan kuadrat dapat disusun bila kondisi tertentu diketahui, misal diketahui akar-akarnya atau jumlah dan hasil kali akar-akarnya.

1. akar-akar diketahui

   Amati kembali contoh 1, menyelesaikan persamaan kuadrat dengan memfaktorkan.

   $x^2 - 15x + 56 = 0$

   $\Leftrightarrow (x-7)(x-8) = 0$

   $\Leftrightarrow x - 7 = 0$ atau $x - 8 = 0$

   $\Leftrightarrow x = 7$ atau $x = 8$

   Andaikan sekarang yang diketahui adalah akar-akar yaitu $x_1 = 7$ dan $x_2 = 8$ dan ditanyakan persamaan kuadratnya. Dengan metode bekerja dari belakang (*working backward*) diperoleh $x - 7 = 0$ atau $x - 8 = 0$. Selanjutnya ini akan menjadi $(x-7)(x-8) = 0$ dan akhirnya menjadi $x^2 - 15x + 56 = 0$. Hasil terakhir ini merupakan persamaan kuadrat yang ditanyakan.

   Analogi dengan cara di atas, jika yang diketahui akar-akar persamaan kuadrat $x_1$dan x_2 maka persamaan kuadrat itu adalah:

   $(x - x_1)(x - x_2) = 0$

   $\Leftrightarrow x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0$

2. jumlah dan hasil kali akar-akar diketahui

   contoh 4:

   Persamaan kuadrat $\boldsymbol{x^2 + 2x + 5 = 0}$ akar-akarnya *p* dan *q*. Tentukan persamaan kuadrat yang akar-akarnya:

   (*p* + 1) dan (*q* + 1).

   p^2 dan q^2.

   Penyelesaian:

   $x^2 + 2x + 5 = 0; a = 1, b = 2, c = 5$

   akar-akar p dan $q \Rightarrow p + q = \frac{-b}{a} = \frac{-2}{1} = -2$

$$pq = \frac{c}{a} = \frac{5}{1} = 5$$

a. akar-akar $p + 1$ dan $q + 1 \Rightarrow (p+1) + (q+1) = p + q + 2 = 0$

$$(p+1)(q+1) = pq + p + q + 1$$
$$= 5 - 2 + 1 = 4$$

Persamaan kuadrat baru adalah:

$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0$

$x^2 - \big((p+1) + (q+1)\big)x + (p+1)(q+1) = 0$

$x^2 - (0)x + 4 = 0$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{x^2 + 4 = 0}$

b. akar-akar p^2 dan $q^2 \Rightarrow p^2 + q^2 = (p+q)^2 - 2pq$

$$= (-2)^2 - 2(5) = -6$$
$$p^2q^2 = (pq)^2 = (5)^2 = 25$$

Persamaan kuadrat baru adalah:

$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0$

$x^2 - (p^2 + q^2)x + p^2q^2 = 0$

$x^2 - (-6)x + 25 = 0$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{x^2 + 6x + 25 = 0}$

5. Pertidaksamaan Kuadrat

Perhatikan masalah berikut ini.

Kiper Kevin menendang bola yang sudah ditangkapnya. Tinggi bola h, dalam meter, t detik setelah ditendang membentuk persamaan $h = -3t^2 + 18\,t$. Kapan bola mencapai ketinggian lebih dari 24 m?

Kata “lebih dari” dalam pertanyaan di atas menunjukkan bahwa masalah yang akan di selesaikan merupakan bentuk pertidak samaan kuadrat, yaitu $-3t^2 + 18\,t > 24$.

a. Menyelesaian pertidaksamaan kuadrat

Pertidaksamaan kuadrat berbentuk $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$, $ax^2 + bx + c > 0$ atau $ax^2 + bx + c \geq 0$ dengan $a \neq 0$. Pertidaksamaan kuadrat dapat diselesaikan menggunakan grafik fungsi kuadrat (parabola) dan garis bilangan.

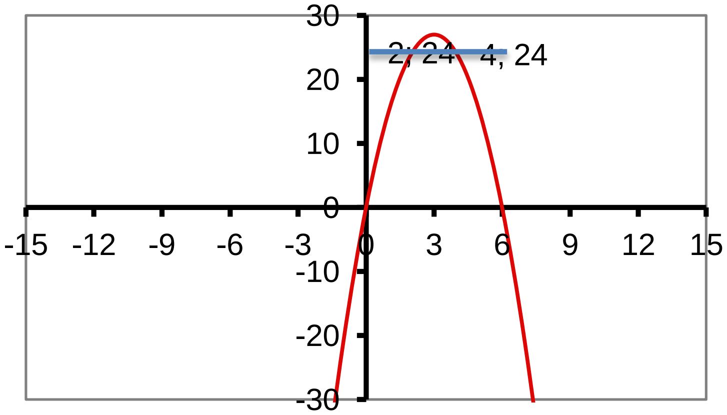
1. Menyelesaikan $-3t^2 + 18\,t > 24$ menggunakan grafik fungsi kuadrat

   Langkah-langkah :

   a. menggambar grafik fungsi $h(t) = -3t^2 + 18\,t$

   b. mengamati untuk h =24 berapa nilai t yang memenuhi. Dari grafik terlihat t = 2.

c. Terlihat bahwa untuk $2 < t < 4$ tinggi h adalah $24 < h < 27$ dengan $h = 27$ adalah tinggi maksimum yang dicapai untuk $t = 3$.



Jadi, bola mencapai ketinggian lebih dari 24 m pada waktu $2 < t < 4, t \in R$.

2. Menyelesaikan $-3t^2 + 18\,t > 24$ menggunakan garis bilangan
Pada kenyataannya, bentuk penyelesaian pertidaksamaan kuadrat menggunakan garis bilangan adalah bentuk yang lebih sederhana dari menyelesaikannya menggunakan grafik fungsi kuadrat.

Penyelesaian :

$$-3t^2 + 18\,t > 24 \Leftrightarrow -3t^2 + 18\,t - 24 > 0$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 6\,t + 8 < 0$$ ...... *mengapa tanda pertidaksamaan berubah arah?*

$$\Leftrightarrow (t-2)\,(t-4) < 0$$

Nilai nol diperoleh untuk $t = 2$ atau $t = 4$

Dibuat garis bilangan dengan nilai nol sebagai batas sehingga diperoleh 3 daerah yaitu $t < 2$; $2 < t < 4$ dan $t > 4$

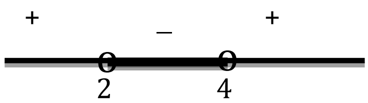
Untuk mengetahui daerah mana yang bertanda positif dan mana yang negatif, ambil salah satu nilai dalam masing-masing daerah misal 0, 3 dan 5. Substitusi nilai-nilai tersebut ke $t^2 - 6\,t + 8$.

$t = 0 \Rightarrow 0^2 - 6\,(0) + 8 = 8$ .... daerah yang memuat 0 bernilai lebih dari nol atau positif

$t = 3 \Rightarrow 3^2 - 6\,(3) + 8 = -1$ .... daerah yang memuat 3 bernilai kurang dari nol atau negatif

$t = 5 \Rightarrow 5^2 - 6\,(5) + 8 = 3$ .... daerah yang memuat 5 bernilai lebih dari nol atau positif

Garis bilangan diberi tanda berdasarkan penyelidikan tadi.



Daerah yang merupakan penyelesaian adalah daerah yang kurang dari nol atau bertanda negatif. Jadi penyelesaiannya adalah $2 < t < 4, t \in R$.

b. Pertidaksamaan kuadrat dalam penggunaan diskriminan

Contoh 5:

Persamaan $x^2 + 2mx + 3m = 0$ memiliki akar-akar nyata. Tentukan nilai m yang memenuhi.

Penyelesaian:

Syarat supaya akar-akar persamaan $ax^2 + bx + c = 0$ nyata adalah $D \geq 0$.

$x^2 + 2mx + 3m = 0$ dengan $a = 1$, $b = 2m$, $c = 3m$

$D = b^2 - 4ac \geq 0$

$(2m)^2 - 4(1)(3m) \geq 0$

$\Leftrightarrow 4m^2 - 12m \geq 0$

$\Leftrightarrow m^2 - 3m \geq 0$

$\Leftrightarrow m(m-3) \geq 0$

nilai nol terjadi untuk $m = 0$ atau $m = 3$

digambarkan dengan garis bilangan, nilai-nilai m yang memenuhi adalah $m \leq 0$ atau $m \geq 3$.

Contoh 6:

$y = f(x) = ax^2 + bx + c; a \neq 0$ disebut fungsi kuadrat. Grafiknya berbentuk parabola. $y = f(x) = mx + n$ disebut fungsi linier, grafiknya berbentuk garis. Dapatkah Anda membayangkan variasi letak kedua grafik itu bila digambar dalam bidang koordinat Cartesius yang sama? Salah satu kondisi yang terjadi adalah kedua grafik saling berpotongan di dua titik yang berbeda. Bagaimana hubungan nilai m dengan a, b, c, dan n?

Dalam kondisi kedua grafik saling berpotongan di dua titik yang berbeda, nilai y atau ordinat kedua fungsi itu sama sehingga diperoleh

$$ax^2 + bx + c = mx + n$$
$$\Leftrightarrow ax^2 + bx + c - mx - n = 0$$
$$\Leftrightarrow ax^2 + (b - m)x + c - n = 0$$

Diketahui kedua grafik saling berpotongan di dua titik. Ini berarti bahwa persamaan kuadrat $ax^2 + (b - m)x + c - n = 0$ memiliki dua akar nyata yang berbeda, atau diskriminan $D > 0$.

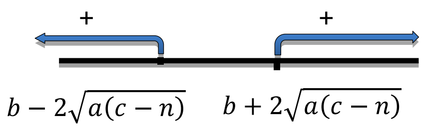
$$(b - m)^2 - 4a(c - n) > 0$$
$$\Leftrightarrow (b - m)^2 - (2\sqrt{a(c - n)})^2 > 0$$
$$\Leftrightarrow (b - m + 2\sqrt{a(c - n)})(b - m - 2\sqrt{a(c - n)}) > 0$$

Nilai nol terjadi untuk

$b - m + 2\sqrt{a(c - n)} = 0 \Leftrightarrow m = b + 2\sqrt{a(c - n)}$ atau

$b - m - 2\sqrt{a(c - n)} = 0 \Leftrightarrow m = b - 2\sqrt{a(c - n)}$

digambarkan dengan garis bilangan



Jadi, agar grafik $y = f(x) = ax^2 + bx + c; a \neq 0$ dan $y = f(x) = mx + n$ berpotongan di dua titik, batasan nilai m yang memenuhi adalah $m > b + 2\sqrt{a(c - n)}$ atau $m < b - 2\sqrt{a(c - n)}$.

D. Aktivitas Pembelajaran

1. Suatu buku matematika menggunakan rumus akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ dimana a, b, dan c bilangan nyata dengan $a \neq 0$, berbeda dengan yang sudah dikenal. Rumus yang digunakan adalah $x = \frac{2c}{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}$. (sumber Horner hal 299). Gunakan rumus baru ini untuk menyelesaikan persamaan $2x^2 + 7x - 15 = 0$ dan $3x^2 - 10x - 18 = 0$ dan apakah hasilnya sama apabila menggunakan rumus $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ serta isilah titik-titik di bawah sampai Anda menemukan rumus $x = \frac{2c}{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}$.

$ax^2 + bx + c = 0$

$\Leftrightarrow a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} = 0$ dibagi x^2 dimana $x \neq 0$

$\Leftrightarrow \frac{c}{x^2} + \frac{b}{x} + a = 0$ diurutkan menurut pangkat

$\Leftrightarrow \frac{1}{x^2} + \frac{b}{cx} + \frac{a}{c} = 0$ dibagi c dimana $c \neq 0$

…………………………...

2. Berdasarkan analisis di atas, buatlah kesimpulan dengan kata-kata Anda sendiri tentang jenis akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ ditinjau dari nilai diskriminannya.

3. Diketahui persamaan $x^2 - (a + b)x + ab - p^2 = 0$.
   a. Buktikan bahwa akar-akar adalah nyata (*real*) untuk semua nilai a, b, dan p.
   b. Kapankah persamaan di atas mempunyai akar-akar kembar?

a. Bukti:

Harus ditunjukkan nilai D …… 0.

Diskriminan D = …………………………..

……………………………

b. Akar-akar kembar, syarat D …… 0.

4. Akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$, adalah x_1 dan x_2. Tentukan selisih akar-akarnya.

5. Akar-akar persamaan kuadrat $\mathrm{ax}^2 + \mathrm{bx} + \mathrm{c} = 0, \mathrm{a} \neq 0$, adalah x1 dan x2.

a. Jika x_1 dan x_2 positif selidiki tanda $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$; $x_1\, x_2 = \frac{c}{a}$ dan D.

b. Jika x_1 dan x_2 positif berlainan selidiki tanda $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$; $x_1\, x_2 = \frac{c}{a}$ dan D.

c. Jika x_1 dan x_2 negatif selidiki tanda $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$; $x_1\, x_2 = \frac{c}{a}$ dan D.

d. Jika x_1 dan x_2 negatif berlainan selidiki tanda $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$; $x_1\, x_2 = \frac{c}{a}$ dan D.

e. Jika x_1 positif dan x_2 negatif selidiki tanda $x_1\, x_2 = \frac{c}{a}$ dan D.

f. Jika $x_1 = \frac{1}{x_2}$ (x_1 dan x_2 saling berkebalikan) selidiki hubungan c dengan a dan tanda D.

g. Jika $x_1 = -x_2$ (x_1 dan x_2 saling berlawanan) selidiki nilai b dan tanda D.

E. Latihan

1. Selesaikan persamaan kuadrat berikut ini.

   a. $x^2 + 6x - 7 = 0$

   b. $x^2 = 3x + 10$

   c. $-x^2 + 6 = x$

   d. $6x^2 - 8x - 8 = 0$

2. Panjang dari suatu persegi panjang empat cm kurang dari dua kali ukuran lebarnya. Luas persegi panjang itu adalah 70 cm^2. Tentukan ukuran persegi panjang tersebut.

3. Diketahui persamaan $x^2 + bx - 2 + k(x^2 + 3x + 2) = 0; k \neq -1$.

   a. jika *b* = 0, tentukan jenis akar-akar persamaan tersebut.

   b. Jika *b* = 2, tentukan nilai-nilai k agar akar-akarnya kembar.

4. Akar-akar $x^2 - 3x - 5 = 0$ adalah $x_1$dan x_2. Tentukan

   a. ${x_1}^2 x_2 + x_1 {x_2}^2$ b. $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$

5. Daya *P* dalam watt yang diberikan ke suatu sirkuit oleh batere 12 volt dinyatakan dalam rumus $P = 12I - \frac{1}{2}I^2$ dimana I adalah kuat arus dalam ampere.

   a. Karena daya dan kuat arus harus lebih besar dari nol, tentukan interval kuat arus yang dapat ditarik oleh sirkuit.

   b. Tentukan interval kuat arus bila daya kurang dari 64 ampere.

F. Rangkuman

Bentuk umum persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ dimana a, b, dan c bilangan *real* (nyata) dengan a ≠ 0. Menyelesaikan persamaan kuadrat artinya mencari akar-akarnya. Beberapa metode yang paling sering digunakan untuk menyelesaikan persamaan kuadrat adalah dengan memfaktorkan dan menggunakan rumus persamaan kuadrat $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Jenis akar-akar persamaan kuadrat sangat tergantung kepada $b^2 - 4ac$ yang disebut juga diskriminan dan dilambangkan *D.*

1. Dua akar nyata, dan sama atau disebut akar kembar, $x_1 = x_2$ bila $D = 0$.
2. Dua akar nyata, berbeda dan rasional bila $D > 0$ dan D bentuk kuadrat.
3. Dua akar nyata, berbeda dan irasional bila $D > 0$ dan D bukan bentuk kuadrat.
4. Akar-akar bilangan imajiner atau bilangan kompleks bila $D < 0$.

Jumlah akar-akar x_1 dan x_2 adalah $\boldsymbol{x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}}$ dan hasil kalinya $\boldsymbol{x_1 x_2 = \frac{c}{a}}$

Ketika informasi yang diberikan adalah jumlah dan hasil kali akar-akar, untuk menyusun persamaan kuadrat yang baru digunakan rumus $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0$. Sedangkan bentuk $(x - x_1)(x - x_2) = 0$ digunakan untuk menyusun persamaan kuadrat bila x_1 dan x_2 diketahui.

Pertidaksamaan kuadrat berbentuk $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$, $ax^2 + bx + c > 0$ atau $ax^2 + bx + c \geq 0$ dengan $a \neq 0$. Pada umumnya, ada 2 metode yang digunakan untuk menyelesaikan pertidaksamaan kuadrat yaitu dengan menggunakan grafik fungsi kuadrat (parabola) dan dengan menggunakan garis bilangan.

G. Umpan Balik dan Tindak Lanjut

Evaluasi diri

Untuk mengukur ketercapaian peserta diklat dalam mempelajari modul ini lakukan evaluasi diri sebagai berikut secara jujur

Petunjuk:

Evaluasi diri dengan cara mengerjakan soal latihan/tugas yang terdiri dari lima soal. Pada masing-masing soal, pengerjaan yang benar mendapatkan skor maksimal 10. Jadi skor total 50. Capaian kompetensi (CK) dirumuskan sebagai

$$CK = \frac{Skor\ yang\ diperoleh}{50} \times 100\%$$

Setelah mengerjakan semua soal latihan/tugas, cocokkan jawaban Anda dengan kunci jawaban yang telah disajikan untuk mengukur capaian kompetensi (CK).

Tindak Lanjut

Seperti telah dijelaskan pada bagian sebelumnya bahwa evaluasi yang dilakukan oleh diri sendiri secara jujur adalah kunci keberhasilan mengukur capaian kompetensi (CK). Berkaitan dengan itu, pertimbangkan hal berikut.

Perolehan CK (dalam %)	Deskripsi dan tindak lanjut
$91 \leq CK \leq 100$	Sangat Baik, berarti Anda benar-benar memahami konsep persamaan dan pertidaksamaan kuadrat. Selanjutnya kembangkan pengetahuan dan tuangkan dalam pembelajaran.
$76 \leq CK < 91$	Baik, berarti Anda cukup memahami konsep persamaan dan pertidaksamaan kuadrat walaupun ada beberapa bagian yang perlu dipelajari lagi. Selanjutnya pelajari lagi beberapa bagian yang dirasakan belum begitu dipahami.
$50 \leq CK < 76$	Cukup, berarti Anda belum cukup memahami konsep persamaan dan pertidaksamaan kuadrat. Oleh karena itu Anda perlu mempelajari lagi bagian yang belum dikuasai dan menambah referensi dari sumber lain.relasi dan fungsi
$CK < 50$	Kurang, berarti Anda belum dapat memahami konsep persamaan dan pertidaksamaan kuadrat. Oleh karena itu Anda perlu mempelajari lagi dari awal dan menambah referensi dari sumber lain.

H. Kunci Jawaban

1. a. HP {–7, 1} b. HP {–2, 5} c. HP {–3, 2} d. HP $\{\frac{-2}{3}, 2\}$
2. Lebar 7 cm dan panjang 10 cm.
3. a. dua akar nyata berbeda dan irasional b. $k = -6 \pm 2\sqrt{6}$
4. a.-15 b. $\frac{-19}{5}$
5. a. $0 < I < 24$ b. $0 < I < 8$ atau $16 < I < 24$

KB 6 : Persamaan dan Pertidaksamaan Rasional

A. Tujuan

Peserta diklat atau pembaca dapat menggunakan konsep-konsep aljabar.

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

Peserta diklat atau pembaca dapat menganalisis dan dapat menentukan solusi persamaan dan pertidaksamaan irrasional.

C. Uraian Materi

1. Persamaan Irrasional

Pada materi sebelumnya sudah dibahas persamaan dalam bentuk linear atau kuadrat. Pada bagian ini akan dibahas persamaan yang mengandung bentuk akar, yang sering diistilahkan persamaan irrasional. Persamaan irrasional adalah persamaan dengan variabel-variabelnya ada yang terdapat di bawah tanda akar (bisa berupa akar pangkat dua, akar pangkat tiga, ataupun akar pangkat yang lebih tinggi). Contoh persamaan irrasional di antaranya adalah

$$\sqrt{x-3} = 2 \qquad \sqrt{2x+3} = x \qquad \sqrt{x+2} + \sqrt{7x+2} = 6$$

Persamaan irrasional dapat ditentukan solusinya berdasarkan prinsip pangkat (*The Power Principle*).

Prinsip Pangkat:

Jika P dan Q merupakan bentuk-bentuk aljabar dan n merupakan bilangan bulat positif, maka setiap solusi dari $P = Q$ juga merupakan solusi dari $P^n = Q^n$.

Beberapa hal perlu menjadi perhatian kita dalam menggunakan prinsip pangkat karena persamaan $P^n = Q^n$ mungkin saja mempunyai lebih banyak solusi daripada persamaan awal $P = Q$. Sebagai contoh, pandang persamaan $x = 3$. Persamaan tersebut mempunyai solusi tunggal, yaitu 3. Apabila kita mengkuadratkan kedua ruas dari persamaan awal $x = 3$ akan menghasilkan $x^2 = 9$. Perhatikan bahwa persamaan baru ini mempunyai dua solusi, yaitu 3 dan -3. Bilangan -3 dinamakan sebagai *extraneous solution* karena -3 bukan merupakan solusi dari persamaan awal $x = 3$. Bilangan -3 hanya solusi dari persamaan $x^2 = 9$ yang merupakan hasil pengkuadratan dari persamaan awal.

Definisi *extraneous solution*:
Setiap solusi dari $P^n = Q^n$ yang bukan merupakan solusi dari $P = Q$ dinamakan sebagai *extraneous solution*. Bentuk *extraneous solution* dapat muncul sebagai akibat dari memangkatkan kedua ruas persamaan awal dengan pangkat bilangan genap.

Perhatikan hal yang terjadi apabila kita mengkuadratkan ekspresi yang mengandung bentuk akar kuadrat. Jika $x \geq 0$, maka $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$. Untuk mengeliminasi bentuk akar kuadrat, kita harus mengkuadratkan ekspresi tersebut. Berdasarkan hal tersebut untuk menyelesaikan persamaan yang mengandung bentuk akar kuadrat, kita harus mengkuadratkan kedua ruas persamaan untuk memperoleh persamaan baru. Solusi atau penyelesaian dari persamaan baru tersebut memuat seluruh solusi dari persamaan semula dan ada kemungkinan mengandung *extraneous solutions*.

Penyelesaian persamaan yang mengandung satu bentuk akar kuadrat.

Contoh:

1. Tentukan solusi dari persamaan irrasional $\sqrt{c-2} = 3$

   Solusi:

   Kuadratkan kedua ruas persamaan untuk mengeliminasi bentuk akar.

   $$\begin{aligned} \left(\sqrt{c-2}\right)^2 &= 3^2 \\ c - 2 &= 9 \end{aligned}$$

   Selesaikan persamaan linear yang terbentuk, diperoleh

   $$c = 11$$

   Subsitusikan nilai $c = 11$ pada persamaan awal.

   $$\sqrt{c-2} = 3$$

   Periksa apakah benar $\sqrt{11-2} = 3$. Jelas bahwa $\sqrt{11-2} = \sqrt{9}$. Karena $\sqrt{9} = 3$ maka benar bahwa $\{11\}$ merupakan solusi dari persamaan irrasional $\sqrt{c-2} = 3$.

2. Tentukan solusi dari persamaan irrasional $\sqrt{t+5} + 6 = 0$.

Solusi:

$$\begin{aligned}
\sqrt{t+5}+6 &= 0\\
\sqrt{t+5} &= -6\\
\left(\sqrt{t+5}\right)^2 &= (-6)^2\\
t+5 &= 36\\
t &= 31
\end{aligned}$$

Substitusikan nilai $t = 31$ pada persamaan awal $\sqrt{t+5}+6=0$.

Periksa apakah benar $\sqrt{31+5}+6=0$.

Jelas bahwa $\sqrt{36}+6=6+6=12$.

Karena $\sqrt{31+5}+6 \neq 0$, maka $t = 31$ merupakan *extraneous solution*. Dengan demikian persamaan irrasional $\sqrt{t+5}+6=0$ tidak mempunyai solusi real.

3. Tentukan solusi dari persamaan irrasional $\sqrt{2x+1}+1=x$.

Solusi:

$$\begin{aligned}
\sqrt{2x+1} &= x-1\\
\left(\sqrt{2x+1}\right)^2 &= (x-1)^2\\
2x+1 &= x^2-2x+1\\
0 &= x^2-4x\\
0 &= x(x-4)
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc}
x=0 & \text{atau} & x-4=0\\
x=0 & \text{atau} & x=4
\end{array}$$

Substitusikan nilai $x = 0$ dan $x = 4$ pada persamaan awal $\sqrt{2x+1}+1=x$.

Untuk $x = 0$, periksa apakah benar $\sqrt{2\cdot 0+1}+1=0$.

Jelas bahwa $\sqrt{2\cdot 0+1}+1=\sqrt{0+1}+1=\sqrt{1}+1=1+1=2$. Karena $\sqrt{2\cdot 0+1}+1\neq 0$ maka $x = 0$ merupakan *extraneous solution* dan bukan merupakan solusi dari persamaan awal.

Untuk $x = 4$, periksa apakah benar $\sqrt{2\cdot 4+1}+1=4$.

Jelas bahwa $\sqrt{2\cdot 4+1}+1=\sqrt{8+1}+1=\sqrt{9}+1=3+1=4$. Karena $\sqrt{2\cdot 4+1}+1=4$ maka $x = 4$ merupakan solusi dari persamaan awal.

Dengan demikian himpunan penyelesaian dari persamaan irrasional $\sqrt{2x+1}+1=x$ adalah $\{4\}$.

Persamaan yang mengandung dua bentuk akar kuadrat.

Contoh:

1. Tentukan solusi dari persamaan irrasional $\sqrt{2a+4} - 3\sqrt{a-5} = 0$.

   Solusi:

$$\sqrt{2a+4} - 3\sqrt{a-5} = 0$$

   Pisahkan kedua bentuk akar pada dua ruas berbeda, diperoleh

$$\sqrt{2a+4} = 3\sqrt{a-5}$$

   Kuadratkan kedua ruas persamaan, diperoleh

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{2a+4}\right)^2 &= \left(3\sqrt{a-5}\right)^2 \\ 2a+4 &= 9(a-5) \\ 2a+4 &= 9a-45 \\ -7a &= -49 \\ a &= 7 \end{aligned}$$

   Substitusikan nilai $a = 7$ pada persamaan awal $\sqrt{2a+4} - 3\sqrt{a-5} = 0$. Periksa apakah benar $\sqrt{2 \cdot 7 + 4} - 3\sqrt{7-5} = 0$.

   Jelas bahwa $\sqrt{2 \cdot 7 + 4} - 3\sqrt{7-5} = \sqrt{14+4} - 3\sqrt{2} = \sqrt{18} - 3\sqrt{2} = 3\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 0$.

   Karena $\sqrt{2 \cdot 7 + 4} - 3\sqrt{7-5} = 0$, maka himpunan penyelesaian dari persamaan irrasional $\sqrt{2a+4} - 3\sqrt{a-5} = 0$ adalah $\{7\}$.

2. Tentukan solusi dari persamaan irrasional $\sqrt{x+5} + \sqrt{x} = 5$

   Solusi:

$$\sqrt{x+5} + \sqrt{x} = 5$$

   Pisahkan kedua bentuk akar pada dua ruas berbeda, diperoleh

$$\sqrt{x+5} = 5 - \sqrt{x}$$

   Kuadratkan kedua ruas persamaan, diperoleh

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{x+5}\right)^2 &= \left(5 - \sqrt{x}\right)^2 \\ x+5 &= 25 - 10\sqrt{x} + x \end{aligned}$$

   Sederhanakan persamaan tersebut, diperoleh

$$\begin{aligned} 5 &= 25 - 10\sqrt{x} \\ -20 &= -10\sqrt{x} \\ 2 &= \sqrt{x} \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa persamaan baru yang terbentuk masih mengandung satu bentuk akar kuadrat. Kuadratkan lagi kedua ruas persamaan yang terbentuk, diperoleh

$$\begin{aligned} 2^2 &= \left(\sqrt{x}\right)^2 \\ 4 &= x \end{aligned}$$

Substitusikan nilai $x = 4$ ke persamaan awal $\sqrt{x+5} + \sqrt{x} = 5$.

Periksa apakah benar $\sqrt{4+5} + \sqrt{4} = 5$.

Jelas bahwa $\sqrt{4+5} + \sqrt{4} = \sqrt{9} + \sqrt{4} = 3 + 2 = 5$.

Karena $\sqrt{4+5} + \sqrt{4} = 5$, maka himpunan penyelesaian dari persamaan irrasional $\sqrt{x+5} + \sqrt{x} = 5$ adalah $\{4\}$.

3. Tentukan solusi dari persamaan irrasional $\sqrt{5w+6} - \sqrt{4w+1} = 1$.

Solusi:

$$\sqrt{5w+6} - \sqrt{4w+1} = 1$$

Pisahkan kedua bentuk akar pada dua ruas berbeda, diperoleh

$$\sqrt{5w+6} = 1 + \sqrt{4w+1}$$

Kuadratkan kedua ruas persamaan, diperoleh

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{5w+6}\right)^2 &= \left(1 + \sqrt{4w+1}\right)^2 \\ 5w + 6 &= 1 + 2\sqrt{4w+1} + 4w + 1 \end{aligned}$$

Sederhanakan persamaan tersebut, diperoleh

$$\begin{aligned} w + 6 &= 2 + 2\sqrt{4w+1} \\ w + 4 &= 2\sqrt{4w+1} \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa persamaan baru yang terbentuk masih mengandung satu bentuk akar kuadrat. Kuadratkan lagi kedua ruas persamaan yang terbentuk, diperoleh

$$\begin{aligned} (w+4)^2 &= \left(2\sqrt{4w+1}\right)^2 \\ w^2 + 8w + 16 &= 4(4w+1) \\ w^2 + 8w + 16 &= 16w + 4 \\ w^2 - 8w + 12 &= 0 \\ (w-2)(w-6) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcr} w - 2 = 0 & \text{atau} & w - 6 = 0 \\ w = 2 & \text{atau} & w = 6 \end{array}$$

Substitusikan nilai $w = 2$ dan $w = 6$ ke persamaan awal $\sqrt{5w+6} - \sqrt{4w+1} = 1$.

Untuk $w = 2$, periksa apakah benar $\sqrt{5 \cdot 2 + 6} - \sqrt{4 \cdot 2 + 1} = 1$.

Jelas bahwa $\sqrt{5\cdot 2+6}-\sqrt{4\cdot 2+1}=\sqrt{10+6}-\sqrt{8+1}=\sqrt{16}-\sqrt{9}=4-3=1$. Karena $\sqrt{5\cdot 2+6}-\sqrt{4\cdot 2+1}=1$, maka $w=2$ merupakan solusi dari persamaan awal.

Untuk $w=6$, periksa apakah benar $\sqrt{5\cdot 6+6}-\sqrt{4\cdot 6+1}=1$.

Jelas bahwa $\sqrt{5\cdot 6+6}-\sqrt{4\cdot 6+1}=\sqrt{30+6}-\sqrt{24+1}=\sqrt{36}-\sqrt{25}=6-5=1$. Karena $\sqrt{5\cdot 6+6}-\sqrt{4\cdot 6+1}=1$, maka $w=6$ merupakan solusi dari persamaan awal.

Dengan demikian himpunan penyelesaian dari persamaan irrasional $\sqrt{5w+6}-\sqrt{4w+1}=1$ adalah $\{2,6\}$.

Persamaan yang mengandung bentuk akar pangkat tiga.

Contoh:

1. Tentukan solusi dari persamaan irrasional $\sqrt[3]{7a+1}-2\sqrt[3]{a-1}=0$.

   Solusi:

$$\sqrt[3]{7a+1}-2\sqrt[3]{a-1}=0$$

   Pisahkan kedua bentuk akar pada dua ruas berbeda, diperoleh

$$\sqrt[3]{7a+1}=2\sqrt[3]{a-1}$$

   Pangkat tigakan kedua ruas persamaan, diperoleh

$$\begin{aligned}\left(\sqrt[3]{7a+1}\right)^3 &= \left(2\sqrt[3]{a-1}\right)^3\\ 7a+1 &= 8(a-1)\\ 7a+1 &= 8a-8\\ 9 &= a\end{aligned}$$

   Substitusikan nilai $a=9$ ke persamaan awal $\sqrt[3]{7a+1}-2\sqrt[3]{a-1}=0$.

   Periksa apakah benar $\sqrt[3]{7\cdot 9+1}-2\sqrt[3]{9-1}=0$.

   Jelas bahwa $\sqrt[3]{7\cdot 9+1}-2\sqrt[3]{9-1}=\sqrt[3]{63+1}-2\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{64}-2\sqrt[3]{8}=4-2\cdot 2=0$. Karena $\sqrt[3]{7\cdot 9+1}-2\sqrt[3]{9-1}=0$, maka himpunan penyelesaian dari persamaan irrasional $\sqrt[3]{7a+1}-2\sqrt[3]{a-1}=0$ adalah $\{9\}$.

2. Pertidaksamaan Irrasional

Pertidaksamaan irrasional adalah pertidaksamaan dengan bentuk aljabar berada di dalam tanda akar. Sebagai contoh adalah $\sqrt{x+5}<2$ dan $\sqrt{2x+1}\geq\sqrt{x^2-2}$. Hal yang perlu dicermati dalam menentukan solusi dari pertidaksamaan irrasional adalah suatu fungsi irrasional bernilai real atau terdefinisikan jika bentuk aljabar di dalam tanda akar dari fungsi irrasional tersebut tak negatif. Dengan demikian fungsi irrasional $f(x)=\sqrt{u(x)}$ terdefinisi atau bernilai real jika dan hanya jika $u(x)\geq 0$.

Bentuk-bentuk pertidaksamaan irrasional yang sering muncul dan cara menentukan solusinya adalah sebagai berikut:

a. Bentuk $\sqrt{f(x)}<a$ dengan $a>0$. Syarat untuk menentukan penyelesaian adalah:
   (i) $f(x)\geq 0$
   (ii) $f(x)<a^2$
   Solusi dari pertidaksamaan adalah irisan dari (i) dan (ii).
b. Bentuk $\sqrt{f(x)}<\sqrt{g(x)}$. Syarat untuk menentukan penyelesaian adalah:
   (i) $f(x)\geq 0$
   (ii) $g(x)\geq 0$
   (iii) $f(x)<g(x)$
   Solusi dari pertidaksamaan adalah irisan dari (i), (ii), dan (iii).
c. Bentuk $\sqrt{f(x)}<g(x)$. Syarat untuk menentukan penyelesaian adalah:
   (i) $f(x)\geq 0$
   (ii) $g(x)>0$
   (iii) $f(x)<\left(g(x)\right)^2$
   Solusi dari pertidaksamaan adalah irisan dari (i), (ii), dan (iii).

Contoh:

1. Tentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan irrasional berikut.
   a. $\sqrt{x-3}<1$
   b. $\sqrt{3x+1}\leq 4$
   c. $\sqrt{4-x}>1$
   d. $\sqrt{1-2x}\geq 3$

   Solusi:
   a. Pertidaksamaan $\sqrt{x-3}<1$ memenuhi bentuk $\sqrt{f(x)}<a$.
      Syarat:
      (i) $x-3\geq 0\Rightarrow x\geq 3$

(ii) $x - 3 < 1^2 \Rightarrow x - 3 < 1$
$x < 4$

Penyelesaian $3 \leq x < 4$. Himpunan penyelesaian $\{x \mid 3 \leq x < 4\}$.

b. Pertidaksamaan $\sqrt{3x+1} < 4$ memenuhi bentuk $\sqrt{f(x)} \leq a$.

Syarat:

(i) $3x + 1 \geq 0 \Rightarrow 3x \geq -1$
$x \geq -\frac{1}{3}$

(ii) $3x + 1 \leq 16 \Rightarrow 3x < 15$
$x \leq 5$

Penyelesaian $-\frac{1}{3} \leq x \leq 5$. Himpunan penyelesaian $\left\{x \mid -\frac{1}{3} \leq x \leq 5\right\}$.

c. Pertidaksamaan $\sqrt{4-x} > 1$ memenuhi bentuk $\sqrt{f(x)} > a$.

Syarat:

(i) $4 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 4$

(ii) $4 - x > 1 \Rightarrow x < 3$

Penyelesaian $x < 3$. Himpunan penyelesaian $\{x \mid x < 3\}$.

d. Pertidaksamaan $\sqrt{1-2x} \geq 3$ memenuhi bentuk $\sqrt{f(x)} \geq a$.

Syarat:

(i) $1 - 2x \geq 0 \Rightarrow 2x \leq 1$
$x \leq \frac{1}{2}$

(ii) $1 - 2x \geq 9 \Rightarrow 2x \leq 1 - 9$
$2x \leq -8$
$x \leq -4$

Penyelesaian $x \leq -4$. Himpunan penyelesaian $\{x \mid x \leq -4\}$.

2. Selesaikan pertidaksamaan irrasional yang memenuhi bentuk $\sqrt{f(x)} \leq \sqrt{g(x)}$ atau $\sqrt{f(x)} \geq \sqrt{g(x)}$ berikut.

a. $\sqrt{2x-1} \leq \sqrt{x+3}$

b. $\sqrt{2x+1} \geq \sqrt{4x-8}$

c. $\sqrt{x^2-2x} < \sqrt{3x-6}$

d. $\sqrt{8-x^2} > \sqrt{x^2}$

Solusi:

a. $\sqrt{2x-1} \leq \sqrt{x+3}$

Syarat:

(i) $2x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{1}{2}$

(ii) $x + 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3$

(iii) $2x - 1 \leq x + 3 \Rightarrow 2x - x \leq 3 + 1$
$$x \leq 4$$

Penyelesaian $\frac{1}{2} \leq x \leq 4$.

b. $\sqrt{2x+1} \geq \sqrt{4x-8}$

Syarat:

(i) $2x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{2}$

(ii) $4x - 8 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$

(iii) $2x + 1 \geq 4x - 8 \Rightarrow 1 + 8 \geq 4x - 2x$
$$2x \leq 9$$
$$x \leq \frac{9}{2}$$

Penyelesaian $2 \leq x \leq \frac{9}{2}$.

c. $\sqrt{x^2 - 2x} < \sqrt{3x-6}$

Syarat:

(i) $x^2 - 2x \geq 0 \Rightarrow x(x-2) \geq 0$
$$x \leq 0 \quad \text{atau} \quad x \geq 2$$

(ii) $3x - 6 \geq 0 \Rightarrow 3x \geq 6$
$$x \geq 2$$

(iii) $x^2 - 2x < 3x - 6 \Rightarrow \quad x^2 - 5x + 6 < 0$
$$(x-3)(x-2) < 0$$
$$2 < x < 3$$

Penyelesaian $2 < x < 3$.

d. $\sqrt{8 - x^2} > \sqrt{x^2}$

Syarat:

(i) $8 - x^2 \geq 0 \Rightarrow \quad x^2 - 8 \leq 0$
$$\left(x + 2\sqrt{2}\right)\left(x - 2\sqrt{2}\right) \leq 0$$
$$-2\sqrt{2} \leq x \leq 2\sqrt{2}$$

(ii) $x^2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$ atau $x \leq 0$

(iii) $8 - x^2 > x^2 \Rightarrow \quad 2x^2 - 8 < 0$
$$x^2 - 4 < 0$$
$$(x+2)(x-2) < 0$$
$$-2 < x < 2$$

Penyelesaian $-2 < x < 2$.

3. Selesaikan pertidaksamaan irrasional berikut.

a. $\sqrt{3x+1} \geq x - 3$

b. $\sqrt{4 - x^2} < x + 2$

Solusi:

a. Pertidaksamaan irrasional $\sqrt{3x+1} \geq x-3$ memenuhi bentuk $\sqrt{f(x)} \geq g(x)$.

Syarat:

(i) $3x+1 \geq 0 \Rightarrow 3x \geq -1$

$$x \geq -\frac{1}{3}$$

Cek jawaban untuk $x = -\frac{1}{3}$.

$$\sqrt{3\left(-\frac{1}{3}\right)+1} \geq -\frac{1}{3}-3$$

$$0 \geq -3\frac{1}{3} \quad \text{(benar)}$$

(ii) $3x+1 \geq (x-3)^2 \Rightarrow 3x+1 \geq x^2-6x+9$

$$x^2-9x+8 \leq 0$$
$$(x-8)(x-1) \leq 0$$
$$1 \leq x \leq 8$$

Penyelesaian $-\frac{1}{3} \leq x \leq 8$.

Catatan:

Diskusikan mengapa untuk menentukan penyelesaian bentuk $\sqrt{f(x)} \geq g(x)$ Anda harus memeriksa kebenaran jawaban syarat (i).

b. Pertidaksamaan irrasional $\sqrt{4-x^2} < x+2$ memenuhi bentuk $\sqrt{f(x)} < g(x)$.

Syarat:

(i) $4-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2-4 \leq 0$

$$(x+2)(x-2) \leq 0$$
$$-2 \leq x \leq 2$$

(ii) $x+2 > 0 \Rightarrow x > -2$

(iii) $4-x^2 < (x+2)^2 \Rightarrow 4-x^2 < x^2+4x+4$

$$2x^2+4x > 0$$
$$x(x+2) > 0$$
$$x < -2 \text{ atau } x > 0$$

Penyelesaian $0 < x \leq 2$.

3. Pertidaksamaan Rasional

Pertidaksamaan pecahan atau pertidaksamaan rasional dapat ditentukan solusinya terlebih dahulu dengan menuliskan dalam bentuk umum, yaitu bentuk rasionalnya di sebelah kiri tanda pertidaksamaan dan 0 di sebelah kanan tanda pertidaksamaan.

Contoh:

1. Tentukan solusi dari pertidaksamaan rasional $\frac{2x-7}{x-5} \leq 3$.

   Solusi:

$$\frac{2x-7}{x-5} \leq 3$$

   Tuliskan pertidaksamaan dalam bentuk umum, diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{2x-7}{x-5} - 3 &\leq 0 \\ \frac{2x-7-3x+15}{x-5} &\leq 0 \\ \frac{-x+8}{x-5} &\leq 0 \end{aligned}$$

   Perhatikan bahwa pembuat nol dari pertidaksamaan adalah $x = 8$ dan $x = 5$.

   Interval yang terbentuk adalah $(-\infty, 5)$, $(5, 8)$, dan $(8, \infty)$.

   Tes tanda untuk masing-masing interval.

   Pada interval $(-\infty, 5)$ ambil sebarang titik, misal $x = 4$.

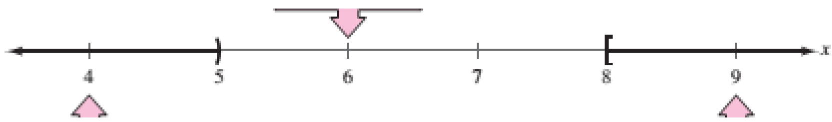
$$\frac{-4+8}{4-5} = \frac{4}{-1} = -4 < 0$$

   Pada interval $(5, 8)$ ambil sebarang titik, misal $x = 6$.

$$\frac{-6+8}{6-5} = \frac{2}{1} = 2 > 0$$

   Pada interval $(8, \infty)$ ambil sebarang titik, misal $x = 9$.

$$\frac{-9+8}{9-5} = \frac{-1}{4} = -\frac{1}{4} < 0$$



   Setelah dilakukan tes interval, diketahui bahwa pertidaksamaan dipenuhi pada interval terbuka $(-\infty, 5)$ dan $(8, \infty)$. Lebih lanjut karena $\frac{-x+8}{x-5} = 0$ untuk $x = 8$, maka himpunan penyelesaiannya adalah seluruh bilangan real pada interval $(-\infty, 5) \cup (8, \infty)$.

Catatan:

Kesalahan umum yang sering dilakukan dalam menyelesaikan pertidaksamaan rasional adalah dengan mengalikan kedua ruas pertidaksamaan dengan penyebut dari pertidaksamaan. Khususnya pada contoh di atas, kesalahan yang sering terjadi adalah dengan mengalikan kedua ruas dengan $x - 5$. Apabila hal tersebut dilakukan, maka kita akan berhadapan dengan dua kasus, yaitu $x - 5$ dapat bernilai positif atau bernilai negatif (asumsikan $x - 5 \neq 0$) dan kita harus membalik tanda pertidaksamaan. Di sinilah pentingnya kita untuk menuliskan pertidaksamaan dalam bentuk umum, yaitu bentuk rasionalnya di sebelah kiri tanda pertidaksamaan dan 0 di sebelah kanan tanda pertidaksamaan.

2. Tentukan solusi dari pertidaksamaan rasional $\frac{(2x+1)^2(x-1)}{x(x^2-1)} \geq 0$.

   Solusi:

$$\frac{(2x+1)^2(x-1)}{x(x^2-1)} \geq 0$$

   Jelas bahwa $x - 1$ merupakan faktor dari pembilang dan penyebut. Dengan mengasumsikan $x - 1 \neq 0$ atau $x \neq 1$, kita dapat mengkanselasi faktor ini dan menuliskan pertidaksamaan dalam bentuk

$$\frac{(2x+1)^2}{x(x+1)} \geq 0, x \neq 1$$

   Perhatikan bahwa pembuat nol dari pertidaksamaan adalah $x = -1$, $x = -\frac{1}{2}$, dan $x = 0$.

   Interval yang terbentuk adalah $(-\infty, -1)$, $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, dan $(0, \infty)$.

   Tes tanda untuk masing-masing interval.

   Pada interval $(-\infty, -1)$ ambil sebarang titik, misal $x = -2$.

$$\frac{(2 \cdot (-2) + 1)^2}{-2(-2+1)} = \frac{9}{2} > 0$$

   Pada interval $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ ambil sebarang titik, misal $x = -\frac{3}{4}$.

$$\frac{\left(2\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)+1\right)^2}{-\frac{3}{4}\left(-\frac{3}{4}+1\right)}=\frac{\frac{1}{4}}{-\frac{3}{16}}<0$$

Pada interval $\left(-\frac{1}{2}\,,0\right)$ ambil sebarang titik, misal $x=-\frac{1}{4}$.

$$\frac{\left(2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)+1\right)^2}{-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4}+1\right)}=\frac{\frac{1}{4}}{-\frac{3}{16}}<0$$

Pada interval $(0,\infty)$ ambil sebarang titik, misal $x=1$.

$$\frac{(2\cdot 1+1)^2}{1(1+1)}=\frac{9}{2}>0$$

Setelah dilakukan tes interval, diketahui bahwa pertidaksamaan dipenuhi pada interval terbuka $(-\infty,-1)$ dan $(0,\infty)$. Himpunan penyelesaiannya adalah seluruh bilangan real pada interval $(-\infty,-1)\cup(0,\infty)$.

D. Aktivitas Belajar

Kegiatan 1.

1. Perhatikan persamaan irrasional $x-1=\sqrt{15-7x}$ dan persamaan irrasional $(x-1)^2=\left(\sqrt{15-7x}\right)^2$. Apakah kedua persamaan tersebut merupakan persamaan yang ekuivalen? Jelaskan.
2. Persamaan irrasional $\sqrt{x+10}-\sqrt{x-10}=0$ tidak mempunyai solusi bilangan real. Benar atau salahkah pernyataan tersebut. Berikan alasannya.
3. Suatu persamaan irrasional tidak pernah mempunyai lebih dari satu *extraneous solution*. Benar atau salahkah pernyataan tersebut. Berikan alasannya.
4. Pada saat menyelesaikan suatu persamaan irrasional, tuliskan tiga operasi yang dapat menghasilkan *extraneous solution*. Tuliskan tiga contoh persamaan yang mempunyai *extraneous solution*.
5. Perhatikan persamaan irrasional $x+\sqrt{x-a}=b$, dengan a dan b adalah konstanta. Tentukan nilai a dan b yang memenuhi apabila solusi dari persamaan irrasional tersebut adalah $x=20$.
6. Tuliskan satu paragraf singkat yang menjelaskan langkah-langkah dalam menentukan solusi dari suatu persamaan irrasional dan jelaskan juga pentingnya langkah untuk selalu mengecek solusi yang diperoleh.

Diskusikan permasalahan tersebut dan presentasikan hasil kerja Anda.

Kegiatan 2.

1. Selesaikan pertidaksamaan irrasional berikut.

   a. $\sqrt{\frac{2x-2}{x-3}} < 2$

   b. $\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} > 1$

   c. $\sqrt{\frac{x+3}{2x-1}} \leq 2$

   d. $\sqrt{\frac{2x-1}{x+3}} \geq 2$

2. Selesaikan pertidaksamaan irrasional berikut.

   a. Jika $2 < x < 5$, tentukan penyelesaian $\sqrt{x^2 - 4x + 4} - \sqrt{x^2 - 10x + 25}$.

   b. Jika $3 < x < 5$, tentukan penyelesaian $\sqrt{x^2 - 6x + 9} - \sqrt{x^2 - 10x + 25}$.

3. Suatu fungsi irrasional ditentukan oleh rumus fungsi $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$. Tentukan nilai-nilai x agar $f(x)$ kurang dari 1.

Kegiatan 3.

1. Pada saat menentukan solusi pertidaksamaan $\frac{x-1}{x-2} \geq 3$, jelaskan mengapa terjadi kesalahan jika kita menuliskan $x - 1 \geq 3(x - 2)$ pada langkah pertama.
2. Tentukan solusi dari pertidaksamaan rasional berikut.
   a. $\frac{-3x}{x^2-9} > 0$
   b. $\frac{2x}{16-x^2} < 0$
   c. $\frac{1}{x-2} \geq \frac{3}{x+1}$
   d. $\frac{x}{3x-5} \leq \frac{2}{x-1}$
   e. $\frac{3}{x-1} + \frac{2x}{x+1} > -1$
   f. $\frac{3x}{x-1} \leq \frac{x}{x+4} + 3$
   g. $\frac{x^2(x+2)}{(x+2)(x+1)} \leq 0$
   h. $\frac{(x^2+1)(x-3)}{x^2-9} \geq 0$
   i. $\frac{(x+3)^2(2-x)}{(x+4)(x^2-4)} \leq 0$

E. Latihan

1. Tentukan solusi dari persamaan irrasional $\sqrt{3x+1}+\sqrt{3x}=2$.
2. Tentukan solusi dari persamaan irrasional $\sqrt{10x-1}=\sqrt{-10x+10}-1$.
3. Tentukan solusi dari persamaan irrasional $1{,}2x=\sqrt{3{,}1x+5}$.
4. Tentukan solusi dari persamaan irrasional $\sqrt{1{,}9x^2-2{,}2}=-0{,}8x+3$.
5. Tentukan solusi dari persamaan irrasional $\sqrt{2x-3}=3-x$.
6. Tentukan solusi dari persamaan irrasional $x-\sqrt{4-3x}=-8$.
7. Tentukan solusi dari persamaan irrasional $\sqrt{2x-4}-\sqrt{3x+4}=-2$.
8. Tentukan solusi dari persamaan irrasional $\sqrt{2x-1}+\sqrt{x-4}=4$.
9. Tentukan solusi dari persamaan irrasional $\sqrt[3]{-6x-1}=\sqrt[3]{-2x-5}$.
10. Tentukan solusi dari persamaan irrasional $\sqrt[4]{4x+1}-2=0$.
11. Tentukan solusi dari persamaan irrasional $\sqrt{7-2x}-\sqrt{5+x}=\sqrt{4+3x}$.
12. Tentukan solusi dari persamaan irrasional $4\sqrt{1+3x}+\sqrt{6x+3}=\sqrt{-6x-1}$.
13. Tentukan solusi dari persamaan irrasional $\sqrt{2\sqrt{x+1}}=\sqrt{3x-5}$.
14. Tentukan solusi dari persamaan irrasional $\sqrt{1+4\sqrt{x}}=\sqrt{x}+1$
15. Tentukan solusi dari persamaan irrasional $\sqrt{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}=\sqrt{3}$.
16. Tentukan solusi dari pertidaksamaan irrasional $\sqrt{2x-1}<\sqrt{x+3}$.
17. Tentukan solusi dari pertidaksamaan irrasional $\sqrt{x^2-3x}<3\sqrt{2}$.
18. Tentukan solusi dari pertidaksamaan irrasional $\sqrt{8-x^2}<\sqrt{x^2}$.
19. Tentukan solusi dari pertidaksamaan irrasional $\sqrt{3-x}<\sqrt{x-1}$.

20. Tentukan solusi dari pertidaksamaan irrasional $\sqrt{9-x^2} < \sqrt{8x^2}$.

F. Rangkuman

Persamaan irrasional adalah persamaan dengan variabel-variabelnya ada yang terdapat di bawah tanda akar (bisa berupa akar pangkat dua, akar pangkat tiga, ataupun akar pangkat yang lebih tinggi).
Persamaan irrasional dapat ditentukan solusinya berdasarkan prinsip pangkat (*The Power Principle*).

Prinsip Pangkat:
Jika P dan Q merupakan bentuk-bentuk aljabar dan n merupakan bilangan bulat positif, maka setiap solusi dari $P = Q$ juga merupakan solusi dari $P^n = Q^n$.

Setiap solusi dari $P^n = Q^n$ yang bukan merupakan solusi dari $P = Q$ dinamakan sebagai *extraneous solution*. Bentuk *extraneous solution* dapat muncul sebagai akibat dari memangkatkan kedua ruas persamaan awal dengan pangkat bilangan genap.

Pertidaksamaan irrasional adalah pertidaksamaan dengan bentuk aljabar berada di dalam tanda akar. Hal yang perlu dicermati dalam menentukan solusi dari pertidaksamaan irrasional adalah suatu fungsi irrasional bernilai real atau terdefinisikan jika bentuk aljabar di dalam tanda akar dari fungsi irrasional tersebut tak negatif. Dengan demikian fungsi irrasional $f(x) = \sqrt{u(x)}$ terdefinisi atau bernilai real jika dan hanya jika $u(x) \geq 0$.

Bentuk-bentuk pertidaksamaan irrasional yang sering muncul dan cara menentukan solusinya adalah sebagai berikut:

a. Bentuk $\sqrt{f(x)} < a$ dengan $a > 0$. Syarat untuk menentukan penyelesaian adalah:
   (i) $f(x) \geq 0$
   (ii) $f(x) < a^2$
   Solusi dari pertidaksamaan adalah irisan dari (i) dan (ii).
b. Bentuk $\sqrt{f(x)} < \sqrt{g(x)}$. Syarat untuk menentukan penyelesaian adalah:

(i) $f(x) \geq 0$

(ii) $g(x) \geq 0$

(iii) $f(x) < g(x)$

Solusi dari pertidaksamaan adalah irisan dari (i), (ii), dan (iii).

c. Bentuk $\sqrt{f(x)} < g(x)$. Syarat untuk menentukan penyelesaian adalah:

(i) $f(x) \geq 0$

(ii) $g(x) > 0$

(iii) $f(x) < \left(g(x)\right)^2$

Solusi dari pertidaksamaan adalah irisan dari (i), (ii), dan (iii).

Pertidaksamaan pecahan atau pertidaksamaan rasional dapat ditentukan solusinya terlebih dahulu dengan menuliskan dalam bentuk umum, yaitu bentuk rasionalnya di sebelah kiri tanda pertidaksamaan dan 0 di sebelah kanan tanda pertidaksamaan.

Kesalahan umum yang sering dilakukan dalam menyelesaikan pertidaksamaan rasional adalah dengan mengalikan kedua ruas pertidaksamaan dengan penyebut dari pertidaksamaan. Khususnya pada contoh di atas, kesalahan yang sering terjadi adalah dengan mengalikan kedua ruas dengan $x - 5$. Apabila hal tersebut dilakukan, maka kita akan berhadapan dengan dua kasus, yaitu $x - 5$ dapat bernilai positif atau bernilai negatif (asumsikan $x - 5 \neq 0$) dan kita harus membalik tanda pertidaksamaan. Di sinilah pentingnya kita untuk menuliskan pertidaksamaan dalam bentuk umum, yaitu bentuk rasionalnya di sebelah kiri tanda pertidaksamaan dan 0 di sebelah kanan tanda pertidaksamaan.

G. Umpan Balik dan Tindak Lanjut

Evaluasi diri

Untuk mengukur ketercapaian peserta diklat dalam mempelajari modul ini lakukan evaluasi diri sebagai berikut secara jujur

Petunjuk:

Evaluasi diri dengan cara mengerjakan soal latihan/tugas yang terdiri dari 20 soal. Pada masing-masing soal, pengerjaan yang benar mendapatkan skor maksimal 5. Jadi skor total 100. Capaian kompetensi (CK) dirumuskan sebagai

$$CK = \frac{Skor\ yang\ diperoleh}{100} \times 100\%$$

Setelah mengerjakan semua soal latihan/tugas, cocokkan jawaban Anda dengan kunci jawaban yang telah disajikan untuk mengukur capaian kompetensi (CK).

Tindak Lanjut

Seperti telah dijelaskan pada bagian sebelumnya bahwa evaluasi yang dilakukan oleh diri sendiri secara jujur adalah kunci keberhasilan mengukur capaian kompetensi (CK). Berkaitan dengan itu, pertimbangkan hal berikut.

Perolehan CK (dalam %)	Deskripsi dan tindak lanjut
$91 \leq \text{CK} \leq 100$	Sangat Baik, berarti Anda benar-benar memahami persamaan dan pertidaksamaan rasional. Selanjutnya kembangkan pengetahuan dan tuangkan dalam pembelajaran.
$76 \leq \text{CK} < 91$	Baik, berarti Anda cukup memahami persamaan dan pertidaksamaan rasional walaupun ada beberapa bagian yang perlu dipelajari lagi. Selanjutnya pelajari lagi beberapa bagian yang dirasakan belum begitu dipahami.
$50 \leq \text{CK} < 76$	Cukup, berarti Anda belum cukup memahami persamaan dan pertidaksamaan rasional. Oleh karena itu Anda perlu mempelajari lagi bagian yang belum dikuasai dan menambah referensi dari sumber lain.
$\text{CK} < 50$	Kurang, berarti Anda belum dapat memahami persamaan dan pertidaksamaan rasional. Oleh karena itu Anda perlu mempelajari lagi dari awal dan menambah referensi dari sumber lain.

H. Kunci Jawaban

Kunci:

1. $\frac{3}{16}$
2. $\frac{11-\sqrt{17}}{20}$
3. 3,228
4. $-5{,}443$ atau 1,633
5. 2
6. -4
7. 4 atau 20
8. 5
9. 1

10. $\frac{15}{4}$
11. -1
12. $-\frac{1}{3}$
13. 7
14. 0 atau 4
15. 1
16. $\frac{1}{2} \leq x < 4$
17. $-3 < x \leq 0$ atau $3 \leq x < 6$
18. $-2\sqrt{2} \leq x < -2$ atau $2 < x \leq 2\sqrt{2}$
19. $2 < x \leq 3$
20. $-3 \leq x < -1$ atau $1 < x \leq 3$

KB 7: Persamaan dan Pertidaksamaan Mutlak

A. Tujuan

Tujuan kegiatan pembelajaran ini adalah untuk memberikan pemahaman kepada pembaca terkait dengan konsep persamaan dan pertidaksamaan mutlak, dan memanfaatkannya dalam penyelesaian masalah.

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

Setelah membaca dan mengikuti serangkaian kegiatan pada bagian ini, pembaca diharapkan mampu

1 Menjelaskan konsep nilai mutlak.

2 Menentukan penyelesaian persamaan mutlak.

3 Menentukan penyelesaian pertidaksamaan mutlak.

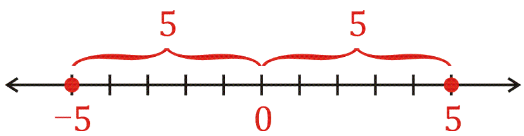
C. Uraian Materi

1. Persamaan Mutlak

a. Nilai Mutlak

Dalam garis bilangan, jarak titik A dan B ke O adalah 5. Padahal, dalam garis bilangan, posisi A adalah -5 dan posisi B di 5. Dalam matematika kondisi di atas dapat sebagai nilai mutlak -5 adalah 5, dan nilai mutlak 5 adalah 5. Pernyataan tersebut dapat dinotasikan dengan

$|-5| = 5$ dan $|5| = 5$.



Dari ilustrasi di atas, nilai mutlak suatu bilangan real dapat didefinisikan sebagai

$$|a| = \begin{cases} a & \text{jika } a \geq 0 \\ -a & \text{jika } a < 0 \end{cases}$$

Perhatikan bahwa berdasarkan definisi tersebut, nilai mutlak suatu bilangan tidak pernah negatif. Sebagai contoh dengan definisi di atas, nilai $|-5| = -(-5) = 5$.

Nilai Mutlak dan Jarak Antar Dua Titik Pada Garis Bilangan

Jika a dan b dua buah bilangan real, maka jarak antara a dan b adalah $|a - b|$ atau $|b - a|$.

b. Bentuk akar dan nilai mutlak

Untuk setiap bilangan real a, $\sqrt{a^2} = |a|$

Berdasarkan prinsip ini, maka akar kuadrat dari a^2 adalah nilai mutlak dari a. Sebagai contoh, $\sqrt{3^2} = 3$, $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$, $\sqrt{(x-1)^2} = |x-1|$ dan $\sqrt{(2x)^2} = |2x|$.

Secara umum dapat dinyatakan

$\sqrt[n]{a^n} = |a|$ untuk n genap

$\sqrt[n]{a^n} = a$ untuk n ganjil.

Contoh, $\sqrt[4]{(-2)^4} = |-2| = 2$ dan $\sqrt[3]{(-2)^3} = -2$.

c. Sifat-sifat Nilai Mutlak

i. $|a| \geq 0$

ii. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

iii. $|-a| = |a|$

iv. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, untuk $b \neq 0$

Bukti:

i. Dari definisi, untuk a negatif, maka $|a| = -a$ yang berarti $|a| > 0$. Sementara itu, untuk $a \geq 0$, nilai $|a| = a \geq 0$. Dari kedua pertidaksamaan ini diperoleh $|a| \geq 0$. Terbukti.

ii. Sifat $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ akan dibuktikan dengan membagi menjadi empat kasus.

Kasus I, $a \geq 0$ dan $b \geq 0$, maka $|a| = a$, $|b| = b$, dan $a \cdot b \geq 0$ sehingga sesuai definisi $|a \cdot b| = a \cdot b$. Akibatnya $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.

Kasus II, $a \geq 0$ dan $b < 0$, maka $|a| = a$, $|b| = -b > 0$ dan $a \cdot b < 0$. Dengan demikian $|a \cdot b| = -(a \cdot b) = a \cdot (-b) = |a| \cdot |b|$.

Kasus III, $a < 0$ dan $b \geq 0$, bukti analog dengan kasus II.

Kasus IV, $a < 0$ dan $b < 0$, maka $|a| = -a > 0$, $|b| = -b > 0$ dan $a \cdot b = (-a) \cdot (-b) > 0$. Sesuai definisi, maka $|a \cdot b| = |(-a) \cdot (-b)| = (-a) \cdot (-b) = |a| \cdot |b|$.

Dari keempat kasus di atas, terbukti bahwa $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.

iii. Dengan menggunakan sifat ii, maka $|-a| = |-1 \cdot a| = |-1||a| = 1|a| = |a|$. Diperoleh $|-a| = |a|$. Terbukti.

iv. Berdasarkan sifat $|x| = \sqrt{x^2}$, maka $\left|\frac{a}{b}\right| = \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{b^2}} = \frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{b^2}} = \frac{|a|}{|b|}$.

Diperoleh $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$. Terbukti.

Contoh:

Untuk setiap fungsi f berikut, lukislah grafik $y = f(x)$ dan $y = |f(x)|$. Jelaskan bagaimana pengaruh pengambilan nilai mutlak terhadap grafik f.

(a) $f(x) = x + 2$ (b) $f(x) = -2x + 4$

Penyelesaian:

(a) ....?

d. Menyelesaikan Persamaan Mutlak

Jika diberikan sebuah persamaan $|x| = 4$, maka persamaan tersebut akan bernilai benar untuk $x = 4$ atau $x = -4$. Sehingga dapat dikatakan himpunan penyelesaian persamaan $|x| = 4$ adalah $\{-4, 4\}$.

Secara umum,

Jika $|x| = a$ maka $x = a$ atau $x = -a$.

Contoh:

Selesaikan persamaan $|x - 3| = 5$.

Penyelesaian:

Cara 1, menggunakan definisi.

Untuk kasus $x - 3 \geq 0$, maka $|x - 3| = x - 3$, sehingga

$x - 3 = 5$

$x = 8$ (1)

Untuk kasus $x - 3 < 0$, maka $|x - 3| = -(x - 3)$, sehingga

$-(x - 3) = 5$

$-x + 3 = 5$

$x = -2$ (2)

Dari (1) dan (2), diperoleh penyelesaian $x = -2$ atau $x = 8$.

Cara 2, menggunakan sifat $|x| = \sqrt{x^2}$.

Dengan mengkuadratkan kedua ruas persamaan $|x - 3| = 5$, diperoleh

$|x - 3|^2 = 5^2$

$x^2 - 6x + 9 = 25$

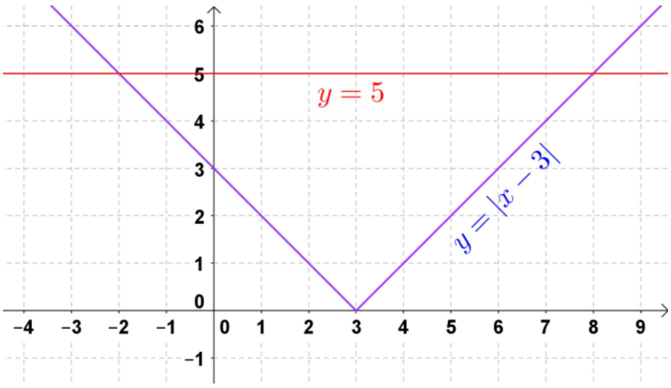
$x^2 - 6x - 16 = 0$

$(x + 2)(x - 8) = 0$

$x + 2 = 0$ atau $x - 8 = 0$

Diperoleh penyelesaian $x = -2$ atau $x = 8$.

Untuk memeriksa hasil, Anda dapat menggunakan aplikasi GeoGebra dengan memasukkan perintah di *input bar*: $y = abs(x - 3)$ dan $y = 5$. Perhatikan perpotongan kedua grafik ada di $x = -2$ dan $x = 8$.



Contoh:

Tentukan penyelesaian $|1 - 3x| = -5$.

Penyelesaian:

Nilai $|a|$ tidak pernah negatif. Dengan demikian tidak ada nilai x yang memenuhi $|1 - 3x| = -5$. Tidak ada penyelesaian.

Contoh:

Selesaikan persamaan $-2|x - 4| = -3|x - 4| + 8$.

Penyelesaian:

$-2|x - 4| = -3|x - 4| + 8$

$-2|x - 4| + 3|x - 4| = 8$

$|x - 4| = 8$

$x - 4 = 8$ atau $-(x - 4) = 8$

Diperoleh penyelesaian $x = 12$ atau $x = -4$.

Contoh:

Tentukan himpunan penyelesaian $|x - 1| - 2 = -|2x - 1| + 2$.

Penyelesaian:

Cara 1.

$$|x - 1| - 2 = -|2x - 1| + 2$$

Kasus I, $(x-1) \geq 0$ dan $(2x-1) \geq 0$, untuk kasus ini diperoleh syarat $x \geq 1$ atau $x \geq \frac{1}{2}$. Jika digabungkan, diperoleh syarat $x \geq 1$.

$(x-1)-2 = -(2x-1)+2$

$x-3 = -2x+1+2$

$3x = 6$

$x = 2$, memenuhi syarat $x \geq 1$ (1)

Kasus II, $(x-1) \geq 0$ dan $(2x-1) < 0$, untuk kasus ini maka nilai x harus memenuhi syarat $x \geq 1$ dan $x < \frac{1}{2}$, tidak ada nilai x yang memenuhi.

Kasus III, $(x-1) < 0$ dan $(2x-1) \geq 0$, untuk kasus ini maka nilai x harus memenuhi syarat $x < 1$ dan $x \geq \frac{1}{2}$, atau jika digabungkan $\frac{1}{2} \leq x < 1$.

$-(x-1)-2 = -(2x-1)+2$

$-x-1 = -2x+1+2$

$x = 4$

$x = 4$, tidak memenuhi syarat $\frac{1}{2} \leq x < 1$.

Kasus III, $(x-1) < 0$ dan $(2x-1) < 0$, untuk kasus ini maka nilai x harus memenuhi syarat $x < 1$ dan $x < \frac{1}{2}$, atau jika digabungkan $x < \frac{1}{2}$.

$-(x-1)-2 = -\left(-(2x-1)\right)+2$

$-x-1 = 2x-1+2$

$-2 = 3x$

$x < -\frac{2}{3}$, memenuhi syarat $x < \frac{1}{2}$ (2)

Dari (1) dan (2), diperoleh himpunan penyelesaian $\left\{-\frac{2}{3}, 2\right\}$.

Cara 2.

Langkah	Alasan
$\lvert x-1\rvert - 2 = -\lvert 2x-1\rvert + 2$	
$\lvert x-1\rvert - 4 = -\lvert 2x-1\rvert$	Kedua ruas ditambah -2
$(\lvert x-1\rvert - 4)^2 = (-\lvert 2x-1\rvert)^2$	Kedua ruas dikuadratkan
$\lvert x-1\rvert^2 - 8\lvert x-1\rvert + 16 = (2x-1)^2$	Diuraikan
$x^2-2x+1-8\lvert x-1\rvert+16 =$ $4x^2-4x+1$	Diuraikan, bentuk mutlak disendirikan di satu sisi.
$-8\lvert x-1\rvert = 3x^2-2x-16$	Disederhanakan

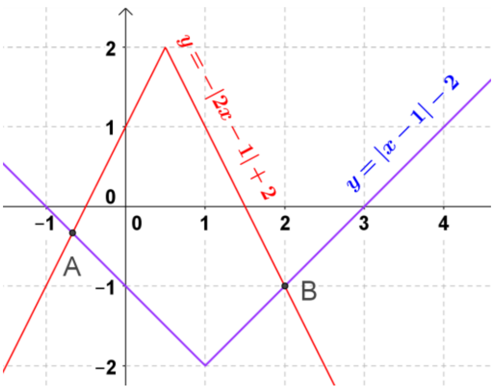
$(-8\|x-1\|)^2 = (3x^2-2x-16)$	Kedua ruas dikuadratkan
$64x^2-128x+64 =$ $9x^4-12x^3-92x^2+64x+256$	Diuraikan
$9x^4-12x^3-156x^2+192x+192$ $= 0$	Disederhanakan
$3x^4-4x^3-52x^2+64x+64=0$	Kedua ruas dibagi 3
$(x-4)(x-2)(x+4)(3x+2)=0$	Difaktorkan (ingat kembali materi suku banyak)

Diperoleh $x = 4$ atau $x = 2$ atau $x = -4$ atau $x = -\frac{2}{3}$. Perlu diperhatikan bahwa menyelesaikan persamaan dengan mengkuadratkan kedua ruas kadang-kadang menghasilkan "penyelesaian palsu". Untuk itu, hasil ini harus diperiksa satu per satu ke persamaan $|x-1|-2=-|2x-1|+2$.

- Untuk $x=-4$, diperoleh $|-4-1|-2=-|2\cdot(-4)-1|+2$, sehingga $3=-5$ (salah). Akibatnya $x=-4$ bukan penyelesaian.
- Untuk $x=2$, diperoleh $|2-1|-2=-|2\cdot 2-1|+2$, sehingga $-1=-1$ (benar). Akibatnya $x=2$ merupakan penyelesaian.
- Untuk $x=-\frac{2}{3}$, diperoleh $\left|-\frac{2}{3}-1\right|-2=-\left|2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)-1\right|+2$, sehingga $-\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}$ (benar). Akibatnya $x=-\frac{2}{3}$ merupakan penyelesaian.
- Untuk $x=4$, diperoleh $|4-1|-2=-|2\cdot 4-1|+2$, sehingga $1=-5$ (salah). Akibatnya $x=-4$ bukan penyelesaian.

Dari hasil pemeriksaan di atas, maka diperoleh himpunan penyelesaian $\left\{-\frac{2}{3},2\right\}$.

Hasil pekerjaan di atas dapat Anda periksa menggunakan dengan aplikasi GeoGebra.



Contoh:

Tentukan himpunan penyelesaian $|x^2 - 5x + 4| = 2$.

Penyelesaian:

Cara 1

Kasus I, untuk $x^2 - 5x + 4 \geq 0$, maka diperoleh persamaan $x^2 - 5x + 4 = 2$.

$$x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{5 + \sqrt{17}}{2} \approx 4{,}562 \text{ atau } x = \frac{5 - \sqrt{17}}{2} \approx 0{,}438$$

Syarat untuk kasus I adalah $x^2 - 5x + 4 \geq 0$, atau dengan bentuk lain $(x-4)(x-1) \geq 0$. Diperoleh syarat $x \leq 1$ atau $x \geq 4$, sehingga nilai x di atas memenuhi persyaratan.

Kasus II, untuk $x^2 - 5x + 4 < 0$, maka diperoleh persamaan $-(x^2 - 5x + 4) = 2$.

$$x^2 - 5x + 4 = -2$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$(x-2)(x-3) = 0$$

$$x = 2 \text{ atau } x = 3$$

Perhatikan syarat untuk kasus II adalah $x^2 - 5x + 4 < 0$. Dengan penyelesaian sistim pertidaksamaan kuadrat, diperoleh syarat $1 < x < 4$. Dengan demikian nilai x di atas memenuhi persyaratan.

Akibatnya, himpunan penyelesaian $|x^2 - 5x + 4| = 2$ adalah $\left\{\frac{5-\sqrt{17}}{2},\ 2,\ 3,\ \frac{5+\sqrt{17}}{2}\right\}$.

Cara II.

$|x^2 - 5x + 4| = 2$

$|x^2 - 5x + 4|^2 = 2^2$

$x^4 - 10x^3 + 33x^2 - 40x + 16 - 4 = 0$

$x^4 - 10x^3 + 33x^2 - 40x + 12 = 0$

$(x-3)(x-2)(x^2 - 5x + 2) = 0$

$x = 3$, atau $x = 2$, atau $x^2 - 5x + 2 = 0$

Untuk $x^2 - 5x + 2 = 0$, dengan rumus akar diperoleh $x = \frac{5-\sqrt{17}}{2}$ atau $x = \frac{5+\sqrt{17}}{2}$.

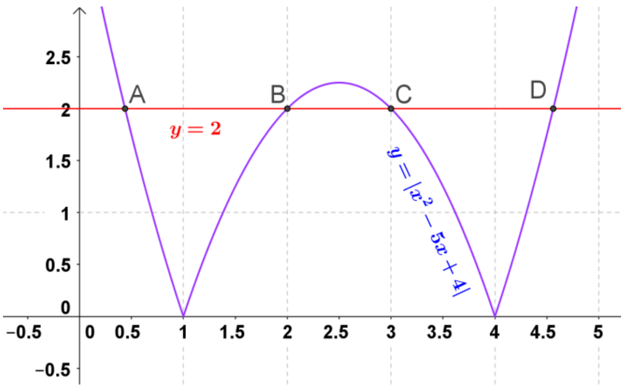
Pemeriksaan

x	Substitusi ke	Keterangan

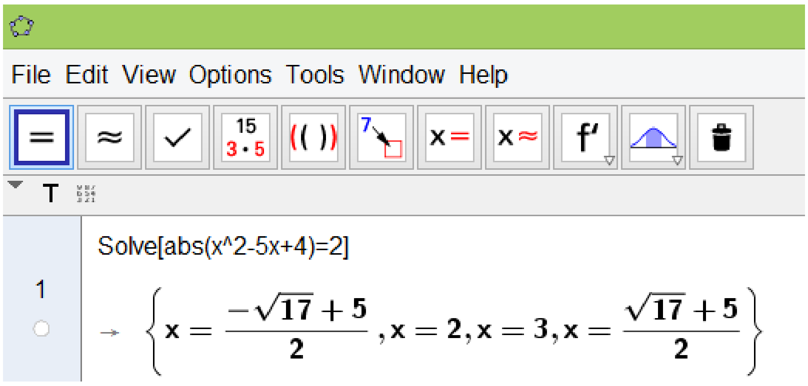
	$\left\|x^2 - 5x + 4\right\| = 2$	
$x = \frac{5-\sqrt{17}}{2}$	Untuk memudahkan, dimodifikasi (mengapa?) $\left\|(x^2 - 5x + 2) + 2\right\| = 2$ $\|0 + 2\| = 2$	memenuhi
$x = 2$	$\left\|2^2 - 5 \cdot 2 + 4\right\| = 2$ $2 = 2$	memenuhi
$x = 3$	$\left\|3^2 - 5 \cdot 3 + 4\right\| = 2$ $2 = 2$	memenuhi
$x = \frac{5+\sqrt{17}}{2}$	Untuk memudahkan, dimodifikasi $\left\|(x^2 - 5x + 2) + 2\right\| = 2$ $\|0 + 2\| = 2$	memenuhi

Jadi himpunan penyelesaian $|x^2 - 5x + 4| = 2$ adalah $\left\{\frac{5-\sqrt{17}}{2}, 2, 3, \frac{5+\sqrt{17}}{2}\right\}$.

Pemeriksaan secara grafik dapat dilakukan dengan memasukkan ke input bar $y = abs(x^2 - 5x + 4)$ dan $y = 2$. Perhatikan nilai x untuk titik potong kedua grafik.



Anda dapat juga memeriksa hasilnya dengan fasilitas CAS (*Computer Algebra System*) pada aplikasi GeoGebra dengan memasukkan perintah di jendela CAS: solve[abs($x^2 - 5x + 4$)=4]. Dengan perintah ini, diperoleh hasil seperti pada gambar di bawah.



Contoh:

Tentukan penyelesaian $\left|\frac{x+2}{x-4}\right| = 2$.

Penyelesaian:

Cara 1, dengan membagi kasus per kasus.

Kasus I, untuk $\frac{x+2}{x-4} \geq 0$ ingat kembali materi pertidaksamaan rasional, dengan menyelesaikan pertidaksamaan tersebut diperoleh syarat $x \leq -2$ atau $x > 4$.

$$\frac{x+2}{x-4} = 2$$

$$\frac{x+2}{x-4} - \frac{2(x-4)}{x-4} = 0$$

$$\frac{x+2-2x+8}{x-4} = 0$$

$$\frac{-x+10}{x-4} = 0$$

Nilai $x = 10$ memenuhi syarat $x > 4$ sehingga merupakan penyelesaian.

Kasus II, untuk $\frac{x+2}{x-4} < 0$ diperoleh syarat yang harus dipenuhi $-2 \leq x < 4$.

$$-\frac{x+2}{x-4} = 2$$

$$\frac{-x-2}{x-4} - \frac{2(x-4)}{x-4} = 0$$

$$\frac{-3x+6}{x-4} = 0$$

Nilai $x = 2$ memenuhi syarat $-2 \leq x < 4$ sehingga merupakan penyelesaian.

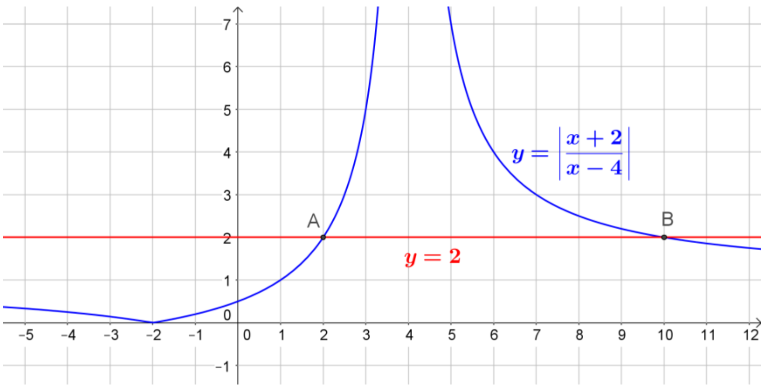
Dari kedua kasus di atas penyelesaian $\left|\frac{x+2}{x-4}\right| = 2$ adalah $x = 2$ atau $x = 10$.

Cara 2, dengan mengkuadratkan kedua ruas.

Langkah	Alasan

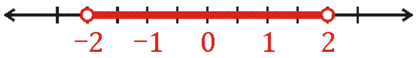
$\left\|\frac{x+2}{x-4}\right\| = 2$	Soal diberikan
$\left\|\frac{x+2}{x-4}\right\|^2 = 2^2$	Kedua ruas dikuadratkan
$\frac{(x+2)^2}{(x-4)^2} - 4 = 0$	Kedua ruas dikurangi 4
$\frac{(x+2)^2 - 4(x-4)^2}{(x-4)^2} = 0$	Disamakan penyebutnya
$\frac{-3x^2 + 36x - 60}{(x-4)^2} = 0$	Diuraikan
$\frac{x^2 - 12x + 20}{(x-4)^2} = 0$	Kedua ruas dibagi -3
$\frac{(x-2)(x-10)}{(x-4)^2} = 0$	Difaktorkan, persamaan bernilai 0 jika pembilang bernilai 0.
$x = 2$ atau $x = 10$	

Pemeriksaan dengan aplikasi GeoGebra dengan mencari titik potong grafik $y = \left|\frac{x+2}{x-4}\right|$ dan $y = 2$ tampak seperti pada gambar berikut.



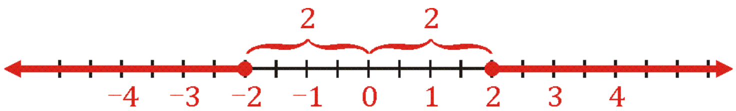
2. Pertidaksamaan Mutlak

Mencari penyelesaian pertidaksamaan mutlak, pada dasarnya adalah mencari seluruh bilangan real yang membuat pertidaksamaan tersebut bernilai benar. Pada pertidaksamaan $|x| < 2$, bilangan $-1\frac{1}{2}, -1, 0, \frac{1}{2}, 1$, atau $1\frac{1}{2}$ memenuhi pertidaksamaan tersebut, sementara itu bilangan $-3, -2, 5, 4$ atau 8 tidak memenuhi. Pada garis bilangan, maka daerah penyelesaian pertidaksamaan di atas tampak sebagai berikut.



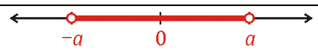
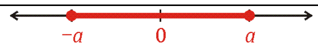
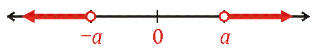
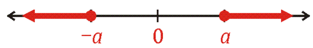
Selain dengan bentuk garis bilangan, penyelesaian pertidaksamaan dapat dinyatakan dalam bentuk notasi pertidaksamaan $-2 < x < 2$, atau notasi interval $(-2,\ 2)$.

Bagaimana dengan penyelesaian pertidaksamaan $|x| \geq 2$? Dalam konteks jarak, maka dapat dikatakan: "bilangan-bilangan manakah yang jaraknya paling sedikit 2 satuan dari titik pangkal?". Diagram yang sesuai untuk menjawabnya adalah seperti di bawah.



Dalam notasi pertidaksamaan, penyelesaian di atas dinyatakan sebagai $x \leq 2\ atau\ x \geq 2$. Sementara itu, dalam notasi interval ditulis sebagai $(-\infty, -2] \cup [3, \infty)$.

Dengan mencoba berbagai kasus yang serupa untuk $|x| \leq 2$ dan $|x| > 2$, dapat diperoleh perumuman untuk $a \geq 0$.

No.	Pertidak-samaan	Penyelesaian	Notasi Interval	Garis Bilangan
1.	$\lvert x \rvert < a$	$-a < x < a$	$(-a, a)$	
2.	$\lvert x \rvert \leq a$	$-a \leq x \leq a$	$[-a, a]$	
3.	$\lvert x \rvert > a$	$x < -a$ atau $x > a$	$(-\infty, -a) \cup (a, \infty)$	
4.	$\lvert x \rvert \geq a$	$x \leq -a$ atau $x \geq a$	$(-\infty, -a] \cup [a, \infty)$	

Contoh:

Tentukan penyelesaian $|2x + 1| < 11$

Penyelesaian:

Gunakan sifat (1) $\qquad -11 < 2x + 1 < 11$

Tambahkan -1 ke semua ruas $\qquad -12 < 2x < 10$

Bagi semua ruas dengan 2 $\qquad -6 < x < 10$

Jadi penyelesaian pertidaksamaan $|2x + 1| < 11$ adalah $-6 < x < 10$.

Dalam garis bilangan:

.

Contoh:

Tentukan penyelesaian pertidaksamaan $|2x-1|-2 \geq |-x+1|$.

Bantuan penyelesaian:

Langkah pertama adalah tentukan terlebih dahulu penyelesaian persamaan $|2x-1|-2 = |-x+1|$, baru kemudian tentukan daerah-daerah yang memenuhi dengan menguji titik-titik pada daerah yang dibatasi oleh penyelesaian persamaan tersebut.

Dengan cara seperti pada penyelesaian persamaan mutlak, diperoleh penyelesaian $x=-2$ dan $x=2$. Perhatikan ada tiga interval yang dibatasi oleh kedua penyelesaian, yaitu $x<-2, -2<x<2$, dan $x>2$.

Untuk $x<-2$, ambil $x=-4$ disubstitusikan ke ruas kiri diperoleh $|2\cdot(-4)-1|-2=7$, sedangkan di ruas kanan diperoleh $|-(-4)+1|=5$. Karena $7\geq 5$, maka interval yang memuat $x=-4$ termasuk daerah penyelesaian.

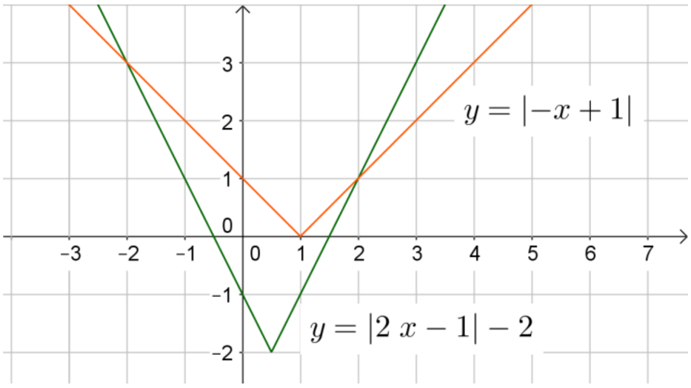
Untuk $-2<x<2$, ambil $x=0$. Dengan mensubstitusikan ke kedua ruas pertidaksamaan diperoleh hasil $-1>1$ suatu pernyataan yang salah, sehingga interval ini bukan daerah penyelesaian.

Untuk $x>2$, ambil $x=3$. Dengan mensubstitusikan ke kedua ruas, diperoleh hasil $3\geq 2$ sehingga memenuhi daerah pertidaksamaan.

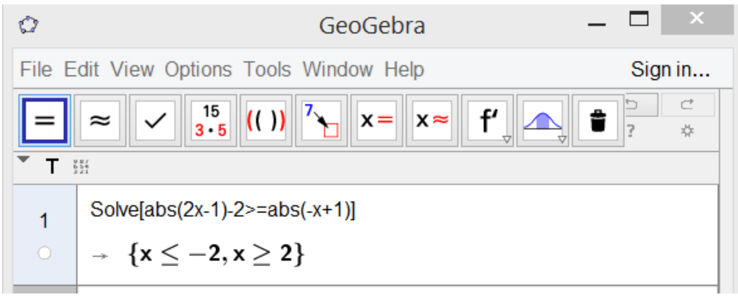
Untuk $x=-2$ dan $x=2$, karena merupakan penyelesaian persamaan, maka jika disubstitusikan akan memenuhi pertidaksamaan. Sehingga kedua titik ini juga merupakan penyelesaian.

Dari berbagai kasus di atas, maka daerah penyelesaiannya adalah
$x\leq -2$ atau $x\geq 2$.

Pengecekan dengan melukis grafik $y=|-x+1|$ dan $y=|2x-1|-2$ menggunakan aplikasi Geogebra diperoleh hasil sepeti gambar di bawah. Tampak bahwa untuk $x\leq -2$ dan $x\geq 2$ grafik $y=|2x-1|-2$ berpotongan atau di atas grafik $y=|-x+1|$ sehingga dipenuhi $|2x-1|-2\geq |-x+1$.



Pengecekan dengan fasilitas CAS GeoGebra menggunakan perintah "Solve[abs(2x-1>=abs(-x+1)]" diperoleh hasil seperti gambar di bawah.



Contoh:

Tentukan himpunan penyelesaian $|x^2 - 5x + 4| < 2$.

Bantuan Penyelesaian:

Selesaikan terlebih dahulu persamaan $|x^2 - 5x + 4| = 2$ dengan cara seperti dibahas pada materi sebelumnya diperoleh penyelesaian persamaan $x = \frac{5-\sqrt{17}}{2}$, $x = 2$, $x = 3$, dan $x = \frac{5+\sqrt{17}}{2}$. Perhatikan bahwa nilai-nilai x tersebut tidak memenuhi pertidaksamaan.

Selanjutnya diperiksa dipenuhi tidaknya nilai-nilai pada interval

$$x < \frac{5-\sqrt{17}}{2}$$

$$\frac{5-\sqrt{17}}{2} < x < 2$$

$$2 < x < 3$$

$$3 < x < \frac{5+\sqrt{17}}{2}$$

$$x > \frac{5+\sqrt{17}}{2}.$$

Interval	x uji	Hasil substitusi ke ruas kiri dan kanan	Keterangan
$x < \frac{5-\sqrt{17}}{2}$	$x = 0$	$4 < 2$, salah	Bukan penyelesaian
$\frac{5-\sqrt{17}}{2} < x < 2$	$x = 1$	$0 < 2$, benar	Penyelesaian
$2 < x < 3$	$x = \frac{3}{2}$	$\frac{9}{4} < 2$, salah	Bukan penyelesaian
$3 < x < \frac{5+\sqrt{17}}{2}$	$x = 4$	$0 < 2$, benar	Penyelesaian
$x > \frac{5+\sqrt{17}}{2}$	$x = 5$	$4 < 2$, salah	Bukan penyelesaian

Dari hasil uji untuk setiap interval diperoleh penyelesaian $\frac{5-\sqrt{17}}{2} < x < 2$ atau $3 < x < \frac{5+\sqrt{17}}{2}$.

D. Aktivitas Pembelajaran

1. Untuk suatu fungsi linear f, lukis grafik $y = f(x)$ dan $y = |f(x)|$ secara terpisah. Jelaskan pengaruh nilai mutlak terhadap grafik fungsi f.

2. Jelaskan prosedur penyelesaian pertidaksamaan mutlak dan berikan contohnya.

3. Identifikasi kesalahan-kesalahan yang mungkin terjadi dalam menyelesaikan pertidaksamaan mutlak berbentuk pecahan $\left|\frac{ax+b}{cx+d}\right| < e$.

E. Latihan

1. Tentukan penyelesaian dari $|2x + 5| = 12$.
2. Tentukan himpunan penyelesaian dari $|-5x + 3| \geq 12$.
3. Dalam rangka menjamin kelancaran lalu lintas arus mudik lebaran, Departemen Perhubungan mengeluarkan kebijakan kendaraan berat tidak diperkenankan melalui jalan umum pada 3 hari sebelum dan sesudah lebaran hari pertama. Jika x menyatakan tanggal lebaran hari pertama dan h merupakan tanggal larangan kendaraan berat melalui jalan umum, Nyatakan dalam notasi mutlak hubungan x dan h.
4. Kecepatan kendaraan pada jalan tol ditetapkan dengan rumus $|V - 80| \leq 15$ dengan V menyatakan kecepatan dalam kilometer per jam. Tentukan batas kecepatan terendah dan tertinggi yang diijinkan.

5. Produk-produk industri biasanya tidak dapat menjamin ukuran dengan tepat. Ada toleransi kesalahan ukuran yang diijinkan. Sebagai contoh, jika sebuah kaleng alumunium memiliki diameter 8 cm, maka produk yang diterima berada pada interval 7,9 sampai 8,1 cm. Jika maksimum kesalahan diameter d suatu kaleng dibatasi maksimum 0,02 mm, nyatakan dalam bentuk pertidaksamaan mutlak.

F. Rangkuman

Persamaan irrasional adalah persamaan dengan variabel-variabelnya ada yang terdapat di bawah tanda akar (bisa berupa akar pangkat dua, akar pangkat tiga, ataupun akar pangkat yang lebih tinggi).

Persamaan irrasional dapat ditentukan solusinya berdasarkan prinsip pangkat (*The Power Principle*).

Prinsip Pangkat:

Jika P dan Q merupakan bentuk-bentuk aljabar dan n merupakan bilangan bulat positif, maka setiap solusi dari $P = Q$ juga merupakan solusi dari $P^n = Q^n$.

Setiap solusi dari $P^n = Q^n$ yang bukan merupakan solusi dari $P = Q$ dinamakan sebagai *extraneous solution*. Bentuk *extraneous solution* dapat muncul sebagai akibat dari memangkatkan kedua ruas persamaan awal dengan pangkat bilangan genap.

Nilai mutlak suatu bilangan real a, didefinisikan sebagai

$$|a| = \begin{cases} a & \text{jika } a \geq 0 \\ -a & \text{jika } a < 0 \end{cases}$$

Untuk setiap bilangan real a, berlaku $\sqrt{a^2} = |a|$.

Sifat-sifat nilai mutlak:

i. $|a| \geq 0$

ii. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

iii. $|-a| = |a|$

iv. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, untuk $b \neq 0$

G. Umpan Balik

Evaluasi diri

Untuk mengukur ketercapaian peserta diklat dalam mempelajari modul ini lakukan evaluasi diri sebagai berikut secara jujur

Petunjuk:

Evaluasi diri dengan cara mengerjakan soal latihan/tugas yang terdiri dari lima soal. Pada masing-masing soal, pengerjaan yang benar mendapatkan skor maksimal 10. Jadi skor total 50. Capaian kompetensi (CK) dirumuskan sebagai

$$CK = \frac{Skor\ yang\ diperoleh}{50} \times 100\%$$

Setelah mengerjakan semua soal latihan/tugas, cocokkan jawaban Anda dengan kunci jawaban yang telah disajikan untuk mengukur capaian kompetensi (CK).

Tindak Lanjut

Seperti telah dijelaskan pada bagian sebelumnya bahwa evaluasi yang dilakukan oleh diri sendiri secara jujur adalah kunci keberhasilan mengukur capaian kompetensi (CK). Berkaitan dengan itu, pertimbangkan hal berikut.

Perolehan CK (dalam %)	Deskripsi dan tindak lanjut
$91 \leq \text{CK} \leq 100$	Sangat Baik, berarti Anda benar-benar memahami konsep persamaan irrasional, persamaan dan pertidaksamaan mutlak. Selanjutnya kembangkan pengetahuan dan tuangkan dalam pembelajaran.
$76 \leq \text{CK} < 91$	Baik, berarti Anda cukup memahami konsep persamaan irrasional, persamaan dan pertidaksamaan mutlak walaupun ada beberapa bagian yang perlu dipelajari lagi. Selanjutnya pelajari lagi beberapa bagian yang dirasakan belum begitu dipahami.
$50 \leq \text{CK} < 76$	Cukup, berarti Anda belum cukup memahami konsep persamaan irrasional, persamaan dan pertidaksamaan mutlak. Oleh karena itu Anda perlu mempelajari lagi bagian yang belum dikuasai dan menambah referensi dari sumber lain.relasi dan fungsi
$\text{CK} < 50$	Kurang, berarti Anda belum dapat memahami konsep persamaan irrasional, persamaan dan pertidaksamaan mutlak. Oleh karena itu Anda perlu mempelajari lagi dari awal dan menambah referensi dari sumber lain.

H. Kunci Jawaban

1. $x = -\frac{17}{2}$ atau $x = \frac{7}{2}$
2. $x \leq -\frac{9}{5}$ atau $x \geq 3$
3. $|h - x| < 3$
4. Batas terendah 65 km/jam, batas tertinggi 95 km/jam.
5. $|d - 8| \leq 0{,}02$

Evaluasi

Petunjuk :

Pilihlah sebuah jawaban yang paling tepat dengan memberi tanda silang X pada salah satu huruf A, B, C, D atau E.

1. Di antara pernyataan berikut, yang benar adalah … .
   A. Jika $f : A \to A$ suatu fungsi, maka $(f \circ f^{-1})(x) = x$ untuk setiap $x \in A$.
   B. Fungsi yang memiliki invers, tidak harus fungsi bijektif.
   C. $f(x-1) = x^2 + 1$, maka $f(x) = (x-1)^2 + 1$.
   D. Hanya fungsi bijektif yang memiliki fungsi invers.
2. Diketahui $f(x) = x + 3$. Untuk $x = 2$, nilai dari $f(x)^2 + 5f(x^2) - 3f(x)$ adalah ... .
   A. 45
   B. 35
   C. 27
   D. 24
3. Persamaan garis yang melalui titik (-4,7) dan tegak lurus dengan garis $4y = -3x + 6$ adalah ... .
   A. $4x - 3y + 37 = 0$.
   B. $4x + 3y + 37 = 0$.
   C. $4x - 3y - 37 = 0$.
   D. $-4x + 3y + 37 = 0$.
4. Grafik sebuah fungsi kuadrat berpuncak di titik (1, −8) dan memotong sumbu X positif berabsis 3. Persamaan grafik fungsi tersebut adalah ….
   A. $f(x) = x^2 - 9$
   B. $f(x) = x^2 + 2x - 3$

C. f(x) = $(x - 1)^2 - 8$

D. f(x) = $2x^2 - 4x - 6$

5. Diketahui $f(x-1) = \frac{x-1}{2x-1}$ dan $x \neq -$ ½ , maka $f^{-1}(2x-1) = \cdots$.

A. $\frac{6x-5}{4x-3}$, $x \neq$ ¾

B. $\frac{-x-2}{2x+1}$, $x \neq -1/2$

C. $\frac{x-1}{2x+1}$, $x \neq -1/2$

D. $\frac{-2x+1}{4x-3}$, $x \neq$ ¾

6. Fungsi f:R $\rightarrow R$ dan g: R $\rightarrow R$ ditentukan oleh f(x) =3x+7 dan g(x) = x^2+3x-5. Maka komposisi fungsi (fog)(x) adalah ...

A. $3x^2$-9x+8

B. $3x^2$+9x-8

C. $3x^2$-9x-8

D. $3x^2$+9x+8

7. Diketahui $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$, $x \neq -1$ dan $g(x) = x + 3$. Jika $f^{-1}(x)$ menyatakan invers dari f(x) , maka $(fog)^{-1}(x)$ = ...

A. $\frac{x-1}{-4x+1}$; $x \neq \frac{1}{4}$

B. $\frac{x+1}{-4x+1}$; $x \neq \frac{1}{4}$

C. $\frac{-4x+1}{x-1}$; $x \neq 1$

D. $\frac{-4x-1}{x-1}$; $x \neq 1$

8. Diketahui fungsi f(x) = 1 + ^{2}log (x-3) dengan x > 3 . Jika f^{-1} adalah invers dari f, maka $f^{-1}(x)$ =... .

A. $3 - 2^{x-1}$

B. $3 + 2^{x+1}$

C. $3 - 2^{x+1}$

D. $3 + 2^{x-1}$

9. Suku banyak $6x^3 + 7x^2 + px - 24$ habis dibagi oleh 2x – 3 . Nilai p = ...

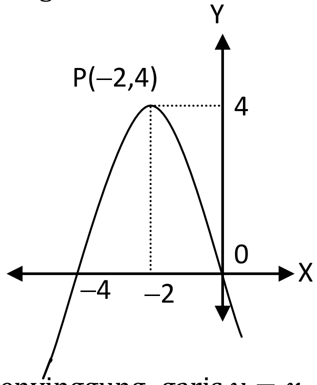
A. – 24

B. – 9

C. – 8

D. 24

10. Sebuah perusahaan bus memiliki 8000 penumpang per hari dengan tarip tetap untuk jauh dekat 2000 rupiah. Untuk mengantisipasi kenaikan biaya operasional, perusahaan tersebut mengadakan survey terhadap pelanggan. Hasilnya adalah untuk setiap kenaikan 500 rupiah, pelanggan akan berkurang 800 per hari. Berapa rupiah kenaikan tarip yang harus diterapkan untuk memaksimalkan pendapatan perusahaan?
    A. 1000
    B. 1500
    C. 2000
    D. 2500
11. Persamaan grafik fungsi kuadrat yang sesuai dengan gambar di samping adalah ....
    A. $f(x) = x^2 - 4x$
    B. $f(x) = -x^2 + 4$
    C. $f(x) = -x^2 - 4x$
    D. $f(x) = -x^2 + 4x$



12. Grafik fungsi kuadrat $f(x) = x^2 + ax - 1$, menyinggung garis $y = x - 2$ nilai a yang memenuhi adalah ....
    A. 3 atau -1
    B. -1 atau -3
    C. -1 atau -5
    D. 1 atau -5
13. Diketahui $f(x) = \frac{x+3}{x-1}, x \neq 1$ dan $g(x) = (x+2)$. Jika f^{-1} menyatakan invers dari f, maka $(fog)^{-1}(x) = \dots$.
    A. $\frac{x-5}{x+1}$; $x \neq -1$
    B. $\frac{x+5}{x-1}$; $x \neq 1$
    C. $\frac{-x+5}{x-1}$; $x \neq 1$
    D. $\frac{-x+5}{x+1}$; $x \neq -1$

14. Naiknya suhu logam setelah dipanaskan dalam waktu tertentu adalah seperti pada tabel berikut:

x = waktu	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27
y = suhu	-2	-1	0	1	2	3

A. $y = x^3$

B. $y = 3^x$

C. $y = {}^3\log x$

D. $y = {}^x\log 3$

15. Jika f(x) dibagi dengan $x - a$, maka sisanya adalah ….

A. $f\left(\frac{x}{a}\right)$

B. $f(x-a)$

C. $f(-a)$

D. $f(a)$

16. Suatu suku banyak $f(x)$ dibagi oleh $(x^2 - 4)$ bersisa $(2x - 5)$, sedangkan jika dibagi oleh $(x^2 + 2x + 1)$ bersisa $(x + 4)$. Sisa pembagian suku banyak tersebut oleh $(x^2 + 3x + 2)$ adalah … .

A. $6x + 7$

B. $8x + 11$

C. $9x + 12$

D. $12x + 15$

17. Diketahui $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$; $x \neq 3$. Invers dari f adalah $f^{-1}(x) = \ldots$

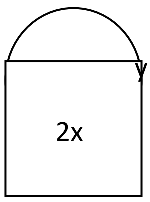
A. $\dfrac{3x+1}{x-2}$, $x \neq 2$

B. $\dfrac{3x-1}{x+1}$, $x \neq -1$

C. $\dfrac{3x+4}{x-2}$, $x \neq 2$

D. $\dfrac{3x+4}{x-1}$, $x \neq 1$

18. Diketahui fungsi $f: R \to R$ dan $g: R \to R$ dirumuskan dengan $f(x) = 2x^2 - 2$ dan $g(x) = ½\, x + 2$, maka $(fog)(x) = \dots$.
    A. $x^2 + 1$
    B. $½\, x^2 + 6$
    C. $x^2 + 2x + 6$
    D. $½\, x^2 + 4x + 6$
19. Bu Ani mempunyai kebun berbentuk persegi panjang dengan luas 280 m^2. Selisih panjang dan lebarnya 6 m. Di sekeliling kebun dibuat jalan dengan lebar 1 m. Luas jalan tersebut adalah …
    A. 35 m^2
    B. 64 m^2
    C. 72 m^2
    D. 96 m^2
20. Sebuah pintu berbentuk seperti gambar. Keliling pintu sama dengan P
    Agar luas pintu maksimum, maka x = … .



A. $\frac{P}{6+\pi}$
B. $P-\frac{\pi}{6}$
C. $\frac{P}{6}+\pi$
D. $P+\frac{\pi}{6}$

21. Ani, Siti, dan Deti bersama-sama berbelanja di sebuah toko pakaian mereka membeli kaos dan rok dari jenis merk yang sama. Ani membeli 3 kaos dan 2 rok seharga Rp240.000,00, sedangkan Siti membeli 2 kaos dan 2 rok seharga Rp200.000,00. Jika Deti membeli 1 kaos dan 2 rok maka uang yang harus dibayar Deti adalah ….
    A. Rp100.000,00
    B. Rp140.000,00
    C. Rp160.000,00
    D. Rp180.000,00
22. Diberikan penyelesaian sistem pertidaksamaan

$$x - y \geq -4, \quad 2x + 3y \leq 6, \quad 4x \leq 3, \quad y \geq 1$$

Pernyataan yang benar berkaitan dengan penyelesaian sistem persamaan tersebut adalah ....

A. Daerah penyelesaian sistem persamaan berbentuk segitiga
B. Titik (1,2) dan (-1,2) berada dalam daerah penyelesaian
C. Daerah penyelesaian berbentuk segi empat
D. Titik (-2,0) dan (-3,1) berada dalam daerah penyelesaian

23. Nilai maksimum $f(x, y) = 2x - y$ dengan kendala

$$4x + 3y \leq 12,\ 2x + y \geq 2,\ x \geq 0,\ y \geq 0$$

adalah ....

A. 0
B. 3
C. 6
D. 7

24. Nilai x dan y yang menyebabkan $f(x, y) = x + y$ minimum jika

$$5x + 2y \leq 10,\ 3x + 4y \geq 12,\ x \geq 0,\ y \geq 0$$

adalah ....

A. $(x, y) = (0,0)$
B. $(x, y) = (1,0)$
C. $(x, y) = (0,3)$
D. $(x, y) = (3,0)$

25. Suatu rombongan terdiri 60 orang pria akan menginap di sebuah hotel. Hotel tersebut menyediakan 2 tipe kamar. Tipe A dengan kapasitas 5 orang dengan harga kamar Rp 500.000,00 per hari, sedangkan tipe B dengan kapasitas 3 orang dengan harga Rp. 400.000,00 per hari. Apabila pengelola hotel tersebut menghendaki sekurang-kurangnya menyewa 15 kamar, maka biaya sewa hotel minimum agar semua rombongan dapat tertampung adalah …

A. Rp. 6.000.000/hari
B. Rp. 6.800.000/hari
C. Rp. 7.100.000/hari
D. Rp. 7.200.000/hari

26. Angga melemparkan bola ke atas dengan kecepatan awal 64 m per detik dari balkon rumah yang tingginya 6 m dari permukaan tanah. Bola mencapai tinggi maksimum H dalam waktu t dinyatakan dengan persamaan $H = -16t^2 + 64t + 6$. Lama bola berada di udara sampai menyentuh tanah (dalam detik) … .
    A. $t = 2$
    B. t = 4
    C. t = 5
    D. $4 < t < 5$
27. Pada suatu segitiga siku-siku ABC, sisi siku-siku AC 7 cm lebih panjang daripada sisi AB. Panjang sisi miring BC 1 cm lebih panjang daripada sisi AC. Pernyataan yang benar berkaitan dengan sisi-sisi segitiga itu adalah …
    A. jumlah panjang sisi AB dan sisi AC lebih dari jumlah panjang sisi AB dan sisi BC.
    B. jumlah panjang ketiga sisi adalah 30 cm.
    C. Panjang sisi AB adalah 12 cm
    D. Panjang sisi AC adalah 10 cm
28. x_1 dan x_2 adalah akar-akar persamaan kuadrat $x^2 + px + 1 = 0$. Persamaan kuadrat yang akar-akarnya $\frac{2}{x_1} + \frac{2}{x_2}$ dan $x_1 + x_2$ adalah .....
    A. $x^2 - 2\,p^2x + 3p = 0$
    B. $x^2 + 2\,px + 3p^2 = 0$
    C. $x^2 + 3\,px + 2p^2 = 0$
    D. $x^2 - 3\,px + 2p^2 = 0$

29. Persamaan $2x^2 - 4x + a = 0$ mempunyai dua akar berlainan positif jika
    A. $a > 0$
    B. $a < 0$
    C. $0 < a < 2$
    D. $a = 2$
30. Persamaan kuadrat $px^2 + (p + 3)x + 4 = 0$ mempunyai dua akar yang sama. Pernyataan yang paling tepat di bawah ini tentang p.
    A. p = 1
    B. p = 9

C. p = 1 atau p = 9

D. tidak ada nilai p nyata yang memenuhi

31. Akar-akar persamaan $x^2 + bx + c = 0$ adalah x_1 dan x_2. Nilai ${x_1}^4 + {x_2}^4$ adalah … .

    A. $b^4 - 2c^2$

    B. $b^4 - 2b^2c + c^2$

    C. $b^4 - 4b^2c^2 + 2c^2$

    D. $b^4 - 4b^2c + 2c^2$

32. Persamaan $x^2 + cx + c = 0$ tidak akan memiliki akar-akar nyata untuk

    A. $0 < c < 4$

    B. $-4 < c < 0$

    C. $c < -4$ atau $c > 0$

    D. $c < 0$ atau $c > 4$

33. Titik potong kurva $y = x^2 - (a-1)x + 6$ dan $y = x - 10$ hanya akan ada bila

    A. $-8 \leq a \leq 8$

    B. $a \leq -8$ atau $a \geq 8$

    C. $-6 \leq a \leq 10$

    D. $a \leq -6$ atau $a \geq 10$

34. Kurva $y^2 = ax$ selalu memotong kurva $2x + y = a$ di dua titik. Nilai a yang memenuhi adalah … .

    A. semua nilai a real memenuhi

    B. $a \in R, a \neq 0$

    C. $a \leq 16$

    D. $a \geq 25$

35. Roket AHA ditembakkan vertikal ke atas. Tinggi setelah t detik (dalam meter) adalah h dengan persamaan $h = 30t - 5t^2$. Roket mencapai ketinggian kurang dari 20 m pada saat … .

    A. $t < 3 - \sqrt{5}$ atau $t > 3 + \sqrt{5}$

    B. $3 - \sqrt{5} < t < 3 + \sqrt{5}$

    C. $0 < t < 3 - \sqrt{5}$ atau $3 + \sqrt{5} < t < 6$

    D. $0 \leq t < 3 - \sqrt{5}$ atau $3 + \sqrt{5} < t \leq 6$

36. Himpunan penyelesaian persamaan irrasional $\sqrt{x^2 + x - 8} + 2 = 0$ adalah… .
    A. tidak mempunyai penyelesaian
    B. $\{-4\}$
    C. $\{3\}$
    D. $\{-4, 3\}$
37. Himpunan penyelesaian persamaan irrasional $\sqrt{x^2 - 4} - \sqrt{3x + 6} = 0$ adalah… .
    A. tidak mempunyai penyelesaian
    B. $\{-2\}$
    C. $\{5\}$
    D. $\{-2, 5\}$
38. Himpunan penyelesaian persamaan irrasional $2x - \sqrt{7x - 3} - 3 = 0$ adalah… .
    A. tidak mempunyai penyelesaian
    B. $\left\{\frac{3}{4}\right\}$
    C. $\{4\}$
    D. $\left\{\frac{3}{4},\ 4\right\}$
39. Himpunan penyelesaian persamaan irrasional $3\sqrt{x} - 1 + \sqrt{x + 3} = 0$ adalah… .
    A. tidak mempunyai penyelesaian
    B. $\left\{\frac{1}{16}\right\}$
    C. $\{1\}$
    D. $\left\{\frac{1}{16}, 1\right\}$
40. Penyelesaian dari $|2x + 1| + 3 < 8$ adalah … .
    A. $-0 < x < 2$
    B. $-1 < x < 1$
    C. $-2 < x < 2$
    D. $-3 < x < 3$

Penutup

Pengembangan keprofesian berkelanjutan (PKB) merupakan keniscayaan bagi guru karena telah diamanatkan dalam undang-undang. Oleh karena itu pemerintah wajib menyediakan sarana atau wahana bagi guru untuk mengembangkan keprofesian dirinya, disamping guru juga harus secara aktif mencari dan mungkin menciptakan kegiatan dalam rangka pengembangan keprofesiannya. Harapannya, modul ini dapat digunakan untuk keduanya yaitu sebagai sarana fasilitasi PKB guru maupun sebagai bahan yang dapat dimanfaatkan guru untuk belajar terus secara mandiri.

Penyempurnaan modul ini akan terus diupayakan. Oleh karena itu saran dan masukan dari berbagai pihak sangat diharapkan untuk perbaikan di masa mendatang.

Daftar Pustaka

[1] Barnett, Raymond A; 1987; College Algebra. Third edition. New York: McGraw_Hill Book Company.

[2] Kreyzig,E ; 1988 ; Advanced Engineering Mathematics ; Singapore ; John Willey & Sons

[3] Noormandiri B.K, Endar Sucipta, 2000, Matematika SMU untuk Klas 3 Program IPA, Jakarta : Erlangga

[4] Paul, Richard S. & Haeussler, Ernest F. ;1983; Algebra and Trigonometry for College Students. Second edition. Reston; Virginia; Reston Publishing Company, Inc

.

[5] Richard G. Brown (1994). Advanced Mathematics . California: Houghton Mifflin Company

[6] Ron Larson. 2008. Algebra 2: Concept and Skill. California: Key Curriculum Press

[7] Ron Larson. 2006. Discovering Advanced Algebra: An Investigation Approach. California: Key Curriculum Press

[8] Tim PPPG Matematika, (2004). Aljabar , Yogjakarta : PPPG Matematika

[9] ----------------------, (2012) Bahan Ajar Diklat Pasca UKA Guru Matematika, Yogyakarta, PPPPTK Matematika.

[10] ----------------------, (2015) Bahan Ajar Diklat Pasca UKG Mapel Matematika SMA, Yogyakarta, PPPPTK Matematika.

Lampiran

Kunci Jawaban Evaluasi:

1. D
2. A
3. A
4. D
5. D
6. B
7. C
8. D
9. C
10. B
11. C
12. A
13. C
14. C
15. D
16. D
17. A
18. D
19. B
20. A
21. C
22. C
23. C
24. C
25. B
26. D
27. B
28. C

29. A
30. C
31. D
32. A
33. B
34. B
35. D
36. A
37. D
38. C
39. B
40. C

TUT WURI HANDAYANI